Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Portfoliooptimierung unter Restriktionen

Dirk Stöppel

Matrikelnummer 357269

Datum: 25.09.2014

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich Mathematik/Informatik

Institut für Mathematische Statistik

Betreuer: PD Dr. Volkert Paulsen

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Portfoliooptimierung ist heutzutage ein zentraler Bestandteil der Finanzmathematik. Als Portfolio bezeichnet man eine Zusammensetzung von verschiedenen, in der Regel risikobehafteten Finanzgütern. Dies können Aktien, Derivate oder Spareinlagen sein, aber auch Immobilien oder Waren sind als Investitionsmöglichkeiten zugelassen. Als Investor ist man nun an der bestmöglichen Zusammensetzung dieser Finanzgüter interessiert. Die optimale Zusammensetzung ist dabei allerdings vom individuellen Investor abhängig: Manche Investoren bevorzugen eine möglichst sichere Geldanlage, andere möchten eine hohe Rendite, die jedoch nur in Verbindung mit einer größeren Varianz erreicht werden kann. Ebenfalls macht es einen Unterschied, ob der Investor sein erwirtschaftetes Vermögen komplett zu einem weit in der Zukunft liegenden Termin ausgezahlt haben möchte oder bereits ab heute kontinuierlich einen Teil seines Vermögens aufbraucht, um seinen Konsumwünschen nachgehen zu können.
Angesichts der derzeitigen Niedrigzinsphase ist es momentan besonders ratsam, nicht mehr ausschließlich in zinsschwache risikolose Geldanlagen zu investieren, sondern nach Alternativen Ausschau zu halten. Damit ist das Thema Portfoliooptimierung nicht nur für Finanzexperten, sondern auch für Kleinanleger interessant, die zum Beispiel ihren Lebensabend finanziell absichern möchten.

Harry Markowitz gilt als der Begründer der modernen Portfoliotheorie. Seine 1952 veröffentlichte Arbeit über die Optimierung von Portfolios wurde 1990 sogar mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. Seitdem wurden seine Modelle immer weiter entwickelt und an die Realität angepasst. Unter anderem wurden aus den zunächst zeitdiskreten Modellen zeitstetige Modelle entwickelt.
Grundsätzlich sollte bei der Wahl eines Portfolios nicht nur auf die erwartete Rendite, sondern auch auf das damit verbundene Risiko geachtet werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dieses Risiko zu quantifizieren und in die Bewertung des Portfolios eingehen zu lassen. Markowitz verwendete in seiner ersten Arbeit das heute noch weit verbreitete μ-σ-Prinzip, bei dem der Wert einer (meistens linearen) Funktion aus der erwarteten Rendite μ und der Standardabweichung σ optimiert werden soll. Unter der Annahme eines risikoaversen Investors wird die Funktion so gewählt, dass sie monoton steigend in μ und monoton fallend in σ ist. Wir werden

in dieser Arbeit nicht das μ-σ-Prinzip verwenden, sondern über Nutzenfunktionen argumentieren. Dadurch lassen sich auch spezielle Präferenzen der Investoren modellieren.

Aufgrund seiner zentralen Bedeutung wurden über das Thema Portfoliooptimierung schon zahlreiche Arbeiten verfasst. Diese Arbeit unterscheidet sich von den meisten anderen dadurch, dass wir restriktive Annahmen an den Finanzgütern betrachten. Wie wir später noch sehen werden, lässt sich die vergleichsweise einfache Martingalmethode in diesem Fall nicht anwenden, so dass wir einen auf der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung basierenden Ansatz wählen müssen. Hierbei wird eine partielle Differentialgleichung für die sogenannte Wertfunktion hergeleitet. Aus der Lösung der Differentialgleichung lässt sich dann wiederum die optimale Strategie berechnen.

2. Grundlagen

2.1. Finanzmarktmodell

In der gesamten Arbeit gehen wir von einem endlichen Handelszeitraum $[0,T]$ mit $0 < T < \infty$ aus. Es wird stets ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ zugrunde gelegt, wobei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Wiener-Filtration ist. Dies ist eine Filtration, die die usual conditions erfüllt und im gewissen Sinne von einem Wiener-Prozess erzeugt wird.

Definition 2.1. *Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heißt vollständig, wenn $\mathcal{F}_0$ (und damit auch $\mathcal{F}_t$ für jedes $t \geq 0$) sämtliche Nullmengen enthält.*
Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heißt rechtsseitig stetig, wenn $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{u>t} \mathcal{F}_u$ für jedes $t \geq 0$.
Eine Filtration erfüllt die usual conditions, wenn sie rechtsseitig stetig und vollständig ist.

Eine Wiener-Filtration lässt sich zum Beispiel auf folgende Weise konstruieren (vgl. [Pau12] oder [Spr13]):

Definition 2.2. *Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein n-dimensionaler Wiener-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Wir setzen*

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(W_s : s \leq t)$$

für alle $0 \leq t \leq T$. Durch

$$\mathcal{F}_{t+}^0 := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^0$$

erhalten wir eine rechtsseitig stetige Filtration.
Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}$ die Menge aller Teilmengen von Nullmengen bezüglich $\mathbb{P}$, also

$$\mathcal{N} := \{A \subset \Omega : \textit{Es existiert ein } B \in \mathcal{F}_T^0 \textit{ mit } \mathbb{P}(B) = 0 \textit{ und } A \subset B\}.$$

Durch

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_{t+}^0 \cup \mathcal{N}) \quad , t \geq 0$$

erhalten wir eine vollständige Filtration, die ebenfalls rechtsseitig stetig ist und damit die usual conditions erfüllt. Außerdem ist W ein Wiener-Prozess bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist zudem die kleinste Filtration, die die usual conditions erfüllt und bezüglich der W ein Wiener-Prozess ist, und wird deshalb Wiener-Filtration genannt.

Wir werden ab jetzt immer einen n-dimensionalen Wiener-Prozess W, der als Quelle des Zufalls dient, und die dazugehörige Wiener-Filtration voraussetzen.
Unser Finanzmarktmodell besteht aus $n+1$ Finanzgütern. Wir gehen von einem risikolosen Finanzgut, also einem Geldmarktkonto, sowie n risikobehafteten Finanzgütern aus. Die Anzahl der risky assets ist also gleich der Dimension des zugrunde liegenden Wiener-Prozesses. Dies ist keine Einschränkung, denn wir können später die Menge der möglichen Handelsstrategien begrenzen. Möchten wir etwa nur m handelbare risikobehaftete Finanzgüter, mit $m < n$, so wird die Menge der möglichen Handelsstrategien später entsprechend definiert. Das Gleichsetzen der Anzahl der Finanzgüter mit der Dimension des Wiener-Prozesses hat den Vorteil, dass wir eine quadratische Volatilitätsmatrix erhalten.
Da es sich bei risikobehafteten Finanzgütern oft um Aktien handelt, werden wir ab jetzt häufig einfach von Aktien sprechen. Für Bonds oder andere finanzmathematische Optionen gelten die Aussagen natürlich genauso.
Den Preisprozess des Geldmarktkontos bezeichnen wir mit $(\beta_t)_{0\leq t\leq T}$. Wir setzen voraus, dass der Preisprozess adaptiert ist, bei 0 beginnt, strikt positiv ist und absolut stetige Pfade hat. Folglich lässt sich $(\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ darstellen als

$$\beta(t) = \exp(\int_0^t r(s)\ ds) \quad ,0 \leq t \leq T, \tag{2.1}$$

mit einem stochastischen Prozess $(r_t)_{0\leq t\leq T}$. Der Prozess $(r_t)_{0\leq t\leq T}$ bezeichnet die short rate, die je nach Modell stochastisch, deterministisch oder sogar einfach konstant ist. In jedem Fall muss sie aber progressiv messbar sein und die Integritätsbedingung

$$\int_0^T |r(s)|\ ds < \infty$$

$\mathbb{P}$-fast sicher erfüllen.
Aus (2.1) folgt, dass $(\beta_t)_{0\leq t\leq T}$ die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt \tag{2.2}$$

Die Preise der n risikobehafteten Finanzgüter zum Zeitpunkt t werden durch $S_1(t), ..., S_n(t)$ für alle $0 \leq t \leq T$ beschrieben. Die Prozesse $S_1(\cdot), ..., S_n(\cdot)$ seien strikt positive Semimartingale.

Definition 2.3. *Ein stochastischer Prozess X mit Werten in $\mathbb{R}^d$ heißt Semimartingal, wenn gilt:*

- *X ist adaptiert,*
- *die Pfade von X sind càdlàg, also rechtsseitig stetig und die linksseitigen Limites existieren,*
- *es existiert eine Zerlegung $X = X_0 + M + A$, wobei für die einzelnen Summanden gilt:*
  - *X_0 ist $\mathcal{F}_0$-messbar,*
  - *M ist ein lokales stetiges Martingal mit $M(0) = 0$,*
  - *A ist ein Prozess mit endlicher Variation mit $A(0) = 0$.*

Wir werden in dieser Arbeit ausschließlich stetige Semimartingale betrachten, und werden deshalb ab sofort bei der Verwendung des Begriffes "Semimartingal" die Stetigkeit voraussetzen.
Wie in [Pau12] beschrieben, lässt sich aus diesen Annahmen für die risky assets eine Dynamik für die Preisprozesse herleiten:

$$dS_i(t) = S_i(t)\ (\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)) \tag{2.3}$$

für alle $0 \le t \le T$ und $i = 1,...,n$. Dabei sind der Driftvektor $\mu(t) = (\mu_1(t),...,\mu_n(t))$ und die Einträge der Volatilitätsmatrix $\sigma_{ij}(t)$, für $1 \le i,j \le n$, progressiv messbare Prozesse. Außerdem erfüllen sie $\mathbb{P}$-fast sicher die Integritätsbedingungen

$$\int_0^T |\mu_i(t)|\ dt < \infty$$

und

$$\int_0^T \sigma_{ij}^2(t)\ dt < \infty$$

für alle $1 \le i,j \le n$.
Nach Voraussetzung ist unsere Volatilitätsmatrix bereits quadratisch. Damit es keine Arbitragemöglichkeiten gibt und das Modell vollständig ist (zumindest wenn es keine Restriktionen gibt), setzen wir voraus, dass sie zusätzlich zu jedem Zeitpunkt $0 \le t \le T$ regulär ist.

2.2. Handelsstrategien und Vermögensprozess

Wir betrachten einen Investor mit Anfangskapital $x > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Gehandelt werden darf kontinuierlich zu jedem Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$. Wir bezeichnen mit $H(t) = (H_1(t), ..., H_n(t)$ die Anzahl der risikobehafteten Güter, die der Investor zum Zeitpunkt t hält. Da wir nur selbstfinanzierende Handelsstrategien betrachten, sind die Anteile am Geldmarktkonto $H_0(t)$ automatisch festgelegt. Für das Gesamtvermögen X gilt dann

$$X(t) = H_0(t) \cdot \beta(t) \ + \ \sum_{i=1}^{n} H_i(t) \cdot S_i(t) \tag{2.4}$$

für alle $0 \leq t \leq T$.
Für manche Rechnungen ist es einfacher, wenn man nicht die die absoluten Anteile H_i beziehungsweise $H_i \cdot S_i$ betrachtet, sondern den relativen Anteil des in ein Gut investierten Vermögens am Gesamtvermögen. Deswegen führen wir noch die folgende Notation ein:

$$\pi_i(t) := \frac{H_i(t) \cdot S_i(t)}{X(t)}$$

für alle $1 \leq i \leq n$.
Für den relativen Anteil des ins Geldmarktkonto investierte Vermögens gilt dann

$$\begin{aligned}
\pi_0(t) \quad &:= \quad \frac{H_0(t) \cdot \beta(t)}{X(t)} \\
&= \quad \frac{X(t) - \sum\limits_{i=1}^{n} H_i(t) \cdot S_i(t)}{X(t)} \\
&= \quad 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{H_i(t) \cdot S_i(t)}{X(t)} \\
&= \quad 1 - \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t).
\end{aligned}$$

Die relativen Anteile $\pi_0, ..., \pi_n$ können durchaus auch Werte außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ annehmen. Ist zum Beispiel $\pi_0 < 0$, so entspricht dies einer Kreditaufnahme und $\pi_i(t) < 0$ entspricht dem Short Selling des i-ten Finanzgutes. Sollen Kreditaufnahmen, Short Selling oder Ähnliches nicht erlaubt sein, so wird dies in der Menge der erlaubten Handelsstrategien modelliert.
Die Menge der erlaubten Handelsstrategien, auch Kontrollmenge genannt, bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$. Die Elemente dieser Menge heißen Kontrollstrategien und müssen gewisse Integritätsbedingungen erfüllen, die von Modell zu Modell unterschiedlich sein können. Daher wird die Kontrollmenge oft erst bei der Beschreibung eines konkreten Modells genauer beschrieben.

Da wir nur selbstfinanzierende Handelsstrategien betrachten, der Vermögenszuwachs also nur durch den Handel der Finanzgüter entsteht, erfüllt das Gesamtvermögen stets die Dynamik

$$dX(t) = H_0(t)d\beta(t) \; + \; \sum_{i=1}^{n} H_i(t)dS_i(t) \tag{2.5}$$

Mit (2.2) und (2.3) lässt sich dies weiter umformen:

$$\begin{aligned}
dX(t) &= H_0(t)\beta(t)r(t)dt \; + \; \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)) \\
&= \Big(H_0(t)\beta(t)r(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)\mu_i(t)\Big)dt \; + \; \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)\sigma_i(t)dW(t) \\
&= \Big(H_0(t)\beta(t)r(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)r(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)(\mu_i(t) - r(t))\Big)dt \\
&\quad + \; \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)\sigma_i(t)dW(t) \\
&= \Big(X(t)r(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)(\mu_i(t) - r(t))\Big)dt \\
&\quad + \; \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)\sigma_i(t)dW(t) \\
&= X(t)\Big(\Big(r(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t))\Big)dt \; + \; \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_i(t)dW(t)\Big)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Wir werden im Folgenden oft die Notation $X^{x,\pi}$ oder X^{π} benutzen für einen Vermögensprozess, der bei $x > 0$ startet und durch die relative Handelsstrategie $(\pi(t))_{0\leq t\leq T} = (\pi_1(t), ..., \pi_n(t))_{0\leq t\leq T}$ charakterisiert wird. Alternativ benutzen wir die Notation $X^{x,H}$, wenn wir eine Handelsstrategie H gegeben haben.
Selbst wenn man etwaige Restriktionen wie das Verbot einer Kreditaufnahme außer Acht lässt, darf man nicht alle progressiv messbaren $\mathbb{R}^n$-wertigen Prozesse $(\pi(t))_{0\leq t\leq T}$ zulassen, weil es sonst bei selbst einfachen Modellen für die Aktienpreisentwicklung zu Arbitragemöglichkeiten kommt. Deswegen betrachtet man nur sogenannte zulässige Handelsstrategien.

Definition 2.4. *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $(\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n)$ *heißt zulässig, wenn der zugehörige Vermögensprozess* $X^{x,\pi}$ *positiv ist, das heißt* $X_t^{x,\pi} \geq 0$ *für alle* $0 \leq t \leq T$.

In der Literatur gibt es auch schwächere Bedingungen für die Zulässigkeit von Handelsstrategien, nämlich die Existenz eines $c \in \mathbb{R}$, so dass der Vermögensprozess stets größer oder gleich $c \cdot \beta(t)$ ist. Wir haben das c als feste Schranke (unabhängig von der Wahl der Handelsstrategie) $c = 0$ gewählt. Damit ist sichergestellt, dass wir

uns zu keinem Zeitpunkt verschulden. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn wir im nächsten Abschnitt die Nutzenfunktionen einführen.
Des Weiteren werden wir nur Handelsstrategien zulassen, die die Integritätsbedingung

$$\int_0^T ||\zeta(t)\sigma(t)||^2 dt \;+\; \int_0^T |\zeta(t)^{\mathrm{T}}(\mu(t) - r(t)\mathbb{1})| dt < \infty$$

$\mathbb{P}$-fast sicher erfüllen, wobei

$$\zeta(t) = (H_1(t)S_1(t), ..., H_n(t)S_n(t))$$

für alle $0 \leq t \leq T$.

2.3. Nutzenfunktionen

Es gibt verschiedene Kriterien, nach denen man die Güte einer Handelsstrategie beziehungsweise des daraus resultierenden Vermögens bewerten kann. Die einfachste Möglichkeit ist es, den erwarteten Gewinn oder die erwartete Rendite zu betrachten. In diesem Fall lässt man die Varianz außen vor. Da der gewöhnliche Investor aber risiko-avers ist, entspricht diese Methode nur sehr entfernt der Realität. Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen ist dieses Kriterium auch recht uninteressant, weil die optimale Strategie einfach darin besteht, möglichst viel Vermögen in die renditemaximierenden Aktien zu stecken. Sofern erlaubt, wird durch einen möglichst hohen Kredit noch mehr Geld für die Investition in die Aktien bereitgestellt.

Eine weitere Möglichkeit ist es, eine Kombination aus der Rendite μ und der Standardabweichung σ zu optimieren. Man nimmt hier als zu maximierenden Term meistens eine lineare Kombination $\mu - b \cdot \sigma$, mit $b > 0$. Die unterschiedlichen Risikobereitschaften der Investoren spiegelt sich dann in unterschiedlichen $b \in \mathbb{R}^+$ wider.
Dieses Problem wurde zuerst durch Harry Markowitz im Jahre 1952 untersucht (nachzulesen in [Mar52]). Im Jahre 1990 bekam er dafür sogar den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Seine damaligen Modelle wurden natürlich von anderen Wissenschaftlern weiterentwickelt, die Idee der μ-σ-Optimierung ist aber bis heute aktuell.

Wir verwenden in dieser Arbeit ein anderes Kriterium zur Bestimmung der Güte einer Handelsstrategie, nämlich den erwarteten Nutzen. Die Idee ist, mit Hilfe einer Nutzenfunktion jedem möglichen Endvermögen den daraus resultierenden Nutzen zuzuordnen, und anschließend die Handelsstrategie so zu wählen, dass der erwartete Nutzen maximal wird. Der Grad der Risikoaversion des Investors wird dabei durch die Nutzenfunktion modelliert. Zum Vergleich mit der μ-σ-Optimierung gibt es so mehr Wahlmöglichkeiten für die Risiko-Einstellung des Investors, weil wir in der Wahl der Nutzenfunktion (fast) frei sind.

Definition 2.5. *Eine stetige Funktion $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt Nutzenfunktion, wenn gilt:*

- *U ist monoton steigend,*
- *U ist strikt konkav,*
- *U ist stetig differenzierbar,*
- *U erfüllt die Inada-Bedingungen, das heißt*
  - $\lim_{x \searrow 0} U'(x) = \infty$ *und*
  - $\lim_{x \to \infty} U'(x) = 0.$

Die Voraussetzung der Monotonie ist sinnvoll, weil mit einem steigenden Vermögen immer ein steigender Nutzen einhergeht. Die Konkavität, also das Fallen der Steigung, bedeutet einen immer geringer werdenden Nutzengewinn pro Vermögenszuwachs, je mehr Vermögen man bereits hat.
Die Inada-Bedingungen sagen, dass der Nutzengewinn pro zusätzlicher Geldeinheit gegen unendlich strebt je geringer das eigene Vermögen ist, beziehungsweise gegen 0 geht je höher das Vermögen ist. Im zweiten Fall ist der Investor von seinem bisherigen Vermögen bereits gesättigt, man spricht daher vom Sättigungseffekt.
Die wichtigsten Beispiele für Nutzenfunktionen sind:

Beispiel 2.6.

- *Logarithmische Nutzenfunktion:*

$$U(x) = log(x)$$

  für $x \in (0, \infty)$

- *Potenz-Nutzenfunktion oder Power-Nutzen:*

$$U(x) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha}$$

für ein $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$ *und* $x \in (0, \infty)$

- *Exponentielle Nutzenfunktion:*

$$U(x) = -\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha x)$$

für ein $\alpha \in (0, \infty)$ *und* $x \in (0, \infty)$

Bei der Potenz- und der exponentiellen Nutzenfunktion kann man den Definitionsbereich noch durch die 0 erweitern. Bei diesen beiden Nutzenfunktionen gibt es zusätzlich zu dem charakteristischen Term x^α beziehungsweise $\exp(-\alpha x)$ noch einen Vorfaktor $\frac{1}{\alpha}$. Dieser hat auf die Auswahl eines optimalen Portfolios keinen Einfluss, zumindest so lange man das Modell nicht variiert (zum Beispiel indem man eine zusätzliche Nutzenfunktion für den Konsum innerhalb des Zeitraums $[0, T]$ einführt). Er dient dazu, den bei der Ableitung des charakteristischen Terms auftauchenden Faktor wegzukürzen.

2.4. Das stochastische Kontrollproblem

Nachdem wir die Nutzenfunktionen eingeführt haben, können wir nun erstmals beschreiben, was wir eigentlich genau bei der Portfoliooptimierung maximieren wollen. Bei der Basisversion des stochastischen Kontrollproblems, auch Merton-Problem genannt, entnehmen wir während des Zeitraums $(0, T)$ keinerlei Vermögen. Wir betrachten also nur die Menge aller möglichen, das heißt durch erlaubte Handelsstrategien erreichbare Endvermögen zum Zeitpunkt T. Unter diesen möglichen Endvermögen suchen wir nun das mit dem größten erwarteten Nutzen. Wir versuchen also unter der Menge aller erlaubten Kontrollstrategien z den Wert

$$\mathbb{E}\ U(X_T^z)$$

zu maximieren.
Wir schränken die Kontrollmenge dabei ein auf

$$\mathcal{A} := \{(z(t))_{0 \le t \le T} :\ X_T^{x,z} \ge 0,\ \mathbb{E}\ U^-(X_T^{x,z}) < \infty\}$$

Die zweite Bedingung ist erforderlich, um sicherzustellen, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}\ U(X_T^{x,z})$ auch existiert. Dies ist zum Beispiel bei der logarithmischen Nutzenfunktion wichtig, dessen Wertebereich aus den gesamten reellen Zahlen besteht.
Gibt es noch zusätzliche Restriktionen, wie zum Beispiel das Verbot von Kreditaufnahmen oder Short-Selling, so wird der Prozess z in $\mathcal{A}$ dementsprechend weiter

eingeschränkt.

Eine Erweiterung dieses Kontrollproblems erhält man, wenn man zusätzlich noch einen Konsum während des Zeitraums $(0, T)$ erlaubt. Dieser wird durch einen sogenannten Konsumprozess modelliert.

