

Die Methode der Credibility Tarifizierung in Theorie und Praxis

Credibility in Theory and Practise

MASTERARBEIT

im Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster



vorgelegt von: Timo Wesendahl
Studienbereich: Mathematik
Matrikelnummer: 355 723
Erstgutachter: PD Dr. Volkert Paulsen
Ort, Datum: Hamm, 14.04.2014

© 2014

Dieses Werk einschließlich seiner Teile ist **urheberrechtlich geschützt**. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen sowie die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Inhaltsverzeichnis

I	Eidesstattliche Erklärung	5
II	Abbildungsverzeichnis	7
III	Tabellenverzeichnis	9
1	Einleitung	11
1.1	Überblick	11
1.2	Motivation	13
1.3	Grundbegriffe der Versicherungstheorie	13
2	Einführung	17
2.1	Über Klassen, Prämien und Schäden	17
2.2	Mathematische Problemformulierung	18
2.2.1	Individuelles Risiko & individuelle Prämie	19
2.2.2	Kollektives Risiko & kollektive Prämie	21
2.2.3	Individuell & Kollektiv: Kombinierte Betrachtung	22
3	Bayesianischer Ansatz	25
3.1	Einführung: Schätz- & Entscheidungstheorie	25
3.2	Umsetzung in der Prämienberechnung	29
3.3	Anwendung: Der Poisson-Gamma Fall	31
3.3.1	Schätzen der Strukturparameter (Momentenmethode)	36
3.3.2	Praktische Anwendung	38
4	Grundlagen der Credibility Schätzung	43
4.1	Das einfache Credibility Modell	44
4.2	Der Credibility Schätzer	45
5	Das einfache Bühlmann-Modell	53
5.1	Modelleinführung	53

5.2	Der inhomogene Credibility Schätzer	55
5.3	Der homogene Credibility Schätzer	58
6	Die verallgemeinerte Credibility Schätzung	61
6.1	Die letzte Verallgemeinerung	61
6.2	Credibility Schätzer als orthogonale Projektion	62
6.3	Orthogonalitätsbedingungen für Schätzer	68
7	Das Bühlmann-Straub Modell	73
7.1	Modelleinführung	73
7.2	Homogener vs. inhomogene Schätzer	76
7.3	Schätzen der Strukturparameter	86
8	Anwendungen	89
8.1	Schätzen der Schadensrate: Ein allgemeiner Fall	89
8.2	Schätzen der Schadenshäufigkeit: Poisson-Fall	96
8.3	Schätzen der durchschn. Schadenshöhe	103
8.4	Umgang mit großen Schäden	108
8.4.1	Allgemeiner Umgang	108
8.4.2	Berücksichtigung von Volumenmaßen	112
8.4.3	Anwendung	115
9	Fazit & Ausblick	121
IV	Literaturverzeichnis	123
V	Anhang	125

Ich erkläre an Eides statt, dass ich meine Masterarbeit mit dem Titel *Die Methode der Credibility Tarifierung in Theorie und Praxis* selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe und, dass ich alle Stellen, die ich wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen entnommen habe, als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit hat bisher in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ich versichere, dass die eingereichte schriftliche Fassung der auf dem beigefügten Medium gespeicherten Fassung entspricht.

Hamm, 14.04.2014

Timo Wesendahl

Abbildungsverzeichnis

1.1	Beitragseinnahmen und Leistungen der Versicherungen 2012 [GDV00] .	13
1.2	Prinzip der kollektiven Risikoübernahme [ICO12]	14
2.1	Veranschaulichung zweistufiges Zufallsexperiment	23
3.1	Veranschaulichung zweistufiges Zufallsexperiment: Poisson-Gamma . .	32
8.1	Credibility Gewichtsverlauf gemessen am Volumenmaß	94
8.2	Credibility Schätzer gemessen am Volumenmaß	95

