Übungen

Abgabetermin: **Donnerstag 21.04.** um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Maße, messbare Abbildungen, Bildmaße und das Lebesgue-Maß

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring und μ ein Volumen über $\mathcal{R}$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(a) μ ist ein Prämaß.

(b) Stetigkeit von unten: Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \nearrow A \in \mathcal{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(c) Stetigkeit von oben: Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(d) $\emptyset$-Stetigkeit: Für $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ mit $A_n \searrow \emptyset$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Zeigen Sie: $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d)$, sowie die Äquivalenz der Aussagen, falls μ endlich ist.
Hinweis: Ein Volumen μ ist genau dann ein Prämaß, wenn die σ-Additivität für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ paarweise disjunkter Mengen mit $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$ gilt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
μ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine Abbildung, gegeben durch $f(x) := x^2$.

a) Geben Sie die minimale σ-Algebra $\sigma(f)$ an, unter der f $\sigma(f)$-$\mathcal{B}_{[0,\infty)}$-messbar ist.
Bemerkung: $\sigma(f)$ heißt auch von f erzeugte σ-Algebra.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion des Bildmaßes $f(\mu)$.

Hinweise: Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** ist ein endliches Maß mit Gesamtmasse 1.
$\mathcal{B}_{[0,\infty)}$ ist die Borelsche σ-Algebra auf der nichtnegativen Halbachse, d.h. die **Spur-σ-Algebra** $\mathcal{B}_{[0,\infty)} = \{B \cap [0,\infty) | B \in \mathcal{B}\}$.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar ist.

b) Es seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i \in \{1,2,3\}$, messbare Räume und $T_1 : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ und $T_2 : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass $T_2 \circ T_1$ dann $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$-messbar ist.

c) Es sei μ ein Maß auf $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$. Zeigen Sie, dass für die Bildmaße gilt

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2(T_1(\mu)).$$

Bitte wenden!

Anwesenheitsaufgabe für die Übungen am 19./20.4.:

a) Wie immer sei λ^d das d-dimensionale Lebesgue-Maß, $d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede abzählbare Teilmenge A des $\mathbb{R}^d$ Borel-messbar ist mit $\lambda^d(A) = 0$.

a) Sei H eine m-dimensionale Hyperebene im $\mathbb{R}^d$ mit $m < d$, $m, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $\lambda^d(H) = 0$.