Definition 2.7. *Ein nicht-negativer, progressiv messbarer Prozess c, der die Bedingung*

$$\int_0^T c(t)dt < \infty$$

$\mathbb{P}$-fast sicher erfüllt, heißt Konsumprozess.

Der Konsum erfolgt dabei stetig mit der Zeit.
Natürlich wird durch den Konsum während des Zeitraums $(0, T)$ auch der Vermögensprozess und insbesondere das Endvermögen beeinflusst. Damit muss die Formel für die Dynamik des Vermögens (2.5) modifiziert werden zu

$$dX(t) = H_0(t)d\beta(t) \; + \; \sum_{i=1}^{n} H_i(t)dS_i(t) \; - \; c(t)dt. \tag{2.7}$$

Die Gleichung (2.6) ändert sich somit zu

$$X(t) = \Big(X(t)\Big(r(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t))\Big) - c(t)\Big)dt \; + \; X(t)\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_i(t)dW(t) \tag{2.8}$$

Der Vermögensprozess wird somit auch häufig mit $X^{x,\pi,c}$ bezeichnet.

Zusätzlich zum Nutzen des Endvermögens wird nun noch der Nutzen des Konsums miteinbezogen. Dazu nimmt man eine zweite Nutzenfunktion U_2 und versucht den Term

$$\mathbb{E}\,\Big(\int_0^T U_2(c(t))dt \; + \; U_1(X_T^{x,z,c})\Big)$$

zu maximieren. Es wird hier also nicht nur eine optimale Handelsstrategie, sondern zusätzlich noch den optimalen Konsumprozess gesucht. Demzufolge besteht die Kontrollmenge $\mathcal{A}$ aus Paaren (z, c) mit einer Handelsstrategie z und einem Konsumprozess c:

$$\mathcal{A} := \{(z(t), c(t))_{0 \le t \le T} : X_t^{x,z,c} \ge 0, \; \mathbb{E}\; U_1^-(X_T^{x,z,c}) < \infty, \; \mathbb{E}\int_0^T U_2^-(c(t))dt < \infty\}$$

Auch hier gilt, dass die Kontrollmenge durch Restriktionen weiter eingeschränkt werden kann.

Es besteht bei diesem Problem auch die Möglichkeit, für den Konsum eine zeitabhängige Nutzenfunktion zu benutzen. Dies ist eine Funktion U, die sowohl von der Höhe des Konsums als auch von der Zeit abhängt, und für die gilt, dass $U(\cdot,t)$ für jedes $t \in [0,T]$ eine "normale" Nutzenfunktion bildet.

2.5. Die Martingalmethode

Viele stochastische Kontrollprobleme lassen sich mithilfe der Martingalmethode vergleichsweise einfach lösen. Die Martingalmethode ist aber in der Regel nicht anwendbar, wenn wir Restriktionen haben! Dennoch soll dieses Verfahren hier vorgestellt werden. Zum Einen werden wir sehen, an welchem Punkt die Martingalmethode beim Kontrollproblem mit Restriktionen scheitert, zum Anderen erhalten wir Vergleichs-/Kontrolllösungen für den Fall ohne Restriktionen.
Die Grundidee der Martingalmethode ist das Aufteilen des Problems in ein statisches und ein dynamisches Problem. Dies bedeutet, dass man zunächst das optimale Endvermögen berechnet und anschließend mit welcher Handelsstrategie man dieses Endvermögen erreichen kann.
Die folgenden Ausführungen basieren auf dem Skript von Hochreiter, Pflug und Paulsen ([Hoc05]). Man findet zu diesem Thema auch leicht noch weitere Literatur. Wir betrachten hier das einfache Merton-Problem, also den Fall ohne Konsum vor dem Endzeitpunkt. Zunächst müssen wir noch ein paar Prozesse und Bedingungen einführen beziehungsweise fordern.

Definition 2.8. *Der $\mathbb{R}^n$-wertige Prozess $(\theta(t))_{0\leq t\leq T}$, definiert durch*

$$\theta(t) := \sigma(t)^{-1}(\mu(t) - r(t)\mathbb{1})$$

für alle $0 \leq t \leq T$, heißt Marktpreis des Risikos.

Wir setzen voraus, dass der Marktpreis des Risikos die Integritätsbedingung

$$\int_0^T ||\theta(t)||^2 dt < \infty \tag{2.9}$$

$\mathbb{P}$-fast sicher erfüllt und zusätzlich die Bedingung

$$\mathbb{E}\Big(\exp\big(-\int_0^T \theta(t)dW(t) \;-\; \frac{1}{2}\int_0^T ||\theta(t)||^2 dt\big)\Big) = 1 \tag{2.10}$$

gilt. Dann ist $(L_t)_{0\leq t\leq T}$, definiert durch

$$L(t) = \exp\Big(-\int\limits_0^t \theta(s)dW(s) \;-\; \frac{1}{2}\int\limits_0^t ||\theta(s)||^2 ds\Big), \tag{2.11}$$

ein Martingal. Wegen (2.9) gilt

$$\mathbb{P}(L(T) > 0) = 1,$$

und (2.10) entspricht $\mathbb{E}L(t) = 1$. Damit ist $(L(t))_{0\leq t\leq T}$ ein positives, gleichgradig integrierbares Martingal und somit ein Dichtequotientenprozess eines zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = L(t) \tag{2.12}$$

Der Satz von Cameron, Martin und Girsanov impliziert, dass

$$W'(t) := W(t) + \int\limits_0^t \theta(s)ds, \tag{2.13}$$

mit $0 \leq t \leq T$, ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{Q}$ ist.
Der Preisprozess des Aktienpreises (2.3) lässt sich nun umschreiben zu

$$\begin{aligned}
dS_i(t) &= S_i(t)\,\Big(\mu_i(t)dt \;+\; \sigma_i(t)dW(t)\Big)\\
&= S_i(t)\,\Big(\mu_i(t)dt \;+\; \sigma_i(t)dW'(t) \;-\; \sigma_i(t)\theta(t)dt\Big)\\
&= S_i(t)\,\Big(\mu_i(t)dt \;+\; \sigma_i(t)dW'(t) \;-\; (\mu_i(t) - r(t))dt\Big)\\
&= S_i(t)\,\Big(r(t)dt \;+\; \sigma_i(t)dW'(t)\Big)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$\mathbb{Q}$ ist also das äquivalente Martingalmaß zu $\mathbb{P}$. Das bedeutet insbesondere, dass sich mit $\mathbb{Q}$ der faire Preis für einen Claim C bestimmen lässt. Sei C dazu eine $\mathcal{F}_t$-messbare Abbildung mit $0 \leq t \leq T$ und $V_0(C)$ der faire Preis dieses Claims zum Anfangszeitpunkt. Dann gilt

$$V_0(C) = \mathbb{E}^*\beta(t)^{-1}C, \tag{2.15}$$

wobei $\mathbb{E}^*$ der Erwartungswert bezüglich $\mathbb{Q}$ ist.
Mit

$$H_0(t)\beta(t) = X(t) - \sum_{i=1}^{n} H_i(t)S_i(t)$$

lässt sich die Dynamik des Vermögensprozesses (2.5) umschreiben zu

$$dX^{x,H}(t) = \Big(X^{x,H}(t) - \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(t)\Big) r(t)dt \ + \ \sum_{i=1}^{n} \zeta_i(t)\Big(\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)\Big) \quad (2.16)$$

mit $\zeta(t) = (H_1(t)S_1(t), ..., H_n(t)S_n(t))$ wie zuvor. Zusammen mit der Anfangsbedingung $X^{x,H}(0) = x$ erhält man so eine eindeutig lösbare stochastische Differentialgleichung. Diese löst man am einfachsten, indem man den Prozess $Y(t) := \beta^{-1}(t)X^{x,H}(t)$ betrachtet. Wegen

$$\begin{aligned} d\beta^{-1}(t) &= d \ \exp(\int_0^t -r(s)ds) \\ &= -r(t)\exp(\int_0^t -r(s)ds) \ dt \\ &= -r(t)\beta^{-1}(t) \ dt \end{aligned}$$

und $< \beta^{-1}, X^{x,H} >_t = 0$ für alle $0 \leq t \leq T$ gilt für die Dynamik von Y:

$$\begin{aligned} dY(t) &= \beta^{-1}(t)dX^{x,H}(t) \ + \ X^{x,H}d\beta^{-1}(t) \\ &= \beta^{-1}(t)\Big(\Big(X^{x,H}(t) - \sum_{i=1}^{n}\zeta_i(t)\Big)r(t)dt \ + \ \sum_{i=1}^{n}\zeta_i(t)\Big(\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)\Big)\Big) \\ &\quad - \ X^{x,H}(t)r(t)\beta^{-1}(t)dt \\ &= \beta^{-1}(t)\Big(\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(t)(\mu_i(t) - r(t))dt \ + \ \sum_{i=1}^{n}\zeta_i(t)\sigma_i(t)dW(t)\Big) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Hieraus lässt sich leicht eine Gleichung für $X^{x,H}$ ableiten. Dies ist aber für unsere Zwecke nicht erforderlich, wir brauchen später nur die Gleichung (2.17).

Wie bereits zu Beginn dieses Abschnittes genannt, werden wir zunächst nur die Menge der erreichbaren Endvermögen betrachten und noch nicht, mit welchen Handelsstrategien man diese erreichen kann. Zu einem gegebenen Anfangsvermögen $x > 0$ definieren wir dazu die Menge aller erreichbaren Endvermögen:

$$\mathcal{B}(x) := \{S \geq 0 : \ S \ ist \ \mathcal{F}_T - messbar, \ \mathbb{E}U(S) < \infty, \ V_0(S) \leq b\}$$

Da der Markt vollständig ist, ist die Bedingung $V_0(S) \leq b$ ausreichend für die Super-Replizierbarkeit zum Anfangskapital x von S.
Das statische Problem ist nun durch

$$\max_{S \in \mathcal{B}(x)} \mathbb{E}U(S)$$

gegeben. Mit der Bezeichnung

$$M(t) := \beta^{-1}(t)L(t) \tag{2.18}$$

für $0 \leq t \leq T$ lässt sich der faire Anfangspreis umschreiben zu

$$V_0(S) = \mathbb{E}^* \beta^{-1}(T)S = \mathbb{E}\ \beta^{-1}(T)L(T)S = \mathbb{E}\ M(T)S.$$

Damit können wir die Bedingung $V_0(S) \leq x$ umschreiben zu $\mathbb{E}M(T)S \leq x$. Dies ist unsere Nebenbedingung, wenn wir den Term $\mathbb{E}U(S)$ maximieren. Wir wenden daher einen Lagrange-Ansatz an und führe λ als Lagrange-Multiplikator ein. Dies führt zum Optimierungsproblem

$$\max_{S \in \mathcal{B}(x)} \mathbb{E}\Big(U(S)\ -\ \lambda M(T)S\Big)$$

Die Lösung wird durch die Gleichung

$$U'(S)\ -\ \lambda M(T)\ =\ 0$$

ermittelt, also

$$S = I(\lambda M(T)), \tag{2.19}$$

wobei I die Umkehrfunktion von U' ist. Mithilfe der Nebenbedingung und (2.19) lässt sich noch die Gleichung

$$x = \mathbb{E}\ \Big(M(T)S\ =\ \mathbb{E}\ M(T)I(\lambda M(T))\Big) \tag{2.20}$$

aufstellen, mit der λ indirekt bestimmt ist. Dabei wurde das "$\leq$" in der Nebenbedingung durch ein "$=$" ersetzt, weil das Maximum sowieso nur für ein S mit $V_0(S) = x$ angenommen wird.
Das statische Problem ist somit eindeutig durch die Gleichungen (2.19) und (2.20) gelöst. Wir müssen nun noch die optimale Handelsstrategie finden, die $S = I(\lambda M(T))$ repliziert.
Da $\mathbb{Q}$ das äquivalente Martingalmaß ist, sind die diskontierten Preisprozesse der Aktien und damit auch der diskontierte Vermögensprozess $\mathbb{Q}$-Martingale. Für das optimale Endvermögen S und dessen Vermögensprozess X gilt dann mit dem Satz von Bayes:

$$\begin{aligned}\frac{X(t)}{\beta(t)} &= \mathbb{E}^*(\frac{X(T)}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(\frac{S}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t)\\ &= \mathbb{E}(\frac{S}{\beta(T)}\frac{L_T}{L_t}|\mathcal{F}_T).\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $\beta(T)$ folgt:

$$\begin{aligned}
X(t) &= \mathbb{E}(S\frac{L_T}{L_t}\frac{\beta(t)}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(S\frac{M(T)}{M(t)}|\mathcal{F}_t) \\
&= \frac{1}{M(t)}\mathbb{E}(SM(T)|\mathcal{F}_t) \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Damit ist XM ein $\mathbb{P}$-Martingal. Der Martingaldarstellungssatz besagt, dass ein progressiv messbarer Prozess ψ existiert, so dass gilt

$$X(t)M(t) = x + \int_0^t \psi(s)dW(s), \qquad (2.22)$$

beziehungsweise

$$d(X(t)M(t)) = \psi(t)dW(t). \qquad (2.23)$$

Andererseits gilt

$$X(t)M(t) = X(t)L(t)\beta^{-1}(t) = L(t)Y(t). \qquad (2.24)$$

Mit partieller Integration und der bereits ausgerechneten Dynamik von Y (2.17) erhalten wir

$$\begin{aligned}
d(X(t)M(t)) &= Y(t)dL(t) \ + \ L(t)dY(t) \ + \ d<L,Y>_t \\
&= -Y(t)L(t)\theta(t)dW(t) \\
&\quad + \ L(t)\beta^{-1}(t)\Big(\sum_{i=1}^n \zeta_i(t)(\mu_i(t)-r(t))dt \ + \ \sum_{i=1}^n \zeta_i(t)\sigma_i(t)dW(t)\Big) \\
&\quad - L(t)\beta^{-1}(t)\sum_{i=1}^n(\zeta_i(t)\sigma_i(t)\theta(t)) \ dt \\
&= -X(t)M(t)\theta(t)dW(t) \\
&\quad + \ L(t)\beta^{-1}(t)\Big(\sum_{i=1}^n \zeta_i(t)(\mu_i(t)-r(t))dt \ + \ \sum_{i=1}^n \zeta_i(t)\sigma_i(t)dW(t)\Big) \\
&\quad - L(t)\beta^{-1}(t)\sum_{i=1}^n \Big(\zeta_i(t)\sigma_i(t)\sigma^{-1}(\mu_i(t)-r(t))\Big) \ dt \\
&= \Big(-X(t)M(t)\theta(t) \ + \ M(t)\sum_{i=1}^n \zeta_i(t)\sigma_i(t)\Big) \ dW(t) \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Das Gleichsetzen von (2.23) und (2.25) ergibt

$$\psi(t) = \Big(-X(t)M(t)\theta(t) \ + \ M(t)\sigma^\top(t)\zeta(t)\Big).$$

Somit ist $\zeta(t)$ durch die Gleichung

$$\sigma^\top(t)\zeta(t) = \frac{\psi(t)}{M(t)} \ + \ X(t)\theta(t) \tag{2.26}$$

eindeutig gegeben.

Das Verfahren sieht also zusammengefasst so aus, dass man zunächst mit den Gleichungen (2.19) und (2.20) das optimale Endvermögen errechnet, anschließend den Prozess ψ mit (2.22) ermittelt und mit diesem dann die Gleichung (2.26) löst. Dies soll anhand der logarithmischen Nutzenfunktion exemplarisch vorgeführt werden.

Beispiel 2.9. *Sei $U(x) = \log(x)$. Dann ist $U'(x) = \frac{1}{x}$ und demzufolge*

$$I(x) = \frac{1}{x} \tag{2.27}$$

Die Nebenbedingung (2.20) für λ wird somit zu

$$\begin{aligned} x &= \mathbb{E}M(T)I(\lambda M(T)) \\ &= \mathbb{E}M(T)\frac{1}{\lambda M(T)} \\ &= \mathbb{E}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

also $\lambda = \frac{1}{x}$. Damit folgt aus Gleichung (2.19):

$$\begin{aligned} S &= I(\lambda M(T)) \\ &= \frac{x}{M(T)} \\ &= \frac{x\beta(T)}{L(T)} \\ &= x\beta(T)\exp\Big(\int_0^T \theta(s)dW(s) \ + \ \frac{1}{2}\int_0^T ||\theta(s)||^2 ds\Big) \end{aligned}$$

Wie aus dieser Rechnung ersichtlich, gilt $X(T)M(T) = SM(T) = x$, und mit der Martingaleigenschaft von XM folgt

$$\begin{aligned} X(t)M(t) &= \mathbb{E}X(T)M(T)|\mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(x|\mathcal{F}_t) \\ &= x \end{aligned}$$

Also gilt für alle $0 \le t \le T$:

$$X(t) = \frac{x}{M(t)}. \tag{2.28}$$

Insbesondere gilt $\psi \equiv 0$ für den Prozess ψ aus (2.22). Nun lässt sich ζ mit (2.26) berechnen:

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= (\sigma^\top(t))^{-1}(X(t)\theta(t)) \\
&= X(t)\ (\sigma^\top(t))^{-1}\ \sigma^{-1}(t)\Big(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}\Big) \\
&= X(t)\ \Big(\sigma(t)\sigma^\top(t)\Big)^{-1}\ \Big(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}\Big)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Da das zugrunde liegende Kontrollproblem auch Merton-Problem genannt wird, wird ζ auch als Merton-Strategie bezeichnet.

Wie bereits am Anfang dieses Abschnittes erwähnt, ist die Martingalmethode nicht anwendbar, wenn wir Restriktionen bezüglich der Handelsstrategien vorliegen haben. Der errechnete Prozess ζ verletzt im Allgemeinen die geforderten Bedingungen. Man kann die Martingalmethode auch nicht passend modifizieren, denn eine wichtige Eigenschaft ist im Fall mit Restriktionen nicht gegeben: die Vollständigkeit des Modells. Aber auf genau diese Vollständigkeit stützt sich die eben vorgestellte Methode: Es wird davon ausgegangen, dass alle Endvermögen S mit $\mathbb{E}^*S = x$ replizierbar sind. Die Handelsstrategien, mit der diese Endvermögen erreicht werden können, lassen sich leider nicht derart kontrollieren, dass sie doch die Restriktionen erfüllen. Insbesondere der Martingaldarstellungssatz liefert einen unkontrollierbaren Prozess ψ in (2.22).

Da die Martingalmethode für den Fall mit Restriktionen nicht anwendbar ist, brauchen wir eine andere Vorgehensweise. Ein erster Ansatz wird im folgenden Kapitel beschrieben.

3. Erster Ansatz bei der Portfoliooptimierung unter Restriktionen

Wir betrachten in diesem Kapitel wieder das normale Merton-Problem ohne Konsum während der Laufzeit. Wir haben bereits in Abschnitt 2.5, Gleichung (2.17) eine Dynamik für $\frac{X(t)}{\beta(t)}$ ausgerechnet, woraus folgt:

$$\frac{X(t)}{\beta(t)} = x + \int_0^t \beta^{-1}(s)\Big(\sum_{i=1}^n \zeta_i(s)(\mu_i(s) - r(s))ds + \sum_{i=1}^n \zeta_i(s)\sigma_i(s)dW(s)\Big),$$

also

$$X(t) = x\beta(t) + \int_0^t \exp(\int_s^t r(u)du)\Big(\sum_{i=1}^n \zeta_i(s)(\mu_i(s) - r(s))ds + \sum_{i=1}^n \zeta_i(s)\sigma_i(s)dW(s)\Big).$$

Mit $t = T$ erhalten wir also eine explizite Formel für das Endvermögen in Abhängigkeit von der Handelsstrategie. Unser Ziel ist es, den erwarteten Nutzen von diesem Endvermögen zu berechnen und über alle erlaubten Handelsstrategien zu maximieren. Leider lässt sich der Ausdruck $U(X(T))$ mit der obigen Formel für $X(T)$ nicht vereinfachen, egal welche Nutzenfunktion man wählt. Daher hilft uns die obige Formel für $X(t)$ nicht weiter.

Im Hinblick auf die logarithmische Nutzenfunktion wäre es wünschenswert, wenn wir eine Darstellung $X(T) = \exp(Z(T))$ finden, wobei Z ein progressiv messbarer Prozess abhängig von der Handelsstrategie ist. In diesem Fall bräuchten wir nur noch $U(X(T)) = Z(T)$ maximieren.

3.1. Der eindimensionale Fall

Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst nur ein Finanzmarktmodell mit einem risky asset, also $n=1$. Wir wählen nun den Ansatz $X(t)=\exp(Z(t))$, wobei Z ein Semimartingal ist, also

$$Z(t)=Z(0)+\int_0^t Z_0(s)ds \;+\; \int_0^t Z_1(s)dW(s).$$

Mit der Itô-Formel angewandt auf $X(t)=\exp(Z(t))$ folgt:

$$dX(t)=X(t)\Big(Z_0(t)+\frac{1}{2}Z_1(t)^2\Big)dt \;+\; X(t)Z_1(t)dW(t)$$

Andererseits haben wir bereits in Abschnitt 2.2, Gleichung (2.6) ausgerechnet:

$$dX(t)=X(t)\Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))\Big)dt \;+\; X(t)\pi(t)\sigma(t)dW(t)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich das Gleichungssystem

$$Z_0(t)+\frac{1}{2}Z_1(t)^2=r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t)) \tag{3.1}$$

$$Z_1(t)=\pi(t)\sigma(t) \tag{3.2}$$

Durch Einsetzen von (3.2) in (3.1) erhalten wir

$$Z_0(t)=r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))-\frac{1}{2}\pi(t)^2\sigma(t)^2 \tag{3.3}$$

Wir setzen nun vorerst die logarithmische Nutzenfunktion voraus, so dass gilt

$$\begin{aligned} U(X(T)) \;=\; Z(T) \;=\; & Z(0)+\int_0^T \Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))-\frac{1}{2}\pi(t)^2\sigma(t)^2\Big)dt \\ & +\int_0^T \pi(s)\sigma(s)dW(s) \end{aligned}$$

An dieser Stelle müssen wir die Kontrollmenge $\mathcal{A}$ einschränken, um sicher zu gehen, dass der Erwartungswert von $U(X(T))$ existiert:

$$\mathcal{A}(x)=\{\pi:\,\mathbb{E}\int_0^T |\mu(s)\pi(s)|+|r(s)\pi(s)|+|\sigma\pi|^2ds<\infty,\; X^{x,\pi}(T)>0,\; \mathbb{E}(Z(T))^-<\infty\}$$

Dies impliziert auch, dass $(\int_0^t Z_1(s)dW(s))_{0\le t\le T}$ nicht nur ein lokales Martingal, sondern sogar ein echtes Martingal ist. Dies ist erforderlich, damit der Erwartungswert von $\int_0^T Z_1(s)dW(s)$ verschwindet. Somit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\ U(X^{x,\pi}(T)) &= Z(0)+\int_0^T r(s)+\pi(s)(\mu(s)-r(s))-\frac{1}{2}\pi(s)^2\sigma(s)^2ds \\ &= Z(0)+\int_0^T f(r(s),\mu(s),\sigma(s),\pi(s))ds \qquad (3.4)\end{aligned}$$

mit

$$f(r,\mu,\sigma,\pi)=r+\pi(\mu-r)-\frac{1}{2}\pi^2\sigma^2$$

Im Fall ohne Restriktionen bräuchten wir nur für jedes $0\le t\le T$ das $\pi(t)\in\mathbb{R}$ finden, dass die quadratische Funktion $f(r(t),\mu(t),\sigma(t),\pi(t))$ maximiert. Dies führt zu

$$\pi(t)=\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}$$

für alle $0\le t\le T$. Dies ist exakt die Handelsstrategie, die auch die Martingalmethode bei (2.29) hervorgebracht hat.
Im folgenden Beispiel werden wir eine bestimmte Art von Restriktion betrachten, nämlich eine deterministische Beschränkung des relativen Anteils im risky asset.