Tabellenverzeichnis

3.1	Anwendung einer Poisson Verteilung aus zulässigen Parameterwerten	40
3.2	Vergleich Schadenszahlen und Schätzung Poisson-Gamma Modell . . .	42
8.1	PKW-Bestand, Schadenszahl und Gesamtschaden 2000-2011 [GDV00]	90
8.2	Berechnungen Bühlmann-Straub Modell: Schadensrate	90
8.3	Anzahl Diebstähle Zufallsvariable N versicherter PKW nach Ländern	98
8.4	versicherter PKW-Bestand Volumenmaß m (in Tsd.) nach Ländern . . .	98
8.5	Berechnungen Bühlmann-Straub Modell: Schadenshäufigkeit	100
8.6	Ergebnisse Bühlmann-Straub Modell: Schadenshäufigkeit	102
8.7	Gesamtschaden Diebstähle Zufallsvariable S nach Marken in Tsd. Euro	105
8.8	Anzahl Diebstähle Zufallsvariable N nach Marken	105
8.9	durchschn. Schadenshöhe Zufallsvariable $Y = \frac{S}{N}$ nach Marken	106
8.10	Berechnungen Bühlmann-Straub Modell: durchschn. Schadenshöhe . .	106
8.11	Ergebnisse Bühlmann-Straub Modell: durchschn. Schadenshöhe	107
8.12	Trunkierung: Gesamtschaden & gekürzter Gesamtschaden	115
8.13	Trunkierung: Berechnungen 1	115
8.14	Trunkierung: Berechnungen 2	116
8.15	Trunkierung: Berechnungen 3	117

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Überblick

Meine Arbeit beschäftigt sich mit den Grundlagen der Credibility Theorie, eine Theorie, die versucht auf Basis von Vorwissen, adäquate Aussagen über zukünftige Entwicklungen zu treffen. Hierbei konzentrieren wir uns vor allem darauf, Schätzer für bestimmte Versicherungsgrößen - häufig die zu zahlende Prämie für Versicherungsnehmer - zukünftiger Perioden anhand vergangener gesammelter Daten zu berechnen.

Hierzu werden wir in uns **Kapitel 2** mit den grundlegenden Begriffen der Versicherungsmathematik beschäftigen und Begriffe, wie Risiken, Risikoklassen und Prämien einführen. Außerdem werden wir verschiedene Prämienarten kennenlernen, welche wir in der Regel in individuelle und kollektive unterklassifizieren. Ebenso werden wir unser Prämienberechnungsproblem, das wir in der Arbeit auf verschiedene Wege lösen möchten, mathematisch formulieren.

Kapitel 3 wird den bayesianischen Ansatz vorstellen, mit dem wir unser Prämienberechnungsproblem lösen können. Hierzu geben wir eine kleine Einführung in die Schätz- und Entscheidungstheorie und werden diese anschließend auf die Prämienberechnung anwenden. Auch werden wir die Ergebnisse im Spezialfall, dass die Schadenshöhe linear von der Schadenszahl, welche Poisson verteilt sei, abhängt, konkret anwenden.

In **Kapitel 4** werden wir zeigen, dass es auch einfachere Wege zu einem angemessenen Schätzer für die zu betrachtende Schätzgröße gibt. Hierbei werden wir unsere Wahl potentieller Schätzer auf solche einschränken, die linear vom bisherigen Beob-

achtungsvektor abhängen. Wissen über die Schadensverteilungen und die Strukturfunktion spielen in diesem Modell keine Rolle mehr. Wir werden uns auf ein Risiko konzentrieren und für dieses anhand der Methodik der linearen Regression einen Schätzer bestimmen, den sogenannten Credibility Schätzer.

Dass in der Realität nicht nur ein, sondern mehrere Risiken zu berücksichtigen sind, werden wir in **Kapitel 5** thematisieren. Hier werden wir zum ersten mal ein konkretes Modell, das sogenannte Bühlmann Modell, für unser Bewertungsproblem geben, in dessen Rahmen wir den homogenen und inhomogenen Credibility Schätzer vorstellen werden. Diese werden wir analytisch herleiten.

Im Gegensatz zur analytischen Herleitung der Credibility Schätzer aus Kapitel 5, werden wir in **Kapitel 6** auf einen alternativen Ansatz zur Beschreibung und Herleitung von Credibility Schätzern eingehen. Nach einer kurzen Einführung über Hilberträume und orthogonale Projektionen werden wir den zuvor kennengelernten homogenen und inhomogenen Credibility Schätzer auf dieser Theorie aufbauen bzw. herleiten.

