Kurzbiographie von H. Lebesgue
aus *Maß- und Integrationstheorie* von Jürgen Elstrodt, Seite 157

Henri Léon Lebesgue wurde am 28.Juni 1875 in Beauvais, etwa 70 km nördlich von Paris, geboren. Sein Vater, ein Druckereiarbeiter mit ausgeprägten geistigen Interessen, starb früh an Tuberkulose und hinterließ seine junge Frau, seine Tochter Claire, den tuberkulösen Henri und einen weiteren Sohn, der bald an tuberkulöser Meningitis starb. Seine Mutter musste Arbeiten außer Haus annehmen, um den Lebensunterhalt der Familie zu sichern, denn es gab keine Versorgung aus öffentlichen Kassen. Wie Lebesgue schrieb, musste seine Mutter auf Gedeih und Verderb ihrer Arbeit gewachsen sein, die ihr nicht immer genug einbrachte um sich satt zu essen. Dennoch stimmte sie ohne Zögern zu, als ihre Kinder berufliche Wege einschlugen, die ihr selbst lange Zeit nur Belastungen brachten.

Auf der Primarschule und der Realschule in Beauvais erkannten die Lehrer die mathematische Begabung von Lebesgue, und ein Stipendium seiner Heimatstadt ermöglichte ihm den Besuch des Lyzeums in Paris. Während seines Studiums an der École Normale Supérieure in Paris (ab 1894) lernte Lebesgue die intellektuelle Elite seiner Zeit kennen, blieb aber in seinem angestammten sozialen Milieu und heiratete die Schwester eines Studienfreundes. Zu seinen Studienfreunden zählten der Mathematiker P. Montel (1876-1975), bekannt durch den *Satz von Montel* über normale Familien holomorpher Funktionen, und der Physiker P. Langevin (1872-1946). Nach dem Staatsexamen (1897) arbeitete Lebesgue zwei Jahre lang in der Bibliothek der École Normale Supérieure; gleichzeitig schrieb er seine ersten Arbeiten. Von 1899-1902 unterrichtete er am Lyzeum in Nancy. Während dieser Zeit schrieb er seine *Thèse: Intégrale, longuer, aire*, die ein Markstein in der Geschichte der Mathematik wurde. Nach der Promotion (1902) wirkte Lebesgue von 1902-1906 als Dozent an der Universität Rennes, danach als Lehrbeauftragter an der Universität Poitiers (1906-1910), anschließend als Dozent für mathematische Analysis (1910-1919) und Professor (1919-1921) an der Sorbonne, ab 1921 als Professor am Collège de France; 1922 wurde er Nachfolger von C. Jordan in der Académie Française. Während des Ersten Weltkriegs beschäftigte Lebesgue sich im Dienst für Erfindungen mit ballistischen Problemen und beseitigte gefährliche Fehler. Im Verlauf seiner siebzehnjährigen Tätigkeit als Lehrbeauftragter sowohl an der École Normale Supérieure (rue d'Ulm) als auch an der École Normale Supérieure de jeunes filles in Sèvres (1920-1937) bildete er viele Generationen französischer Gymnasiallehrer und -lehrerinnen aus. Nach längerer Krankheit starb Lebesgue am 26. Juli 1941 in Paris, hoch geehrt durch Preise und Auszeichnungen von zahlreichen wissenschaftlichen Institutionen.

