Übungen zur Vorlesung Mathematische Modelle

Sommersemester 2011

PD Dr. V. Paulsen | **Blatt 6** | **10.05.2011**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)\,dt + \sigma X_t\,dW_t$$

mit Anfangswert $X_0 > 0$. Hierbei sind θ, μ, σ positive Konstanten und W ein Wiener-Prozess.

Bestimmen Sie $\mathbb{E}X_t$ für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Lösen Sie zunächst $dX_t = X_t(-\theta\,dt + \sigma\,dW_t)$ und führen Sie dann eine Variation der Konstanten durch.

Aufgabe 2: 4 Punkte

In einem Finanzmarktmodell erfülle der Aktienpreisprozess die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(r\,dt + S_t^{\alpha}\,dW_t)$$

mit Anfangskurs $S_0 > 0$ und $\alpha, r > 0$.

Welche partielle Differentialleichung ist zu lösen, um den arbitragefreien Anfangspreis eines Derivates mit Auszahlung $h(S_T)$ in T zu bestimmen. Hierbei wird von einer konstanten Zinsrate $r > 0$ ausgegangen.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Lösen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t\,dt + \sqrt{1 + X_t^2}\,dW_t$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = 0$.

Hinweis: Führen Sie einen Ansatz der Form $X_t = f(W_t)$ durch und bestimmen Sie die Transformation f.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Seien M, Z stetige Semimartingale und X eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = dM_t + X_t dZ_t$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = M_0$.

Zeigen Sie, dass X gegeben ist durch

$$X_t = \mathfrak{E}(Z)_t \left(M_0 + \int_0^t \frac{1}{\mathfrak{E}(Z)_s} \, dM_s - \int_0^t \frac{1}{\mathfrak{E}(Z)_s} \, d\langle M, Z \rangle_s \right)$$

für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 10.05.2011 bis spätestens 11.00, BK 43

Besprechung: Am Mittwoch, dem 18.05.2011. 12.00-14.00 M6