Die Ergebnisse aus der Theorie der Hilberträume und orthogonalen Projektionen werden wir schließlich in **Kapitel 7** auf das Bühlmann-Straub Modell anwenden, welches eine Verallgemeinerung des Bühlmann Modells darstellt. Es wird versucht werden, die Definitionen und Herleitungen möglichst allgemein zu halten (Verlustmaß, Volumenmaß, etc.), um die Ergebnisse auf möglichst viele verschiedene Art und Weisen anzuwenden.

Genau dies werden wir abschließend in **Kapitel 8** durchführen, indem wir uns Daten aus den Jahrbüchern des Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft zugrunde legen und unsere Ergebnisse des Bühlmann-Straub Modells auf verschiedenste Art und Weisen anwenden. Hierbei werden wir auch einen Spezialfalls betrachten, der uns Aufschluss darüber gibt, wie man mit seltenen extrem hohen Schäden in der Versicherungsrealität umgeht.

1.2 Motivation

Versicherungen spielen in der heutigen Zeit eine zentrale Rolle. Neben einigen gesetzlich vorgeschriebenen Pflichtversicherungen, wie verschiedenen Haftpflichtversicherungen (KFZ-, Berufs-, Betriebshaftpflichtversicherung, etc.) oder Sozialversicherungen, gibt es auch unzählige viele optionale Versicherungen, wie etwa eine private Haftpflichtversicherung und Berufsunfähigkeitsversicherungen. Im Jahr 2012 verbuchte der Gesamtverband der deutschen Versicherer eine Gesamtbetrag der Versicherungsleistungen der Erstversicherer in Höhe von 144 Milliarden Euro bei gebuchten Bruttobeitragseinnahmen in Höhe von knapp 181 Milliarden Euro, aufgeteilt in verschiedenste Versicherungssparten.

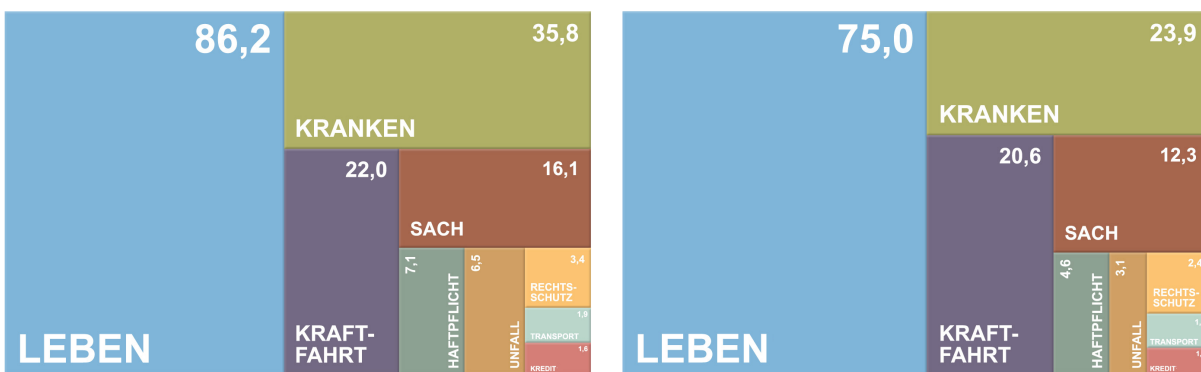


Abbildung 1.1: Beitragseinnahmen und Leistungen der Versicherungen 2012 [GDV00]

Aber was genau ist eine Versicherung, und wie schaffen sie es, Beitragseinnahmen den zu zahlenden Leistungen so anzupassen, dass einerseits die Deckung der anfallenden Versicherungsschäden gewährleistet ist, andererseits die Versicherung möglichst keinen Verlust macht? Diese Fragen möchte ich in meiner Arbeit möglichst genau beantworten, wengleich wir auch auf einige Vereinfachungen durch Modellierung vornehmen werden.

1.3 Grundbegriffe der Versicherungstheorie

Das tägliche Leben, sei es in der Freizeit oder im Berufsleben, birgt Risiken. Menschen machen Fehler und Fehler können zu enormen finanziellen Schäden führen, sei es durch eine Unaufmerksamkeit im Straßenverkehr, die in einem Unfall resultiert, oder im Berufsalltag, die in einem Berufsunfall mit Personenschaden endet. Es gibt aber auch Risiken, die ohne weiteres Dazutun eintreten können, wie etwa Krankheiten oder ein einfacher Blitzschaden bei Unwetter. Gegen viele dieser Risiken ist der

Mensch machtlos und kann sich niemals vollständig gegen diese schützen. Aber gegen eines kann man sich schützen: Den finanziellen Folgen, die bei Eintreten eines Unfalls bzw. eines Schadens enorm sein können.

