Übungen

Abgabetermin: Freitag 13.05. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: $\mathcal{L}^p$-Norm, gleichgradige Integrierbarkeit, Satz von Radon-Nikodym, Zufallsvariablen und ihr Kenngrößen

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine messbare Funktion und $0 < p < \infty$. Zeigen Sie:

a) $\|f\|_p < \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} n^p \mu(|f| > n) = 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} n^p \mu(|f| > n) = 0 \;\Rightarrow\; \|f\|_\alpha < \infty$ für alle $0 < \alpha < p$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für alle $\alpha > 0$

$$\int |f|^\alpha \, d\mu = \alpha \int_{[0,\infty)} t^{\alpha-1} \mu(|f| > t) \lambda(dt).$$

Aufgabe 17 (6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $(f_i)_{i\in I}$ für eine Indexmenge I eine Familie von reellwertigen messbaren Funktionen. Zeigen Sie:

a) $(f_i)_{i\in I}$ ist gleichgradig integrierbar $\Leftrightarrow$ $\lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|>a\}} |f_i| d\mu = 0$.

b) $(f_i)_{i\in I}$ ist gleichgradig integrierbar $\Rightarrow$ $\sup_{i\in I} E(|f_i|) < \infty$ ($\mathcal{L}^1$-Beschränktheit).

c) Für jedes $c > 0$ ist die Familie $\{f \in \mathcal{L}^1(\mu) \; : \; \int g(|f|) d\mu < c\}$ gleichgradig integrierbar, wobei $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ eine messbare Funktion mit $x^{-1} g(x) \to \infty$ sei.

d) $(f_i)_{i\in I}$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$-beschränkt für ein $p > 1 \Rightarrow$ $(f_i)_{i\in I}$ ist gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 18 (5 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und μ, ν Maße auf diesem. Weisen Sie jeweils $\nu \ll \mu$ nach und geben Sie eine Dichte f von ν bzgl. μ an:

a) $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ σ-endlicher Maßraum, $A_0 \in \mathcal{A}$ fest und $\nu(A) := \mu(A \cap A_0)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

b) $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$, P und Q beliebige W-Maße, $\mu := P + Q$, $\nu := P$.

c) $(\Omega, \mathcal{A})$ beliebig, λ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A}$, P und Q W-Maße mit λ-Dichten g und h, $\mu := P + Q$ und $\nu := P$.

Bitte wenden!

Aufgabe 19 (5 Punkte)

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lebesgue-integrierbar und stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\lambda(dt)$$

in x_0 differenzierbar ist und $F'(x_0) = f(x_0)$ gilt.

b) Es sei X eine Zufallsvariable mit der integrierbaren Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2 + (x-b)^2},$$

$a > 0, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lebesgue-Dichte und - falls dieser existiert - den Erwartungswert von $Y = \frac{1}{a}(X - b)$.