Übungen zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik

Sommersemester 2012

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 01** **02.04.2012**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ und $\sigma : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\int_0^t \sigma^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie:

1. $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ ist stochastisch unabhängig von $\mathfrak{F}_t$ für alle $t, h \geq 0$.
2. Durch $L_t = \exp(\int_0^t \sigma(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)ds)$ für alle $t \geq 0$ wird ein Martingal definiert.

Hinweis: Sie können hierbei ohne Beweis benutzen, dass $\int_t^{t+h} \sigma(s)dW_s$ eine $N(0, \int_t^{t+h} \sigma^2(s)ds)$ - verteilte Zufallsvariable ist. Wie könnte man dies denn beweisen?

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Sei weiter $\theta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\int_0^t \theta^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$.

Durch

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mathbb{P}}|_{\mathfrak{F}_t} = L_\theta(t) = \exp(\int_0^t \theta(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds)$$

für alle $t \geq 0$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\theta$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}_\infty)$ definiert, dass auf jedem $\mathfrak{F}_t$ äquivalent ist zu $\mathbb{P}$.

Zeigen Sie, dass durch $\bar{W}(t) = W(t) - \int_0^t \theta(s)ds$ ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_\theta$ definiert wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\bar{W}$ die definierenden Eigenschaften eines Wiener - Prozesses bezüglich $\mathbb{P}_\theta$ erfüllt. Für den Nachweis der Normalverteilung ist es sinnvoll die momenterzeugende Funktion zu berechnen.

Aufgabe 3: Black-Scholes Differentialgleichung 4 Punkte

In einem arbitragefreien Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilitätsfunktion σ und deterministischer Zinsratenfunktion r wird eine Call-Option mit Fälligkeit T zur Basis K bewertet. Zeigen Sie, dass die Preisfunktion

$$v(t,y) = \mathbb{E}^*(\exp(-\int_t^T r(s)ds)(S(T)-K)^+|S(t)=y)$$

für alle $0 \leq t < T, y > 0$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t v(t,y) + r(t) y \partial_y v(t,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(t) y^2 \partial_y^2 v(t,y) = r(t) v(t,y)$$

auf $[0,T) \times (0,\infty)$ erfüllt mit Randbedingung

$$\lim_{t\to T} v(t,y) = (y-K)^+$$

für alle $y > 0$.

Hinweis: Die Preisfunktion ist explizit in der Vorlesung ausgerechnet worden. Durch Ausrechnen der partiellen Ableitungen können Sie verifizieren, dass die obige partielle Differentialgleichung erfüllt ist.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Berechnen Sie in einem arbitragefreien Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilitätsfunktion σ und deterministischer Zinsratenfunktion r die Preisfunktion der Put-Option mit Fälligkeit T und Basis K.

Abgabe: Die. 10.04.2012 bis spätestens 11.00 im Fach 55

Besprechung: Am Mittwoch, den 11.04.2012. 12.00-14.00 SR1D