Übungen

Abgabetermin: Freitag 29.04. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Maßintegral, monotone Konvergenz und Integrierbarkeit

Aufgabe 8 (6 Punkte)
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum, $f : \Omega \to [0, \infty)$ μ-integrierbar und $\nu(A) := \int_A f d\mu, A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) ν ist ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

b) ν ist μ-stetig, d.h. aus $\mu(N) = 0$ für ein $N \in \mathcal{A}$ folgt $\nu(N) = 0$.

c) Für alle $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ν-integrierbar gilt $\int_A g d\nu = \int_A g \cdot f d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Hinweis: Funktionserweiterungsargument: Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und (*) eine Aussage über (positive) $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktionen. Zeige für

$$\mathcal{M} := \{f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}) | f \text{ erfüllt } (*)\}$$

(a) $\mathcal{M} \supset E(\Omega, \mathcal{A})$.
(b) Für jede aufsteigende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Funktionen aus $\mathcal{M}$ folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{M}$.
Dann impliziert Theorem 3.20 die Gültigkeit von (*) für alle positiven $\mathcal{A}$-messbaren numerischen Funktionen. Kann man außerdem
(c) $f - g \in \mathcal{M}$ für alle $f, g \in \mathcal{M}$
zeigen, so gilt (*) wegen $f = f^+ - f^-$ sogar für alle $\mathcal{A}$-messbaren numerischen Funktionen.

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für eine numerische Funktion f folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f ist μ-integrierbar.

b) Es gibt eine μ-integrierbare Funktion g, so dass $|f| \leq g$ gilt.

c) $|f|$ ist μ-integrierbar.

Aufgabe 10 (5 Punkte)

a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ an, die uneigentlich Riemann-, aber nicht λ-integrierbar ist.

b) Geben Sie eine Funktion an, die λ-, aber nicht Riemann-integrierbar ist.

Bitte wenden!

Anwesenheitsaufgabe für die Übung am 3./4.5.:
Im Folgenden bezeichne $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ die symmetrische Differenz der Mengen A und B.

a) Sei Ω eine nichtleere Menge, I eine Indexmenge und $A_i, B_i \subset \Omega, i \in I$. Zeigen Sie:

$$\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)\Delta\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) \subset \bigcup_{i\in I} (A_i \Delta B_i)\,.$$

b) Sei weiter $\mathcal{A}$ eine Algebra über Ω und μ ein endliches Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass zu jeder Menge $S \in \sigma(\mathcal{A})$ und jedem $\epsilon > 0$ eine Menge $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A\Delta S) < \epsilon$.

c) Gilt die Aussage in b) auch noch, wenn keine Algebra, sondern lediglich ein Schnitt-stabiler Erzeuger vorliegt?

Zusatzaufgabe:
Zwei Zusatzpunkte für das Auffinden des Ostereis im untenstehenden Bild.