# Übungen

Abgabetermin: Freitag 27.05. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Faltungen, unendliche Produkträume und 0-1-Gesetze

**Aufgabe 25** (2+4 Punkte)
Es seien $\mu$ und $\nu$ zwei W-Maße mit $\lambda^d$-Dichten $f$ bzw. $g$.

a) Zeigen Sie, dass $\mu * \nu$ die $\lambda^d$-Dichte $(f * g)(x) := \int f(x-y)g(y)\lambda^d(dy)$ besitzt.
**Hinweis:** $\lambda^d$ ist translationsinvariant.

b) Nun sei $\mu$ die Gleichverteilung auf $[0,1]$ und $\nu = Poi(\lambda), \lambda > 0$. Bestimmen Sie die $\lambda$-Dichte von $\mu * \mu$ sowie die Verteilungsfunktion von $\mu * \nu$.

**Aufgabe 26** (2+2 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P) = \left(\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_{\geq 0}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{\geq 0}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} Exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ und $X : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$,

$$X(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_n \leq n\}, \quad \inf \emptyset := \infty.$$

a) Zeigen Sie: $X$ ist $\mathcal{A}$-$\mathfrak{P}(\overline{\mathbb{N}})$-messbar.

b) Zeigen Sie: $P^X$ ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\overline{\mathbb{N}}$ mit Zähldichte

$$q(n) = e^{1-n}(1-e^{-1})\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n).$$

**Aufgabe 27** (5 Punkte)
Es sei $I$ eine beliebige Indexmenge und $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie messbarer Räume. Im Rahmen des Satzes von Andersen-Jessen (Theorem 11.3) wird eine $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$ auf dem kartesischen Produkt $\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i$ definiert als

$$\mathcal{A} = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i := \sigma(p_i, i \in I),$$

also die kleinste $\sigma$-Algebra, die alle Projektionen messbar macht. Im Beweis des Satzes wird diese $\sigma$-Algebra dargestellt als die von den endlich-dimensionalen Zylindermengen erzeugte. Zeigen Sie nun, dass $\mathcal{A}$ tatsächlich gerade die Menge der abzählbar-dimensionalen Zylindermengen ist, also

$$\mathcal{A} = \{A \in \Omega \mid \text{es ex. ein } K \subset I \text{ abzählbar und ein } A_K \in \mathcal{A}_K \text{ mit } A = p_K^{-1}(A_K)\}.$$

**Aufgabe 28** (3+2 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) = \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

b) Für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap A_n) < \infty$ gilt $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leq 1 - \mathbb{P}(A)$.