Hier treten nun Versicherungen auf den Plan: Anstatt dass sich jeder Mensch (Individuum) selbst einen gewissen Beitrag zurücklegt, um mögliche Schäden in Zukunft auszugleichen, übernimmt eine zentrale Stelle (Versicherungsgesellschaft) die Verantwortung für Risiken, die zu finanziellen Schäden führen können. Für die Übernahme des Risikos des Individuums (nun: Versicherungsnehmer), verlangt die Versicherungsgesellschaft (nun: Versicherungsgeber) einen gewissen Beitrag (Prämie). Dies hat zum Vorteil, dass enorm große Schäden, die ein einzelnes Individuum nicht allein ausgleichen könnte, durch die Versicherungsgesellschaft übernommen werden kann. Dieses Prinzip funktioniert nur, wenn die Versicherungsgesellschaft genügend viele Risiken übernimmt und ausreichend Einnahmen durch die Prämien generieren kann, um im Schadensfall eines oder mehrere der versicherten Individuen ¹ einen schadensausgleichenden Beitrag zu zahlen (Regulierung). Das Schaubild verdeutlicht dieses sogenannte *Prinzip der kollektiven Risikoübernahme*.

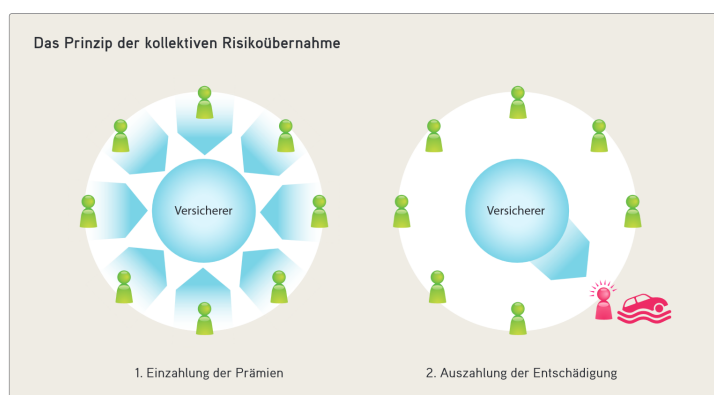


Abbildung 1.2: Prinzip der kollektiven Risikoübernahme [ICO12]

Somit verteilt sich der finanzielle Schaden auf alle Versicherungsnehmer der Versicherungsgesellschaft, als lediglich auf ein einzelnes Individuum einzuwirken.

Die Frage ist nun, wie die Prämien für die Versicherungsnehmer anzusetzen ist, damit die Versicherung kein Verlustgeschäft macht, da sie sonst an derartigen Geschäften sicherlich nicht interessiert wäre. Hierzu wird versucht auf Basis von statistischen

¹aus Sicht der Versicherungsgeber auch häufig selbst als Risiko bezeichnet

Auswertungen vergangener Perioden den Ergebnissen eine gewisse Glaubhaftigkeit (eng.: *Credibility*) auch für zukünftige Perioden zuzuschreiben. D.h. wir wollen anhand gegebener Daten Aussagen treffen, die uns in der Zukunft helfen sollen. Im konkreten Fall der Versicherung¹ wollen wir also mit Informationen über vergangene Schadensfälle Aussagen über erwartete zukünftige Schadensfälle treffen, die uns bei der Festsetzung der Prämien, die die Versicherungsnehmer zu zahlen haben, eine grundlegende Basis gibt.

Zur Vereinfachung werden wir in der Arbeit auf die Betrachtung weiterer Kosten, die für eine Versicherung etwa durch Verwaltung und Personal anfallen, aber auch auf Größen, die einen gewissen Gewinn für Versicherungen sicherstellen, verzichten und uns auf die Gewährleistung der Regulierungszahlungen konzentrieren.

¹die Idee der Credibility Theorie findet auch in vielen anderen Bereichen Anwendung

Kapitel 2

Einführung

2.1 Über Klassen, Prämien und Schäden

Die Credibility Theorie beschäftigt sich also vorwiegend mit der Berechnung von Prämien. Aber wie genau definiert sich eine Versicherungsprämie und wie kommt diese zustande?

