**Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik**

**Sommersemester 2012**

**PD Dr. V. Paulsen** **Blatt 05** **30.04.2012**

**Aufgabe 1:** Ito-Formel 4 Punkte

Zeigen Sie die folgende in der Vorlesung angegebene Version der Ito-Formel. Seien $X$ ein stetiges Semimartingal und $B$ ein adaptierter Prozess mit stetigen Pfaden von beschränkter Variation. Dann stimmt für jede $C^{1,2}$ Funktion $f$ der Prozess $(f(B_t, X_t))_{t\geq 0}$ bis auf Nichtunterscheidbarkeit mit dem Integralprozess

$$f(B_0, X_0) + \int_0^{\cdot} \partial_b f(B_s, X_s) dB_s + \int_0^{\cdot} \partial_x f(B_s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^{\cdot} \partial_x^2 f(B_s, X_s) d\langle X \rangle_s$$

überein.

**Aufgabe 2:** 4 Punkte

Sei $L$ ein lokales Martingal. Zeigen Sie.

1. Ist für jedes $T > 0$ die Familie

$$\{L_\tau : \tau \text{ Stoppzeit mit } \tau \leq T\}$$

gleichgradig integrierbar, so ist $L$ ein Martingal.

2. Ist die Familie

$$\{L_\tau : \tau \text{ beschränkte Stoppzeit }\}$$

gleichgradig integrierbar, so ist $L$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.

**Aufgabe 3:** 4 Punkte

Sei $M$ ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden, dass aus dem Ursprung startet. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{E}(M)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist, falls $\mathbb{E} \exp(\frac{1}{2}\langle M \rangle_\infty) < \infty$ gilt.

**Aufgabe 4:** 4 Punkte

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $C^2$ Funktion. Wieso kann diese zusammen mit ihren ersten beiden Ableitungen durch eine Folge von Polynomfunktionen gleichmäßig approximiert werden, i.e. es gibt eine Folge von Polynomen $(p_n)$ derart, dass

$$||f - p_n||_\infty + ||f' - p_n'||_\infty + ||f'' - p_n''||_\infty \to 0$$

für $n \to \infty$?

**Abgabe:** Die. 08.05.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

**Besprechung:** Am Mittwoch, den 09.05.2012. 12.00-14.00 SR1D