3.1.1. Optimierung bei logarithmischer Nutzenfunktion

Seien $c_1,c_2:[0,T]\to\mathbb{R}$ zwei deterministische, reellwertige Funktionen mit $c_1(t)\le c_2(t)$ für alle $0\le t\le T$. Wir schränken die Kontrollmenge $\mathcal{A}$ folgendermaßen ein:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x)=\{\pi:\ \mathbb{E}\int_0^T |\mu(s)\pi(s)|+|r(s)\pi(s)|+|\sigma(s)\pi(s)|^2ds<\infty,\ X^{x,\pi}(T)>0,\\ \mathbb{E}(Z(T))^-<\infty, c_1(t)\le\pi(t)\le c_2(t)\ für\ alle\ 0\le t\le T\}\end{aligned}$$

Auf diese Art kann man zum Beispiel Kreditaufnahmeverbote ($c_2=1$), Short Selling Verbote ($c_1=0$) oder auch eine Begrenzung des Vermögensanteils, der in die Aktie gesteckt wird, auf einen Prozentsatz $p\%$ ($c_2=p\%$) modellieren.
Wir müssen das Optimierungsproblem

$$v:=\max_{\pi\in\mathcal{A}(x)}\int_0^T f(r(s),\mu(s),\sigma(s),\pi(s))ds \qquad (3.5)$$

lösen. Da wir mit unserer Handelsstrategie π die übrigen Parameter r, μ und σ sowie die Schranken c_1 und c_2 nicht beeinflussen können, ist es für die Maximierung von $f(r(t), \mu(t), \sigma(t), \pi(t))$ für ein festes $t \in [0,T]$ egal, wie unsere Handelsstrategie bis zum Zeitpunkt t aussieht. Anstatt das Integral in (3.5) über alle Kontrollstrategien zu maximieren, ist es folglich ausreichend, die Funktion f punktweise für alle Zeitpunkte $0 \leq t \leq T$ zu maximieren. Das Optimierungsproblem (3.5) ist also äquivalent zu

$$v = \int_0^T \max_{c_1(s) \leq z \leq c_2(s)} f(r(s), \mu(s), \sigma(s), z) ds \tag{3.6}$$

Das Maximieren von f ist trivial: Liegt $z^* = \frac{\mu(s) - r(s)}{\sigma(s)^2}$ im Intervall $[c_1(s), c_2(s)]$, so ist z^* der Maximierer. Liegt z^* nicht in diesem Intervall, so ist entweder $c_1(s)$ oder $c_2(s)$ der Maximierer, je nachdem, ob $z^* < c_1(s)$ oder $z^* > c_2(s)$.

Man kann das Beispiel 3.1.1 noch erweitern derart, dass c_1 und c_2 nicht mehr deterministisch, sondern stochastisch sind. Wichtig ist aber, dass wir mit unserer Wahl der Handelsstrategie nicht die Funktionen c_1 und c_2 beeinflussen können, sonst kann man das Optimierungsproblem nicht mehr in das punktweise Optimieren von f umwandeln. Insbesondere bekommt man bei dem folgenden Szenario Probleme:

Seien $d_1, d_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ zwei deterministische, reellwertige Funktionen mit $d_1(t) \leq d_2(t)$ für alle $0 \leq t \leq T$. Wir betrachten nun nur Handelsstrategien $(H(t))_{0 \leq t \leq T}$, die die Bedingung $d_1(t) \leq H(t) \leq d_s(t)$ für alle t erfüllen. Zudem müssen natürlich die erforderlichen Integritätsbedingungen, die hier nicht aufgezählt werden, erfüllt sein. Übertragen auf die Praxis bedeutet dies eine Regulierung der Anzahl der Aktien, die man hält. Zum Zeitpunkt t müssen mindestens $d_1(t)$ Aktien, und höchstens $d_2(t)$ Aktien gehalten werden.
Wegen $\pi(t) = \frac{H(t)S(t)}{X(t)}$ ist diese Einschränkung für H äquivalent zu

$$d_1(t) \frac{S(t)}{X(t)} \leq \pi(t) \leq d_2(t) \frac{S(t)}{X(t)}.$$

Die in Beispiel 3.1.1 eingeführten Funktionen c_1 und c_2 ergeben sich somit zu

$$c_1(t) = d_1(t) \frac{S(t)}{X(t)}$$
$$c_2(t) = d_2(t) \frac{S(t)}{X(t)}$$

Da der Vermögensprozess X von der Handelsstrategie abhängt, sind damit auch c_1 und c_2 von ihr abhängig. Das bedeutet, dass wir zum Anfang der Laufzeit so handeln können, dass wir zu späteren Zeitpunkten einen höheren erwarteten Wert von

f erzielen können. Es ist also a priori nicht klar, ob das punktweise Optimieren von f wirklich die beste Handelsstrategie hervorbringt.

Das gezeigte Verfahren eignet sich besonders gut für die logarithmische Nutzenfunktion. Natürlich kann man analog versuchen, für Potenz-Nutzenfunktionen $U(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ eine Darstellung $X(t) = Z(t)^{\frac{1}{\alpha}}$ zu finden. Man erhält aber in diesem Fall einen komplizierteren Prozess Z als im Fall der logarithmischen Nutzenfunktion. Das Maximieren des Erwartungswertes von Z gestaltet sich damit nicht einfacher als das Lösen des ursprünglichen Optimierungsproblems.
Man kann aber die Dynamik von X benutzen, die wir für den Fall der logarithmischen Nutzenfunktion aufgestellt haben, um damit in begrenztem Umfang auch Ergebnisse für den Power-Nutzen zu erzielen.

3.1.2. Optimierung bei Potenz-Nutzenfunktion

Sei $U(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ für ein $\alpha \in (-\infty, 1)\backslash\{0\}$. r, μ und σ seien deterministische Funktionen.
Wie in Beispiel 3.1.1 seien Funktionen c_1 und c_2 gegeben mit $c_1(t) \leq \pi \leq c_2(t)$ für alle $0 \leq t \leq T$.
Wie zu Beginn dieses Abschnittes bereits ausgerechnet, gilt

$$\begin{aligned} X(t) = \exp\Big(Z(0) + \int_0^t \Big(r(s) + \pi(s)(\mu(s) - r(s)) - \frac{1}{2}\pi(s)^2\sigma(s)^2\Big)ds \\ + \int_0^t \pi(s)\sigma(s)dW(s)\Big). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wegen $X(0) = x$ gilt $Z(0) = \log(x)$. Wendet man die Nutzenfunktion auf (3.7) an, so erhält man

$$\begin{aligned} U(X(t)) = \frac{1}{\alpha}\exp\Big(\alpha\log(x) + \int_0^t \alpha\Big(r(s) + \pi(s)(\mu(s) - r(s)) - \frac{1}{2}\pi(s)^2\sigma(s)^2\Big)ds \\ + \int_0^t \alpha\pi(s)\sigma(s)dW(s)\Big) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mit (3.8) lässt sich $\mathbb{E}U(X(T))$ noch nicht zufriedenstellend vereinfachen. Wir werden deshalb zunächst die Dynamik von $U(X(t))$ berechnen:

$$\begin{aligned} dU(X(t)) = U(X(t))\Big(\alpha\Big(r(t) + \pi(t)(\mu(t) - r(t)) - \frac{1}{2}\pi(t)^2\sigma(t)^2\Big)dt \\ + \alpha\pi(t)\sigma(t)dW(t) + \frac{1}{2}\alpha^2\pi(t)^2\sigma(t)^2dt\Big) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$U(X(t)) = U(x) + \int_0^t U(X(s))\Big(\alpha\Big(r(s) + \pi(s)(\mu(s) - r(s)) - \frac{1}{2}\pi(s)^2\sigma(s)^2\Big)$$
$$+ \frac{1}{2}\alpha^2\pi(s)^2\sigma(s)^2\Big)ds \ + \ \int_0^t U(X(s))\alpha\pi(s)\sigma(s)dW(s) \tag{3.9}$$

Wir definieren die Funktion γ durch

$$\gamma(s,\pi) = \alpha\Big(r(s) + \pi(\mu(s) - r(s)) - \frac{1}{2}\pi(s)^2\sigma(s)^2\Big) + \frac{1}{2}\alpha^2\pi^2\sigma(s)^2. \tag{3.10}$$

Damit lässt sich (3.9) kürzer schreiben als

$$U(X(t)) = U(x) + \int_0^t U(X(s))\gamma(s,\pi(s))ds \ + \ \int_0^t U(X(s))\alpha\pi(s)\sigma(s)dW(s). \tag{3.11}$$

Auf diese Gleichung wenden wir den Erwartungswert an. Dabei nehmen wir an, dass das zweite Integral ein Martingal bildet. Es ergibt sich:

$$\mathbb{E}U(X(t)) = U(x) + \mathbb{E}\int_0^t U(X(s))\gamma(s,\pi(s))ds \tag{3.12}$$

An dieser Stelle unterscheiden wir kurz die Fälle $\alpha < 0$ und $\alpha > 0$. Für $\alpha > 0$ ist $\gamma(s,\cdot)$, $0 \le s \le t$ fest, eine quadratische Funktion $\gamma(s,\pi) = a\pi^2 + b\pi + c$ mit $a = \frac{1}{2}\sigma(s)^2\alpha(\alpha-1) < 0$. Damit hat $\gamma(s,\cdot)$ ein globales Maximum. Für $\alpha < 0$ ist $a > 0$, und damit hat $\gamma(s,\pi)$ ein globales Minimum. In diesem Fall umfasst aber auch der Wertebereich der Nutzenfunktion ausschließlich die negativen reellen Zahlen, so dass wir an der Minimierung von γ interessiert sind. Wir werden ab jetzt den Fall $\alpha > 0$ fortführen mit der Bemerkung, dass der Fall $\alpha < 0$ analog behandelt wird, nur mit Minimierung statt Maximierung der Funktion γ.

Da nach Voraussetzung die Funktionen r, μ und σ deterministisch sind, stehen alle Parameter von γ und damit auch das Maximum von $\gamma(s,\cdot)$ für alle $0 \le s \le T$ zu Beginn des Handelszeitraums bereits fest. Wir bezeichnen den Maximierer von $\gamma(s,\cdot)$ mit $\pi^*(s)$.

Unter der Voraussetzung, dass $U(X(t))\gamma(s,\pi(s))$ $\lambda_{[0,T]} \otimes \mathbb{P}$-integrierbar ist für alle erlaubten Handelsstrategien π, lässt sich auf Gleichung (3.12) der Satz von Fubini-Tonelli anwenden, so dass wir den Erwartungswert und das Integral miteinander vertauschen können. Setzt man voraus, dass die Prozesse r, μ, σ, c_1 und c_2 beschränkt sind, so ist auch γ beschränkt und die Integrierbarkeit lässt sich ähnlich wie in der folgenden Rechnung mit dem Lemma von Gronwall zeigen. Wir werden deshalb

annehmen, dass der Satz von Fubini-Tonelli anwendbar ist.
Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}U(X(t)) &= U(x) + \int_0^t \mathbb{E}\Big(U(X(s))\gamma(s,\pi(s))\Big)ds \\
&\leq U(x) + \int_0^t \mathbb{E}\Big(U(X(s))\gamma(s,\pi^*(s))\Big)ds, \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

weil $\gamma(s,\pi^*(s)) \geq \gamma(s,\pi(s))$ für alle $\pi \in \mathcal{A}$ nach Definition von π^* gilt und U nichtnegativ ist.
Da alle Prozesse r, μ, σ, c_1, c_2 als deterministisch vorausgesetzt sind, ist auch der Prozess $\Big(\gamma(s,\pi^*(s))\Big)_{0\leq s\leq T}$ deterministisch. Damit können wir den Erwartungswert in (3.13) auseinanderziehen:

$$
\mathbb{E}U(X(t)) \leq U(x) + \int_0^t \gamma(s,\pi^*(s))\mathbb{E}U(X(s))ds
$$

Damit haben wir eine Ungleichung für den Prozess $\Big(\mathbb{E}U(X(t))\Big)_{0\leq t\leq T}$ erhalten, auf die wir das Lemma von Gronwall anwenden können. Eine Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieses Lemmas ist, dass $\gamma(s,\pi^*(s))$ nichtnegativ ist für alle $0 \leq s \leq T$. Dies ist unter normalen Bedingungen erfüllt, beispielsweise wenn $r \geq 0$ und $c_1 \leq 0 \leq c_2$ gilt. Somit folgt:

$$
\mathbb{E}U(X(t)) \leq U(x) + \int_0^t U(x)\gamma(s,\pi^*(s))\ \exp\Big(\int_s^t \gamma(z,\pi^*(z))dz\Big)\ ds \qquad (3.14)
$$

Für $t = T$ erhalten wir eine Obergrenze des zu maximierenden Terms $\mathbb{E}U(X(T))$. Wie die letzten Rechnungen zeigen, lässt sich diese Obergrenze auch tatsächlich erreichen. Der Maximierer π^* ist durch

$$
\begin{aligned}
\pi^*(t) &= \operatorname*{argmax}_{c_1(t)\leq z\leq c_2(t)} \gamma(t,z) \\
&= \begin{cases} z^*(t) & falls\ c_1(t) \leq z^*(t) \leq c_2(t) \\ c_1(t) & falls\ z^*(t) < c_1(t) \\ c_2(t) & falls\ z^*(t) > c_2(t) \end{cases}
\end{aligned}
$$

mit

$$
z^*(t) = -\frac{\mu(t) - r(t)}{(\alpha-1)\sigma(t)^2}
$$

charakterisiert.

3.2. Der mehrdimensionale Fall

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass wir in mehr als nur ein risky asset investieren dürfen, das heißt $n > 1$. Die Rechnungen werden weitestgehend analog zu denen im letzten Abschnitt verlaufen.
Wir versuchen wieder einen Prozess Z zu finden mit $X(t) = \exp(Z(t))$. Da wir einen n-dimensionalen Wiener-Prozess zugrunde liegen haben, hat Z die Form

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t Z_0(s)ds \ + \ \sum_{i=1}^n \int_0^t Z_i(s)dW_i(s).$$

Mit der Itô-Formel auf $X(t) = \exp(Z(t))$ angewandt folgt:

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t)\Big(Z_0(t)dt \ + \ \sum_{i=1}^n Z_i(t)dW_i(t) \ + \ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}Z_i(t)^2dt\Big) \\ &= X(t)\Big(Z_0(t) \ + \ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}Z_i(t)^2\Big)dt \ + \ \sum_{i=1}^n X(t)Z_i(t)dW_i(t) \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.6) brachte folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} dX(t) &= X(t)\Bigg(\Big(r(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t))\Big)dt \ + \ \sum_{i=1}^n \pi_i(t)\sigma_i(t)dW(t)\Bigg) \\ &= X(t)\Big(r(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t))\Big)dt \ + \ \sum_{i=1}^n X(t)\Big(\sum_{j=1}^n \pi_j(t)\sigma_{j,i}(t)\Big)dW_i(t) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$Z_0(t) \ + \ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}Z_i(t)^2 = r(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t)) \tag{3.15}$$

$$Z_i(t) = \sum_{j=1}^n \pi_j(t)\sigma_{j,i}(t) \qquad ,1 \leq i \leq n \tag{3.16}$$

Durch Einsetzen von (3.16) in (3.15) erhalten wir

$$\begin{aligned} Z_0(t) &= r(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t)) \ - \ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}Z_i(t)^2 \\ &= r(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t)) \ - \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \pi_j(t)\sigma_{j,i}(t)\Big)^2 \\ &= r(t) + \sum_{i=1}^n \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t)) \ - \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \pi_j(t)\pi_k(t)\sigma_{j,i}(t)\sigma_{k,i}(t) \end{aligned}$$

Mit $U(x) = \log(x)$ folgt

$$U(X(T)) \;=\; Z(T) \;=\; Z(0) \;+\; \int_0^T Z_0(t)dt \;+\; \sum_{i=1}^n \int_0^T Z_i(t)dW_i(t)$$

Wir müssen wieder die Kontrollmenge $\mathcal{A}$ einschränken, damit der Erwartungswert von $U(X(T))$ existiert:

$$\mathcal{A}(x) = \{\pi : \; \mathbb{E}\int_0^T \sum_{i=1}^n \Big(|\pi_i(t)\mu_i(t)| + |\pi_i(t)r(t)| + (\sum_{j=1}^n \pi_j(t)\sigma_{j,i}(t))^2\Big)dt < \infty, \; X^{x,\pi} > 0,$$
$$\mathbb{E}(Z(T))^- < \infty\}$$

Damit ist $(\int_0^t Z_i(s)dW_i(s))_{0\leq t\leq T}$ auch ein echtes Martingal, so dass der Erwartungswert von $\int_0^T Z_i(s)dW_i(s)$ verschwindet. Somit gilt

$$\mathbb{E}\; U(X^{x,\pi}(T)) = Z(0) + \int_0^T f(r(s),\mu(s),\sigma(s),\pi(s))ds \tag{3.17}$$

mit

$$f(r,\mu,\sigma,\pi) = r + \sum_{i=1}^n \Big(\pi_i(\mu_i - r) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \pi_j\pi_k\sigma_{j,i}\sigma_{k,i}\Big). \tag{3.18}$$

Zunächst berechnen wir die optimale Handelsstrategie für den Fall, dass wir keine Restriktionen haben. Dazu müssen wir für jedes $0 \leq s \leq T$ die Funktion $f(r(s),\mu(s),\sigma(s),\pi(s))$ maximieren, wobei $r(s),\mu(s)$ und $\sigma(s)$ feste Parameter sind und wir über alle $\pi(s)$ optimieren müssen. Dies erreichen wir, indem wir f nach allen π_i partiell ableiten und die partiellen Ableitungen gleich Null setzen:

$$0 = \frac{\partial f(r,\mu,\sigma,\pi)}{\partial \pi_i} = \mu_i - r \;-\; \pi_i \sum_{j=1}^n \sigma_{j,i}^2 \;-\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n (\pi_j \sum_{k=1}^n \sigma_{i,k}\sigma_{j,k}) \tag{3.19}$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Wie man sieht, lässt sich dieses Gleichungssystem mit n Gleichungen nicht so einfach auflösen. Man kann aber exemplarisch ein festes n auswählen und entweder das Gleichungssystem mit einem Computer ausrechnen lassen oder, wenn n gering ist, per Hand ausrechnen. Als Ergebnis bekommt man stets die Merton-Strategie, die uns bereits von der Martingalmethode vorausgesagt wurde:

$$\pi^*(t) = \Big(\sigma(t)\sigma^T(t)\Big)^{-1}(\mu(t) - r(t)\mathbb{1}) \tag{3.20}$$

Natürlich wollen wir auch hier wieder den Fall betrachten, dass wir Restriktionen vorliegen haben. Prinzipiell geht dies genauso wie in Beispiel 3.1.1. Jedoch haben wir eben bereits gesehen, dass die Formeln für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ schnell lang werden und nicht auf schöne Weise aufgelöst werden können. Deshalb werden wir uns im folgenden Beispiel auf den Fall $n = 2$ beschränken.