Angenommen, wir haben eine Menge von Individuen, die bei einer Versicherungsgesellschaft versichert ist.

Risiken der Individuen sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen von aufgetretenen Schäden. Somit sind die Risikoeigenschaften der Versicherten derartige Eigenschaften, von denen vermutet wird und/oder (statistisch) nachgewiesen ist, dass zwischen ihnen und der versicherten Schadensverteilung (insb. Schadenshäufigkeit, Schadensgröße und damit Schadenserwartungswert) ein quantitativer Zusammenhang besteht [FAR06]. Daher fasst man verschiedene Individuen in Klassen zusammen, den **Risikoklassen** ähnlicher Schadensverteilungen. *Wie* diese Klassen zusammengestellt werden, soll kein Thema dieser Arbeit sein. Um aber ein Verständnis für die Vorgehensweise zu erhalten, hierzu ein kleiner Einblick:

Ein häufig genanntes Beispiel ist etwa die KFZ-Haftpflichtversicherung eines Versicherungsgebers. Statt alle Autofahrer in einen Topf zu werfen, wird versucht, die einzelnen Risiken zu kategorisieren und in sogenannte *homogene* Risikoklassen. Homogen in dem Sinne, dass versucht wird, ähnliche Risiken (bzw. Autofahrer) mit ähnlichen Schadensverteilungen zusammenzubringen. D.h. die Versicherung erwartet innerhalb der homogenen Risikoklasse die selben Schadenshöhen für jedes Klassenmitglied. Anschließend verspricht man sich, für jede homogene Klasse eine *faire*

Prämie - einen Betrag, den jedes Individuum zahlen muss - bestimmen zu können, um die entstandenen Schäden einer Versicherung zu decken. Fair in dem Sinne, dass ein weniger unfallverursachender Fahrer nicht die selbe hohe Prämie zahlen soll, die ein unfallträchtiger Versicherter zahlt, sondern die seinem Risiko einen Schaden zu verursachen gerecht wird.

Die Kategorisierung wird anhand von **Risikofaktoren** durchgeführt. Für die KFZ-Haftpflichtversicherung sind diese etwa das Fahrzeug oder der Fahrzeughalter. **Risikomerkmale** sind dann beispielsweise Fahrzeugtyp, Zulassungsregion, technische Merkmale des Fahrzeugs (PS, Hubraum, etc.) bzw. Alter oder Geschlecht des Fahrers. [FAR06]

Durch Bestimmung dieser Risikofaktoren ergibt sich für jede Risikoklasse eine bestimmte Schadenserwartung, aus der man durch Divisionskalkulation die sogenannte (Versicherungs-)Prämie für jedes Mitglied einer Gruppe feststellen kann, die für das Absichern des Risikos bezahlt werden muss. [MEI01]

Wir werden in Unterkapitel 2.2.2 noch sehen, dass die Einteilung von Risiken in Klassen gewisse Probleme birgt, wollen uns aber zunächst damit beschäftigen, unser Prämienberechnungsproblem mathematisch zu formulieren.

2.2 Mathematische Problemformulierung

Sei also eine beliebige Versicherungsgesellschaft gegeben, die R Risiken für verschiedene Versicherungsnehmer übernehme. Angenommen in *einer* beliebigen Versicherungsperiode (Monat, Jahr, ...) produzieren diese R Risiken Schäden in Höhe von $X^{(i)}$ für $1 \leq i \leq R$.

Die aggregierte Schadenshöhe bzw. **Gesamtschaden der Periode** ergibt sich dann zu

$$G = \sum_{i=1}^R X^{(i)},$$

woraus eine **durchschnittliche Schadenshöhe** in Höhe von

$$\bar{X} = G/R = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R X^{(i)}$$

resultiert. Um den Gesamtschaden durch alle Individuen theoretisch¹ finanzieren zu

¹wenn wir Verwaltungskosten o.Ä. außer Acht lassen

können, müsste jedes Individuum also den sogenannten **reinen Prämienbetrag**

$$P = G/R$$

zahlen.

Man stellt fest, dass $X^{(i)}$ für alle $i = 1, \dots, R$ und somit auch G , \bar{X} und P Zufallsvariablen sind, da sie von ungewissen Ausgängen in der Schadenshöhe der einzelnen Risiken abhängen. R ist dagegen eine fest gegebene Konstante.

