Übungen

Abgabetermin: Freitag 24.06. um 12 Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Zentraler Grenzwertsatz, Lindeberg-Bedingung, Feller-Bedingung

Aufgabe 36 (2+4 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit

$$P(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{2} = P(X_n = -n^\alpha)$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Für $\alpha \geq 1$ gilt das schwache Gesetz der großen Zahlen nicht.

b) Für $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ gilt der zentrale Grenzwertsatz.

Aufgabe 37 (4 Punkte)
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge positiver i.i.d. Zufallsgrößen mit $\mu := EX_1$ und $\sigma^2 := VarX_1 < \infty$. Ferner sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie:

$$\sqrt{n}\left(\frac{\mu^2}{\overline{X}_n} - \overline{X}_n\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 4\sigma^2), \quad \text{falls } n \to \infty.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgende Aussage verwenden:
Satz von Slutsky: Aus $X_n \xrightarrow{d} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ folgt $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} f(X, c)$ für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times (c - \eta, c + \eta) \in \mathcal{C}(f)$ für ein $\eta > 0$.

Aufgabe 38 (5 Punkte)

a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängiger, zentrierter Zufallsgrößen mit endlichen, positiven Varianzen, die der Lindeberg-Bedingung genüge. Zeigen Sie, dass dann auch die **Feller-Bedingung**

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq n} \frac{\mathbb{V}(X_k)}{s_n^2} = 0$$

erfüllt ist (s_n sei dabei definiert wie in der Vorlesung).

b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}^{X_n} = \mathcal{N}(0, n!), n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Zentrale Grenzwertsatz gilt, die Lindeberg-Bedingung aber nicht erfüllt ist.

Bitte wenden!

Folgende Aufgaben dienen der Wiederholung der bisherigen Themen. Diese Auswahl hat selbstverständlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit! Die erreichten Punkte werden Ihnen als Sonderpunkte gutgeschrieben. In einer Zentralübung am Freitag, dem 1.7., um 14 Uhr c.t. wird die Lösung dieser Aufgaben vorgerechnet.

Aufgabe 39 (3* Punkte)

a) Definieren Sie ein Dynkin-System, eine Algebra, einen Ring und eine σ-Algebra.

b) Es seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. $\mathcal{A}_0$ sei eine Algebra über Ω mit $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{Q}(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A}_0 \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A) = \mathbb{Q}(A) \text{ für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 40 (3* Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{A}$ ein Mengensystem. $\mathfrak{G}$ heißt $\mathbb{P}$-*trivial*, falls $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathfrak{G}$. Zeigen Sie:

a) Ein $\mathbb{P}$-triviales Mengensystem ist von jeder σ-Algebra $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{A}$ unabhängig.

b) Ein Mengensystem, das von sich selbst stochastisch unabhängig ist, ist $\mathbb{P}$-trivial.

c) Für zwei Mengensysteme $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2 \subseteq \mathcal{A}$ gilt:

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \text{ sind stochastisch unabhängig} \iff \mathfrak{G}_1 \text{ ist } \mathbb{P}\text{-trivial.}$$

Aufgabe 41 (3* Punkte)

a) Es seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}^{X_i} = \mathcal{R}(0,1)$, $i = 1, 2$. Bestimmen sie eine λ-Dichte von $X_1 + X_2$ und skizzieren Sie diese. Berechnen Sie aus dieser Dichte das erste und das zweite Moment von $X_1 + X_2$.

b) Es seien X_1, X_2 stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit $\mathbb{P}^{X_1} = Exp(\lambda_1)$ und $\mathbb{P}^{X_2} = Exp(\lambda_2)$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\min(X_1, X_2)$ und $\max(X_1, X_2)$.

Aufgabe 42 (3* Punkte)

a) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen (Etemadi) an. Auf welche Ungleichung beruht der Beweis des schwachen Gesetzes der großen Zahlen? Geben Sie diese an.

b) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge stochastisch unabhängiger, $\mathcal{R}(0,1)$-verteilter Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right)^{1/n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \quad P\text{-f.s.}$$

Aufgabe 43 (3* Punkte)

a) Definieren Sie fast sichere Konvergenz, stochastische Konvergenz, Verteilungskonvergenz und $\mathcal{L}^p$-Konvergenz, $p \geq 1$.

b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien reelle Zufallsvariablen und $X_n \to X_0$ für $n \to \infty$ in Verteilung. Zeigen oder widerlegen Sie:

   (i) $Y_n \to Y_0$ in Verteilung $\Rightarrow X_n + Y_n \to X_0 + Y_0$ in Verteilung.

   (ii) $Y_n \to Y_0 \equiv a \in \mathbb{R}$ in Verteilung $\Rightarrow$ $X_n + Y_n \to X_0 + Y_0$ und $X_n \cdot Y_n \to X_0 \cdot Y_0$ in Verteilung.