LES FONDEMENTS : LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

1. Les propositions mathématiques

Faire des mathématiques, c'est faire avant tout des raisonnements, c'est à dire partir d'une ou plusieurs hypothèses et par des moyens "légaux" parvenir à une conclusion. Ces moyens légaux sont les règles de la logique.

On peut classer les objets mathématiques en deux groupes :
- les *termes* qui désignent un objet mathématique ($2, x+5$), où l'on distingue les constantes (2, -5, π, etc) et les variables (x, y, etc), noms donnés à des lettres désignant des objets mathématiques variables dans certains domaines précisés par le contexte ;
- les *propositions* qui expriment un fait mathématique, fixe ou variable, réalisé ou non ("$2+2=4$", "$2x+y=0$", "$1+1=0$").

La logique que l'on va utiliser est l'axiome du tiers exclu :

Une proposition est soit vraie, soit fausse.

Exemple 1.1. La proposition $2+\pi \leqslant 10$ est vraie, mais la proposition "pour tout x réel, $x^2 \leqslant 0$" est fausse.

Remarque 1.2. *Il faut faire attention au sens des propositions. Par exemple, la proposition "$x \geqslant \mathbb{Q}$" n'a aucun sens tandis que la proposition "$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$" a un sens mais est fausse.*

2. Les ensembles

2.1. Ensembles, définitions.

Définition 2.1. *Un ensemble est une collection d'objets, sans que l'on tienne compte de l'ordre.*

Exemple 2.2. $A = \{1,2,3\} = \{3,2,1\}$.

Exemple 2.3. L'ensemble des lettres de l'alphabet : $\mathscr{A} = \{a,b,c,\dots,z\}$.

Définition 2.4. *On appelle élément d'un ensemble, tout objet de cet ensemble. Soit la proposition " l'objet a est élément de l'ensemble E".*
- *Si cette proposition est vraie, on note $a \in E$ et on lit "a est élément de E" ou bien "a appartient à E".*
- *Si elle est fausse, on note $a \notin E$ et on lit "a n'est pas élément de E" ou bien "a n'appartient pas à E".*

Exemple 2.5. Avec l'ensemble $\mathscr{A} = \{a,b,\dots,z\}$, on a 2 qui n'appartient pas à $\mathscr{A}$ ($2 \notin \mathscr{A}$) et c qui est élément de $\mathscr{A}$ ($c \in \mathscr{A}$).

Un ensemble constitué par un seul élément a est noté $\{a\}$, on dit que c'est un *singleton*.

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments, on note l'égalité de deux ensembles $E = F$ et sa négation $E \neq F$.

Un même élément peut apparaître plusieurs fois dans la liste sans changer l'ensemble. L'ensemble $\{a,b,c,a\}$ est le même que l'ensemble $\{a,b,c\}$.

Exemple 2.6. On a $\{0,1\} = \{1,0\}$ mais $\{0\} \neq \{0,1\}$.

L'ensemble vide, noté $\emptyset$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Remarque 2.7. *En gros, il y a deux façons de définir les ensembles.*
- *En extension : si on énumère tous les éléments de cet ensemble.*
  - *l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
  - *l'ensemble des rationnels* $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^{\times}\}$,
  - *l'ensemble des complexes* $\mathbb{C} = \{a + ib,\ a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}\}$.
- *Par compréhension : en se donnant la propriété P caractérisant les éléments de l'ensemble, on note*

$$E_P = \{x \in E; P(x)\},$$

et on lit "E_P est l'ensemble des x dans E tel que P(x) est vraie". En clair, x appartient à E_P si et seulement si $P(x)$ est vraie.
  - $\{n \in \mathbb{N}; 2|n\} = \{0, 2, 4, \dots\}$,
  - *Le cercle de centre O et de rayon R est caractérisé par* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R^2\}$.

2.2. **Sous ensembles, inclusion.**

Définition 2.8. *Une ensemble A est un sous ensemble d'un ensemble E, on peut aussi dire une partie de E, si tout élément de A est un élément de E. Soit la proposition "A est une partie de E"*
- *Si elle est vraie, on note* $A \subset E$ *et on lit "A est inclus dans E" ou bien "A est une partie de E" ou encore "A est contenu dans E".*
- *Si elle est fausse, on note* $A \not\subset E$.

