Zusatzübungen zur bedingten Erwartung

Diese Aufgaben sollen nicht abgegeben werden. Sie werden in einer Zentralübung am 8.7. besprochen.

Aufgabe 48

a) Es sei X eine integrierbare Zufallsgröße und $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Zeigen Sie ohne Benutzung von Theorem 3.13, dass aus der Unabhägigkeit von X und $\mathcal{C}$ bereits $E(X|\mathcal{C}) = E(X)$ folgt.

b) Es seien X_1 und X_2 zwei $B(1, p)$-verteilte Zufallsgrößen, $p \in (0, 1)$. Wie definieren $p_{ij} := P(X_2 = j|X_1 = i)$ für alle $i, j \in \{0, 1\}$. Bestimmen Sie eine Version von $E(X_2|X_1)$.

Aufgabe 49

Es seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}(X_1 = a) = p = 1 - \mathbb{P}(X_1 = b)$, wobei $0 < p < 1$ und $0 < a < 1 < b < \infty$ sei, sowie $Y_k := \prod_{i=1}^k X_i$ für $1 \leq k \leq n$. Bestimmen Sie einen Wert von p, so dass für alle $0 \leq k \leq n - 1$ gilt

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}|X_1, ..., X_k) = Y_k \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Aufgabe 50

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum, $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Sub-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, X eine Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ für ein $p > 1$ sowie $Y_n := \mathbb{E}(X|\mathcal{C}_n), n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Familie $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist.

Aufgabe 51

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Funktion um eine λ^2-Dichte handelt:

$$f(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-y^2(x-y)^2/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times[1,\infty)}(x, y)$$

b) Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit der λ^2-Dichte f aus Teil a). Zeigen Sie, dass $E(X|Y = y) = y \ P^Y$-f.s. gilt.