Übungen

Abgabetermin: Freitag 15.04. um 12Uhr, Briefkästen 57-60

THEMEN: Mengensysteme und Maße

> La notion de mesure des grandeurs est fondamentale, aussi bien dans la vie de tous les jours (longueur, surface, volume, poids) que dans la science expérimentale (charge électrique, masse magnétique, etc.). (BOURBAKI)

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{2,4\},\{1,3\},\{3,4\}\}$.

a) Bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$.

b) Bestimmen Sie das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$.

c) Geben Sie zwei verschiedene W-Maße P_1, P_2 auf $\sigma(\mathcal{E})$ an, die auf $\mathcal{E}$ übereinstimmen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Es sei $\mathcal{R}$ ein Ring, $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ und μ ein Volumen über $\mathcal{R}$. Zeigen Sie:

a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

b) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

c) $A \subset B,\ \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

d) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

e) Falls die $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt sind und $\bigcup_{n=1}^\infty A_i \in \mathcal{R}$ gilt, so ist außerdem $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_i\right) \geq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_i)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Für $\Omega = \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_0 := \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$ und zwei Mengenfunktionen $\mu_1 : \mathcal{A}_0 \to [0,\infty]$ und $\mu_2 : \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ gegeben durch

$$\mu_1(A) := |A| \qquad \text{und} \qquad \mu_2(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich.} \end{cases}$$

a) Wie sieht die von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}$ aus?

b) Lassen sich μ_1 und/oder μ_2 zu Maßen auf $\mathcal{A}$ fortsetzen? Wenn ja, wie sieht dieses Maß aus, wenn nein, wieso nicht?

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in Ω. Dann heißen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j \qquad \text{bzw.} \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$$

Limes superior bzw. **Limes inferior** der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ ist die Menge aller Elemente, die in unendlich vielen A_n enthalten sind.

b) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ ist die Menge aller Elemente, die in allen bis auf endlich vielen A_n enthalten sind.

c) Monotone Mengenfolgen konvergieren, wobei eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent** mit Limes $\lim_{n\to\infty} A_n$ heißt, wenn die Gleichheit $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ gilt.

d) Für konvergente Mengenfolgen gilt $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Die folgenden Aufgaben werden in der ersten Übungsstunde besprochen:

Aufgabe I
Es sei Ω eine überabzählbare Menge und $\mathcal{E} := \{\{\omega\} | \omega \in \Omega\}$ das System der Einpunktmengen. Bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte Algebra $\alpha(\mathcal{E})$, σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ und das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$.

Aufgabe II
Es seien Ω und Ω' zwei Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung mit Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathfrak{P}(\Omega') \to \mathfrak{P}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A}' := \{A' \subset \Omega' | T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra bildet.

Aufgabe III
Es sei P ein W-Maß auf $(\mathbb{R}, \sigma((-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}))$ mit $P((-\infty, t]) = P([-t, \infty))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem definieren wir für alle $B \subset \mathbb{R}$ die Menge $-B := \{-b \mid b \in B\}$. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathcal{B}$ bereits $P(A) = P(-A)$ gilt.

Hinweis: Dynkin-System-Argument: Es sei $(\Omega, \mathcal{S})$ ein messbarer Raum und $(*)$ eine Aussage, deren Gültigkeit für alle $A \in \mathcal{A}$ behauptet wird. Weiter sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$, so dass $(*)$ für alle $A \in \mathcal{E}$ nachweisbar ist. Betrachte dann $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} | A \text{ erfüllt } (*)\}$, und zeige, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System bildet. Wenn dies gelingt, so folgt aus $\mathcal{E} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ und $\delta(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ die Inklusionskette $\mathcal{A} = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}$, also $\mathcal{A} = \mathcal{D}$. Die Aussage $(*)$ ist damit für alle $A \in \mathcal{S}$ bewiesen.

Alle weiteren Informationen und aktuelle Hinweise finden Sie stets unter:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS11/WT`