Interessant wird diese Betrachtung nun, wenn wir (realistischerweise) absofort Risiken betrachten, die von Versicherungen nicht nur über eine, sondern *mehrere* Perioden übernommen werden.

2.2.1 Individuelles Risiko & individuelle Prämie

Im Folgenden betrachten wir *ein* individuelles Risiko i ($1 \leq i \leq R$), das über einen gegebenen Versicherungszeitraum - definiert durch n Versicherungsperioden - Schäden generiert hat. Im j -ten Jahr betrage der generierte Gesamtschaden $X_j^{(i)} := X_j$, wobei $1 \leq j \leq n$.²

Mithilfe der gemachten Beobachtungen des Gesamtschadenverlaufes vergangener Perioden $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ scheint es sinnvoll, die reine Risikoprämie für dieses Risiko für zukünftige Perioden schätzen.

Um diese Ideen nun in ein mathematisch sinnvolles Konzept zu packen, machen wir nun noch 2 wichtige Annahmen:

Annahme 1. Für die Zufallsvariablen X_j , $1 \leq j \leq n$ im Gesamtschadensverlauf \mathbf{X} eines Risikos gilt **Stationarität**, d.h. die Zufallsvariablen X_j ($j = 1, \dots, n$) sind identisch verteilt mit einer Verteilungsfunktion $F(x)$.

Die Stationaritätsbedingung ist von besonderer Bedeutung: Ohne sie könnten wir mithilfe der vergangenen Beobachtungen nichts für die Schätzung zukünftiger Schadensverläufe aussagen.

²wir verzichten bis einschließlich Kapitel 4 zur Übersichtlichkeit absofort auf die Deklaration des Parameters i , da wir bis dahin nur ein einzelnes Risiko bzw. Individuum untersuchen

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ der X_j gilt es offensichtlich näher zu betrachten:

$F(x)$ beschreibt die Verteilung der möglichen Schäden der einzelnen Risiken über den gesamten Beobachtungszeitraum. Sie charakterisiert also ein jedes Risiko, wobei sie auch von Risiko zu Risiko variiert, denn auch die Schadensverläufe variieren von Risiko zu Risiko. Um dies besser verständlich zu machen, parametrisieren wir $F(x)$ durch einen Parameterindex $\vartheta \in \Theta$, wobei Θ zunächst ein beliebiger abstrakter Raum sei. Wir schreiben daher auch ab sofort $F_{\vartheta}(x)$. Nun können wir uns also ϑ - welches wir ab sofort als *Risikoprofil* bezeichnen wollen - als Realisation einer Zufallsvariablen Θ vorstellen, der nach Auswahl aus der Grundgesamtheit Θ den Schadensverlauf \mathbf{X} eines Risikos beschreibt. Diese *Zweistufigkeit* werden wir später noch in der kombinierten Betrachtung der individuellen und kollektiven Prämie genauer betrachten.

Annahme 2. Für die Zufallsvariablen X_j , $1 \leq j \leq n$ im Gesamtschadensverlauf \mathbf{X} eines Risikos gilt (**bedingte**) **Unabhängigkeit**, d.h. die Zufallsvariablen X_j ($j = 1, \dots, n$) sind bedingt gegeben $\vartheta = \Theta$ unabhängig voneinander.

Das Risikoprofil charakterisiert den Schadensverlauf jedes Risikos, mithilfe dem man die zukünftigen Schäden, etwa in der Periode $n + 1$ schätzen kann. Kann man den zukünftigen Schadensverlauf eines Risikos also schätzen, so kann man auch den für dieses Individuum *fairen Prämienbeitrag* durch die erwartete Schadenshöhe bestimmen:

Definition 3. Der *individuelle Prämienbeitrag* eines Risikos mit Risikoprofil ϑ ist gegeben durch

$$P^{\text{ind}}(\vartheta) = \mathbb{E}[X_{n+1} | \Theta = \vartheta] =: \mu(\vartheta) \quad (2.1)$$

insofern wir uns für den Prämienbeitrag in Periode $n + 1$ interessieren. Wir bezeichnen diesen individuellen Prämienbeitrag auch als *faire Risikoprämie*.

