Historische Anmerkungen

aus *Maß- und Integrationstheorie* von Jürgen Elstrodt, Seite 33

Die moderne Theorie des Maßes geht zurück auf die Entdeckung der σ-Additivität der elementargeometrischen Länge durch É. Borel im Jahre 1894. H. Lebesgue zeigt anschließend in seiner *Thése*, dass sich die elementargeometrische Länge fortsetzen lässt zu einem Maß auf einer gewissen σ-Algebra von Teilmengen von $\mathbb{R}$, die Lebesgue messbare Mengen nennt. Sein besonderer Verdienst ist die Begründung eines Integralbegriffs, der dem älteren Riemannschen Integralbegriff an Flexibilität deutlich überlegen ist. Die Idee zur Einführung allgemeinerer Inhalte (=Volumen) auf $\mathbb{R}$ und die Definition eines entsprechenden Integralbegriffs für stetige Funktionen nach dem Vorbild des Riemannschen Integrals stammen von T. J. Stieltjes (1894). Lebesgue deckt 1910 den Zusammenhang zwischen seinem Integral und dem Stieltjesschen Integral auf, indem er das Stieltjessche Integral in ein Lebesguesches transformiert. Seine Untersuchungen werden weitergeführt von W. H. Young (1914), der zeigt, dass die Lebesguesche Integrationstheorie mit im wesentlichen gleichen Begründungen in der nach Stieltjes verallgemeinerten Version richtig bleibt. Implizit ist in der Arbeit von Young auch die Fortsetzung Stieltjesscher Inhalte zu Maßen enthalten. Ganz klar ausgesprochen findet man den Gedanken der Fortsetzung Stieltjesscher Inhalte zu Maßen in einer Arbeit von J. Radon aus dem Jahr 1913. Dabei behandelt Radon sogleich den Fall Stieltjesscher Inhalte auf dem $\mathbb{R}^p$. Die einzelnen Etappen dieser historischen Entwicklung werden von Lebesgue selbst beschrieben in einer längeren Fußnote der zweiten Auflage seiner *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Dort heißt es u.a. auf S. 263: "Diese Arbeit von Herrn Young ist die erste unter denjenigen, die zum endgültigen Verständnis dessen, was des Stieltjessche Integral ist, geführt haben. Man ist [aber erst] Dank der Definition von Herrn Radon...und der Arbeiten von Herrn de la Vallée Poussin über die Ausdehung des Maßbegriffes...wirklich zum Kern dieses Begriffes vorgedrungen." Die genannte Arbeit von Radon dient M. Fréchet im Jahre 1914 als Anregung zur Betrachtung von Prämaßen auf σ-Ringen über beliebigen abstrakten Mengen und zum Aufbau einer entsprechenden Integrationstheorie. Fréchets Vorlesung enthält bereits viele für die Maßtheorie grundlegende Resultate, die heute selbstverständlicher Bestandteil der Lehrbuchliteratur sind. Die Betrachtung von Inhalten und Maßen auf beliebigen abstrakten Mengen ist vor allem deshalb wichtig, weil sie eine strenge axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie ermöglicht, wie A. N. Kolmogorov zeigt.