Übungen zur Vorlesung Mathematische Modelle

Sommersemester 2011

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 5** **03.05.2011**

Aufgabe 1: 6 Punkte

Ein Aktienpreisprozess (S_t) erfülle die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dW_t)$$

mit Anfangswert $S_0 = x$, wobei μ, σ deterministische messbare Funktionen der Zeit sind mit $\sigma(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ und $\int_0^t |\mu(s)|ds < \infty, \int_0^t \sigma(s)^2 ds < \infty$ für alle $t \geq 0$. Weiter nehmen wir für ein Geldmarktkonto eine Entwicklung der Form

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$$

für alle $t \geq 0$ an, wobei r eine deterministische zeitabhängige Zinsrate darstellt.

1. Geben Sie eine Lösung für den Aktienpreisprozess an.
2. Führen Sie bei festem Zeithorizont $T > 0$ einen Maßwechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ durch. Dies bedeutet, dass bezüglich $\mathbb{P}^*$ der Aktienpreisprozess die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(r(t)dt + \sigma(t)d\bar{W}_t)$$

erfüllt mit einem Wiener-Prozess $\bar{W}$ bezüglich $\mathbb{P}^*$.

3. Bestimmen Sie den Preis einer Calloption mit Laufzeit T. Berechnen Sie also

$$\mathbb{E}^* \frac{(S(T) - K)^+}{\beta(T)}.$$

Aufgabe 2: 6 Punkte

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit Volatilität σ, Anfangskurs $x > 0$ und Zinsrate $r > 0$ bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$. Es gilt also

$$S_t = xe^{rt} \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0$$

mit einem Wiener-Prozess W bezüglich $\mathbb{P}^*$. Zeigen Sie:

1. Für $0 \leq t \leq T$ und $\alpha > 0$ ist

$$\mathbb{E}^*(\exp(-rT)S_T^\alpha|\mathfrak{F}_t) = x^\alpha e^{(\alpha-1)T(r+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2)} \exp(\alpha\sigma W_t - \frac{1}{2}(\alpha\sigma)^2 t).$$

2. Für $\alpha > 0$ gilt
$$\mathbb{E}^* e^{-rT} S_T^\alpha = x^\alpha e^{(\alpha-1)T(r+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2)}.$$

3. Der arbitragefreie Anfangspreis $p(C)$ des Claims, der zum Zeitpunkt T die Auszahlung
$$C = (S_T^\alpha - K)^+$$
liefert, ist gegeben durch
$$p(C) = x^\alpha h(T)\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \alpha T(r+\sigma^2(\alpha-\frac{1}{2}))}{\alpha\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{x^\alpha}{K} + \alpha T(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\alpha\sigma\sqrt{T}}\right)$$
mit $h(T) = e^{(\alpha-1)T(r+\frac{1}{2}\alpha\sigma^2)}$.

Hinweis: $p(C) = \mathbb{E}^* e^{-rT}(S_T^\alpha - K)^+$.

Aufgabe 3: Hull-White Prozess 4 Punkte

Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung.

$$dX_t = \theta(t)(\mu(t) - X(t)) + \sigma(t)dW_t$$

mit Anfangsbedingung X_0.

Hierbei seien θ, μ, σ stetige Koeffizientenfunktionen mit $\sigma(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

Abgabe: Die. 10.05.2011 bis spätestens 11.00, BK 43

Besprechung: Am Mittwoch, dem 11.05.2011. 12.00-14.00 M6