Exemple 2.9. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On a également $\{$étudiants PHG$\} \subset \{$étudiants UJF$\}$.

Proposition 2.10. *Nous avons les propriétés suivantes.*

(i) *Par convention, l'ensemble vide* $\emptyset$ *est inclus dans tous les ensembles.*

(ii) *Tout ensemble est inclus dans lui-même,* $E \subset E$.

(iii) *Si l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F* ($E \subset F$) *et si l'ensemble F est inclus dans l'ensemble E* ($F \subset E$)*, alors l'ensemble E est égal à l'ensemble F* ($E = F$).

(iv) *Si* $E \subset F$ *et* $F \subset G$ *alors* $E \subset G$.

Remarque 2.11. *Si vous devez montrer une inclusion* $E \subset F$*, vous devez commencer votre démonstration ainsi : "Soit* $x \in E$*, montrons que* $x \in F$*", et ceci doit devenir un réflexe. Vous avez le droit de ne pas savoir faire la suite, mais ceci doit apparaître sur votre copie.*

2.3. **Règles sur les ensembles.** Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

Définition 2.12. *On a les trois opérations suivantes sur les parties de E.*
- *Réunion :* $A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- *Intersection :* $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- *Complémentaire :* $A^c = \{x \in E : x \notin A\}$.

Proposition 2.13. *Soient A, B et C trois parties de E, alors*
- $\emptyset^c = E, \quad E^c = \emptyset$,
- $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$,
- $A \cup \emptyset = A, \quad A \cup E = E$,
- $A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap E = A$,
- $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$,
- *Si* $C \subset A$ *et* $C \subset B$ *alors* $C \subset A \cap B$,
- *Si* $A \subset C$ *et* $B \subset C$ *alors* $A \cup B \subset C$,
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
- *etc.*

2.4. **Produit cartésien.** Il existe une autre manière utile de combiner les ensembles entre eux pour en former un nouveau : *le produit cartésien*

Définition 2.14. *Soient A et B deux ensembles. On appelle produit cartésien de A par B et on note $A \times B$ l'ensemble des couples formés d'un élément de A et un de B.*

$$A \times B = \{(a,b); \quad a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Exercice 2.15. *Représenter sur un dessin les ensembles $\{2,3\} \times \{1,2\}$, $\{2,3\} \times [1,2]$ et $[2,3] \times [1,2]$.*

3. Les quantificateurs

3.1. **Définition.** Quand une proposition porte sur un ou plusieurs arguments, on l'appelle un *prédicat*. Par exemple "être un oreiller" est un prédicat ; si nous le notons $\mathscr{O}$, la notation $\mathscr{O}(x)$ signifiera "x est un oreiller". De même "être plus âgé que" est un prédicat, portant lui sur deux objets ; si nous le notons $\mathscr{A}$, la notation $\mathscr{A}(x,y)$ pourra signifier "x est plus âgé que y". En mathématiques, nous connaissons quelques prédicats incontournables : $=$, $\leqslant$, $<$, sauf qu'au lieu de noter $\leqslant (x,y)$, on préfère employer la notation $x \leqslant y$.

Il existe deux quantificateurs en mathématiques : le quantificateur *universel* noté $\forall$ et qui se lit "quel que soit" ou bien "pour tout", et le quantificateur *existentiel* noté $\exists$ et qui se lit "il existe au moins". Si E est un ensemble et si $\mathscr{P}$ est un prédicat à un objet :
- la proposition "Tous les éléments de E vérifient la propriété $\mathscr{P}$" s'écrit :

$$\forall x \in E, \mathscr{P}(x),$$

  et se lit "Pour tout x élément de E, x vérifie $\mathscr{P}$." ;
- la proposition "l'un au moins des éléments de E vérifient la propriété $\mathscr{P}$" s'écrit :

$$\exists x \in E, \mathscr{P}(x),$$

  et se lit : "Il existe au moins un élément x de E tel que x vérifie $\mathscr{P}$.".

Exemple 3.1. Quelques exemples d'utilisations des quantificateurs.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ est vraie ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ est vraie ;
- soit $P : x \mapsto x^5 + 2x^3 + x + 2$, la proposition $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $P(x_0) = 0$ est vraie.

