Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 04** **23.04.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion μ_n definiert durch $\mu_n(t) = \mathbb{E}W_t^{2n}$ für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Benutzen Sie die Ito-Formel um eine Rekursionsgleichung für die μ_n, $n \in \mathbb{N}$ herzuleiten. Durch Ausrechnen der ersten Glieder kann dann die Formel erkannt werden, die man dann durch Induktion beweisen kann.

Aufgabe 2: 4 Punkte

1. Zeigen Sie, dass in einem Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilitätsfunktion σ und Trendfunktion μ der Aktienpreisprozess die stochastische Differentialgleichung
$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$
erfüllt.
2. Benutzen Sie die obige stochastische Differentialgleichung, um eine gewöhniche Differentialgleichung für $f(t) = \mathbb{E}S(t)$ herzuleiten.
3. Lösen sie diese, um f explizit zu bestimmen.
4. Führen Sie die gleiche Prozedur durch zur Bestimmung von $\mathbb{E}S(t)^2$.
5. Berechnen Sie $\mathrm{Var}S(t)$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess und $\theta \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie die Ito-Formel, um Integralprozessdarstellungen der folgenden Prozesse zu erhalten:

1. $(\cos(\theta W_t)_{t\geq 0}), (\sin(\theta W_t)_{t\geq 0})$,
2. $\exp(i\theta W_t) = \cos(\theta W_t) + i\sin(\theta W_t), t \geq 0$,
3. $(tW_t)_{t\geq 0}$,
4. $(tW_t^2)_{t\geq 0}$,
5. $(S_t^\alpha)_{t\geq 0}$, wobei $S(t) = \exp(\mu t)\exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$.
6. $(S_t^\alpha)_{t\geq 0}$, wobei $S(t) = \exp(\int_0^t \mu(s)ds)\exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds)$ mit Funktionen μ, σ.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit variabler deterministischer Volatilität σ und Zinsrate r über einen Handelszeitraum $[0,T]$. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ hat der Aktienpreisprozess eine Darstellung der Form

$$S_t = xe^{\int_0^t r(s)ds} \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds), \qquad 0 \le t \le T$$

mit einem Wiener-Prozess W bezüglich $\mathbb{P}^*$. Der Anfangspreis werde hier mit $x > 0$ bezeichnet. Die Entwicklung des Bankkontos ist gegeben durch

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds), \qquad 0 \le t \le T.$$

Zeigen Sie:

1. Für $0 \le t \le T$ und $\alpha > 0$ ist
$$\mathbb{E}^*(\frac{S_T^\alpha}{\beta(T)}|\mathfrak{F}_t) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)r(s)ds + \int_t^T \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)\sigma^2(s)ds} \exp(\int_0^t \alpha\sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\alpha\sigma(s))^2 ds).$$

2. Für $\alpha > 0$ gilt
$$\mathbb{E}^*(\frac{S_T^\alpha}{\beta(T)}) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)(r(s)+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2(s))ds}.$$

3. Der arbitragefreie Anfangspreis $p(C)$ des Claims, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung
$$C = (S_T^\alpha - K)^+$$
liefert, ist gegeben durch
$$\begin{aligned} p(C) &= h(T)\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \int_0^T \alpha(r(s) + \sigma^2(s)(\alpha - \frac{1}{2}))ds}{\alpha\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}\right) \\ &\quad -Ke^{-\int_0^T r(s)ds}\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \alpha\int_0^T (r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds)}{\alpha\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}}\right)\end{aligned}$$
mit $h(T) = x^\alpha e^{\int_0^T (\alpha-1)(r(s)+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2(s))ds}$.

   Hinweis: $p(C) = \mathbb{E}^*\beta(T)^{-1}(S_T^\alpha - K)^+$.

Abgabe: Mit. 02.05.2012 bis spätestens 11.00 im Fach

Besprechung: Am Mittwoch, den 02.05.2012. 12.00-14.00 SR1D