Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 03** **16.04.2012**

Aufgabe 1: Put-Call Symmetrie von Carr 4 Punkte

Gegeben sei ein arbitragefreies Black-Scholes Modell mit Zinsratenfunktion $r : [0,T] \to \mathbb{R}$ und Volatilitätsfunktion $\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}_{>0}$. Dies bedeutet, dass der Aktienpreisprozess durch

$$S(t) = S_0 \exp(\int_0^t r(s)ds) \exp(\int_0^t \sigma(s)dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds)$$

und der Bankkontoprozess durch

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

gegeben sind bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$.

Bezeichne mit $c(K, S_0, T)$ den Anfangspreis einer Calloption mit Basis K, Laufzeit T und Anfangsaktienkurs S_0, i.e.

$$c(K, S_0, T) = \mathbb{E}^*(S(T) - K)^+/\beta(T))$$

und mit $p(K, S_0, T)$ entsprechend den einer Putoption mit Basis K, Laufzeit T und Anfangsaktienkurs S_0.

Zeigen Sie die folgende auf Peter Carr zurückgehende Symmetrie

$$c(K, S_0, T) = p(S_0\beta(T), K/\beta(T), T).$$

Hinweis: Sie können elementar die Beziehung aus der Put- und Callformel verifizieren. Sie können aber auch durch Betrachtung der Forwardpreise $F(t) = S(t)\frac{\beta(T)}{\beta(t)}$ obige Formel mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Symmetrie herleiten.

Aufgabe 2: Bayes-Formel 4 Punkte

Es seien $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(\mathfrak{F}_t)_{0\le t\le T}$ eine Filtration. Weiter sei $\bar{\mathbb{P}}$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes W-Maß auf $\mathfrak{F}_T$. Bezeichne für $t \in [0,T]$ mit L_t eine Radon-Nikodym-Dichte von $\bar{\mathbb{P}}_{|\mathfrak{F}_t}$ bzgl. $\mathbb{P}_{|\mathfrak{F}_t}$. Dann gilt für jede $\bar{\mathbb{P}}$-integrierbare, $\mathfrak{F}_T$ - messbare Zufallsgröße X

$$\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}(X|\mathfrak{F}_t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_T X|\mathfrak{F}_t)}{L_t}, \quad \text{für alle } 0 \le t \le T.$$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Schreiben Sie eine Funktion, die in einem Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten den Preis einer Calloption berechnet. Parameter dieser Funktion sind der Anfangspreis

x des Underlying, die Volatilität σ, die stetige Zinsrate r, die Laufzeit T sowie der strike K des Calls. Gehen sie von den Werten $x = 100, \sigma = 0.3, r = 0.7\%, T = 1/2, K = 100$ aus und plotten Sie die obige Callpreisfunktion jeweils als Funktion einer Variablen. Variieren Sie dabei nacheinander σ zwischen 0.1 und 1, x zwischen 10 und 200, r zwischen 0.2% und 10% , T zwischen 1/100 und 4 sowie K zwischen 50 und 200.

Führen Sie obige Aufgabe ebenfalls mit der Put- anstelle der Calloption durch.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess und $M_t = W_t^2 - t$ für alle $t \geq 0$. Bestimmen Sie den quadratischen Variationsprozess von M.

Abgabe: Die. 24.04.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

Besprechung: Am Mittwoch, den 25.04.2012. 12.00-14.00 SR1D