Exercice 3.2. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, montrer la proposition suivante :*

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, \quad a < \gamma < b.$$

Remarque 3.3. *Soient E et F des ensembles, dire que $E \subset F$ revient à dire que $\forall x \in E$, $x \in F$. De même, $E \not\subset F$ revient à dire $\exists x \in E$ tel que $x \notin F$.*

On peut avoir plusieurs quantificateurs dans une même proposition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x > 0, \quad x^2 \leqslant \varepsilon;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists z \in \mathbb{R}, \quad z > x + y.$$

Exercice 3.4. *Démontrer ces deux propositions.*

3.2. **Interversion des quantificateurs.** On peut toujours intervertir plusieurs quantificateurs universels $\forall$ dans une même proposition. De même, on peut toujours intervertir les quantificateurs existentiels $\exists$ entre eux.

Exemple 3.5. Les propositions "$\forall x \in [1,2], \quad \forall y \in [-1,0], \quad x \leqslant y$" et "$\forall y \in [-1,0], \quad \forall x \in [1,2], \quad x \geqslant y$" sont équivalentes.

Les propositions "$\exists x \in [1,4], \quad \exists y \in [2,3], \quad x \geqslant y$" et "$\exists y \in [2,3], \quad \exists x \in [1,4], \quad x \geqslant y$" sont équivalentes.

La permutation d'un $\forall$ et d'un $\exists$ est proscrite sans une grosse réflexion au préalable.

Exemple 3.6. "Dans toute cerise, normalement constituée, il y a un noyau". Formellement cette proposition s'écrit :

$$\forall c \text{ cerise}, \quad \exists n \text{ noyau}, \quad n \text{ est dans } c.$$

Qu'arrive-t-il si nous permutons $\forall$ et $\exists$? Essayons : "$\exists n$ noyau, $\forall c$ cerise, n est dans c". En bon français, cela donne : "Il existe un noyau qui se trouve dans toutes les cerises." !

Exemple 3.7. "Il existe une personne qui est le chef de tous les militaires" (le président de la république). Cette proposition s'écrit :

$$\exists p \text{ personne}, \quad \forall m \text{ militaire}, \quad p \text{ est le chef de } m.$$

À présent, permutons $\exists$ et $\forall$: "$\forall m$ militaire, $\exists p$ personne, p est le chef de m". En bon français, cela donne "Tout militaire a un chef.", ce qui est vrai mais beaucoup plus faible que la proposition initiale.

3.3. **Le pseudo-quantificateur existentiel $\exists!$.** Parfois on ne veut pas seulement affirmer qu'un objet existe avec certaines propriétés, mais affirmer en outre qu'il est le seul à posséder ces propriétés. La proposition "Il existe (un et) un seul élément de E qui possède la propriété $\mathscr{P}$" s'écrit en mathématiques : $\exists! x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ et se lit : "Il existe un unique x élément de E tel que x vérifie $\mathscr{P}$.".

4. Les connecteurs logiques

On appelle *connecteur logique* tout moyen de construire une proposition unique à partir d'une ou plusieurs propositions. Par exemple, "et", "ou", "si, alors" sont des connecteurs ; à partir des propositions "J'ai faim" et "Je suis malade", on peut construire une nouvelle proposition "J'ai faim et je suis malade".

Dans toute la suite, P et Q désignent des propositions.

4.1. **Négation.** On peut noter $\neg P$ (pour ma part je préfère écrire non P) la négation de P, c'est à dire la proposition qui est fausse quand P est vraie et vraie quand P est fausse.

P	non P
V	F
F	V

Exemple 4.1. La négation de $\alpha \geqslant 2$ est $\alpha < 2$.

Proposition 4.2. *La proposition "non (non P)" est équivalente à "P".*

Démonstration. On a la table de vérité suivante :

P	non P	non (non P)
V	F	V
F	V	F

$\square$

Arrêtons nous quelques instants sur la négation des quantificateurs.

La négation du quantificateur universel : les propositions "non ($\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$)" et "$\exists x \in E$, non $\mathscr{P}(x)$" sont équivalentes.

Exemple 4.3. Ces deux phrases sont équivalentes :
– "Il est faux que tout homme a les yeux bleus" - "non($\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$)" ;
– "Certains hommes n'ont pas les yeux bleus" - "$\exists x \in E$, non $\mathscr{P}(x)$".

