Übungen zur Vorlesung Mathematische Modelle

Sommersemester 2011

PD Dr. V. Paulsen **Blatt 1** **05.04.2011**

Aufgabe 1: 4 Punkte

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Fitration auf Ω. Zeigen Sie, dass für eine integrierbare Zufallsvariable Y der stochastische Prozess

$$X_t = \mathbb{E}(Y|\mathfrak{F}_t), \quad t \geq 0$$

ein gleichgradig integrierbares Martingal bildet mit

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \mathbb{E}(Y|\mathfrak{F}_\infty).$$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Ist der Wiener-Prozess ein gleichgradig integrierbares Martingal?

Ist

$$\sup_{t\geq 0} \exp(p\theta W_t - \frac{1}{2}p\theta^2 t) < \infty?$$

Hierbei sei $\theta \in \mathbb{R}$, $p > 1$ und W ein Wiener-Prozess.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess und für $a < 0 < b$ sei die Stoppzeit τ definiert durch

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t = a \text{ oder } W_t = b\}.$$

Definiere den stochastischen Prozess X durch

$$X_t = W_{\tau\wedge t}$$

für alle $t \geq 0$.

Zeigen Sie, dass X ein gleichgradig integrierbares Martingal ist.

Was ändert sich, wenn Sie die Stoppzeit τ durch die Stoppzeit

$$\sigma = \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}$$

ersetzen?

Aufgabe 4: 4 Punkte

Zeigen Sie, dass Modifikationen von cadlag Prozessen nicht unterscheidbar sind.

Abgabe: Die. 12.04.2011 bis spätestens 11.00, BK 43

Besprechung: Am Mittwoch, dem 13.04.2010. 12.00-14.00 M5