3.2.1. Optimierung bei logarithmischer Nutzenfunktion

Seien $c, d : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ zwei deterministische Funktionen mit
$c_i(t) \leq d_i(t)$ für $i = 1, 2$ und alle $0 \leq t \leq T$. Wir schränken die Kontrollmenge weiter ein auf alle Handelsstrategien π, die stets zwischen c und d liegen:

$$\mathcal{A}(x) = \{\pi : \ \mathbb{E}\int_0^T |\mu(s)\pi(s)| + |r(s)\pi(s)| + |\sigma(s)\pi(s)|^2 ds < \infty, \ X^{x,\pi}(T) > 0,$$

$$\mathbb{E}(Z(T))^- < \infty, c_i(t) \leq \pi_i(t) \leq d_i(t) \ f\ddot{u}r \ i = 1, 2 \ und \ alle \ 0 \leq t \leq T\}$$

Zu lösen ist das Optimierungsproblem

$$v := \max_{\pi \in \mathcal{A}(x)} \int_0^T f(r(s), \mu(s), \sigma(s), \pi(s)) ds \tag{3.21}$$

Wie bereits in Beispiel 3.1.1 gesehen reicht es aus, punktweise zu optimieren, das heißt f für jeden Zeitpunkt $0 \leq s \leq T$ zu maximieren.
Im eindimensionalen Fall hat es gereicht, f über ganz $\mathbb{R}$ zu maximieren und erst anschließend die Grenzen c_1 und c_2 hinzuzuziehen und zu gucken, ob die Maximalstelle in dem Intervall $[c_1, c_2]$ liegt. Dieses Verfahren funktioniert nicht mehr, sobald der Definitionsbereich von f mehrdimensional ist.
Wir fixieren ein $t \in [0, T]$. Mit z^* bezeichnen wir die Maximalstelle von f, sofern wir die Grenzen c und d außer Acht lassen:

$$z^* = \left(\sigma(t)\sigma^T(t)\right)^{-1}(\mu(t) - r(t)\mathbb{1})$$

Liegt z^* in dem Rechteck $[c_1(t), d_1(t)] \times [c_2(t), d_2(t)]$, so ist z^* der gesuchte Maximierer. Liegt z^* außerhalb dieses Rechtecks, so müssen wir das Maximum auf dem Rand des Rechtecks suchen. Da f genau eine Maximalstelle hat, nämlich z^*, ist dies völlig ausreichend.
Wir führen die Rechnung nun für den Fall fort, dass $z_1^* > c_2(t)$ und $d_1(t) \leq z_2^* \leq d_2(t)$ gilt. Wir untersuchen zuerst den rechten Rand des Rechtecks, also die Strecke von

$(c_2(t), d_1(t))$ nach $(c_2(t), d_s(t))$. Dazu definieren wir die Funktion g durch

$$g(u) = f\Big(r(t), \mu(t), \sigma(t), \big(c_2(t), d_1(t) + u \cdot (d_2(t) - d_1(t))\big)\Big). \tag{3.22}$$

Wir suchen dasjenige u, welches $0 \le u \le 1$ erfüllt und g maximiert. Dazu setzen wir die Formel (3.18) für f ein und leiten g nach u ab. Zur besseren Übersicht lassen wir die Zeitvariable t weg, schreiben also r statt $r(t)$ etc.

$$\begin{aligned}
f(r,\mu,\sigma,\pi) &= r + \pi_1(\mu_1 - r) + \pi_2(\mu_2 - r) \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(\pi_1^2(\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,2}^2) \ + \ 2\pi_1\pi_2(\sigma_{1,1}\sigma_{2,1} + \sigma_{1,2}\sigma_{2,2}) \ + \ \pi_2^2(\sigma_{2,1}^2 + \sigma_{2,2}^2)\Big) \\
g(u) &= r + c_2(\mu_1 - r) + \Big(d_1 + u \cdot (d_2 - d_1)\Big)(\mu_2 - r) \\
&\quad - \frac{1}{2}\Big(c_2^2(\sigma_{1,1}^2 + \sigma_{1,2}^2) \ + \ 2c_2(d_1 + u \cdot (d_2 - d_1))(\sigma_{1,1}\sigma_{2,1} + \sigma_{1,2}\sigma_{2,2}) \\
&\quad + (d_1 + u \cdot (d_2 - d_1))^2(\sigma_{2,1}^2 + \sigma_{2,2}^2)\Big) \\
g'(u) &= (d_2 - d_1)(\mu_2 - r) \ - \ c_2(d_2 - d_1)(\sigma_{1,1}\sigma_{2,1} + \sigma_{1,2}\sigma_{2,2}) \\
&\quad - \ (d_1 + u \cdot (d_2 - d_1))(d_2 - d_1)(\sigma_{2,1}^2 + \sigma_{2,2}^2)
\end{aligned}$$

Aus $g'(u) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{d_2 - d_1}\left(\frac{(d_2 - d_1)(\mu_2 - r) \ - \ c_2(d_2 - d_1)(\sigma_{1,1}\sigma_{2,1} + \sigma_{1,2}\sigma_{2,2})}{(d_2 - d_1)(\sigma_{2,1}^2 + \sigma_{2,2}^2)} - d_1\right) \\
&= \frac{1}{d_2 - d_1}\left(\frac{(\mu_2 - r) \ - \ c_2(\sigma_{1,1}\sigma_{2,1} + \sigma_{1,2}\sigma_{2,2})}{\sigma_{2,1}^2 + \sigma_{2,2}^2} - d_1\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Da man aus dieser Gleichung nicht viel erkennen kann, werden wir das Geschehen mit konkreten Zahlenwerten verdeutlichen. Gegeben seien die folgenden Variablen:

$$\begin{aligned}
r &= 0.04, \ \mu = (0.083, 0.102)^T, \\
\sigma &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, \\
c &= (0, 0.06), \ d = (0, 0.2)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Merton-Strategie

$$\begin{aligned}
\pi^* &= (\sigma\sigma^T)^{-1}(\mu - r\mathbb{1}) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 0.043 \\ 0.062 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0.043 \\ 0.062 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.043 \\ 0.062 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.11 \\ 0.1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit liegt π^* rechts vom erlaubten Rechteck $[0,0.06] \times [0,0.2]$. Wir wenden somit das obige Verfahren an, das heißt wir definieren uns die Funktion g wie in (3.22). Wir brauchen nun nur noch die gegebenen Werte in (3.23) einsetzen:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2}\left(\frac{0.062 \ - \ 0.06(0.06+0.04)}{0.04+0.16} - 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{0.056}{0.2}\right) \\
&= 0.14
\end{aligned}
$$

Da die Extremstelle u von g im Intervall $[0,1]$ liegt, haben wir mit u unseren gesuchten Maximierer auf der rechten Seite des erlaubten Rechtecks gefunden.
Man kann relativ leicht zeigen, dass es dank der quadratischen Form von f ausreicht, nur die rechte Seite des erlaubten Rechtecks $[0,0.06] \times [0,0.2]$ zu betrachten. Wir erhalten damit als optimale Handelsstrategie zum fixierten Zeitpunkt:

$$
\begin{aligned}
\pi &= (c_2(t), d_1(t) + u \cdot (d_s(t) - d_1(t)) \\
&= (0.06, 0.14 \cdot 0.2) = (0.06, 0.028)
\end{aligned}
$$

Bemerkung 3.1. *Mit der Notation $w(t) = \pi(t) \cdot \sigma(t)$ lassen sich Z_0 und Z_i für $i = 1,...,n$ kürzer und eleganter schreiben:*

$$
\begin{aligned}
Z_i(t) &= \sum_{j=1}^{n} \pi_j(t)\sigma_{j,i}(t) = w_i(t) \\
Z_0(t) &= r(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t)) \ - \ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} Z_i(t)^2 \\
&= r(t) + \pi(t)(\mu(t) - r(t)) \ - \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i(t)^2 \\
&= r(t) + \pi(t)\sigma(t)\sigma^{-1}(t)(\mu(t) - r(t)) \ - \ \frac{1}{2}\|w(t)\|^2 \\
&= r(t) + w(t)\theta(t) \ - \ \frac{1}{2}\|w(t)\|^2, \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

wobei θ der Marktpreis des Risikos ist.
Unter den Voraussetzungen von Beispiel 3.2.1 genügt es, $Z_0(t)$ für alle $0 \leq t \leq T$ zu maximieren. Wenn aber, wie im Beispiel, π innerhalb eines festgelegten n-dimensionalen Quaders liegen soll, so bilden die erlaubten Werte von w in der Regel ein

n-Parallelotop (also für $n = 2$ ein Parallelogramm, für $n = 3$ einen Spat; siehe [Mer13]). Der Term (3.24) muss somit über alle Punkte w, die in dem n-Parallelotop liegen, maximiert werden. Dies ist wesentlich umständlicher als das Maximieren über einen n-dimensionalen Quader wie in Beispiel 3.2.1 und macht damit den Vorteil der kurzen Darstellung von Z_0 wieder wett. Die Darstellung (3.24) ist also der im Beispiel benutzten Darstellung von f (3.18) nicht unbedingt vorzuziehen.

Wir wollen uns nun ein konkretes Modell anschauen, nämlich das Volatilitätsmodell nach Heston. Zwar gibt es in diesem Modell nur ein risky asset, aber zwei Quellen des Zufalls, weshalb es hier in die Kategorie der mehrdimensionalen Modelle fällt.

3.2.2. Optimierung im Volatilitätsmodell nach Heston

Gegeben seien 2 eindimensionale Wiener-Prozesse W_1 und W_2. Diese seien nicht unbedingt stochastisch unabhängig. Wir bezeichnen mit $\rho \in (-1,1)$ den Korrelationskoeffizienten, also

$$< W_1, W_2 >_t = \rho t.$$

Der Preisprozess $(S(t))_{0 \leq t \leq T}$ des risky assets sei gegeben durch

$$dS(t) = S(t)\,\Big(\mu(t)dt \;+\; \sqrt{Y(t)}\; dW_1(t)\Big). \tag{3.25}$$

Die Volatilität $\sqrt{Y(t)}$ ist im Heston-Modell gegeben durch einen CIR-Prozess, das heißt

$$dY(t) = b(a - Y(t))dt \;+\; \delta\sqrt{Y(t)}\; dW_2(t) \tag{3.26}$$

mit positiven Konstanten a, b und δ. Die Bedingung $ab > \frac{\delta^2}{2}$ stellt sicher, dass der Prozess Y nie die 0 erreicht, die Volatilität von S also zu jedem Zeitpunkt strikt positiv ist.
Um die bisher hergeleiteten Verfahren nutzen zu können, brauchen wir zunächst eine Darstellung der Dynamiken von S und Y in Abhängigkeit von 2 stochastisch unabhängigen Wiener-Prozessen. Die folgende Rechnung zur Bestimmung dieser unabhängigen Wiener-Prozesse ist [Pau12] entnommen.
Wir setzen für alle $t \geq 0$

$$B_1(t) = \frac{W_1(t) - \rho W_2(t)}{\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$B_2(t) = W_2(t)$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
< B_2 >_t &= t \\
< B_1 >_t &= \frac{1}{1-\rho^2} < W_1 - \rho W_2 >_t \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}(< W_1 >_t \; - \; 2\rho < W_1, W_2 >_t \; + \; \rho^2 < W_2 >_t) \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}(t - 2\rho^2 t + \rho^2 t) \\
&= \frac{1}{1-\rho^2} t(1-\rho^2) = t \\
< B_1, B_2 >_t &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} < W_1 - \rho W_2, W_2 >_t \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\rho t - \rho t) = 0
\end{aligned}
$$

Mit dem Satz von Levy folgt, dass (B_1, B_2) ein zweidimensionaler Wiener-Prozess mit unabhängigen Komponenten ist.
Die Dynamiken von S und Y lassen sich nun wie folgt schreiben:

$$
\begin{aligned}
dS(t) &= S(t)\,\Big(\mu(t)dt \; + \; \sqrt{Y(t)}\; dW_1(t)\Big) \\
&= S(t)\,\Big(\mu(t)dt \; + \; \sqrt{Y(t)}\sqrt{1-\rho^2}\; dB_1(t) \; + \; \sqrt{Y(t)}\;\rho\; dB_2(t)\Big) \\
dY(t) &= b(a - Y(t))dt \; + \; \delta\sqrt{Y(t)}\; dB_2(t)
\end{aligned}
$$

Eine wichtige Forderung an alle unsere Modelle war die Gleichheit der Anzahl risky assets und der Anzahl der Wiener-Prozesse. Da wir hier zwei Wiener-Prozesse B_1 und B_2 haben, aber nur eine handelbare Aktie S, wählen wir zusätzlich Y als fiktives Finanzgut. Die Kontrollmenge $\mathcal{A}$ darf dann natürlich nur zweidimensionale Prozesse π enthalten, deren zweite Komponente stets 0 ist, da Y kein handelbares Finanzgut ist.
Die Volatilitätsmatrix σ sieht wie folgt aus:

$$
\sigma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{Y(t)}\sqrt{1-\rho^2} & \sqrt{Y(t)}\rho \\ 0 & \delta\sqrt{Y(t)} \end{pmatrix}
$$

Wegen der vorherigen Bedingung $ab > \frac{\delta^2}{2}$ erreicht Y nie die 0, wodurch sicher gestellt ist, dass σ zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ eine reguläre Matrix ist.
Die einzelnen Komponenten von σ kann man jetzt in die Formel für f (3.18) einsetzen. Da bei den erlaubten Handelsstrategien aber stets $\pi_2 \equiv 0$ gilt, kann man f

direkt vereinfachen:

$$\begin{aligned} f(r,\mu,\sigma,\pi) &= r+\pi_1(\mu-r)-\frac{1}{2}\ \pi_1^2\ (\sigma_{1,1}^2+\sigma_{1,2}^2) \\ &= r+\pi_1(\mu-r)-\frac{1}{2}\ \pi_1^2\ Y(t)(1-\rho^2+\rho^2) \\ &= r+\pi_1(\mu-r)-\frac{1}{2}\ \pi_1^2\ Y(t) \end{aligned}$$

Somit gelangt man wieder zu einem eindimensionalen Optimierungsproblem, welches wir bereits in Beispiel 3.1.1 behandelt haben. In der Regel ist die optimale Handelsstrategie $(\pi_1^*(t))_{0\leq t\leq T}$ in diesem Fall stochastisch, weil f von dem stochastischen Prozess Y abhängig ist. Da Y aber nur von W_2 abhängt, ist π_1^* auch nur von W_2 abhängig, nicht aber von W_1 (zumindest solange die Kontrollmenge $\mathcal{A}$ unabhängig von W_1 ist)!

Zuletzt wollen wir uns wieder dem Power-Nutzen zuwenden. Wie schon im eindimensionalen Fall lässt sich dies nur mit etwas mehr Aufwand und unter stärkeren Bedingungen lösen. Da die Vorgehensweise identisch ist mit der in Beispiel 3.1.2, werden wir im folgenden Beispiel auf die exakten Begründungen, warum bestimmte Sätze angewandt werden können, verzichten.

3.2.3. Optimierung bei Potenz-Nutzenfunktion

Sei $U(x)=\frac{1}{\alpha}x^\alpha$ für ein $\alpha\in(-\infty,1)\backslash\{0\}$. $r,\ \mu=(\mu_1,...,\mu_n)$ und $\sigma=(\sigma_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ seien deterministische Funktionen.
Die Kontrollmenge $\mathcal{A}$ sei derart, dass

$$\mathcal{A}_t := \{\pi(t) : \pi\in\mathcal{A}\}$$

unabhängig von der bisher gewählten Handelsstrategie $(\pi(s))_{0\leq s\leq t}$ ist für alle $0\leq t\leq T$ sowie unabhängig von den Quellen des Zufalls $W_1,...,W_n$. Dies ist zum Beispiel dann der Fall, wenn wie in den vorherigen Beispielen jede Komponente π_i innerhalb der Schranken c_i und d_i bleiben muss, wobei c_i und d_i deterministische Funktionen sind.
Mit den zu Beginn ausgerechneten, von der Handelsstrategie π abhängigen Prozessen $Z_0,Z_1,...,Z_n$ gilt:

$$X(t)=\exp\Bigg(\log(x)+\int\limits_0^t Z_0(s)ds\ +\ \sum_{i=1}^n\int\limits_0^t Z_i(s)dW_i(s)\Bigg) \tag{3.27}$$

Somit gilt für den Nutzen:

$$U(X(t)) = \frac{1}{\alpha}\exp\Big(\alpha\log(x) + \int_0^t \alpha Z_0(s)ds \ + \ \sum_{i=1}^n \int_0^t \alpha Z_i(s)dW_i(s)\Big)$$

Für die Dynamik von $U(X(t))$ gilt demnach:

$$dU(X(t)) = U(X(t))\Big(\alpha Z_0(t)dt \ + \ \sum_{i=1}^n \alpha Z_i(t)dW_i(t) \ + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha^2 Z_i(t)^2 dt\Big)$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} U(X(t)) = U(x) &+ \int_0^t U(X(s))\Big(\alpha Z_0(s) \ + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha^2 Z_i(s)^2\Big)ds \\ &+ \int_0^t U(X(s))\Big(\sum_{i=1}^n \alpha Z_i(s)dW_i(s)\Big) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \gamma(s,\pi) &= \alpha Z_0(s) \ + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha^2 Z_i(s)^2 \\ &= \alpha\Big(r(s) + \sum_{i=1}^n \pi_i(s)(\mu_i(s) - r(s)) \ - \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \pi_j(s)\sigma_{j,i}(s)\Big)^2\Big) \\ &\quad + \ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \alpha^2\Big(\sum_{j=1}^n \pi_j(s)\sigma_{j,i}(s)\Big)^2 \\ &= \alpha\Big(r(s) + \sum_{i=1}^n \pi_i(s)(\mu_i(s) - r(s)) \ + \ \frac{1}{2}(\alpha - 1)\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \pi_j(s)\sigma_{j,i}(s)\Big)^2\Big) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$U(X(t)) = U(x) + \int_0^t U(X(s))\gamma(s,\pi)ds \ + \int_0^t U(X(s))\Big(\sum_{i=1}^n \alpha Z_i(s)dW_i(s)\Big)$$

Unter der Annahme, dass $\Big(\int_0^t U(X(s))\alpha Z_i(s)dW_i(s)\Big)_{0\le t\le T}$ für jedes $i = 1, ..., n$ ein Martingal bildet, gilt für den erwarteten Nutzen:

$$\mathbb{E}U(X(t)) = U(x) + \mathbb{E}\int_0^t U(X(s))\gamma(s,\pi(s))ds \tag{3.28}$$

Wie in Beispiel 3.1.2 sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha > 0$. Damit hat $\gamma(s,\cdot)$ ein globales Maximum. Wir bezeichnen mit $\pi^*(s)$ den Maximierer von $\gamma(s,\cdot)$.

Da nach Voraussetzung sowohl die Funktionen r, μ und σ als auch die zum Zeitpunkt t erlaubten Vermögensaufteilungen $\pi(t) \in \mathcal{A}_t$ unabhängig von der bis t gewählten Handelsstrategie sind, ist auch der Maximierer $\pi^*(s)$ und das damit erreichbare Maximum von $\gamma(s,\cdot)$ unabhängig von der gewählten Handelsstrategie. Da $\mathcal{A}_t$ außerdem nach Voraussetzung deterministisch ist, sind auch $\pi^*(s)$ und $\gamma(s,\cdot)$ deterministisch. Wie in Beispiel 3.1.2 nehmen wir an, dass der Satz von Fubini-Tonelli anwendbar ist, damit wir den Erwartungswert und das Integral vertauschen können. Es folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}U(X(t)) &= U(x) + \int\limits_0^t \mathbb{E}\Big(U(X(s))\gamma(s,\pi(s))\Big) ds \\ &\leq U(x) + \int\limits_0^t \mathbb{E}\Big(U(X(s))\gamma(s,\pi^*(s))\Big) ds\end{aligned}$$

Da das Maximum $\gamma(s,\pi^*(s))$ deterministisch ist, lässt es sich aus dem Erwartungswert herausziehen:

$$\mathbb{E}U(X(t)) \leq U(x) + \int\limits_0^t \gamma(s,\pi^*(s))\ \mathbb{E}\Big(U(X(s))\Big) ds$$

Unter natürlichen Bedingungen an die Zinsrate r und $\mathcal{A}$, zum Beispiel $r(t) \geq 0$ und $0 \in \mathcal{A}_t$ für alle $0 \leq t \leq T$, ist $\gamma(t,\pi^*(t))$ stets positiv und damit das Lemma von Gronwall anwendbar. Es ergibt sich:

$$\mathbb{E}U(X(t)) \leq U(x) + \int\limits_0^t U(x)\gamma(s,\pi^*(s))\ \exp\Big(\int\limits_s^t \gamma(z,\pi^*(z))dz\Big)\ ds \tag{3.29}$$

Mit der Wahl von $\pi = \pi^*$ lässt sich diese obere Schranke wirklich erreichen. Somit erhält man also die optimale Strategie, wenn man $\gamma(t,\cdot)$ punktweise über dem Raum $\mathcal{A}_t$ der in t erlaubten Handelsstrategien für jedes $0 \leq t \leq T$ maximiert.

4. Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, wie man bestimmte Fälle der Portfoliooptimierung relativ einfach lösen kann. Leider lässt sich die dort verwendete Methode weder umfassend für den Power-Nutzen noch für Restriktionen an das absolut in die risky assets investierte Vermögen anwenden. Wir brachen daher einen anderen, allgemeineren Ansatz.
In diesem Kapitel werden wir eine Differentialgleichung für die Wertfunktion herleiten, die sogenannte Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung, auch kurz HJB-Gleichung genannt. Wir orientieren uns dabei an dem Skript über Optimierungsprobleme von Christensen ([Chr13]).

4.1. Herleitung der HJB-Gleichung

4.1.1. Vorbereitung

Zunächst ändern wir geringfügig unsere Notation. Der Prozess X soll ab jetzt nicht nur den Vermögensprozess, sondern auch die Prozesse r, μ und σ umfassen, sofern diese stochastisch sind. Sind die letztgenannten Koeffizienten über die gesamte Laufzeit hinweg deterministisch, so können wir X wie bisher nur aus dem Vermögensprozess bestehen lassen; er ist daher eindimensional. Betrachten wir dagegen zum Beispiel ein Short-Rate-Modell, so ist X zweidimensional: X_1 ist der Vermögensprozess, X_2 die Short-Rate. Auf diese Weise ersparen wir uns in den folgenden Rechnungen eine Menge Fallunterscheidungen.
Der Definitionsbereich der Nutzenfunktion, die wir bisher nur auf das Vermögen zum Zeitpunkt T angewendet haben, muss demnach unter Umständen auf eine mehrdimensionale Menge erweitert werden. Natürlich kann man durch das Ignorieren der weiteren Koeffizienten von X in der Rechenvorschrift von U die bisher betrachteten Modelle replizieren. Andererseits ergibt sich die Möglichkeit, zum Beispiel durch Einbeziehen der Short-Rate einen diskontierten Nutzen zu betrachten.

Während wir im vorherigen Kapitel die Optimierung direkt am zu maximierenden

Ausdruck $\mathbb{E}U(X(T))$ betrieben haben, argumentieren wir in diesem Kapitel über die Wertfunktion:

Definition 4.1. *Die Wertfunktion* $v : [0,T] \times [0,\infty) \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *bezeichnet den erwarteten Nutzen, den ein Investor maximal erreichen kann, wenn* X *zum Zeitpunkt* $0 \leq t \leq T$ *den Wert* x *annimmt. Für den Fall ohne Konsum während der Laufzeit bedeutet das:*

$$v(t,x) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{(t,x)} \Big(U(X^{\pi}(T)) \Big) \tag{4.1}$$

Für den Fall mit Konsum während der Laufzeit ergibt sich:

$$v(t,x) := \sup_{(\pi,c) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_{(t,x)} \Big(\int_t^T U_2(c(s))ds \ + \ U_1(X^{\pi,c}(T)) \Big) \tag{4.2}$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{E}_{(t,x)}$ *den bedingten Erwartungswert gegeben dass* $X^{\pi}(t) = x$ *gilt.*

Wir werden ab jetzt zur besseren Übersicht immer von der Handelsstrategie π reden und damit implizit die Konsumfunktion c einschließen, sofern der Konsum während der Laufzeit erlaubt ist.
Bei einer gegeben Handelsstrategie π (beziehungsweise H) habe der Prozess X folgende Dynamik:

$$dX^{\pi}(t) = \tilde{\mu}(t, X^{\pi}(t), \pi)dt \ + \ \tilde{\sigma}(t, X^{\pi}(t), \pi)dW_t \tag{4.3}$$

und $X(0) = x_0$. Zum Beispiel gilt für den Fall ohne Konsum während der Laufzeit nach (2.6):

$$\tilde{\mu}_1(t, X^{\pi}(t), \pi) = X_1(t)\Big(r(t) + \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)(\mu_i(t) - r(t))\Big) \tag{4.4}$$

$$\tilde{\sigma}_{(1,\cdot)}(t, X^{\pi}(t), \pi) = X_1(t)\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\sigma_i(t)\Big) \tag{4.5}$$

Dabei ist in (4.5) die Multiplikation von π_i und σ_i als komponentenweise Multiplikation des Zeilenvektors σ_i mit dem Skalar π_i zu sehen.