La négation du quantificateur existentiel : les propositions "non ($\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)$)" et "$\forall x \in E$, non $\mathscr{P}(x)$" sont équivalentes.

Exemple 4.4. Ces deux phrases sont équivalentes :
– “Aucun homme n’est fidèle” / “Il est faux qu’il existe un homme fidèle” - “non($\forall x \in E$, $\mathscr{P}(x)$)” ;
– “Tout homme est infidèle” - “$\forall x \in E$, non $\mathscr{P}(x)$” ;
mais pas forcément vraies ...

En pratique, pour nier une phrase avec des quantificateurs, on réécrit cette phrase en remplaçant tous les “$\forall$” par des “$\exists$”, et tous les “$\exists$” par des “$\forall$”, puis en niant le prédicat final.

Exemple 4.5. La négation de la proposition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x > 0, \quad x^2 \leqslant \varepsilon,$$

est :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x > 0, \quad x^2 > \varepsilon.$$

4.2. **Conjonction “et”, disjonction “ou”.** La proposition “P et Q” est vraie si P et Q sont vraies, fausse dans les autres cas. Quant à la proposition “P ou Q”, elle est vraie si P est vraie ou si Q est vraie (éventuellement les deux), fausse dans le seul cas où P et Q sont fausses toutes les deux.

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Remarque 4.6. *Dans le langage usuel, il arrive que le “ou” oppose les termes qu’il relie : dans l’expression “garçon ou fille”, le “ou” est exclusif car il exclut la possibilité qu’on soit les deux. Au contraire en mathématiques, “ou” est inclusif.*

Proposition 4.7. *Voici les lois de Morgan :*
– *“non(P et Q)” et “ non P ou non Q” sont deux propositions équivalentes ;*
– *“non(P ou Q)” et “ non P et non Q” sont deux propositions équivalentes.*

Exercice 4.8. *Démontrer ces deux faits à l’aide d’une table de vérité.*

4.3. **Implication.** “$P \Rightarrow Q$” est la proposition énonçant que si P est vraie alors Q est aussi vraie. Dans le cas où cette proposition est vraie, on dit que P est une condition suffisante pour Q et que Q est une condition nécessaire pour P.

En fait, l’implication est un peu plus tordue que ça. Voici sa table de vérité : on constate que

P	Q	$P \Rightarrow Q$	non P	(non P) ou Q
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

,

la proposition “$P \Rightarrow Q$” est équivalente à la proposition “Q ou non P” et c’est exactement cette définition que l’on prend pour l’implication.

Exemple 4.9. La proposition “$x \geqslant 2 \Rightarrow x^2 \geqslant 4$” est vraie tandis que la proposition “$x^2 \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 2$” est fausse.

Exercice 4.10. *Entre les deux propositions suivantes : “$x \geqslant 0$” et “$x > 0$”, laquelle implique l’autre ?*

Remarque 4.11. *En pratique, pour montrer la vérité d'une implication "$P \Rightarrow Q$", il convient d'abord de supposer que P est vraie ; puis de montrer que sous cette hypothèse, Q est vraie. Typiquement votre démonstration commencera toujours par "Supposons que P est vraie", et ceci doit apparaître sur votre copie que vous sachiez ou non démontrer jusqu'au bout l'implication.*

La négation d'une implication "non ($P \Rightarrow Q$)" est équivalente à la proposition "P et non Q". Pour démontrer qu'une implication "$P \Rightarrow Q$" est fausse, on suppose que P est vraie et on montre que Q est fausse.

Exercice 4.12. *Montrer que la proposition "$x^2 \geqslant 4 \Rightarrow x \geqslant 2$" est fausse.*

Les propositions "$P \Rightarrow Q$" et "non $Q \Rightarrow$ non P" sont équivalentes. La proposition "non $Q \Rightarrow$ non P" est appelée *contraposée* de l'implication "$P \Rightarrow Q$".

Exercice 4.13. *Soit n un entier naturel, montrer que*

$$2^n + 1 \text{ premier } \Rightarrow n \text{ est une puissance de } 2.$$

4.4. **Équivalence.** La proposition "$P \Leftrightarrow Q$" est la proposition énonçant que P est vraie si et seulement Q et vraie. Elle est vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, fausse sinon.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Les propositions "$P \Leftrightarrow Q$" et "($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$)" sont équivalentes.

