Übungen zur Vorlesung Mathematische Modelle

Sommersemester 2011

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 7** **17.05.2011**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit zeitabhängigen Konstanten entsprechend Aufgabe 1 Blatt 05. Berechnen Sie den arbitragefreien Anfangspreis des Claims C mit Auszahlung

$$C = (S_T^\alpha - K)^+$$

zum Zeitpunkt T. Bestimmen Sie eine Hedgestrategie für C.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit konstanten Koeffizienten für zwei Aktien bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes, i.e.

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \beta(t) r dt \quad , \\ dS_1(t) &= S_1(t)(r dt + \sigma_1 dW_1(t)) \quad , \\ dS_2(t) &= S_2(t)(r dt + \sigma_2 dW_2(t)) \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Hierbei sind W_1, W_2 stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse.

Berechnen Sie den Anfangspreis der Exchangeoption, deren Auszahlung zum Zeitpunkt T gegeben ist durch $(S_2(T) - S_1(T))^+$.

Aufgabe 3: 4 Punkte

In einem klassischen Black-Scholes Modell mit einer Aktie betrachten wir zusätzlich eine Call-Option mit Basis K und Laufzeit T , deren Preisprozess durch

$$C_t = \mathbb{E}^*(\exp(-r(T-t))(S(T) - K)^+ | \mathfrak{F}_t)$$

gegeben ist. Wie kann durch einen Handel in Aktie und Call-Option das Geldmarktkonto dupliziert werden?

Aufgabe 4: 4 Punkte

In einem allgemeinen Seminartingalmodell für eine Aktie bei einer Wiener-Filtration ist eine Handelsstrategie gegeben durch vorhersehbare Prozesse $(\phi(t))_{0 \leq t \leq T}, (H(t))_{0 \leq t \leq T}$. Deren Wertprozess ist dann definiert durch

$$V(t) = \phi(t)\beta(t) + H(t)S(t)$$

für alle $0 \leq t \leq T$. V heißt selbstfinanzierend genau dann, wenn

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \phi(s) d\beta(s) + \int_0^t H(u) dS(u)$$

für alle $0 \leq t \leq T$ gilt.

Zeigen Sie:

1. (ϕ, H) ist selbstfinanzierend genau dann, wenn $V^*(t) = V(0) + \int_0^t H(u)dS^*(u)$ für alle $0 \leq t \leq T$ gilt.

2. Zu jedem vorhersehbaren Prozess H und jedem Anfangskapital x gibt es genau einen vorhersehbaren Prozess ϕ derart, dass (ϕ, H) selbstfinanzierend ist mit abdiskontiertem Wertprozess gegeben durch

$$V_t = x + \int_0^t H(u)dS^*(u).$$

Abgabe: Die. 24.05.2011 bis spätestens 11.00; BK 43

Besprechung: Am Mittwoch, dem 25.05.2011. 12.00-14.00 M6