Wir werden von nun an den Fall mit Konsum während der Laufzeit betrachten. Wählt man $U_2 \equiv 0$, so erhält man aus den nachfolgenden Formeln wieder den einfachen Fall ohne Konsum.

Für das optimale Investitionsverhalten zu einem beliebigen Zeitpunkt t ist nur das zu diesem Zeitpunkt erreichte Vermögen $X_1(t)$ und die Werte der stochastischen Koeffizienten zum Zeitpunkt t wichtig, nicht aber, wie man zu diesem Wert von X

gelangt ist. Daher ist es sinnvoll, sich auf Markovsche Strategien zu beschränken:

Definition 4.2. *Eine zulässige Handelsstrategie $\pi \in \mathcal{A}$ heißt Markovstrategie, wenn eine messbare Funktion $w : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ existiert mit $\pi(t) = w(t, X(t))$ für alle $0 \le t \le T$. Dabei bezeichnet d die Dimension von X.*

Die Markoveigenschaft liefert für jede beliebige Handelsstrategie π:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\int_t^T U_2\Big(c(s, X^\pi(s))\Big) ds \;+\; U_1(X^\pi(T)) \mid \mathcal{F}_t \Big) \\
&= \mathbb{E}_{(t, X^\pi(t))}\Big(\int_t^T U_2\Big(c(s, X^\pi(s))\Big) ds \;+\; U_1(X^\pi(T)) \Big) \\
&=: J(t, X^\pi(t), \pi) \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Zusammen mit (4.2) gilt

$$v(t, X^\pi(t)) = \sup_{\pi'} J(t, X^\pi(t), \pi'), \qquad (4.7)$$

wobei das Supremum über alle π' genommen wird, die auf $[0,t]$ mit π übereinstimmen.
Wir gehen im Folgenden davon aus, dass eine optimale Handelsstrategie π^* existiert. Dies muss im Allgemeinen zwar nicht zutreffen, jedoch sind für uns sowieso nur die Fälle interessant, in denen es eine optimale Strategie gibt. Für die optimale Strategie gilt dann $v(t,x) = J(t,x,\pi^*) \ge J(t,x,\pi)$ für alle t,x und alle erlaubten Handelsstrategien π.

4.1.2. Das Bellman-Prinzip

Eine Idee, wie man die Wertfunktion v ausrechnen kann, liefert das Bellman-Prinzip:

Satz 4.3 (Bellman-Prinzip). *Für alle $0 \le s \le t \le T$ und alle Handelsstrategien π gilt:*

$$v(s, X^\pi(s)) = \sup_{\pi' \in \mathcal{B}^\pi(s)} \mathbb{E}_{(s, X^\pi(s))}\Big(\int_s^t U_2\Big(c(u, X^{\pi'}(u))\Big) du \;+\; v(t, X^{\pi'}(t)) \Big) \qquad (4.8)$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{B}^\pi(s)$ die Menge aller π', die bis zum Zeitpunkt s mit π übereinstimmen.
Das Supremum wird von allen Handelsstrategien angenommen, die auf dem Intervall $[s,t]$ mit π^* übereinstimmen.

Beweis: Sei $0 \leq s \leq t \leq T$ und sei π eine beliebige erlaubte Handelsstrategie. Sei $\pi' \in \mathcal{B}^{\pi}(s)$.
Wegen $\mathcal{B}^{\pi'}(t) \subset \mathcal{B}^{\pi'}(s) = \mathcal{B}^{\pi}(s)$ gilt:

$$\begin{aligned}
v(s, X^{\pi}(s)) &= \sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{B}^{\pi}(s)} J(s, X^{\pi}(s), \tilde{\pi}) \\
&= \sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{B}^{\pi}(s)} \mathbb{E}\Big(\int_s^T U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big) du \ + \ U_1(X^{\tilde{\pi}}(T)) \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&\geq \sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{B}^{\pi'}(t)} \mathbb{E}\Big(\int_s^T U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big) du \ + \ U_1(X^{\tilde{\pi}}(T)) \mid \mathcal{F}_s \Big) \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Durch Aufspalten des ersten Integrals und dem Ausnutzen der Tower Property gelangt man zu

$$\begin{aligned}
v(s, X^{\pi}(s)) \geq \sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{B}^{\pi'}(t)} &\Bigg(\mathbb{E}\Big(\int_s^t U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big) du \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&+ \ \mathbb{E}\Big(\int_t^T U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big) du \ + \ U_1(X^{\tilde{\pi}}(T)) \mid \mathcal{F}_s \Big) \Bigg) \\
= \sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{B}^{\pi'}(t)} &\Bigg(\mathbb{E}\Big(\int_s^t U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big) du \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&+ \ \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(\int_t^T U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big) du \ + \ U_1(X^{\tilde{\pi}}(T)) \mid \mathcal{F}_t \Big) \mid \mathcal{F}_s \Big) \Bigg)
\end{aligned}$$

Da alle $\tilde{\pi} \in \mathcal{B}^{\pi'}(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, t]$ mit π' übereinstimmen, gilt auch $X^{\tilde{\pi}}(u) = X^{\pi'}(u)$ für jede dieser Handelsstrategien und alle $s \leq u \leq t$. Also:

$$\begin{aligned}
v(s, X^{\pi}(s)) &\geq \mathbb{E}\Big(\int_s^t U_2\Big(c(u, X^{\pi'}(u))\Big) du \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&\quad + \ \mathbb{E}\Big(\sup_{\tilde{\pi} \in \mathcal{B}^{\pi'}(t)} \mathbb{E}\Big(\int_t^T U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big) du \ + \ U_1(X^{\tilde{\pi}}(T)) \mid \mathcal{F}_t \Big) \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_s^t U_2\Big(c(u, X^{\pi'}(u))\Big) du \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&\quad + \ \mathbb{E}\Big(v(t, X^{\pi'}(t)) \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\int_s^t U_2\Big(c(u, X^{\pi'}(u))\Big) du \ + v(t, X^{\pi'}(t)) \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&= \mathbb{E}_{(s, X^{\pi}(s))}\Big(\int_s^t U_2\Big(c(u, X^{\pi'}(u))\Big) du \ + v(t, X^{\pi'}(t)) \Big)
\end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle $\pi' \in \mathcal{B}^{\pi}(s)$ gilt, gilt sie auch für das Supremum:

$$v(s, X^{\pi}(s)) \geq \sup_{\pi' \in \mathcal{B}^{\pi}(s)} \mathbb{E}_{(s,X^{\pi}(s))}\Big(\int\limits_s^t U_2\Big(c(u, X^{\pi'}(u))\Big)du \ + v(t, X^{\pi'}(t))\Big)$$

Es bleibt zu zeigen, dass für alle $\tilde{\pi}$, die auf $[s,t]$ mit π^* übereinstimmen, das Supremum in (4.8) erreicht wird.
Für diejenige Strategie $\tilde{\pi}^*$, die sogar auf $[s,T]$ mit π^* übereinstimmt, gilt offensichtlich die Gleichheit in (4.9) und damit in der gesamten Rechnung. Dann gilt aber auch für jedes $\tilde{\pi}$, das nur auf $[s,t]$ mit π^* übereinstimmt, $X^{\tilde{\pi}}(u) = X^{\tilde{\pi}^*}(u)$ für alle $s \leq u \leq t$ und somit:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{(s,X^{\pi}(s))}\Big(\int\limits_s^t U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}}(u))\Big)du \ + v(t, X^{\tilde{\pi}}(t))\Big) \\ = \ & \mathbb{E}_{(s,X^{\pi}(s))}\Big(\int\limits_s^t U_2\Big(c(u, X^{\tilde{\pi}^*}(u))\Big)du \ + v(t, X^{\tilde{\pi}^*}(t))\Big) \\ = \ & v(s, X^{\pi}(s)) \end{aligned}$$

□

Anschaulich besagt das Bellman-Prinzip, dass man auf dem Intervall $[s,T]$ optimal handelt, indem man auf dem kleineren Intervall $[s,t]$ optimal handelt und sich zum Zeitpunkt t mit dem bis dahin erreichten Vermögen neu überlegen kann, mit welcher Strategie man den erwarteten Wert der Wertfunktion erreichen kann. Sofern man die Wertfunktion kennt, muss man also nicht direkt die optimale Strategie für den gesamten Handelszeitraum kennen. Es reicht dagegen aus, die optimale Strategie auf einem kleineren Teilintervall zu kennen. Je kleiner man dieses Teilintervall werden lässt, um so weniger weit muss man in die Zukunft schauen, um die optimale Strategie zu entwickeln. Lässt man die Länge des Teilintervalls gegen 0 gehen, so erhält man direkt für den jetzigen Zeitpunkt die optimale Vermögensaufteilung.
Mit dieser Vorgehensweise lässt sich aus der Wertfunktion v schnell die optimale Strategie ermitteln. Leider muss man dazu aber erstmal die Wertfunktion kennen, welche natürlich wiederum von der optimalen Strategie abhängt. Wie wir später sehen werden, ist es aber tatsächlich so, dass man durch das Konvergieren der Länge des Teilintervalls gegen 0 eine Differentialgleichung für v aufstellen kann.

Zunächst wollen wir noch eine alternative Sichtweise des Bellman-Prinzips präsentieren:

Bemerkung 4.4. *Sei π eine beliebige zulässige Handelsstrategie. Wir setzen*

$$M^\pi(t) := \int\limits_0^t U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big)du \;+\; v(t, X^\pi(t)) \tag{4.10}$$

für alle $0 \leq t \leq T$.
Wegen des Bellman-Prinzips gilt für alle $0 \leq s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(M^\pi(t) \mid \mathcal{F}_s\Big) &= \mathbb{E}\Big(\int\limits_0^t U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big)du \;+\; v(t, X^\pi(t))\Big) \\
&= \int\limits_0^s U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big)du \;+\; \mathbb{E}\Big(\int\limits_s^t U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big)du \;+\; v(t, X^\pi(t))\Big) \\
&\leq \int\limits_0^s U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big)du \\
&\quad + \sup_{\pi' \in \mathcal{B}^\pi(s)} \mathbb{E}\Big(\int\limits_s^t U_2\Big(c(u, X^{\pi'}(u))\Big)du \;+\; v(t, X^{\pi'}(t))\Big) \\
&= \int\limits_0^s U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big)du \;+\; v(s, X^\pi(s)) \\
&= M^\pi(s)
\end{aligned}$$

Damit ist M^π ein Supermartingal. Für $\pi = \pi^*$ gilt während der gesamten Rechnung Gleichheit, M^{π^*} ist also sogar ein Martingal. Anders formuliert: Der Erwartungswert von M^π sinkt mit der Zeit, außer bei der optimalen Strategie π^*, bei der er konstant ist.

4.1.3. Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Im weiteren Verlauf nehmen wir an, dass die Itô-Formel auf v anwendbar ist. Dazu muss $v \in C^{1,2}$ gelten, was im Allgemeinen nicht der Fall ist. Abschwächungen dieser Bedingung werden in [Chr13] diskutiert. Wir werden in dieser Arbeit nicht auf die damit verbundenen Schwierigkeiten eingehen.
Um die späteren Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, führen wir vorher noch die nachfolgenden Definition ein:

Definition 4.5. *Für ein beliebiges $\pi \in \mathcal{A}$ definieren wir den Erzeuger von X^π als*

$$A^\pi v(t,x) := \sum_{i=1}^d \tilde{\mu}_i(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x_i}v(t,x) \;+\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_{ij}(t,x,\pi)\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}v(t,x), \tag{4.11}$$

wobei $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\sigma}$ die in (4.3) beschriebenen Koeffizienten der Dynamik von X^π sind *und* $a(t,x,\pi) := \tilde{\sigma}(t,x,\pi)\tilde{\sigma}(t,x,\pi)^T$*, also* $a_{ij}(t,x,\pi) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\sigma}_{ik}(t,x,\pi)\tilde{\sigma}_{jk}(t,x,\pi)$.

Ist X eindimensional, das heißt X besteht nur aus dem Vermögensprozess, so lässt sich $A^\pi v(t,x)$ einfacher schreiben als

$$A^\pi v(t,x) := \tilde{\mu}(t,x,\pi)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \;+\; \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(t,x,\pi)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x). \tag{4.12}$$

Wendet man die Itô-Formel auf die von t und $X^\pi(t)$ abhängige Wertfunktion v an, ergibt sich:

$$\begin{aligned} dv(t,X^\pi(t)) \;&=\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,X^\pi(t))dt \;+\; \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}v(t,X^\pi(t))dX_i^\pi(t) \\ &\quad +\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}v(t,X^\pi(t))d < X_i^\pi, X_j^\pi >_t \end{aligned}$$

Mit der Dynamik von $X^\pi(t)$ in (4.3) folgt:

$$\begin{aligned} dv(t,X^\pi(t)) \;&=\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,X^\pi(t))dt \\ &\quad +\; \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}v(t,X^\pi(t))\Big(\tilde{\mu}_i(t,X^\pi(t),\pi)dt + \sum_{k=1}^{n}\tilde{\sigma}_{ik}(t,X^\pi(t),\pi)dW_i(t)\Big) \\ &\quad +\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}v(t,X^\pi(t)) \;\sum_{k=1}^{n}\tilde{\sigma}_{ik}(t,X^\pi(t))\tilde{\sigma}_{jk}(t,X^\pi(t))\Big)dt \\ &=\; \Big(\frac{\partial}{\partial t}v(t,X^\pi(t)) \;+\; A^\pi v(t,X^\pi(t))\Big)\; dt \\ &\quad +\; \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}v(t,X^\pi(t))\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\sigma}_{ik}(t,X^\pi(t),\pi)dW_i(t)\Big) \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt gilt für $s \le t$:

$$\begin{aligned} v(t,X^\pi(t)) \;&=\; v(s,X^\pi(s)) \;+\; \int_s^t \Big(\frac{\partial}{\partial t}v(u,X^\pi(u)) \;+\; A^\pi v(u,X^\pi(u))\Big)\; du \\ &\quad +\; \int_s^t \frac{\partial}{\partial x_i}v(u,X^\pi(u))\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\sigma}_{ik}ut, X^\pi(u),\pi)dW_i(u)\Big) \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass $M(t) := \int_s^t \frac{\partial}{\partial x_i}v(u,X^\pi(u))\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\sigma}_{ik}ut, X^\pi(u),\pi)dW_i(u)\Big)$ nicht nur ein lokales Martingal, sondern sogar ein Martingal bildet, folgt mithilfe des Bellman-Prinzips:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{(s,X^\pi(s))} v(t, X^\pi(t)) \;&=\; \mathbb{E}(v(t, X^\pi(t) \mid \mathcal{F}_s) \\
&=\; v(s, X^\pi(s)) \\
&\quad +\; \mathbb{E}\Big(\int\limits_s^t \big(\frac{\partial}{\partial t} v(u, X^\pi(u)) \;+\; A^\pi v(u, X^\pi(u)) \big)\; du \mid \mathcal{F}_s \Big) \\
&\quad +\; \mathbb{E}(M(t) \mid \mathcal{F}_s) \\
&\geq\; \mathbb{E}_{(s,X^\pi(s))} \Big(\int\limits_s^t U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big) du \;+\; v(t, X^\pi(t)) \Big) \\
&\quad +\; \mathbb{E}_{(s,X^\pi(s))} \Big(\int\limits_s^t \big(\frac{\partial}{\partial t} v(u, X^\pi(u)) \;+\; A^\pi v(u, X^\pi(u)) \big)\; du \Big) \\
&\quad +\; M(s)
\end{aligned}
$$

Da der Summand $\mathbb{E}_{(s,X^\pi(s))} v(t, X^\pi(t))$ auf beiden Seiten steht und zudem $M(s) = 0$ gilt, ergibt sich:

$$
0 \;\geq\; \mathbb{E}_{(s,X^\pi(s))} \Big(\int\limits_s^t U_2\Big(c(u, X^\pi(u))\Big) \;+\; \frac{\partial}{\partial t} v(u, X^\pi(u)) \;+\; A^\pi v(u, X^\pi(u))\; du \Big)
$$

Wenn der obige Erwartungswert in $t = s$ nach t differenzierbar ist, folgt einfach

$$
0 \;\geq\; U_2\Big(c(t, X^\pi(t))\Big) \;+\; \frac{\partial}{\partial t} v(t, X^\pi(t)) \;+\; A^\pi v(t, X^\pi(t)),
$$

wobei für $\pi = \pi^*$ sogar Gleichheit gilt.
Betrachtet man nun das Maximum über alle erlaubten Strategien, so erhält man die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung:

Satz 4.6 (Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung)**.**
Für alle $0 \leq t \leq T$ und alle $x \in [0, \infty)$ gilt:

$$
0 \;=\; \max_{\pi \in \mathcal{A}} \Big(U_2\Big(c(t, x)\Big) \;+\; \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) \;+\; A^\pi v(t, x) \Big) \tag{4.13}
$$

In der obigen Rechnung wurden mehrere Annahmen gemacht, welche aber nicht immer gegeben sind. Eine Möglichkeit, um dieses Problem zu lösen, sind sogenannte Viskositätslösungen. Mit ihrer Hilfe lassen sich die vorherigen Annahmen abschwächen. Für Probleme in der Praxis ist dieses Thema kaum relevant, daher werden wir hier nicht näher auf die diesbezüglichen Schwierigkeiten eingehen und verweisen stattdessen nochmal auf [Chr13], Kapitel 3.6.

4.2. Anwendungen der HJB-Gleichung

Das allgemeine Vorgehen beim Lösen von Optimierungsproblemen mit der HJB-Gleichung unterteilt sich in zwei Schritte:

- Finden einer optimalen Strategie $\pi^* \in \mathcal{A}$ in (4.12). Dabei hängt π^* in der Regel von der noch unbekannten Wertfunktion v ab.
- Einsetzen der ermittelten optimalen Strategie π^* in (4.12) und Lösen der erhaltenen Differentialgleichung. Die benötigten Randwerte erhält man direkt durch die Definition von v in (4.1): $v(T,x) = U_1(x)$ für alle $x \in D \subseteq \mathbb{R}^d$ mit D als Definitionsbereich von X.

Je nach Modell lassen sich diese beiden Punkte nicht immer problemlos durchsetzen. Bevor wir uns aber mit diesen Schwierigkeiten beschäftigen, fangen wir erstmal mit einem einfachen Beispiel an, welches auch in [Chr13] zu finden ist:

4.2.1. Optimierung im Fall ohne Restriktionen

Als erste einfache Anwendung der HJB-Gleichung wollen wir uns den Fall ohne Restriktionen anschauen. Wir betrachten nur ein risky asset, also $n = 1$. Zudem seien r, μ und σ deterministisch. Damit besteht X nur aus dem Vermögens-prozess, und sowohl $\tilde{\mu}$ als auch $\tilde{\sigma}$ sind eindimensional. Die Nutzenfunktionen U_1 für das Endvermögen und U_2 für den Konsum während der Laufzeit werden wir später spezifizieren.
Nach (2.8) gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(t,x,\pi) &= x\Big(r(t) + \pi(t)(\mu(t) - r(t))\Big) - c(t)\\ \tilde{\sigma}(t,x,\pi) &= x\pi(t)\sigma(t)\end{aligned}$$

Somit gilt nach (4.12) für den Erzeuger von X^π:

$$\begin{aligned}A^\pi v(t,x) = &\Big(x\Big(r(t) + \pi(t)(\mu(t) - r(t))\Big) - c(t)\Big)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\\ &+ \frac{1}{2}x^2\pi(t)^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)\end{aligned}$$

Setzt man dies in die HJB-Gleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\pi\in\mathcal{A}}\Big(U_2\big(c(t,x)\big) \;+\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) \;+\; A^\pi v(t,x)\Big)\\
&= \max_{\pi\in\mathcal{A}}\bigg(U_2\big(c(t,x)\big) \;+\; \Big(x\Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))\Big)-c(t)\Big)\;\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\\
&\qquad\qquad + \;\frac{1}{2}x^2\pi(t)^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)\bigg) \;+\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,x)
\end{aligned}$$

Da die Menge $\mathcal{A}_t$ der zum Zeitpunkt t erlaubten Vermögensaufteilungen gleich der Menge der reellen Zahlen und damit unabhängig von der vorherigen Strategie ist, kann man statt das Maximieren über den gesamten Beobachtungszeitraum aufsplitten in das Maximieren über jeden einzelnen Zeitpunkt. Damit folgt für alle t und x:

$$\begin{aligned}
0 \;=\; &\max_{(y_1,y_2)\,\in\,\mathbb{R}\times[0,\infty)}\bigg(U_2\big(y_2\big) \;+\; \Big(x\Big(r(t)+y_1(\mu(t)-r(t))\Big)-y_2\Big)\;\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\\
&\qquad + \;\frac{1}{2}x^2y_1^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)\bigg) \;+\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,x)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Durch Differenzieren des Ausdrucks in der Klammer nach y_1 und y_2 und anschließenden Gleichsetzen mit 0 erhält man die Maximierer y_1^* und y_2^*:

$$0 \;=\; x(\mu(t)-r(t))\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \;+\; x^2y_1\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)$$

und

$$0 \;=\; U_2'(y_2) \;-\; \frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\;,$$

also

$$\begin{aligned}
y_1^* &= -\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2x}\;\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}\\
y_2^* &= \big(U_2'\big)^{-1}\Big(\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\Big)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Damit haben wir den erste Teilaufgabe geschafft, nämlich das Errechnen der optimalen Strategie in Abhängigkeit von der noch unbekannten Wertfunktion. Die

Maximierer setzen wir in (4.14) ein und erhalten so eine Differentialgleichung für v:

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& U_2\Big(\big(U_2'\big)^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\big)\Big) \\
&+\;\Big(xr(t)-\frac{(\mu(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\,\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}-\big(U_2'\big)^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\big)\Big)\,\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \\
&+\;\frac{1}{2}\,\frac{(\mu(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\,\left(\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}\right)^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) \\
&+\;\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) \\
=\;& U_2\Big(\big(U_2'\big)^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\big)\Big) \\
&+\;\Big(xr(t)-\frac{1}{2}\,\frac{(\mu(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\,\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}-\big(U_2'\big)^{-1}\big(\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\big)\Big)\,\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \\
&+\;\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Wir erhalten also eine partielle Differentialgleichung, in der das Quadrat der ersten partiellen Ableitung nach x auftaucht und die zweite partielle Ableitung nach x im Nenner steht. Diese hochgradig nichtlineare Differentialgleichung lässt sich im Allgemeinen nicht analytisch lösen. Für bestimmte Wahlen von U_1 und U_2 ist dies aber doch möglich. Wie Christensen in [Chr13] zeigt, lässt sich für $U_1(x)=U_2(x)=\frac{1}{\alpha}x^\alpha$ mit etwas größerem Aufwand eine Lösung analytisch finden.