Exercice 4.14. *Démontrer l'énoncé précédent.*

Exemple 4.15. Quelques illustrations pour l'équivalence :
– $2x-3>0 \Leftrightarrow x>3/2$;
– $2+x \in \mathbb{N} \cap [0,3] \Leftrightarrow x \in \{-2,-1,0,1\}$;
– ABC triangle rectangle en $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + BC^2$;

5. RAISONNEMENT

5.1. **Raisonnement direct.** Plutôt que de faire de grands discours, illustrons ce raisonnement par plusieurs exemples.

Exemple 5.1. Montrons que $A \cap B \subset A$. Soit $x \in A \cap B$, montrons que $x \in A$. Par définition de l'intersection, on a $x \in A$ et $x \in B$, et en particulier, $x \in A$.

Exemple 5.2. Soit $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}^\times, \quad 1/n \leqslant x \leqslant 1\}$, montrons que $A =]0,1]$. Nous allons raisonner par double inclusion. Tout d'abord, montrons que $A \subset]0,1]$. Soit $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}^\times$ tel que $1/n \leqslant x \leqslant 1$. Comme $1/n > 0$, on en déduit que $0 < x \leqslant 1$, c'est à dire $x \in]0,1]$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in]0,1]$, prenons $n = [1/x]+1$, où $[\cdot]$ est la fonction partie entière, on a alors $n \in \mathbb{N}^\times$ et $n \geqslant 1/x$, c'est à dire $1/n \leqslant x$. On a donc bien $x \in A$.

Exercice 5.3. *Soit n un entier naturel, montrer que n pair $\Rightarrow n^2$ pair.*

5.2. **Raisonnement par contraposée.** Le principe est le suivant : pour montrer une implication, on montre sa contraposée.

Exemple 5.4. Soit n un entier naturel, montrons que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair. La contraposée de l'implication précédente est n impair $\Rightarrow n^2$ impair. Montrons que cette proposition est vraie. Supposons que l'entier n est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. On a ainsi $n^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, ce qui prouve que n^2 est un nombre impair car $2k^2+2k$ est un entier naturel.

Exercice 5.5. *Soient x et y deux réels, montrer que*

$$x \neq y \Longrightarrow x^3 + x \neq y^3 + y.$$

5.3. **Raisonnement par l'absurde.** Le principe du raisonnement par l'absurde est le suivant : pour montrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on tâche d'en tirer une contradiction, par exemple la vérité de deux propositions Q et "non Q" ; ceci allant à l'encontre de l'axiome du tiers exclu, on en déduit que l'hypothèse selon laquelle P est fausse, est fausse, c'est à dire que P est vraie.

Exemple 5.6. Nous avons affirmer précédemment que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, nous allons à présent le montrer.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et choisissons p, q entiers naturels tels que $\sqrt{2}$ s'écrive sous la forme irréductible p/q, c'est à dire que p et q sont premiers entre eux, c'est à dire encore qu'ils n'ont pas de diviseur commun plus grand que un. L'égalité $\sqrt{2} = p/q$ entraîne

$$p^2 = 2q^2.$$

L'entier p^2 est donc pair, ce qui entraîne que l'entier p est pair (voir exemple 5.4). Il existe donc un entier k tel que $p = 2k$. Mais alors on obtient

$$4k^2 = 2q^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2k^2.$$

L'entier q^2 est donc pair, et en conséquence l'entier q également. On arrive donc à la conclusion que deux divise p et q alors qu'ils sont premiers entre eux. Ceci est une contradiction.

Exercice 5.7. *Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

5.4. **Raisonnement par disjonction de cas.** Pour montrer qu'une proposition est vraie, on peut être amené à considérer différents cas.

Exemple 5.8. Montrons qu'il existe a et b irrationnels tels que a^b est rationnel.

Rappelons (voir exemple 5.6) que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On a deux cas, soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, soit il ne l'est pas et il est alors irrationnel. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, les nombres $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ conviennent. Sinon, les nombres $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ sont irrationnels et a^b vaut 2 qui est rationnel.

Exercice 5.9. *Montrer que si p est un nombre premier supérieur ou égal à cinq alors* 24 *divise* $p^2 - 1$.

