Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 06** **07.05.2012**

Aufgabe 1: Ito-Formel 4 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma X_t dW_t$$

mit Anfangswert $X_0 > 0$. Hierbei sind θ, μ, σ positive Konstanten und W ein Wiener-Prozess.

Bestimmen Sie $\mathbb{E}X_t$ für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Lösen Sie zunächst $dX_t = X_t(-\theta dt + \sigma dW_t)$ und führen Sie dann eine Variation der Konstanten durch.

Aufgabe 2: Hull-White Prozess 4 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung.

$$dX_t = \theta(t)(\mu(t) - X(t))\,dt + \sigma(t)\,dW_t$$

mit Anfangsbedingung X_0.

Hierbei seien θ, μ, σ stetige Koeffizientenfunktionen mit $\sigma(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei U ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_2$, der invariant ist unter Stoppen. Dies bedeutet, dass für jedes $M \in U$ und jede Stoppzeit τ der gestoppte Prozess M^τ wieder in U enthalten ist. Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement V von U auch invariant ist unter Stoppen. Dabei heißen zwei Martingale $M, N \in \mathcal{H}_2$ senkrecht zueinander, falls $\mathbb{E}M_\infty N_\infty = 0$ gilt.

Zeigen Sie weiter, dass im obigen Falle U, V auch stark komplementär sind. Dies bedeutet, dass für Martingale $M \in U$ und $N \in V$ die quadratische Kovariation $< M, N >= 0$ ist.

Wieso ist das das Bild des stochastischen Integralprozessoperators

$$\{H \cdot M : H \in L_2(\mu_M)\}$$

invariant unter Stoppen?

Aufgabe 4: 4 Punkte

Für einen eindimensionalen Wiener-Prozess W setzen wir

$$M_t = \int_0^t sgn(W_s)dW_s$$

für $t \geq 0$.

Was können Sie über den Prozess M aussagen?

Abgabe: Die. 15.05.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

Besprechung: Am Mittwoch, den 16.05.2012. 12.00-14.00 SR1D