Übungen

Abgabetermin: Freitag 20.05. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Konvergenzarten, gemeinsame Dichten und Unabhängigkeit

Aufgabe 20 (6 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgende Folge von Zufallsgrößen auf Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, fast sichere Konvergenz und Konvergenz im p-ten Mittel, $p > 0$: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1), \mathcal{B}_{[0,1)}, \lambda_{[0,1)})$, $X_n = \sqrt{n}\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)}$, $n \geq 1$.

b) Untersuchen Sie folgende Folgen von Zufallsgrößen auf Konvergenz in Verteilung:

$$X_n \sim Poi(\alpha_n), n \geq 1, \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$
$$X_n \sim Poi(\alpha_n), n \geq 1, \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty.$$

Aufgabe 21 (6 Punkte)
Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der λ^2-Dichte

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; f(x,y) = xe^{x-y} 1_{[0,1]\times[0,\infty)}(x,y).$$

a) Weisen Sie nach, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte bzgl. λ^2 bildet und bestimmen Sie die λ-Dichten der Randverteilungen $\mathbb{P}^X$ und $\mathbb{P}^Y$, definiert durch

$$\mathbb{P}^X(A) := \mathbb{P}^{(X,Y)}(A \times \mathbb{R}), \quad \mathbb{P}^Y(B) := \mathbb{P}^{(X,Y)}(\mathbb{R} \times B), \quad A, B \in \mathcal{B}.$$

b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ sowie $\mathbb{P}(Y \leq X)$.

Aufgabe 22 (4 Punkte)
Es seien X, Y und Z Zufallsgrößen. Die Notation "$X \perp Y$" stehe abkürzend für "X und Y sind stochastisch unabhängig". Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $X \perp Y \iff X^2 \perp Y^2$.

b) $X \perp Y, X \perp Z \iff X \perp (Y, Z)$.

c) $X \perp Y, Y \perp Z \implies X \perp Z$.

d) $X \perp (Y, Z), Y \perp Z \iff X, Y$ und Z sind stochastisch unabhängig.

Bitte wenden!

Aufgabe 23 (4 Punkte)
Es sei (X_1, X_2) ein Zufallsvektor auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, der 2-dimensional normalverteilt sei mit den Parametern $\mu = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))^T$ und $\Sigma = (Cov(X_i, X_j))_{1 \leq i,j \leq 2}$. Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 genau dann unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind.

Aufgabe 24 (5* Punkte)
Für jeden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein $A \in \mathcal{F}$ stets unabhängig von $\emptyset$ sowie von Ω. Existiert kein unabhängiges Paar $(A, B) \in \mathcal{F}^2$ mit $A, B \notin \{\Omega, \emptyset\}$, so nennen wir den Raum **unabhängigkeitsfrei**. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(\{k\}) = 2^{-k!} \text{ für } k \geq 2 \text{ und } \mathbb{P}(\{[1\}) = 1 - \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(\{k\})$$

unabhängigkeitsfrei ist.