5.5. **Raisonnement par récurrence.** Soit n_0 un entier naturel et soit $(\mathscr{P}_n)_{n \geqslant n_0}$, une suite infinie de propositions. Supposons qu'on veuille démontrer la proposition : pour tout n entier supérieur ou égal à n_0, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie. Le raisonnement par récurrence est une technique générale de démonstration adaptée à ce problème.

Principe de la récurrence (faible) : n_0 étant un entier naturel fixé,
– Initialisation : si $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie ;
– Hérédité : et si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, la vérité de $\mathscr{P}_n$ implique la vérité de $\mathscr{P}_{n+1}$;
alors la proposition : "$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0, \quad \mathscr{P}_n$" est vraie.

Exemple 5.10. Montrons que pour tout entier naturel n, l'entier 4^n+5 est un multiple de trois.

Soit $P(n)$ le prédicat de récurrence "4^n+5 est multiple de trois". Montrons que $P(0)$ est vraie. On a $4^0+5=6=3\cdot 2$, donc $P(0)$ est vraie. Montrons à présent l'hérédité. Soit n un entier naturel, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. Nous avons

$$4^{n+1}+5=4\cdot 4^n+5=4(4^n+5-5)+5.$$

Comme $P(n)$ est vraie, il existe un entier k_n tel que $4^n+5=3k_n$. Il vient alors

$$4^{n+1}+5=4(3k_n-5)+5=12k_n-15=3(4k_n-5).$$

L'entier $4^{n+1}+5$ est donc bien un multiple de trois. Par le principe de récurrence, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier n.

Il est parfois nécessaire dans des raisonnements par récurrence, d'utiliser une version plus forte pour l'hérédité.

Principe de la récurrence (forte) : n_0 étant un entier naturel fixé,
– Initialisation : si $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie ;
– Hérédité : et si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, la vérité de $(\mathscr{P}_k)_{n_0\leqslant k\leqslant n}$ implique la vérité de $\mathscr{P}_{n+1}$;
alors la proposition : "$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant n_0,\quad \mathscr{P}_n$" est vraie.

Exemple 5.11. Pour démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à deux possède un diviseur premier.

On démontre que deux possède un diviseur premier qui est lui même.

Soit n un entier supérieur ou égal à deux, on supose que tous les entiers d compris entre deux et n possèdent un diviseur premier et on cherche à prouver qu'il en est de même de $n+1$. Ou bien $n+1$ est premier alors il possède un diviseur premier qui est lui même, ou bien $n+1$ est composé et il existe deux entiers d et d' compris entre deux et n tels que $n+1=dd'$. Alors d et d' possèdent des diviseurs premiers qui sont aussi diviseurs de $n+1$.

6. Quelques exercices

Exercice 6.1. *Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.*
(i) $\forall i\in\{1,2,3\},\ \exists a\in\mathbb{R},\ f_i(a)=1$;
(ii) $\exists i\in\{1,2,3\},\ \forall a\in\mathbb{R},\ f_i(a)=1$;
(iii) $\exists a\in\mathbb{R},\ \forall i\in\{1,2,3\},\ f_i(a)=1$;
(iv) $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall i\in\{1,2,3\},\ f_i(a)=1$.

Exercice 6.2. *Dire si (b) est une condition nécessaire, suffisante ou bien nécessaire et suffisante de (a).*

(1) (a) $x^2\geqslant x$; (b) $x\geqslant 1$;
(2) (a) $\forall n\in\mathbb{N},$; (b) $x\geqslant 10^{10}$.

Exercice 6.3. *On considère l'équation suivante notée (E) :*

$$(x^2+2x-24)(2x^2-13x+15)=0.$$

Soient $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E), A et B les ensembles des solutions des équations $x^2+2x-24=0$ et $2x^2-13x+15=0$. Dire si les phrases mathématiques suivantes sont vraies ou fausses :

$$\mathscr{S}=A\cap B,\quad \mathscr{S}=A\cup B,\quad \mathscr{S}\subset\mathbb{Z},\quad \mathscr{S}\subset\mathbb{Q},\quad \mathscr{S}\cap]0,2[=\emptyset.$$

Exercice 6.4. *Montrer que pour tout entier n : $2^n>n$.*

RÉFÉRENCES

[1] C. Bertault : *cours de mpsi chap.*0, page web : `http ://bkristof.free.fr/`.

[2] O. Lablée : *notes de cours manuscrites pour le MAT111b*.