Übungen

Abgabetermin: Freitag 01.07. um 12 Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: schwache Konvergenz, Fourier-Transformierte

Aufgabe 44 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2)$-verteilten Zufallsvariablen, $a_n \in \mathbb{R}, \sigma_n^2 \in (0,\infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die in Verteilung gegen eine Zufallsvariable Z konvergiert. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $\sigma^2 \geq 0$ und ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von Z.

Aufgabe 45 (6 Punkte)
Es seien X und Y unabhängige Zufallsgrößen. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $aX + b$ hat die Fouriertransformierte $e^{ibt}\varphi_X(at)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

c) X ist symmetrisch um 0 verteilt $\Leftrightarrow$ $\hat{\mathbb{P}}_X$ ist reellwertig.

d) Aus der Unabhängigkeit von X und $X + Y$ folgt, dass X $\mathbb{P}$-f.s. konstant ist.

Aufgabe 46 (2+3+1 Punkte)

a) Bestimmen Sie die F.T einer Zufallsgröße mit der λ-Dichte

$$g(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}, a > 0.$$

b) Berechnen Sie die F.T. der $\mathcal{C}(a,b)$-Verteilung (Cauchy-Verteilung, $a \in \mathbb{R}, b > 0$) mit der λ-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2 + (x-a)^2}.$$

c) Zeigen Sie: Für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 > 0$ gilt

$$\mathcal{C}(a_1, b_1) * \mathcal{C}(a_2, b_2) = \mathcal{C}(a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Aufgabe 47 (3 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe von Fouriertransformierten den Poissonschen Grenzwertsatz.