

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modelle

Sommersemester 2011

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 10

07.06.2011

Aufgabe 1:

6 Punkte

Wir betrachten einen Finanzmarkt, dessen Informationsverlauf gegeben ist durch zwei unabhängige Wiener-Prozesse W_1, W_2 und nehmen an, dass unter einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaß P die augenblickliche Zinsrate eines Geldmarktkontos sich entwickelt entsprechend

$$dr(t) = b(a - r(t)) dt + \delta dW_1(t) \quad , r(0) = r_0 > 0$$

mit $a, b > 0$.

Das Geldmarktkonto entwickelt sich also entsprechend

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$$

für alle $t \geq 0$.

Weiter gibt es in diesem Finanzmarkt eine Aktie mit Preisprozess S gegeben durch

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW_2(t)) \quad , S(0) = x_0 > 0$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

1. Ist das Modell arbitragefrei?
2. Ist das Modell vollständig?
3. Führen Sie einen Maßwechsel zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}^* durch, so dass die Dynamik der Zinsrate r erhalten bleibt und die der Aktie gegeben ist durch

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma d\bar{W}_2(t))$$

mit Wiener-Prozess \bar{W}_2 bezüglich \mathbb{P}^* .

4. Berechnen Sie für eine Call-Option mit Laufzeit T

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)}.$$

Aufgabe 2: Bewertung von Swaps

4 Punkte

Wir betrachten einen Payer-Swap mit Tenorstruktur $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ auf ein Nominal N , der feste Zinsen R in variable tauscht. Zeigen Sie, dass der Wert $PS(t)$ des Payer-Swaps in $t \leq t_0$ gegeben ist durch

$$PS(t) = NB(t, t_0) - (N \sum_{i=1}^n B(t, t_i) R(t_i - t_{i-1}) + NB(t, t_n)).$$

Zeigen Sie ferner, dass auch eine Darstellung der Form

$$PS(t) = \sum_{i=1}^n N(t_i - t_{i-1}) B(t, t_i) (F(t; t_{i-1}, t_i) - R)$$

möglich ist.

Interpretieren Sie beide Bewertungsmöglichkeiten.

Abgabe: Die. 21.06.2011 bis spätestens 11.00, BK 43

Besprechung: Am Mittwoch, den 22.06.2011. 12.00-14.00 M6