Wir werden uns hier auf den Fall beschränken, dass kein Konsum während der Laufzeit möglich ist, und wählen zusätzlich $U_1(x)=\log(x)$. Durch das Wegfallen des Konsums verschwinden in (4.14) die Terme "$U_2(y_2)$" und "$-y_2$". Der vorhin ermittelte Maximierer y_1^* ist auch weiterhin gültig.

Die Gleichung (4.16) vereinfacht sich zu

$$0 \;=\; \Big(xr(t)-\frac{1}{2}\,\frac{(\mu(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\,\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}\Big)\,\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \;+\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,x)$$

mit der Endbedingung $v(T,x)=U_1(x)=\log(x)$.

Wir wählen nun den Ansatz $v(t,x)=\log(x)+f(t)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \Big(xr(t)-\frac{1}{2}\,\frac{(\mu(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\,\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\Big)\,\frac{1}{x} \;+\; f'(t) \\
&=\; r(t)+\frac{1}{2}\,\frac{(\mu(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2} \;+\; f'(t)\;,
\end{aligned}$$

also

$$f'(t) \;=\; -r(t) - \frac{1}{2}\,\frac{(\mu(t)-r(t))^2}{\sigma(t)^2}\;.$$

Aus der Endbedingung folgt $f(T)=0$. Insgesamt ergibt sich:

$$f(t) \;=\; \int_t^T -r(s) - \frac{1}{2}\,\frac{(\mu(s)-r(s))^2}{\sigma(s)^2}\; ds$$

Da f nicht von x abhängt, hat der Ansatz $v(t,x)=\log(x)+f(t)$ zum Ziel geführt und wir erhalten als Wertfunktion:

$$v(t,x) \;=\; \log(x) \;+\; \int_t^T -r(s) - \frac{1}{2}\,\frac{(\mu(s)-r(s))^2}{\sigma(s)^2}\; ds \tag{4.17}$$

Mithilfe dieser Wertfunktion lässt sich nun endgültig die optimale Strategie ausrechnen. Dazu setzen wir die erste und zweite partielle Ableitung von v nach x in (4.15) ein und bekommen als Ergebnis:

$$\pi^*(t) \;=\; -\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2 x}\,\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \;=\; \frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}$$

Wir erhalten also die uns bekannte Merton-Strategie. Dies ist nicht verwunderlich, weil wir die gleichen Voraussetzungen hatten wie in Beispiel 2.9 oder wie zu Beginn des dritten Kapitels.

In den nächsten beiden Beispielen wollen wir, wie in Kapitel 3, die Menge der erlaubten π_t durch deterministische Funktionen begrenzen. Dabei betrachten wir einmal die logarithmische Nutzenfunktion und einmal den Power-Nutzen. Die Prozesse r,μ und σ seien deterministisch. Um auf analytischem Wege eine Lösung erhalten zu können, werden wir den Konsum während der Laufzeit nicht in unsere Rechnungen miteinbeziehen. Wir haben somit (fast) die gleiche Grundlage wie in den Beispielen 3.1.1 beziehungsweise 3.1.2.

4.2.2. Optimierung bei logarithmischer Nutzenfunktion

Sei $U(x)=\log(x)$. Als Schranken für die erlaubten Strategien wählen wir deterministische Funktionen $c,d:[0,T]\to\mathbb{R}$ mit $c(t)\le 0\le d(t)$ für alle $0\le t\le T$. Diese Bedingung an c und d verhindert, dass wir in den nachfolgenden Rechnungen größere Fallunterscheidungen machen müssen. In der Praxis hat diese Bedingung kaum eine Bedeutung, weil es in der Regel erlaubt ist, kein Kapital in das risky asset zu

investieren.
Wie schon im vorherigen Beispiel reicht es, statt über dem gesamten Beobachtungszeitraum nur über jeden einzelnen Zeitpunkt zu maximieren. Die HJB-Gleichung vereinfacht sich dann zu:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \max_{y\in[c(t),d(t)]}\Bigg(\Big(x\Big(r(t)+y(\mu(t)-r(t))\Big)\Big)\,\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \\ & \quad + \frac{1}{2}x^2y^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)\Bigg) \;+\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ohne die Bedingung $y \in [c(t), d(t)]$ erhielte man den Maximierer aus (4.15). Dieser ist stets positiv, sofern $\mu(t) > r(t)$ für alle $0 \le t \le T$ gilt, denn die erste partielle Ableitung von v nach x ist immer positiv, die zweite partielle Ableitung dagegen immer negativ. Ist dieser Maximierer nicht im Intervall $[c(t), d(t)]$, erreicht man das Maximum aufgrund der quadratischen Struktur des zu maximierenden Ausdrucks, indem man das am nächsten zum Maximierer aus (4.15) liegende erlaubte y nimmt. Da der Maximierer aus (4.15) positiv ist, kann er nur oberhalb von $d(t)$, nicht aber unterhalb von $c(t)$ liegen. Daher ist $d(t)$ das gesuchte y, falls y_1^* aus (4.15) nicht in $[c(t), d(t)]$ liegt.

$$y^* \;=\; \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2 x}\,\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}\;,\; d(t)\} \tag{4.19}$$

Jetzt setzen wir y^* in (4.18) ein:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \Big(x\Big(r(t)+y^*(\mu(t)-r(t))\Big)\Big)\,\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \\ & + \frac{1}{2}x^2{y^*}^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) \;+\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) \end{aligned} \tag{4.20}$$

An dieser Stelle wird erstmals die zugrunde liegende Nutzenfunktion einbezogen. Da wir die gleiche Nutzenfunktion wie in Beispiel 4.2.1 haben, wählen wir auch den gleichen Ansatz für die Wertfunktion: $v(t,x) = \log(x) + f(t)$. Durch Einsetzen in (4.20) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \Big(x\Big(r(t)+y^*(\mu(t)-r(t))\Big)\Big)\,\frac{1}{x} \;+\; \frac{1}{2}x^2{y^*}^2\sigma(t)^2\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) \;+\; f'(t) \\ &=\; r(t)+y^*(\mu(t)-r(t)) \;-\; \frac{1}{2}{y^*}^2\sigma(t)^2 \;+\; f'(t) \end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
y^* &= \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2 x}\ \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\ ,\ d(t)\} \\
&= \min\{\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}\ ,\ d(t)\}
\end{aligned}
$$

Aus der Endbedingung ergibt sich $f(T)=0$ und damit

$$
f(t) \;=\; \int_t^T -r(s) - y^*(\mu(s)-r(s)) \;+\; \frac{1}{2}{y^*}^2\sigma(s)^2\ ds
$$

Da f unabhängig von x ist, ist die Wertfunktion tatsächlich von der Form $v(t,x) = \log(x) + f(t)$. Die optimale Strategie ist daher

$$
\pi^*(t) \;=\; \min\{\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}\ ,\ d(t)\}
$$

für alle $t \in [0,T]$.

4.2.3. Optimierung bei Potenz-Nutzenfunktion

Sei $U(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ für ein $\alpha \in (-\infty,1)\backslash\{0\}$. Die Funktionen c und d seien wie in Beispiel 4.2.2.
Die Argumentation für diese Nutzenfunktion erfolgt zunächst analog zu dem Beispiel mit logarithmischer Nutzenfunktion. Die Gleichung (4.18), der Maximierer in (4.19) und die Differentialgleichung (4.20) gelten alle unabhängig von der gewählten Nutzenfunktion. Für die Wertfunktion wählen wir nun den Ansatz $v(t,x) = f(t)\cdot\frac{1}{\alpha}x^\alpha$. Durch Einsetzen in (4.20) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
0 &= \Big(x\Big(r(t)+y^*(\mu(t)-r(t))\Big)\Big)\ f(t)\ x^{\alpha-1} \\
&\quad + \frac{1}{2}x^2{y^*}^2\sigma(t)^2 f(t)(\alpha-1)\ x^{\alpha-2} \;+\; \frac{1}{\alpha}f'(t)x^\alpha \\
&= f(t)\ x^\alpha\Big(r(t)+y^*(\mu(t)-r(t)) \;+\; \frac{1}{2}{y^*}^2\sigma(t)^2(\alpha-1)\Big) \;+\; \frac{1}{\alpha}f'(t)x^\alpha
\end{aligned}
$$

Dividiert man diese Gleichung durch x^α, so erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung für f. Aus der Endbedingung $v(T,x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ folgt $f(T)=1$. Daraus ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung als

$$
f(t) \;=\; \exp\Big(\int_t^T -\alpha\Big(r(s)+y^*(\mu(s)-r(s)) \;+\; \frac{1}{2}{y^*}^2\sigma(s)^2(\alpha-1)\Big)\ ds\Big)
$$

Um zu überprüfen, ob f unabhängig von x ist, müssen wir noch y^* betrachten. Aus (4.19) ergibt sich:

$$\begin{aligned} y^* &= \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2 x} \frac{f(t)\ x^{\alpha-1}}{f(t)\ (\alpha-1)\ x^{\alpha-2}}\ ,\ d(t)\} \\ &= \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2} \frac{1}{\alpha-1}\ ,\ d(t)\} \end{aligned}$$

Da y^* und damit auch f unabhängig von x sind, hat der oben gewählte Ansatz seine Berechtigung und die optimale Strategie lautet für alle $t \in [0,T]$:

$$\pi^*(t) = \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{(\alpha-1)\sigma(t)^2}\ ,\ d(t)\}$$

Wir erhalten somit das gleiche Resultat wie in Beispiel 3.1.2, nur mit deutlich weniger Aufwand.

Wir haben in den letzten beiden Beispielen angenommen, dass die Prozesse r, μ und σ deterministisch sind und haben die gleichen Resultate wie in den Beispielen 3.1.1 und 3.1.2 erhalten. In Beispiel 3.1.1 gab es diese Voraussetzung allerdings nicht. Daher sollte es auch möglich sein mit der HJB-Gleichung bei stochastischen Prozessen r, μ oder σ eine Lösung zu finden. Der Einfachheit halber werden wir im nächsten Beispiel von einem Short-Rate-Modell mit deterministischen μ und σ ausgehen. Die Fälle, in denen stattdessen oder zusätzlich die Rendite oder die Volatilität des risky assets stochastisch sind, können analog behandelt werden.

4.2.4. Optimierung bei stochastischer Zinsrate

Als Schranken für π nehmen wir erneut deterministische Funktionen c, d mit $c(t) \leq 0 \leq d(t)$ für alle $t \in [0,T]$. Der Prozess r sei stochastisch mit der Dynamik

$$dr(t) = \mu_r(t)dt + \sigma_r(t)dW_2(t)$$

mit einem von W_1 unabhängigen Wiener-Prozess.
Faktisch soll nur in einer, von W_1 abhängigen Aktie gehandelt werden dürfen. Damit die von uns gestellten Anforderungen an das Finanzmarktmodell erfüllt sind, muss es aber streng genommen genauso viele risky assets geben wie Wiener-Prozesse. Wir nehmen daher die Volatilität als zweites risky asset, das aber nicht handelbar ist. Da dann stets $\pi_2 \equiv 0$ gilt, lassen wir π_2 in der folgenden Betrachtung weg und reden von der eindimensionalen Strategie π.
Der Prozess X umfasst jetzt nicht nur den Vermögensprozess, sondern auch den

Prozess r. Die Koeffizienten der Dynamik von X sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}(t,x,r) &= \begin{pmatrix} x\Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))\Big) \\ \mu_r(t) \end{pmatrix} \\
\tilde{\sigma}(t,x,r) &= \begin{pmatrix} x\pi(t)\sigma(t) & 0 \\ 0 & \sigma_r(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit gilt für den Erzeuger von X^π:

$$\begin{aligned}
A^\pi v(t,x,r) &= x\Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))\Big)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x,r) \;+\; \mu_r(t)\frac{\partial}{\partial r}v(t,x,r) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(x^2\pi(t)^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x,r) \;+\; \sigma_r(t)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(t,x,r)\Big)
\end{aligned}$$

Um die HJB-Gleichung zu lösen, brauchen wir wieder dasjenige $\pi(t)$, das $A^\pi v(t,x,r)$ maximiert. Man sieht schnell, dass die zusätzlichen Terme mit partiellen Ableitungen nach r keinen Einfluss auf den Maximierer haben und deshalb wieder gilt

$$\pi^*(t) \;=\; \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2 x}\;\frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}\;,\; d(t)\}$$

Eingesetzt in den Erzeuger von X^π und danach in die HJB-Gleichung erhalten wir eine partielle Differentialgleichung in Abhängigkeit von t, x und r. Zusammen mit der Endbedingung $v(T,x,r) = U(x)$ für alle x und r hat diese eine eindeutige Lösung.

Zunächst betrachten wir den Fall $U(x) = \log x$. Ähnlich wie in den vorherigen Beispielen wählen wir für v den Ansatz $v(t,x,r) = \log(x) + f(t,r)$. Damit ergibt sich aus der HJB-Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{\pi\in\mathcal{A}}\Big(\frac{\partial}{\partial t}v(t,x,r) \;+\; A^\pi v(t,x,r)\Big) \\
&= \max_{\pi(t)\in[0,d(t)]}\Bigg(\frac{\partial}{\partial t}v(t,x,r) \\
&\qquad + x\Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))\Big)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x,r) \;+\; \mu_r(t)\frac{\partial}{\partial r}v(t,x,r) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(x^2\pi(t)^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x,r) \;+\; \sigma_r(t)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(t,x,r)\Big)\Bigg) \qquad (4.21) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}f(t,r) \;+\; x\Big(r(t)+\pi^*(t)(\mu(t)-r(t))\Big)\frac{1}{x} \;+\; \mu_r(t)\frac{\partial}{\partial r}f(t,r) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(-x^2\pi^*(t)^2\sigma(t)^2\frac{1}{x^2} \;+\; \sigma_r(t)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(t,r)\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} f(t,r) \; + \; r(t) + \pi^*(t)(\mu(t) - r(t)) \; + \; \mu_r(t) \frac{\partial}{\partial r} f(t,r) \\
&\quad - \; \frac{1}{2} \pi^*(t)^2 \sigma(t)^2 \; + \; \frac{1}{2} \sigma_r(t)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(t,r)
\end{aligned}
$$

und

$$
\pi^*(t) \;=\; \min\{ \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)^2} \;,\; d(t) \}
$$

Wir erhalten also eine partielle Differentialgleichung für f, die nur noch von t und r abhängt, nicht aber von x. Zusätzlich erhalten wir durch $v(T,x,r) = U(x) = \log(x)$ die Endbedingung $f(T,r) = 0$ für alle r.

Wir unterstellen, dass eine Lösung für die obige partielle Differentialgleichung existiert. Diese Lösung auszurechnen ist erheblich schwerer als bei den vorherigen Beispielen, bei denen wir aufgrund der Eindimensionalität von X nur eine gewöhnliche Differentialgleichung erhalten haben. Es reicht uns aber die bloße Existenz einer Lösung, damit der Ansatz $v(t,x,r) = \log(x) + f(t,r)$ richtig war, und wir erhalten mit der obigen Formel für $\pi^*(t)$ unsere optimale Strategie. Die exakte Kenntnis der Wertfunktion v ist also gar nicht erforderlich.

Im Fall des Power-Nutzens führt der Ansatz aus Beispiel 4.2.3 ebenfalls zum Erfolg. Die vorherigen Rechnungen behalten unabhängig von der Nutzenfunktion bis (4.21) ihre Gültigkeit. Wir schreiben die Wertfunktion als $v(t,x,r) = f(t,r) \cdot \frac{1}{\alpha} x^\alpha$, so dass aus (4.21) folgt:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \frac{1}{\alpha} x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} f(t,r) \; + \; x\Big(r(t) + \pi^*(t)(\mu(t) - r(t))\Big) f(t,r) x^{\alpha-1} \; + \; \mu_r(t) \frac{1}{\alpha} x^\alpha \frac{\partial}{\partial r} f(t,r) \\
& + \; \frac{1}{2}\Big(x^2 \pi^*(t)^2 \sigma(t)^2 f(t,r)(\alpha-1) x^{\alpha-2} \; + \; \sigma_r(t)^2 \frac{1}{\alpha} x^\alpha \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(t,r) \Big)
\end{aligned}
$$

Durch Eliminieren des Faktors x^α, der in jedem Summanden vorkommt, erhalten wir die partielle Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} f(t,r) \; + \; \Big(r(t) + \pi^*(t)(\mu(t) - r(t))\Big) f(t,r) \; + \; \mu_r(t) \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial r} f(t,r) \\
& + \; \frac{1}{2}\Big(\pi^*(t)^2 \sigma(t)^2 f(t,r)(\alpha-1) \; + \; \sigma_r(t)^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(t,r) \Big) \; .
\end{aligned}
$$

Für $\pi^*(t)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\pi^*(t) &= \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2 x}\ \frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}\ ,\ d(t)\} \\
&= \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2 x}\ \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)x^{\alpha-2}}\ ,\ d(t)\} \\
&= \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{(\alpha-1)\sigma(t)^2}\ ,\ d(t)\}
\end{aligned}$$

Also ist $\pi^*(t)$ und damit auch die obige Differentialgleichung unabhängig von x. Der Ansatz für v war demnach korrekt und die genannte Formel für $\pi^*(t)$ gilt tatsächlich.

Während im Beispiel 3.1.2 noch die Voraussetzung von deterministischen Prozessen r, μ und σ erforderlich war, konnten wir nun zeigen, dass die dort ermittelte optimale Strategie auch bei stochastischer (aber von dem Preisprozess der Aktie unabhängiger!) Zinsrate ihre Gültigkeit behält. Analog lässt sich das gleiche Resultat auch für stochastisches μ oder σ zeigen.

Im letzten Beispiel wollen wir auf den Fall eingehen, dass die Restriktionen nicht direkt den relativen Teil des in die Aktie investierten Vermögens betreffen, sondern den absoluten Betrag. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies, dass wir uns wieder zwei Schrankenfunktionen c und d wählen, so dass $H(t)\cdot S(t) = x\cdot\pi(t)$ innerhalb des Intervalls $[c(t), d(t)]$ liegen muss.

4.2.5. Restriktionen an den absoluten Betrag

Seien c und d deterministische Funktionen, innerhalb derer sich der Prozess $H\cdot S$ bewegen muss. Die HJB-Gleichung nimmt dann folgende Form an:

$$\begin{aligned}
0 &= \max_{H(t)S(t)\in[c(t),d(t)]}\left(\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)\ +\ A^\pi v(t,x)\right) \\
&= \max_{H(t)S(t)\in[c(t),d(t)]}\left(\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)\right. \\
&\qquad + x\Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))\Big)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)\ +\ \mu_r(t)\frac{\partial}{\partial r}v(t,x) \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\Big(x^2\pi(t)^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)\ +\ \sigma_r(t)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(t,x)\Big)\right) \\
&= \max_{H(t)S(t)\in[c(t),d(t)]}\left(\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)\right. \\
&\qquad + \Big(xr(t)+H(t)S(t)(\mu(t)-r(t))\Big)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) \\
&\qquad + \mu_r(t)\frac{\partial}{\partial r}v(t,x)
\end{aligned}$$

$$+\ \frac{1}{2}\Big((H(t)S(t))^2\sigma(t)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)\ +\ \sigma_r(t)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(t,x)\Big)\Big)$$

Der Maximierer $(H\cdot S)^*(t)$ ergibt sich zu:

$$(H\cdot S)^*(t)\ =\ \min\{-\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)^2}\ \frac{\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)}\ ,\ d(t)\}$$

Bei den bisherigen Beispielen haben wir an dieser Stelle immer einen Ansatz für die Wertfunktion gewählt und die entsprechenden partiellen Ableitungen von v eingesetzt. In diesem Fall führt aber keiner der Ansätze zum Ziel, denn wenn $(H\cdot S)^*(t) = d(t)$ gilt, kommen in der Differentialgleichung Terme mit unterschiedlichen Vielfachheiten von x vor, so dass sich das x nicht vollständig eliminieren lässt. Dieser Fall lässt sich also nicht vollständig analytisch lösen.

5. Numerische Simulation

Wir haben in den letzten beiden Kapiteln gesehen, dass sich viele, aber nicht alle Optimierungsprobleme analytisch lösen lassen. Deswegen wollen wir in diesem Kapitel kurz ein numerisches Verfahren angeben, mit dem sich auch schwierigere Optimierungsprobleme lösen lassen. Wir stützen uns dabei auf [Zul06], wo das Verfahren nochmal ausführlicher beschrieben wird.

5.1. Herleitung des numerischen Verfahrens

Wir gehen davon aus, dass wir nur eine handelbare Aktie haben. Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung in Satz 4.6.