Die wichtigsten mathematischen Arbeiten von Lebesgue sind der reellen Analysis gewidmet. Seine erste Arbeit (1898) enthält einen einfachen Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes. Von größter Bedeutung sind seine Arbeiten zur *Integrationstheorie.* Dabei kamen Lebesgue die Vorarbeiten von É. Borel über Maßtheorie und R. Baire über reelle Funktionen zustatten. Baire hatte mit den sogenannten *Baireschen Klassen* eine Art Hierarchie unter den Funktionen aufgestellt und damit ordnende Gesichtspunkte in die vermeintlich völlig ungeordnete Welt der unstetigen Funktionen gebracht. Ausgehend vom *Maßproblem* entwickelt Lebesgue im ersten Kapitel seiner *Thèse* die

Lebesguesche Maßtheorie auf $\mathbb{R}$ und im $\mathbb{R}^2$. Damit vervollständigt und präzisiert er die etwas raschen Andeutungen ("indications un peu rapides") von Borel. Im zweiten Kapitel folgt die *Integraldefinition* zunächst auf geometrischem Wege über das Maß der Ordinatenmenge im $\mathbb{R}^2$, anschließend auf analytischem Wege über die Lebesgueschen Summen, und es werden einige wichtige Eigenschaften des Integrals entwickelt: Jede Riemann integrierbare Funktion ist Lebesgue-integrierbar mit gleichem Wert des Integrals. Hat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Ableitung, so gilt $\int_a^b f'(x)d = f(b) - f(a)$. (Dass für integrierbares $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ $(x \in [a, b])$ fast überall differenzierbar ist mit $F' = f$ f.ü., wird von Lebesgue 1903 bewiesen.) Ein Konvergenzsatz gestattet, die Funktionen der Baireschen Klassen als integrierbar zu erkennen. Auch mehrfache Integrale führt Lebesgue ein und beweist, dass mehrfache Integrationen auf einfache zurückgeführt werden können ("Satz von Fubini"). In den Kapiteln III-V der *Thèsen* folgen geometrische Anwendungen auf Kurven und Flächen, und Kapitel VI ist dem *Problem von Plateau* (1801-1883) der Bestimmung einer Fläche minimalen Flächeninhalts mit gegebener Randkurve im $\mathbb{R}^3$ gewidmet. "It cannot be doubted that this dissertation is one of the finest which any mathematician has ever written" schreibt J. C. Burkill in seinem Nachruf.

Im akademischen Jahr 1902-1903 hielt Lebesgue am Collège de France eine Vorlesung über Integrationstheorie, die er unter dem Titel *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris 1904) veröffentlichte. Leitmotiv dieses Buches ist die Frage, unter welchen Bedingungen das unbestimmte Integral eine Stammfunktion des Integranden ist. Die historische Entwicklung dieses Problems wird ausführlich dargelegt: Ein Kapitel behandelt die Theorie der Integration von Cauchy und Dirichlet, es folgen zwei Kapitel über das Riemann-Integral, eines über Funktionen von beschränkter Variation und zwei über Stammfunktionen. Erst im letzten Kapitel geht Lebesgue kurz auf seinen Integralbegriff ein. Dabei geht er axiomatisch vor und formuliert analog zum Maßproblem das *Integrationsproblem.* Dieses führt er auf das Maßproblem zurück und gelangt mit Hilfe des Lebesgue-Maßes und des Begriffs der messbaren Funktion zur analytischen und zur geometrischen Definition des Integrals. Die Untersuchung von Stammfunktionen und die Rektifikation von Kurven dienen als Anwendungsbeispiele. Mit diesem Buch wurde die Lebesguesche Integrationstheorie allgemein zugänglich. Eine zweite, wesentlich erweiterte Auflage dieses Werkes erschien 1928.

