Übungen

Abgabetermin: Freitag 03.06. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: unendliche Produkträume und 0-1-Gesetze

Aufgabe 29 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\prod_{t \in T} \mathbb{R}, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{B})$ mit $T = [0, \infty)$. Prüfen Sie, ob folgende Mengen Elemente von $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{B}$ sind:

a) $A = \{\omega \in \Omega \mid (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}\}$

b) $B = \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto \omega_t \text{ ist monoton}\}$

c) $C = \{\omega \in \Omega \mid \omega_n = \omega_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$

d) $D = \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto \omega_t \text{ ist beschränkt}\}$

Hinweis: Aufgabe 27

Aufgabe 30 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, Q)$, wobei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sei. Weiter sei $S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit $S((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ der Shift-Operator und schließlich $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} : S^{-1}(A) = A\}$ das System der shift-invarianten Mengen. Zeigen Sie, dass $P(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{I}$ gilt.

Aufgabe 31 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von iid Zufallsgrößen mit Partialsummenfolge $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des 0-1-Gesetzes von Hewitt und Savage

$$\mathbb{P}(S_n \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) \in \{0, 1\}.$$

Anwesenheitsaufgabe für die Übungen am 7./8.6.:
$(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i \in I}$ sei eine Familie messbarer Räume und $f : \prod_{i \in I} \Omega_i \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$-$\mathcal{B}$-messbar ist, wenn es eine abzählbare Teilmenge $K \subset I$ und eine $\bigotimes_{i \in K} \mathcal{A}_i$-$\mathcal{B}$-messbare Abbildung $g : \prod_{i \in K} \Omega_i \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = g \circ p_K$ (d. h. f hängt nur von abzählbar vielen Komponenten ab).