Übungen

Abgabetermin: Freitag 10.06. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Produkträume, Gesetze der großen Zahlen und schwache Konvergenz

Aufgabe 32 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), Geo(p))$, wobei $Geo(p)$ die geometrische Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$ sei, und

$$A := \{\omega \in \Omega \mid \omega_n \geq n \text{ unendlich oft}\}.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A)$.
Hinweis: Die geometrische Verteilung besitzt die Zähldichte $f(n) = p(1-p)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 33 (5 Punkte)
Es seien $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Überprüfen Sie, ob Verteilungskonvergenz (schwache Konvergenz) vorliegt, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Limes:

a) $\mu_n = Poi(\alpha_n)$, $\alpha_n \in (0,\infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_n \to \alpha \in (0,\infty)$

b) $\mu_n = f_n\lambda$ mit $f_n(x) = (1-\cos(2\pi nx))\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$; λ sei das Lebesgue-Maß

c) $\mu_n = R[-n, n]$

d) $\mu_n = \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$

e) $\mu_n = \mathcal{N}(0, n)$

Aufgabe 34 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger i.i.d. Zufallsvariablen mit $EX_1^2 < \infty$ und weiter $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

a) Bestimmen Sie $E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2)$.

b) Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = Var(X_1)$ P-f.s.

Aufgabe 35 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger, positiver und integrierbarer i.i.d Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\mathbb{E}(X_1) < 1 \ \Rightarrow \prod_{i=1}^n X_i \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für $n \to \infty$.

b) $\mathbb{E}(X_1) > 1 \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n X_i > 0$ $\mathbb{P}$-f.s.