

# Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 02

09.04.2012

**Aufgabe 1:** Black-Scholes Modell mit 2 Aktien

4 Punkte

Ein Black-Scholes Modell mit zwei Aktien und konstanten Koeffizienten ist gegeben durch ein Geldmarktkonto mit Preisentwicklung

$$\beta(t) = e^{rt}, \quad t \geq 0$$

sowie zwei Aktien, deren Preisentwicklungen durch Anfangspreise  $x_1, x_2 > 0$  und

$$S_i(t) = x_i e^{\mu_i t} \exp(\sigma_i W_i(t) - \frac{1}{2} \sigma_i^2 t), \quad t \geq 0$$

für  $i = 1, 2$  definiert sind. Die Koeffizienten des Modells sind die Zinsrate  $r \in \mathbb{R}$ , die Trendparameter  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  und Volatilitäten  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$  der Aktien.

Weiter nehmen wir an, dass die Wiener-Prozesse stochastisch unabhängig sind.

Bestimmen Sie in diesem Modell bei einem Handelszeitraum  $[0, T]$  ein äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{P}^*$ . Dies ist ein zu  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathfrak{F}_T)$  äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß derart, dass  $e^{-rt} S_i(t)$  ein Martingal bildet für jedes  $i = 1, 2$ .

**Aufgabe 2:** Bewertung einer Exchange Option

4 Punkte

Bestimmen Sie in dem Modell von Aufgabe 1 den Anfangspreis der Exchangeoption, die das Recht verbrieft, Aktie 1 in Aktie 2 zum Zeitpunkt  $T$  zu tauschen. Dies entspricht einem Claim mit Auszahlung

$$C = (S_2(T) - S_1(T))^+.$$

**Aufgabe 3:** Parität bei Exchange Optionen

4 Punkte

Eine weitere Exchange Option verbrieft das Recht, Aktie 2 in Aktie 1 zu tauschen. Dies entspricht einem Claim mit Auszahlung

$$C = (S_1(T) - S_2(T))^+.$$

1. Bestimmen Sie eine Parität, die zwischen diesen Exchange Optionspreisen gilt.
2. Verifizieren Sie diese Parität im Modell von Aufgabe 1.

**Aufgabe 4:** Aktienmartingalmaß

4 Punkte

Bestimmen Sie in dem Modell von Aufgabe 1 das Aktienmartingalmaß jeder Aktie.

**Abgabe:** Die. 17.04.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

**Besprechung:** Am Mittwoch, den 18.04.2012. 12.00-14.00 SR1D