Aufgabenblatt

Die Aufgaben können in **2er Gruppen** bearbeitet werden. Für jede Aufgabe sollen Sie ein R Skript erstellen, das Sie als „`Aufgabennr.Vorname1.Vorname2.R`“ speichern, also z.B. „`3.2.Bernd.Ute.R`“ für das R Skript zur Aufgabe 3.2.
Abgabe: **27.05.2010 bis 18:00 Uhr** per Email. Besprechung: **28.05.2010 um 13:30** im SR A.

7 ARMA-Modelle: Theorie

Aufgabe 7.1. (5 Punkte)
Rechnen Sie (Pen & Paper) nach, dass für einen MA(q)-Prozess

$$X_t = W_t + \theta_1 W_{t-1} + \cdots + \theta_q W_{t-q}$$

mit $(W_t) \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$ gilt

$$\rho(h) = \begin{cases} 1 & h = 0 \\ \frac{\sum_{i=0}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}}{\sum_{i=0}^{q} \theta_i^2} & h = 1, \ldots, q \\ 0 & h > q \end{cases}$$

wobei $\theta_0 = 1$.

8 Modellierung mittels ARMA-Prozessen

Aufgabe 8.1. (10 Punkte)
Lesen Sie mit dem Befehl `source` die Datei `wechselkurs.R` ein. Sie finden dort die Zeitreihe `wechselkurs`. Diese enthält die monatlichen Durchschnitte des Wechselkurses von Euro in Dollar.

(a) Über welchen Zeitraum wurden diese Daten erhoben?

(b) Entscheiden Sie anhand der Box-Jenkins-Methode, welches ARMA(p, q)-Modell mit $p + q \leq 2$ die Daten am besten beschreibt. Fitten Sie das entsprechende Modell an die Daten, und überprüfen Sie anhand der Residuen ihre Hypothese.

(c) Schreiben Sie eine Funktion `best.order(x)`, die für eine gegebene Zeitreihe x anhand des AIC das best geeigneteste ARMA(p, q)-Modell mit $p + q \leq 2$ auswählt. *Hinweis*: Auf das AIC des gefitteten Modells können Sie mittels `arima(...)$aic` zugreifen.

(d) Machen Sie mit dem in (c) gewählten Modell eine 1-Schritt-Vorhersage für den Wechselkurs .

Aufgabe 8.2. (10 Punkte)
Lesen Sie mit dem Befehl `source` die Datei `temperaturen.R` ein, und betrachten Sie die Zeitreihe `Global.annual`.

(a) Berechnen Sie die Zeitreihe der Differenzen zum Vorjahreswert, und arbeiten Sie im Folgenden mit dieser Zeitreihe `temp`.

(b) Entscheiden Sie anhand der Box-Jenkins-Methode, welches ARMA(p, q)-Modell mit $p + q \leq 2$ die Daten am besten beschreibt. Fitten Sie das entsprechende Modell an die Daten, und überprüfen Sie anhand der Residuen ihre Hypothese.

(c) Nutzen Sie wieder die selbstgeschriebene Funktion `best.order(x)`, um anhand des AIC das best geeigneteste ARMA(p, q)-Modell mit $p + q \leq 2$ auszuwählen.

(d) Machen Sie anhand dieses Modells eine 1-Schritt-Prognose für die globale Durchschnittstemperatur (denken Sie an die bisher durchgeführten Transformationen!).

Aufgabe 8.3. (12 Punkte)
Lesen Sie mit dem Befehl `source` die Datei `EnergieverbrauchUSA.R` ein. Sie finden dort die Variable `enUSA` mit dem monatlichen Gesamtenergieverbrauch der Vereinigten Staaten in Exajoule (10^{18} Joule) von 1973 bis 2008.

Plotten Sie die Zeitreihe. Liegen saisonale Schwankungen vor? Warum?

Wählen Sie nun einen Zeitbereich, in welchem ein linearer Trend vorliegen könnte. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Modellprognose mit den realen Daten zu vergleichen. Passen Sie dazu ein Modell an die ersten Beobachtungen in diesem Zeitbereich an, um daraus Vorhersagen für die letzten drei Jahre des gewählten Zeitbereiches zu machen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Schränken Sie die Zeitreihe auf den ausgewählten Zeitbereich (ohne dessen letzte drei Jahre) ein, und weisen Sie diese der Variablen `Energie.part` zu.

(b) Berechnen Sie (für `Energie.part`) einen linearen Trend und additive Saisonkomponenten. Berechnen Sie die zentrierten Saisonkomponenten. Wandeln Sie die Residuen des linearen Modells in eine Zeitreihe um.

(c) Nutzen Sie wieder die selbstgeschriebene Funktion `best.order(x)`, um für die Residuen des linearen Modells das best geeigneteste ARMA(p, q)-Modell mit $p + q \leq 2$ auszuwählen.

(d) Berechnen Sie eine Prognose für die ausgenommenen 3 Jahre (die Einzelprognosen beider Modelle werden additiv überlagert); und plotten Sie Prognose und tatsächlichen Verlauf in eine Grafik.

9 Simulation

Aufgabe 9.1. (8 Punkte)
Überprüfen Sie die Aussagen über ACF und PACF empirisch; indem Sie jeweils 3 Realisationen der Länge n folgender Prozesse erzeugen, (schreiben Sie eine geeignete Funktion in R dafür, wenn Sie noch Zeit haben; ansonsten gibt es `arima.sim`), und deren empirische ACF und PACF anzeigen lassen. Setzen Sie $X_{-1} = X_0 = 0$ bei AR-Prozessen.

(a) MA(1), $\theta_1 = 0.7$, $n = 100$.

(b) AR(1), $\phi_1 = 0.8$, $n = 100, 1000$

(c) AR(2), $\phi_1 = 0.1$, $\phi_2 = -0.8$ $n = 100, 10000$

(d) MA(4), $\theta_1 = 0.8$, $\theta_2 = 0.6$, $\theta_3 = 0.5$, $\theta_4 = 0.35$, $n = 1000$

(e) ARMA(1,1), $\phi_1 = 0.7$, $\theta_1 = 0.7$, $n = 1000$

Hinweis: Mit dem Befehl `par(mfrow=c(3,3))` zeigen Sie 9 Plots in einer Grafik an.