Wir benutzen die Finite-Differenzen-Methode. Dazu legen wir ein Gitter auf eine Teilmenge des Definitionsbereichs von v, genauer gesagt auf $[0,T] \times [xstart, xende]$, wobei $xstart$ und $xende$ frei wählbare Grenzen darstellen. Das Intervall $[0,T]$ wird in n_t Punkte zerlegt, wobei der Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten jeweils $h_t := T/n_t$ beträgt. Ebenso wird das Intervall $[xstart, xende]$ in n_x Punkte mit einem Abstand von $h_x := (xende - xstart)/n_x$ zerlegt. Die partiellen Ableitungen von v werden durch Differenzenquotienten approximiert:

$$D_x v(t,x) = \frac{v(t,x+h_x) - v(t,x)}{h_x} \tag{5.1}$$

$$D^2_{x^2} v(t,x) = \frac{v(t,x-h_x) - 2v(t,x) + v(t,x+h_x)}{h_x^2} \tag{5.2}$$

Um etwaigen Verwechslungen der Variablen vorzubeugen, benennen wir die in Kapitel 4 eingeführten Koeffizienten der Dynamik des Vermögensprozesses $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\sigma}$ um in f und G. Für den Vermögensprozess gilt also

$$dX(t) = f(t,X(t))dt + G(t,X(t))dW(t) , \tag{5.3}$$

wobei in unserem Fall gilt:

$$f(t,x) = x\Big(r(t) + \pi(t)(\mu(t) - r(t))\Big) \tag{5.4}$$

beziehungsweise bei erlaubtem Konsum während der Laufzeit

$$f(t,x) \;=\; x\Big(r(t)+\pi(t)(\mu(t)-r(t))\Big) \;-\; c(t,x)\;, \tag{5.5}$$

und

$$G(t,x) \;=\; x\pi(t)\sigma(t)\;. \tag{5.6}$$

Durch Ersetzen der partiellen Ableitungen durch die Differenzenquotienten in der HJB-Gleichung folgt:

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \max_{\pi\in\mathcal{A}}\Big(\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) \;+\; U_2(c(t,x)) \;+\; f(t,x)D_x v(t,x) \;+\; G(t,x)D^2_{x^2}v(t,x)\Big) \\ &=\; \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) \;+\; \hat{H}\Big(t,x,D_x v(t,x),D^2_{x^2}v(t,x)\Big)\;, \end{aligned} \tag{5.7}$$

wobei

$$\hat{H}\Big(t,x,y_1,y_2\Big) \;:=\; \max_{\pi\in\mathcal{A}}\Big(U_2(c(t,x)) \;+\; f(t,x)y_1 \;+\; G(t,x)y_2\Big)$$

als diskrete Hamiltonsche Funktion bezeichnet wird.
Durch Einsetzen der Formeln (5.1) und (5.2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{H}\Big(t,x,D_x v(t,x),D^2_{x^2}v(t,x)\Big) \;=\; \max_{\pi\in\mathcal{A}}\Big(&U_2(c(t,x)) \\ &+\; \frac{G(t,x)^2}{2h_x^2}v(t,x-h_x) \\ &+\; \Big(-\frac{f(t,x)}{h_x}-\frac{G(t,x)^2}{h_x^2}\Big)v(t,x) \\ &+\; \Big(\frac{f(t,x)}{h_x}+\frac{G(t,x)^2}{2h_x^2}\Big)v(t,x+h_x)\Big) \end{aligned} \tag{5.8}$$

An dieser Stelle kristallisiert sich eine erste Idee zur numerischen Lösung der HJB-Gleichung heraus. Wir berechnen zunächst die Wertfunktion an allen Gitterpunkten (T,x_i) mithilfe der Endbedingung $v(T,x)=U_1(x)$. Für $t=T$ lässt sich dann die Hamiltonsche Funktion (5.8) auswerten und in (5.7) einsetzen. Anschließend errechnet man aus (5.7) und dem Wert $v(T,x)$ den Wert von v an der Stelle $(T-h_t,x)$. Diese Rechnung führt man für alle Gitterpunkte $(T-h_t,x)$ durch. Auf die gleiche Weise errechnet man kontinuierlich die Werte für den nächstkleineren Zeitpunkt, bis man bei $t=0$ angekommen ist.
Das gerade beschriebene Verfahren hat leider einen Haken. Die Hamiltonsche Funktion lässt sich nur an Punkten im Inneren des Gitters berechnen, weil stets Auswertungen der Wertfunktion an benachbarten Gitterpunkten benötigt werden. Man

braucht also zusätzliche Randbedingungen für diejenigen Gitterpunkte (t,x) mit $x = xstart$ beziehungsweise $x = xende$. Diese Randbedingungen sind leider auf keine Weise durch das Modell vorgegeben und müssen deshalb von uns geeignet gewählt werden. Die Art der Randbedingungen kann je nach gegebener Nutzenfunktion unterschiedlich sein. So macht es zum Beispiel keinen Sinn, bei der logarithmischen Nutzenfunktion Dirichlet-Randbedingungen zu wählen. Nehmen wir die Modellannahmen aus Beispiel 4.2.1, so gilt $v(t,x) = \log(x) + f(t)$, so dass sich die absoluten Werte von v am Rand nicht vorhersagen lassen. Anders sieht es beim Power-Nutzen aus. Wählt man $xstart = 0$, so lässt sich für diesen unteren Rand die Bedingung $v(t, xstart) = 0$ begründen. Da das Vermögen stets nichtnegativ sein muss, kann man mit einem Vermögen von 0 nicht in risikobehaftete Güter investieren und wird damit auch am Ende der Laufzeit bei 0 stehen. Für den oberen Rand müssen aber auch hier Neumann-Randbedingungen gewählt werden.

Leider führt das beschriebene Verfahren auch nach der Wahl geeigneter Randbedingungen nicht immer zum Ziel. Wie sich empirisch herausstellt, ist das Verfahren instabil. Dies liegt unter anderem daran, dass durch das Diskretisieren des Raumes die Differenzenquotienten schon zum Zeitpunkt $t = T$ nicht den exakten Wert der partiellen Ableitungen wiedergeben. Dadurch, dass in der Formel für die optimale Strategie die zweite partielle Ableitung im Nenner steht, werden selbst kleine Diskretisierungsfehler schnell verstärkt. Ein anderer Grund für die Instabilität ist, dass in (5.7) die Hamiltonsche Funktion an einem Zeitpunkt t ausgewertet wird, die Zeitableitung dann aber auf das Intervall $[t-h_t, t]$ bezogen wird.

Wegen der Instabilität des genannten Verfahrens müssen wir dieses modifizieren. Wir benutzen ein sogenanntes Crank-Nicolson-Verfahren. Dies stellt eine Mischung aus explizitem und implizitem Verfahren dar. Mit dieser Idee lässt sich der letztgenannte Grund zur Instabilität des einfachen Verfahrens vermeiden.

Wir führen den Parameter $\theta \in [0,1]$ ein, der die gewichtete Mittelung zwischen explizitem und implizitem Verfahren angibt. Die Gleichung (5.7) wird modifiziert zu:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \frac{v(t+h_t,x)-v(t,x)}{h_t} v(t,x) \;+\; (1-\theta)\hat{H}\Big(t+h_t, x, D_x v(t+h_t,x), D^2_{x^2} v(t+h_t,x)\Big) \\ & +\; \theta \hat{H}\Big(t,x,D_x v(t,x), D^2_{x^2} v(t,x)\Big) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Für $\theta = 0$ erhalten wir das oben genannte explizite Verfahren, welches jedoch instabil ist. Für $\theta = 1$ erhält man ein voll implizites Schema. Bei den späteren numerischen Simulationen wählen wir stets $\theta = 0,5$.

Für ein festes t seien die Werte $v(t+h_t,x)$ alle gegeben. Dann kann aus diesen Werten die Hamiltonsche Funktion $\hat{H}(t+h_t,...)$ berechnet werden. Die Auswertung der Hamiltonschen Funktion zum Zeitpunkt t kann nicht direkt erfolgen, weil diese von dem Punkt (t,x) und seinen Nachbarpunkten abhängt. Im ersten Schritt werden wir

hier statt der Werte $v(t,x)$ die Werte $v(t+h_t,x)$ einsetzen, das heißt wir extrapolieren konstant. Aus diesen Werten ermitteln wir die optimale Strategie. Anschließend können wir ein lineares Gleichungssystem aufstellen, in das für jeden Gitterpunkt (t,x) mit x aus dem Inneren des Gitters eine Gleichung eingeht. Auf diese Weise erhalten wir ein Gleichungssystem mit n_x+1 Unbekannten und n_x-1 Gleichungen. Damit fehlen uns noch zwei Gleichungen, nämlich die Randbedingungen.
Eine Möglichkeit für diese Bedingungen ist das Gleichsetzen der ersten partiellen Ableitung nach x am Randpunkt mit der Ableitung am nächstinneren Punkt. Anders formuliert: Die zweite partielle Ableitung nach x soll am Rand gleich 0 sein. Eine noch bessere Approximation erhält man, wenn die zweiten partiellen Ableitungen nach x identisch sein sollen, also entsprechend die dritte partielle Ableitung gleich 0 ist. In unseren numerischen Simulationen werden wir stets die letztgenannte Randbedingung verwenden.
Nach dem Lösen des linearen Gleichungssystems haben wir gute Näherungswerte für die exakten Werte von v zum Zeitpunkt t. Leider geht manchmal aufgrund der Diskretisierungsfehler die Konkavität der Wertfunktion mehr oder weniger verloren. Daher ist es notwendig, dass wir Nachiterationen durchführen, um die Konkavität wieder herzustellen. Bei jeder Nachiteration werden die oben aufgeführten Schritte nochmal ausgeführt, wobei in die Hamiltonsche Funktion, aus der anschließend die optimale Strategie berechnet wird, jeweils die Werte der letzten Iteration eingesetzt werden.
Aus (5.9) und (5.8) folgt:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{v(t+h_t,x)}{h_t}-(1-\theta)\hat{H}\Big(t+h_t,x,D_x v(t+h_t,x),D^2_{x^2}v(t+h_t,x)\Big)\\
&\quad=\max_{\pi\in\mathcal{A}}\Big(U_2(c(t,x))\\
&\qquad\quad+\frac{G(t,x)^2}{2h_x^2}v(t,x-h_x)\\
&\qquad\quad+\Big(-\frac{1}{h_t}-\frac{f(t,x)}{h_x}-\frac{G(t,x)^2}{h_x^2}\Big)v(t,x)\\
&\qquad\quad+\Big(\frac{f(t,x)}{h_x}+\frac{G(t,x)^2}{2h_x^2}\Big)v(t,x+h_x)\Big)
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Kurz zusammengefasst beinhaltet unser Vorgehen folgende Schritte:

- Einsetzen der $v(t+h_t,x)$-Werte in $\hat{H}$
- Berechnen der daraus resultierenden optimalen Strategie $a\in\mathcal{A}$
- Einsetzen des optimalen $a\in\mathcal{A}$ in (5.10) (geht in die Berechnung von f und G ein), und Lösen des LGS, das aus n_x-1 Gleichungen der Form von (5.10) und zwei Randbedingungen besteht

- Nachiterationen: Einsetzen der gerade berechneten $v(t,x)$ in (5.10) und Wiederholen der Schritte 2 und 3. Die Nachiterationen werden so lange durchgeführt, bis ein Abbruchkriterium inkraft tritt.

5.2. Basismodell

Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass wir keine Restriktionen und auch keinen Konsum während der Laufzeit haben. Die Lösung dieses Optimierungsproblems ist uns natürlich schon aus Kapitel 3 und 4 bekannt. Wir nutzen die uns bekannten Ergebnisse um die Güte unseres numerischen Verfahrens zu messen. Zur Vereinfachung nehmen wir jetzt und in den folgenden Beispielen an, dass r, μ und σ konstant sind. Mit deterministischen Koeffizienten funktionieren die Verfahren aber genauso gut.
Zunächst einmal fällt in (5.10) der Term $U_2(c(t,x))$ weg. Durch Einsetzen von f und G in (5.10) und anschließendem Differenzieren des zu maximierenden Ausdrucks nach π gelangen wir an den Maximierer:

$$\pi(t,x) = -\frac{(\mu - r)h_x}{x\sigma^2} \frac{v(t,x+h_x) - v(t,x)}{v(t,x-h_x) - 2v(t,x) + v(t,x+h_x)}$$

Da keine Restriktionen vorliegen, muss dieses π nicht weiter verändert werden.
Das Matlab-Programm, welches sich im Anhang befindet, führt die vorhin genannten Schritte nacheinander aus und gibt am Ende die Wertfunktion sowie die optimale Strategie π zum Zeitpunkt $t = 0$ für ein angegebenes Startkapital aus. Maximal werden pro Zeitschritt 20 Nachiterationen durchgeführt. Wenn der maximale Unterschied zwischen den alten und den neuen Werten von $v(t,x)$ kleiner als $\epsilon = 0,00001$ ist, wird vorher schon abgebrochen.
Als Parameter haben wir gewählt:

$$\begin{aligned} T &= 1 \\ r &= 0,04 \\ \mu &= 0,08 \\ \sigma &= 0,02 \\ U(x) &= \log(x) \end{aligned}$$

Nach unseren bisherigen Ergebnissen lautet die optimale Strategie:

$$\pi^*(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2} = 1$$

Mit den eingestellten Variablenwerten liefert das Programm für $n_x = 200$ eine optimale Strategie $\pi^*(0) = 0{,}9914$, für $n_x = 400$ $\pi^* = 0{,}9957$ und für $n_x = 800$ $\pi^* = 0{,}9979$. Mit feinerer Zerlegung konvergiert die ausgegebene optimale Strategie gegen die bekannte tatsächliche Strategie $\pi^* = 1$.
Auffällig ist, dass die optimale Strategie für ein Startkapital nahe bei $xstart$ bzw. $xende$ deutlich von 1 abweicht. Dies liegt an den Randbedingungen, die eben nicht ganz exakt sind. Bei ausreichender Feinheit der Zerlegung und einem Startkapital in der Mitte des Intervalls $[xstart, xende]$ sind die Werte aber sehr zuverlässig.

5.3. Restriktionen an das relativ investierte Vermögen

Aus den Kapiteln 3 und 4 ist uns der Fall, dass π innerhalb zweier Schrankenfunktionen liegen muss, bereits bekannt. Wir nehmen hier wieder an, dass die untere Schranke irrelevant ist, zum Beispiel kleiner oder gleich 0 ist und $\mu \geq r$ gilt. In diesem Fall ändert sich im Programmcode lediglich die Berechnung der optimalen Strategien, bei denen nun das Minimum aus der ursprünglich optimalen Strategie und der Schranke d genommen wird.
Die Ergebnisse des Programms stimmen mit den uns bekannten Ergebnissen überein, abgesehen von leichten Abweichungen, die zu Lasten der numerischen Simulation anzurechnen sind.

5.4. Restriktionen an das absolut investierte Vermögen

Hier haben wir erstmals einen Fall, den wir analytisch nicht lösen konnten. Numerisch ist das Lösen des Optimierungsproblems allerdings kein Problem. Im Programmcode ändert sich wieder nur die Berechnung der optimalen Strategie.
Mit den gleichen Werten für r, μ und σ wie bei den vorherigen Beispielen und einem Startkapital von 600 wäre die optimale Strategie im Fall ohne Restriktionen, dass man das gesamte Geld in das risky asset steckt. Wir wählen nun eine obere Schranke für das absolut ins risky asset gesteckte Vermögen von ebenfalls 600. Es ist also möglich, zum Zeitpunkt $t = 0$ sein gesamtes Vermögen in die Aktie zu investieren.
Dass das Programm nicht exakt $\pi = 1$ als optimale Strategie ausgibt, ist erstmal wenig verwunderlich, weil dies auch bei den vorherigen Beispielen nicht der Fall war. In den anderen Beispielen konvergierte dieser Wert aber gegen 1.
In diesem Fall sieht es so aus, als ob das optimale $\pi^*(0)$ gegen einen Wert um 0,985 konvergiert. Dies entspricht einem absoluten Betrag von 591. Eine mögliche Erklärung ist, dass man bei einem vollen Ausschöpfen der Investitionsmöglichkei-

ten und deutlichen Anwachsen des Aktienkurses im späteren Verlauf umso weniger Nutzengewinn generieren kann, weil man das optimale $\pi^* = 1$ nicht mehr ansatzweise realisieren darf. Für diese These spricht auch, dass bei einer Reduzierung der Laufzeit von 1 auf 0,1 das optimale $\pi^*(0)$ gegen einen Wert um 0,998 konvergiert. In diesem Fall ist der Zeitraum, in dem man nicht mehr soviel Nutzengewinn generieren kann, sehr klein, sodass sich ein Ausschöpfen des Geldrahmens mehr lohnt.

5.5. Konsum während der Laufzeit

Der Fall mit Konsum während der Laufzeit konnte von uns nicht hinreichend analytisch gelöst werden. Wie in Beispiel 4.2.1 erwähnt, gibt es Kombinationen von Nutzenfunktionen, bei denen eine analytische Lösung des Problems möglich ist. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht möglich.
Zu unseren bisherigen Parametern wählen wir eine zweite Nutzenfunktion. Wir haben uns hier für die logarithmische Nutzenfunktion entschieden. Interessant ist es ebenfalls, durch einen Faktor in der zweiten Nutzenfunktion die Gewichtung zwischen dem Nutzen des Endvermögens und dem des Konsums vor Laufzeitende zu verändern. Im Programm muss zusätzlich noch die inverse Funktion der Ableitung der Konsum-Nutzenfunktion angegeben werden, weil diese zur Bestimmung des optimalen Konsumprozesses gebraucht wird.
f erfüllt die Gleichung (5.5), G weiterhin die Gleichung (5.6). Aus der Gleichung (5.10) lässt sich sowohl das optimale π^*, welches identisch ist mit dem π^* im Basismodell, als auch der optimale Konsumprozess herausfinden. Es gilt:

$$c^*(t,x) \;=\; \left(U_2'\right)^{-1}(D_x v(t,x))$$

Im Programm muss nun darauf geachtet werden, dass bei jedem Schritt, in dem die optimale Strategie ermittelt wird, ebenfalls der optimale Konsum berechnet wird. Zusätzlich gelangt der Term $U_2(c(t,x))$ wieder in die Hamiltonsche Gleichung.
A priori ist nicht sicher, ob auch in diesem Modell $\pi = 1$ optimal ist. Zwar gilt die bisherige Formel für π^* weiterhin, jedoch ist nicht klar, inwiefern sich die Struktur von v durch den ermöglichten Konsum ändert. Die partiellen Ableitungen von v haben wiederum Einfluss auf π^*.
Der Lauf des Programms zeigt, dass $\pi^*(0)$ tatsächlich wieder gegen 0 konvergiert. Außerdem konvergiert der optimale Konsum gegen die Hälfte des Anfangskapitals, sofern die Laufzeit $T = 1$ beträgt. Bei längeren Laufzeiten verringert sich der Betrag des optimalen Konsums.

5.6. Konsum mit Restriktionen

Zuletzt wollen wir den Fall betrachten, dass der Konsum während der Laufzeit möglich ist, zusätzlich aber eine Beschränkung an π vorliegt. Dies stellt im gewissen Sinne eine Kombination aus den Abschnitten 5.3 und 5.5 dar.

In der Gleichung (5.10) muss bei der Maximierung etwas aufgepasst werden. Das optimale Paar (π^*, c^*) muss nicht unbedingt in $(-\infty, d] \times [0, \infty)$ liegen. Liegt das Paar außerhalb dieses Bereichs, so reicht es aber, wenn man das Paar auf dem Rand dieses Bereichs sucht, weil der zu maximierende Ausdruck in (5.10) lediglich einen lokalen Hochpunkt besitzt.

Noch ein Punkt ist bei diesem Modell zu beachten: Senkt man die Schranke d zu tief herab, ist der maximal mögliche Nutzengewinn durch die richtige Wahl von π gegenüber dem Nutzengewinn aus dem Konsum so gering, dass es erneut zu Instabilitäten im Programm kommt. Dieses Problem kann man umgehen, indem man die Konsum-Nutzenfunktion reduziert, beispielsweise durch Multiplikation mit einem Faktor kleiner als 1.

Wir haben im Programm die Schranke $d = 0,5$ und die Nutzenfunktion $U_2(x) = 0.1 \log(x)$ gewählt. Wenig überraschend ist $\pi^*(0) = d = 0,5$, während der optimale Konsum $c^*(0) \approx 54,5$ beträgt.

6. Zusammenfassung

Wir haben gesehen, dass eine wichtiges Verfahren zur Bestimmung von optimalen Portfolios, nämlich die Martingalmethode, im Fall mit Restriktionen nicht anwendbar ist. Dafür steht uns mit der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung ein mächtiges Werkzeug zur Verfügung. Die partielle Differentialgleichung, die sich aus der HJB-Gleichung ergibt, lässt sich in manchen Fällen sogar analytisch lösen. Falls ein Modell vorliegt, welches man nicht analytisch lösen kann, so kann man dies aber in der Regel numerisch lösen. Hier ist darauf zu achten, dass man ein numerisch stabiles Verfahren wählt.
Bei manchen Modellen kann man sogar gänzlich auf die HJB-Gleichung verzichten und den Ansatz aus Kapitel 2 benutzen. Insbesondere für die logarithmische Nutzenfunktion ist dies oft möglich und einfacher als der Weg über die HJB-Gleichung.

Bei eindimensionalen Optimierungsproblemen mit Restriktionen ist es oft so, dass man die optimale Strategie dadurch erzielt, dass man - sofern erlaubt - die optimale Strategie im Fall ohne Restriktionen nimmt oder andernfalls den erlaubten Investitionsrahmen voll ausnutzt. Insbesondere bei Restriktionen, die das relativ in die risky assets investierte Vermögen betreffen, ist dies der Fall.
Überraschend ist dagegen das Ergebnis aus Abschnitt 5.4. Hier muss der Investor langfristig denken und nicht auf den augenblicklich höchsten Nutzengewinn bedacht sein.
Mehrdimensionale Optimierungsprobleme lassen sich prinzipiell genauso lösen wie eindimensionale Probleme. Durch die Mehrzahl an Dimensionen kommt es aber in der Regel zu komplizierteren Differentialgleichungen und komplexere numerische Verfahren, die nötig sind.

Herausstechend ist vor allem die Tatsache, dass fast ausschließlich Modelle, deren Restriktionen das relativ in die risky assets investierte Vermögen betreffen, analytisch lösbar sind. Andere Arten von Restriktionen können in der Regel nur numerisch gelöst werden.
Außerdem lassen sich Modelle mit kontinuierlichem Konsum nicht oder nur mit größerem Aufwand analytisch lösen.