Das Problem der Bestimmung einer Prämie für ein jedes Risiko wird also auf die Berechnung der Größe $\mu(\vartheta)$ reduziert. In der Realität sind allerdings sowohl ϑ , als auch $\mu(\vartheta)$ unbekannt, weshalb wir einen Schätzer $\widehat{\mu(\vartheta)}$ für $\mu(\vartheta)$ finden müssen, um eine faire Risikoprämie zu erhalten. Dies ist im Sinne der mathematischen Statistik ein Schätzproblem.

2.2.2 Kollektives Risiko & kollektive Prämie

Typischerweise wird in der Versicherungstheorie davon ausgegangen, dass man die R gegebenen Risiken auf Basis einiger objektiv quantifizierbarer Eigenschaften in sogenannte *homogene Risikoklassen* ähnlicher Risiken zusammenfasst. Dies soll die Prämienberechnung für jedes versichertes Risiko vereinfachen, indem man annimmt, dass sich die Risikoprofile der in einer zusammengefassten Risikoklasse Risiken ähneln. Man muss hier einen gewissen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Berechnungsmöglichkeit (in Form von Kapazität / Zeit) finden, denn in der Realität kann es eigentlich keine homogenen Risikoklassen bestehend aus mehr als einem Risiko geben. Etwa hat jeder Autofahrer ein anderes Temperament und somit möglicherweise eine andere Risikobereitschaft. Auch hat jeder Autofahrer jeden Tag (oder wohlmöglich jede Stunde) eine andere Verfassung und neigt ggf. schneller zu Unfällen. Weitere Gründe für die Unmöglichkeit einer genaueren Einteilung der Risiko sind etwa:

- nicht objektive Quantifizierbarkeit des Risikos
- Schwierigkeiten in der Erfassung
- Informationsasymmetrie zwischen Versicherungsnehmer und -geber.

Wir sollten also in unsere Berechnungen sowohl die individuellen Prämien für jedes Risiko berücksichtigen, als auch die kollektiven Prämien für Risikoklassen ähnlicher Risiken. Die Ähnlichkeit wird in diesem Fall durch die Risikoprofile ϑ bestimmt, welche sich im Risikoprofilraum Θ des Kollektivs befindet. Ist das Kollektiv homogen, wäre Θ einelementig.

Der Versicherungsgeber weiß im Voraus nichts über die Risikoprofile der einzelnen Risiken. Allerdings kann er mit der *a-priori* Information über die Verteilung der ϑ_i in Θ - nämlich z.B. über Wissen über Alter, Geschlecht, etc. - eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Raumes Θ aller Risikoprofile beschreiben, etwa anhand vergangener Gesamtschadensverläufe oder etwa Wissen über Alter, Geschlecht, Fahrzeugtyp. Genausogut kann diese Funktion aber auch gänzlich unbekannt sein.

Definition 4. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $U(\vartheta)$ für Θ heißt *Strukturfunktion des Kollektivs*.

Mithilfe dieser Strukturfunktion können wir also nun auch für ein heterogenes Kollektiv eine faire Risikoprämie definieren:

Definition 5. Der *kollektive Prämienbeitrag* ist gegeben durch

$$P^{\text{col}} = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta) =: \mu_0. \quad (2.2)$$

2.2.3 Individuell & Kollektiv: Kombinierte Betrachtung

Wir stellen fest, dass sowohl P^{ind} , als auch P^{col} auf den vergangenen Schadensverläufen basiert. Da Informationen über vergangene Schadensverläufe allerdings begrenzt sein können, kann die Prämie P^{col} bei hinreichend großem Θ bedeutend genauer bestimmt werden. Wir stellen uns etwa die Situation vor, in der eine Versicherung einem Neukunden, über den man nichts weiß, einen Tarif zuordnen muss. Hier kann man nur auf die Einteilung in ein Risikokollektivum mit gegebener Strukturfunktion vertrauen. Allerdings weiß man dann immer noch nichts über das Risikoprofil θ des neuen Risikos.

Die Prämie P^{col} ist für den Versicherer sehr wichtig. Sie entspricht der mittleren erwarteten Prämie eines jeden Risikos, d.h. der mittleren erwarteten Auszahlung an jeden Versicherungsnehmer. Diese muss im Gegenzug im Schnitt als minimale Einnahme von jedem Versicherungsnehmer gewährleistet sein, damit die Versicherung nach Eintreten der Schäden und deren Regulierung kein Verlustgeschäft macht. