

# Übungen zur Vorlesung Mathematische Modelle

Sommersemester 2011

PD Dr. V. Paulsen

Blatt 2

12.04.2011

## Aufgabe 1:

4 Punkte

Sei  $M$  ein  $L_2$ -Martingal. Zeigen Sie die Isometrieeigenschaft des stochastischen Integrals für  $H$  aus dem Raum der elementaren previsiblen Prozesse.

## Aufgabe 2:

4 Punkte

Berechnen Sie das Doleans-Maß des stochastischen Intervalls  $(0, \tau]$  bzw.  $(0, \sigma]$ , wobei  $\sigma$  und  $\tau$  entsprechend Blatt 01 Aufgabe 3 definiert sind.

## Aufgabe 3:

4 Punkte

Sei  $M$  ein rechtsseitig stetiges  $\mathcal{H}_2$ -Martingal und  $H$  ein previsibler Prozess der Form

$$H = K1_{(\sigma, \tau]},$$

wobei  $\sigma, \tau$  Stoppzeiten mit  $\sigma \leq \tau$  und  $K$  eine  $\mathfrak{F}_\sigma$ -messbare, beschränkte Abbildung bezeichnen. Zeigen Sie, dass der stochastische Integralprozess  $H \cdot M$  gegeben ist durch

$$(H \cdot M)_t = K(M_{\tau \wedge t} - M_{\sigma \wedge t})$$

für alle  $t \geq 0$ .

## Aufgabe 4:

4 Punkte

Sei  $M$  ein  $L_2$  Martingal mit cadlag Pfaden und  $H \in L_2(\mu_M)$ . Zeigen Sie:

- $(H \cdot M)(0) = 0$   $\mathbb{P}$ - fast sicher,
- $\mathbb{E}(H \cdot M)(\tau) = 0$  für jede Stoppzeit  $\tau$ .
- Hat  $M$  stetige Pfade, so ist  $H \cdot M \in \mathcal{H}_{2,c}$ .

Hierbei bezeichnet  $\mathcal{H}_{2,c}$  die Martingale aus  $\mathcal{H}_2$  mit stetigen Pfaden.

**Abgabe:** Di 19.04.2011 bis spätestens 11.00, BK 43

**Besprechung:** Am Mittwoch, dem 20.04.2010. 12.00-14.00 M5