A. Programmcodes

A.1. Basismodell

```
% Dieses Programm ermittelt die Wertfunktion und die optimale
% Strategie in einem Modell ohne Restriktionen und ohne
% Konsum während der Laufzeit. Für das angegebene Anfangskapital
% wird die optimale Strategie als "pi" ausgegeben.


% Parameter
T=1;
r=0.04;
mu=0.08;
sigma=0.2;
Anfangskapital=600;
U=@(x) log(x);

% numerische Variablen (Wahl)
n_t=10;
n_x=400;
xstart=100;
xende=2000;
nachiterationen=20;
epsilon=0.00001;
theta=0.5;

% numerische Werte (durch obige Variablen eindeutig festgelegt)
h_t=T/n_t;
h_x=(xende-xstart)/n_x;






%%%% Berechnung von v %%%%
% Setzen der Endwerte:
v=zeros(n_t+1,n_x+1);
for i=1:n_x+1
```

```
    x=xstart+(i-1)*h_x;
    v(n_t+1,i)=U(x);
end

for i=n_t:-1:1
    t=(i-1)*h_t;

    % Berechnen und Speichern von H:=H_dach(t+h_t,...)
    H=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a=-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1));
        f=x*(r+a*(mu-r));
        GG=x^2*a^2*sigma^2;
        H(j)=GG/(2*h_x^2)*v(i+1,j-1)+(-f/h_x-GG/(h_x^2))*v(i+1,j)+(f/h_x+GG/(2*h_x^2))*v(i+1,j+1);
    end


    % Bestimmung der optimalen Strategie
    a=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a(j)=-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1));
    end

    % Aufstellen des LGS
    A=zeros(n_x+1,n_x+1);
    A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
    A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        f=x*(r+a(j)*(mu-r));
        GG=x^2*a(j)^2*sigma^2;
        A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
        A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
        A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
    end
    b=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j);
    end

    % Lösen des LGS
    z=A\b;
```

```
    v(i,:)=z';

    % Nachiterationen: die vorherigen Schritte nochmals durchführen
    for iteration=1:nachiterationen
        a=zeros(n_x+1,1);
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            a(j)=-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i,j+1)-v(i,j))/(v(i,j-1)-2*v(i,j)+v(i,j+1));
        end

        % Aufstellen des LGS
        A=zeros(n_x+1,n_x+1);
        A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
        A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            f=x*(r+a(j)*(mu-r));
            GG=x^2*a(j)^2*sigma^2;
            A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
            A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
            A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
        end
        b=zeros(n_x+1,1);
        for j=2:n_x
            b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j);
        end

        % Lösen des LGS
        z=A\b;

        % Abbruchkriterium checken
        maximum=max(abs(v(i,:)-z'));
        if maximum<epsilon
            break;
        end

        v(i,:)=z';
    end
end



% Berechnen der optimalen Strategie zum Zeitpunkt t=0 und Vermögen x=Anfangskapital:
% Lineare Interpolation zwischen den anliegenden Knotenpunkten
x=Anfangskapital;
```

```
x_links=floor((x-xstart)/h_x)+1;
x_rechts=ceil((x-xstart)/h_x)+1;
pi_links=-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_links+1)-v(1,x_links))/(v(1,x_links+1)-2*v(1,x_links)+v(1,x_links-1));
pi_rechts=-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_rechts+1)-v(1,x_rechts))/(v(1,x_rechts+1)-2*v(1,x_rechts)+v(1,x_rechts-1));
pi=((x-xstart)/h_x-x_links+1)*pi_rechts+(x_rechts-1-(x-xstart)/h_x)*pi_links;

% irrelevante Variablen löschen
clear n_t n_x xstart xende nachiterationen iteration epsilon theta h_t h_x i j x t H A b f GG z maximum x_links x_rechts pi_links pi_rechts;
```

A.2. Restriktionen an das relativ investierte Vermögen

```
% Dieses Programm ermittelt die Wertfunktion und die optimale
% Strategie in einem Modell, in dem das relativ in die Aktie
% investierte Vermögen die Schranke d nicht überschreiten darf.
% Für das angegebene Anfangskapital wird die
% optimale Strategie als "pi" ausgegeben.


% Parameter
T=1;
r=0.04;
mu=0.08;
sigma=0.2;
Anfangskapital=600;
U=@(x) log(x);
d=0.4;

% numerische Variablen (Wahl)
n_t=10;
n_x=400;
xstart=100;
xende=2000;
nachiterationen=20;
epsilon=0.00001;
theta=0.5;

% numerische Werte (durch obige Variablen eindeutig festgelegt)
h_t=T/n_t;
```

```
h_x=(xende-xstart)/n_x;






%%%% Berechnung von v %%%%
% Setzen der Endwerte:
v=zeros(n_t+1,n_x+1);
for i=1:n_x+1
    x=xstart+(i-1)*h_x;
    v(n_t+1,i)=U(x);
end

for i=n_t:-1:1
    t=(i-1)*h_t;

    % Berechnen und Speichern von H:=H_dach(t+h_t,...)
    H=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a=min(-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)
            -2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1)),d);
        f=x*(r+a*(mu-r));
        GG=x^2*a^2*sigma^2;
        H(j)=GG/(2*h_x^2)*v(i+1,j-1)+(-f/h_x-GG/(h_x^2))*v(i+1,j)+(f/
            h_x+GG/(2*h_x^2))*v(i+1,j+1);
    end


    % Bestimmung der optimalen Strategie
    a=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a(j)=min(-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j
            -1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1)),d);
    end

    % Aufstellen des LGS
    A=zeros(n_x+1,n_x+1);
    A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
    A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        f=x*(r+a(j)*(mu-r));
        GG=x^2*a(j)^2*sigma^2;
```

```
            A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
            A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
            A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
        end
        b=zeros(n_x+1,1);
        for j=2:n_x
            b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j);
        end

        % Lösen des LGS
        z=A\b;
        v(i,:)=z';

        % Nachiterationen: die vorherigen Schritte nochmals durchführen
        for iteration=1:nachiterationen
            a=zeros(n_x+1,1);
            for j=2:n_x
                x=xstart+(j-1)*h_x;
                a(j)=min(-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i,j+1)-v(i,j))/(v(i,j-1)-2*v(i,j)+v(i,j+1)),d);
            end

            % Aufstellen des LGS
            A=zeros(n_x+1,n_x+1);
            A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
            A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
            for j=2:n_x
                x=xstart+(j-1)*h_x;
                f=x*(r+a(j)*(mu-r));
                GG=x^2*a(j)^2*sigma^2;
                A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
                A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
                A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
            end
            b=zeros(n_x+1,1);
            for j=2:n_x
                b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j);
            end

            % Lösen des LGS
            z=A\b;

            % Abbruchkriterium checken
            maximum=max(abs(v(i,:)-z'));
            if maximum<epsilon
                break;
            end
```

```

            v(i,:)=z';
        end
end



% Berechnen der optimalen Strategie zum Zeitpunkt t=0 und Vermögen x=Anfangskapital:
% Lineare Interpolation zwischen den anliegenden Knotenpunkten
x=Anfangskapital;
x_links=floor((x-xstart)/h_x)+1;
x_rechts=ceil((x-xstart)/h_x)+1;
pi_links=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_links+1)-v(1,x_links))/(v(1,x_links+1)-2*v(1,x_links)+v(1,x_links-1)),d);
pi_rechts=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_rechts+1)-v(1,x_rechts))/(v(1,x_rechts+1)-2*v(1,x_rechts)+v(1,x_rechts-1)),d);
pi=((x-xstart)/h_x-x_links+1)*pi_rechts+(x_rechts-1-(x-xstart)/h_x)*pi_links;

% irrelevante Variablen löschen
clear n_t n_x xstart xende nachiterationen iteration epsilon theta h_t h_x i j x t H A b f GG z maximum x_links x_rechts pi_links pi_rechts;
```

A.3. Restriktionen an das absolut investierte Vermögen

```
% Dieses Programm ermittelt die Wertfunktion und die optimale
% Strategie in einem Modell, in dem das absolut in die Aktie
% investierte Vermögen die Schranke d nicht überschreiten darf.
% Für das angegebene Anfangskapital wird die
% optimale Strategie als "pi" ausgegeben.


% Parameter
T=1;
r=0.04;
mu=0.08;
sigma=0.2;
Anfangskapital=600;
U=@(x) log(x);
d=600;

```

```
% numerische Variablen (Wahl)
n_t=10;
n_x=400;
xstart=100;
xende=2000;
nachiterationen=20;
epsilon=0.00001;
theta=0.5;

% numerische Werte (durch obige Variablen eindeutig festgelegt)
h_t=T/n_t;
h_x=(xende-xstart)/n_x;






%%%% Berechnung von v %%%%
% Setzen der Endwerte:
v=zeros(n_t+1,n_x+1);
for i=1:n_x+1
    x=xstart+(i-1)*h_x;
    v(n_t+1,i)=U(x);
end

for i=n_t:-1:1
    t=(i-1)*h_t;

    % Berechnen und Speichern von H:=H_dach(t+h_t,...)
    H=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)
            -2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1)),d)/x;
        f=x*(r+a*(mu-r));
        GG=x^2*a^2*sigma^2;
        H(j)=GG/(2*h_x^2)*v(i+1,j-1)+(-f/h_x-GG/(h_x^2))*v(i+1,j)+(f/
            h_x+GG/(2*h_x^2))*v(i+1,j+1);
    end


    % Bestimmung der optimalen Strategie
    a=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
```

```
        a(j)=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1)),d)/x;
    end

    % Aufstellen des LGS
    A=zeros(n_x+1,n_x+1);
    A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
    A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        f=x*(r+a(j)*(mu-r));
        GG=x^2*a(j)^2*sigma^2;
        A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
        A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
        A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
    end
    b=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j);
    end

    % Lösen des LGS
    z=A\b;
    v(i,:)=z';

    % Nachiterationen: die vorherigen Schritte nochmals durchführen
    for iteration=1:nachiterationen
        a=zeros(n_x+1,1);
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            a(j)=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2)*(v(i,j+1)-v(i,j))/(v(i,j-1)-2*v(i,j)+v(i,j+1)),d)/x;
        end

        % Aufstellen des LGS
        A=zeros(n_x+1,n_x+1);
        A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
        A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            f=x*(r+a(j)*(mu-r));
            GG=x^2*a(j)^2*sigma^2;
            A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
            A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
            A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
        end
        b=zeros(n_x+1,1);
```

```
        for j=2:n_x
            b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j);
        end

        % Lösen des LGS
        z=A\b;

        % Abbruchkriterium checken
        maximum=max(abs(v(i,:)-z'));
        if maximum<epsilon
            break;
        end

        v(i,:)=z';
    end
end



% Berechnen der optimalen Strategie zum Zeitpunkt t=0 und Vermögen x=Anfangskapital:
% Lineare Interpolation zwischen den anliegenden Knotenpunkten
x=Anfangskapital;
x_links=floor((x-xstart)/h_x)+1;
x_rechts=ceil((x-xstart)/h_x)+1;
pi_links=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2)*(v(1,x_links+1)-v(1,x_links))/(v(1,x_links+1)-2*v(1,x_links)+v(1,x_links-1)),d)/x;
pi_rechts=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2)*(v(1,x_rechts+1)-v(1,x_rechts))/(v(1,x_rechts+1)-2*v(1,x_rechts)+v(1,x_rechts-1)),d)/x;
pi=((x-xstart)/h_x-x_links+1)*pi_rechts+(x_rechts-1-(x-xstart)/h_x)*pi_links;

% irrelevante Variablen löschen
clear n_t n_x xstart xende nachiterationen iteration epsilon theta h_t h_x i j x t H A b f GG z maximum x_links x_rechts pi_links pi_rechts;
```

A.4. Konsum während der Laufzeit

```
% Dieses Programm ermittelt die Wertfunktion, die optimale
% Strategie und den optimalen Konsum in einem Modell
% mit Konsum, aber ohne Restriktionen. Für das angegebene
% Anfangskapital wird die optimale Strategie als "pi" bzw. "c"
% ausgegeben.


% Parameter
T=1;
r=0.04;
mu=0.08;
sigma=0.2;
Anfangskapital=600;
U_1=@(x) log(x);
U_2=@(x) log(x);
I=@(x) 1/x;             % I ist die inverse Funktion von (U_2)'

% numerische Variablen (Wahl)
n_t=10;
n_x=400;
xstart=100;
xende=2000;
nachiterationen=20;
epsilon=0.00001;
theta=0.5;

% numerische Werte (durch obige Variablen eindeutig festgelegt)
h_t=T/n_t;
h_x=(xende-xstart)/n_x;






%%%% Berechnung von v %%%%
% Setzen der Endwerte:
v=zeros(n_t+1,n_x+1);
for i=1:n_x+1
    x=xstart+(i-1)*h_x;
    v(n_t+1,i)=U(x);
end

for i=n_t:-1:1
    t=(i-1)*h_t;
```

```
    % Berechnen und Speichern von H:=H_dach(t+h_t,...)
    H=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a1=-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1));
        a2=I((v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/h_x);
        f=x*(r+a1*(mu-r))-a2;
        GG=x^2*a1^2*sigma^2;
        H(j)=U_2(a2)+GG/(2*h_x^2)*v(i+1,j-1)+(-f/h_x-GG/(h_x^2))*v(i+1,j)+(f/h_x+GG/(2*h_x^2))*v(i+1,j+1);
    end


    % Bestimmung der optimalen Strategie
    a=zeros(n_x+1,2);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a(j,1)=-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1));
        a(j,2)=I((v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/h_x);
    end

    % Aufstellen des LGS
    A=zeros(n_x+1,n_x+1);
    A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
    A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        f=x*(r+a(j,1)*(mu-r))-a(j,2);
        GG=x^2*a(j,1)^2*sigma^2;
        A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
        A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
        A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
    end
    b=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j)-theta*U_2(a(j,2));
    end

    % Lösen des LGS
    z=A\b;
    v(i,:)=z';

    % Nachiterationen: die vorherigen Schritte nochmals durchführen
    for iteration=1:nachiterationen
```

```
        a=zeros(n_x+1,2);
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            a(j,1)=-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1));
            a(j,2)=I((v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/h_x);
        end

        % Aufstellen des LGS
        A=zeros(n_x+1,n_x+1);
        A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
        A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            f=x*(r+a(j,1)*(mu-r))-a(j,2);
            GG=x^2*a(j,1)^2*sigma^2;
            A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
            A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
            A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
        end
        b=zeros(n_x+1,1);
        for j=2:n_x
            b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j)-theta*U_2(a(j,2));
        end

        % Lösen des LGS
        z=A\b;

        % Abbruchkriterium checken
        maximum=max(abs(v(i,:)-z'));
        if maximum<epsilon
            break;
        end

        v(i,:)=z';
    end
end



% Berechnen der optimalen Strategie zum Zeitpunkt t=0 und Vermögen x=Anfangskapital:
% Lineare Interpolation zwischen den anliegenden Knotenpunkten
x=Anfangskapital;
x_links=floor((x-xstart)/h_x)+1;
x_rechts=ceil((x-xstart)/h_x)+1;
```

```
pi_links=-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_links+1)-v(1,x_links))/(v(1,x_links+1)-2*v(1,x_links)+v(1,x_links-1));
pi_rechts=-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_rechts+1)-v(1,x_rechts))/(v(1,x_rechts+1)-2*v(1,x_rechts)+v(1,x_rechts-1));
pi=((x-xstart)/h_x-x_links+1)*pi_rechts+(x_rechts-1-(x-xstart)/h_x)*pi_links;
c_links=I((v(1,x_links+1)-v(1,x_links))/h_x);
c_rechts=I((v(1,x_rechts+1)-v(1,x_rechts))/h_x);
c=((x-xstart)/h_x-x_links+1)*c_rechts+(x_rechts-1-(x-xstart)/h_x)*c_links;

% irrelevante Variablen löschen
clear n_t n_x xstart xende nachiterationen iteration epsilon theta h_t h_x i j x t H A b a1 a2 f GG z maximum x_links x_rechts pi_links pi_rechts c_links c_rechts I;
```

A.5. Konsum mit Restriktionen

```
% Dieses Programm ermittelt die Wertfunktion, die optimale
% Strategie und den optimalen Konsum in einem Modell
% mit Konsum und mit Restriktionen. Für das angegebene
% Anfangskapital wird die optimale Strategie als "pi" bzw. "c"
% ausgegeben.


% Parameter
T=1;
r=0.04;
mu=0.08;
sigma=0.2;
Anfangskapital=600;
U_1=@(x) log(x);
U_2=@(x) 0.1*log(x);
I=@(x) 0.1/x;            % I ist die inverse Funktion von (U_2)'
d=1;

% numerische Variablen (Wahl)
n_t=10;
n_x=400;
xstart=100;
xende=2000;
nachiterationen=20;
epsilon=0.00001;
theta=0.5;

```

```
% numerische Werte (durch obige Variablen eindeutig festgelegt)
h_t=T/n_t;
h_x=(xende-xstart)/n_x;

%%%% Berechnung von v %%%%
% Setzen der Endwerte:
v=zeros(n_t+1,n_x+1);
for i=1:n_x+1
    x=xstart+(i-1)*h_x;
    v(n_t+1,i)=U(x);
end

for i=n_t:-1:1
    t=(i-1)*h_t;

    % Berechnen und Speichern von H:=H_dach(t+h_t,...)
    H=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a1=min(-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1)),d);
        a2=I((v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/h_x);
        f=x*(r+a1*(mu-r))-a2;
        GG=x^2*a1^2*sigma^2;
        H(j)=U_2(a2)+GG/(2*h_x^2)*v(i+1,j-1)+(-f/h_x-GG/(h_x^2))*v(i+1,j)+(f/h_x+GG/(2*h_x^2))*v(i+1,j+1);
    end


    % Bestimmung der optimalen Strategie
    a=zeros(n_x+1,2);
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        a(j,1)=min(-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1)),d);
        a(j,2)=I((v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/h_x);
    end

    % Aufstellen des LGS
    A=zeros(n_x+1,n_x+1);
    A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
    A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
```

```
    for j=2:n_x
        x=xstart+(j-1)*h_x;
        f=x*(r+a(j,1)*(mu-r))-a(j,2);
        GG=x^2*a(j,1)^2*sigma^2;
        A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
        A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
        A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
    end
    b=zeros(n_x+1,1);
    for j=2:n_x
        b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j)-theta*U_2(a(j,2));
    end

    % Lösen des LGS
    z=A\b;
    v(i,:)=z';

    % Nachiterationen: die vorherigen Schritte nochmals durchführen
    for iteration=1:nachiterationen
        a=zeros(n_x+1,2);
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            a(j,1)=min(-(mu-r)*h_x/(x*sigma^2)*(v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/(v(i+1,j-1)-2*v(i+1,j)+v(i+1,j+1)),d);
            a(j,2)=I((v(i+1,j+1)-v(i+1,j))/h_x);
        end

        % Aufstellen des LGS
        A=zeros(n_x+1,n_x+1);
        A(1,1:4)=[1 -3 3 -1];
        A(n_x+1,n_x-2:n_x+1)=[1 -3 3 -1];
        for j=2:n_x
            x=xstart+(j-1)*h_x;
            f=x*(r+a(j,1)*(mu-r))-a(j,2);
            GG=x^2*a(j,1)^2*sigma^2;
            A(j,j-1)=theta*GG/(2*h_x^2);
            A(j,j)=-1/h_t-theta*f/h_x-theta*GG/(h_x^2);
            A(j,j+1)=theta*(f/h_x+GG/(2*h_x^2));
        end
        b=zeros(n_x+1,1);
        for j=2:n_x
            b(j)=-v(i+1,j)/h_t-(1-theta)*H(j)-theta*U_2(a(j,2));
        end

        % Lösen des LGS
        z=A\b;

```

```
        % Abbruchkriterium checken
        maximum=max(abs(v(i,:)-z'));
        if maximum<epsilon
            break;
        end

        v(i,:)=z';
    end
end



% Berechnen der optimalen Strategie zum Zeitpunkt t=0 und Vermögen x=Anfangskapital:
% Lineare Interpolation zwischen den anliegenden Knotenpunkten
x=Anfangskapital;
x_links=floor((x-xstart)/h_x)+1;
x_rechts=ceil((x-xstart)/h_x)+1;
pi_links=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_links+1)-v(1,x_links))/(v(1,x_links+1)-2*v(1,x_links)+v(1,x_links-1)),d);
pi_rechts=min(-(mu-r)*h_x/(sigma^2*x)*(v(1,x_rechts+1)-v(1,x_rechts))/(v(1,x_rechts+1)-2*v(1,x_rechts)+v(1,x_rechts-1)),d);
pi=((x-xstart)/h_x-x_links+1)*pi_rechts+(x_rechts-1-(x-xstart)/h_x)*pi_links;
c_links=I((v(1,x_links+1)-v(1,x_links))/h_x);
c_rechts=I((v(1,x_rechts+1)-v(1,x_rechts))/h_x);
c=((x-xstart)/h_x-x_links+1)*c_rechts+(x_rechts-1-(x-xstart)/h_x)*c_links;

% irrelevante Variablen löschen
clear n_t n_x xstart xende nachiterationen iteration epsilon theta h_t h_x i j x t H A b a1 a2 f GG z maximum x_links x_rechts pi_links pi_rechts c_links c_rechts I;
```

B. Literaturverzeichnis

[Chr13] Christensen, Sören: Optimierungsprobleme in der Finanzmathematik. Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2013. Abgerufen unter http://www.math.uni-kiel.de/stochastik/ WinterSemester2012-13/ optimization/control_christensen.pdf am 25.08.2014

[Hoc05] Hochreiter, Ronald; Pflug, Georg; Paulsen, Volkert: Designing and managing unit-linked life insurance contracts with guarantees. Universität Wien, 2005. Abgerufen unter http://homepage.univie.ac.at/georg.pflug/ science/technicalreports/ulligalm.pdf am 08.05.2014

[Mar52] Markowitz, Harry: Portfolio selection. In: The journal of finance: the journal of the American Finance Association 7 (1952), Nr.1, S.77-91

[Mer13] Merz, Michael; Wüthrich, Mario V.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Die Einführung mit vielen ökonomischen Beispielen. München: Vahlen, 2013. S. 207

[Pau12] Paulsen, Volkert: Handschriftliches Skript zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik. SS12. Westfälische Wilhelms-Universität Münster

[Spr13] Sprenger, Nadja: Portfolio Optimierung in Short-Rate Modellen. Westfälische Wilhelms-Universität, 2013.

[Zul06] Zulficar, Allan: Numerische Verfahren für stochastische Kontrollprobleme mit Anwendungen in der Ökonomie. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2006.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Ort, Datum Unterschrift