Um zu zeigen, dass das Lebesgue-Integral für die Lösung wichtiger Probleme ein unersetzliches Hilfsmittel ist, wandte Lebesgue sich der Theorie der Fourier-Reihen zu und erzielte folgende Resultate: Die Fourier-Koeffizienten jeder 2π-periodischen über $[0, 2\pi]$ integrierbaren Funktion konvergieren gegen Null (*Lemma von Riemann-Lebesgue*). Jede Fourier-Reihe darf gliedweise integriert werden. Das *Lebesguesche Konvergenzkriterium* umfasst alle klassischen Konvergenzkriterien für Fourier-Reihen. Die Folge der arithmetischen Mittel der Teilsummen der Fourier-Reihe einer 2π-periodischen über $[0, 2\pi]$ integrierbaren Funktion f konvergiert f.ü. gegen f. - Im akademischen Jahr 1904-1905 hielt Lebesgue am Collège de France eine Vorlesung über Fourier-Reihen, die als Buch veröffentlicht wurde. Bis zu seiner Aufnahme in die Académie Française (1922) schrieb Lebesgue etwa 90 Bücher und Arbeiten hauptsächlich über Maß- und Integrationstheorie, Fourier-Reihen, Mengenlehre, Variationsrechnung, Theorie des Oberflächenmaßes und Dimensionstheorie. Besondere Erwähnung verdient hier seine große Arbeit *Sur l'intégration des fonctions discontinues*. Einen ausführlichen Überblick über diese Arbeiten gibt Lebesgue selbst in der *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*. In den Jahren 1918-1920 entbrannte in den *Ann. Sci. É. Norm. Supér.* eine mit gällischer Schärfe ausgetragene Polemik zwischen Borel und Lebesgue, die sich jedoch gegenseitig durchaus schätzten. Dabei ging es auch um Prioritätsfragen. Was diese anbetrifft, ist heute unstrittig, dass die Maßtheorie auf Borel zurückgeht, während die Integrationstheorie von Lebesgue stammt. Ein lebendiges Bild der wissenschaftlichen Auffassungen, der lange Zeit freundschaftlichen Beziehungen und der unterschiedlichen Charaktere der Partner vermitteln die Briefe von Lebesgue an Borel. In seinen letzten 20 Lebensjahren publizierte Lebesgue zahlreiche Arbeiten pädagogischen, historischen und elementargeometrischen Inhalts.

Die ersten Arbeiten von Lebesgue zur Integrationstheorie wurde von den zeitgenössischen Mathematikern überwiegend kühl bis feindlich aufgenommen. Charles Hermite (1822-1901) wollte anfangs die Vorankündigung der Resultate der *Thèse* nicht zur Publikation in den *C. R. Acad. Sci. Paris* annehmen. Er hatte seine Meinung schon früher in einer viel zitierten Zeile in einem Brief an Steiltjes zum Ausdruck gebracht: "Ich wende mich ab mit Entsetzen und Abscheu von dieser beklagenswerten Plage von Funktionen, die überhaupt keine Ableitungen haben." Auch gegen die Annahme der *Thèse* wurde Kritik geäußert. So reagierte G. Darboux ausgesprochen feindlich, obgleich er selbst 1875 eine gewichtige Arbeit über unstetige Funktionen geschrieben hatte. V. J. Boussinesq (1842-1929), Professor für Differential- und Integralrechnung an der Sorbonne, soll gesagt haben: "Aber eine Funktion hat alles Interesse, eine Ableitung zu haben!" É. Picard (1856-1941), dessen Name mit den Picardschen Sätzen in der Funktionentheorie und dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf in der Theorie der Differentialgleichungen verbunden ist, verteidigte die Untersuchengen von Lebesgue. Er konnte U. Dini (Pisa) zur Publikation der Lebesgueschen *Thèse* in den *Annali di Mat.* bewegen. Dini war auch nicht recht von der Bedeutung der Arbeit überzeugt, aber um Picard entgegenzukommen, nahm er die Arbeit zur Veröffentlichung an. Erst etwa ab 1910 nahm die Anzahl der Mathematiker, die in ihren Arbeiten das Lebesgue-Integral benutzten, rasch zu, wozu namentlich die Pionierarbeiten von P. Fatou, F. Riesz, E. Fischer (1875-1954) beitrugen. Insbesondere die Arbeiten von Riesz über L^p-Räume sicherten dem Lebesgue-Integral einen dauerhaften Platz in der Funktionalanalysis. - In einem Nachruf schreibt Montel über Lebesgue: "Er war ein großer Gelehrter, ein bewundernswürdiger Lehrer, ein Mensch von unvergleichlichem moralischem Adel."