

Übungen zur Vorlesung Mathematische Modelle

Sommersemester 2011

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 8

24.05.2011

Aufgabe 1: Allgemeine Callformel

4 Punkte

Gegeben sei eine Wienerfiltration eines n -dimensionalen Wienerprozesses über einen Handelszeitraum $[0, T]$, ein Bankkontoprozess β der Form

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit stetigem adaptierten Zinsratenprozess r und ein positiver Aktienpreisprozess $(S(t))_{0 \leq t \leq T}$ mit stetigen Pfaden.

Wir nehmen an, dass ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{P}^* vorliegt und wollen eine Calloption mit Laufzeit T und Basis K bewerten.

Zeigen Sie, dass es zu \mathbb{P}^* äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1^*, \mathbb{P}_2^*$ gibt mit

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)} = S(0) \mathbb{P}_1^*(S(T) > K) - KB(0, T) \mathbb{P}_2^*(S_T > K),$$

wobei $B(0, T) = \mathbb{E}^* \beta(T)^{-1}$.

Aufgabe 2: Hull White Volatilitätsmodell

6 Punkte

Das stochastische Volatilitätsmodell nach Hull White hat bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes \mathbb{P}^* die Darstellung

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(r dt + Y(t) dW_1(t)), \\ dY(t) &= Y(t)(\mu dt + \delta dW_2(t)) \end{aligned}$$

mit unabhängigen Wienerprozessen W_1, W_2 .

1. Lösen Sie die obige stochastische Differentialgleichung.
2. Wird \mathbb{P}^* als Bewertungsmaß gewählt, so versuchen Sie eine Formel für den Anfangspreis einer Calloption mit Laufzeit T und Basis K zu finden.
3. Formulieren Sie einen PDE Ansatz mit dem der Preis der Calloption berechnet werden kann.

Aufgabe 3:

4 Punkte

Ein durch einen Vasicek-Prozeß getriebenes stochastisches Volatilitätsmodell erfüllt bezüglich eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes die folgenden Dynamiken

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + Y(t)^2 dW_1(t)) \\ dY(t) &= b(a - Y(t)) dt + \delta dW_2(t) \end{aligned}$$

mit $a, b, \delta > 0$ und unabhängigen Wiener-Prozessen W_1, W_2 .

1. Wie können Sie zu einem äquivalenten Martingalmaß \mathbb{P}^* wechseln, so dass die obige Dynamik bezüglich \mathbb{P}^* erhalten bleibt.
2. Wie kann man vorgehen, um in diesem Modell eine Calloption zu bewerten.

Wir gehen dabei von einer konstanten Zinsrate r für das Bankkonto aus.

Abgabe: Die. 31.05.2011 bis spätestens 11.00, BK 43

Besprechung: Am Mittwoch, dem 01.06.2011. 12.00-14.00 M6