Übungen

Abgabetermin: Freitag 06.05. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Chebyshev-Markov-Ungleichung, gleichgradige Integrierbarkeit, Konvergenzarten und Produkträume

Aufgabe 11 (4 Punkte)
Es sei $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $E(f) := \int f d\mu$, $Var(f) := \int (f - E(f))^2 d\mu$ und $c > 0$. Zeigen Sie:

a) $\mu(f - E(f) \geq c) \leq \frac{Var(f)+t^2}{(c+t)^2}$ für alle $t \geq 0$.

b) $\mu(f - E(f) \geq c) \leq \frac{Var(f)}{c^2+Var(f)}$.

Aufgabe 12 (5 Punkte)
Betrachten Sie den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$. Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ sei gegeben durch

$$f_n := 2^k \cdot \mathbb{1}_{\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]} \text{ mit } k := \max\left\{k' \in \mathbb{N} | 2^{k'} \leq n\right\}$$

und $f \equiv 0$ die Nullfunktion auf Ω. Überprüfen Sie folgende Aussagen:

a) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert stochastisch gegen f.

b) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert μ-f.s. gegen f.

c) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert in $\mathcal{L}^p$ für ein $p \geq 1$ gegen f.

d) $(f_n)_{n\geq 1}$ ist gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 13 (6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\emptyset \neq Q \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge und $g : \Omega \times Q \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(i) $g(\cdot, t)$ ist μ-integrierbar für alle $t \in Q$,

(ii) $g(\omega, \cdot)$ ist differenzierbar für μ-fast alle $\omega \in \Omega$,

(iii) es gibt eine μ-integrierbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $|\frac{\partial}{\partial t} g(\cdot, t)| \leq h$ für alle $t \in Q$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $G : Q \to \mathbb{R}$, $G(t) = \int g(\omega, t)\mu(d\omega)$, differenzierbar ist mit

$$G'(t) = \int \frac{\partial}{\partial t} g(\omega, t)\mu(d\omega).$$

Bitte wenden!

Aufgabe 14 (5 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion und $M := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq f(\omega)\}$. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn $M \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gilt.

b) Ist f $\mathcal{A}$-messbar, so gilt $\int_\Omega f d\mu = \mu \otimes \lambda(M)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(\omega, t) := f(\omega) - t$.

Aufgabe 15 (5* Punkte)

a) Es seien $f, f_1, f_2, \ldots$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbare numerischer Funktionen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_n \nrightarrow f\}$ in $\mathcal{A}$ liegt, f_n also fast sicher gegen f konvergiert, fallls diese Menge Maß 0 hat.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine fast überall geltende Eigenschaft (*) an, für die die Menge $\{\omega | (*) \text{ gilt für } \omega \text{ nicht}\}$ nicht messbar, also keine Nullmenge ist.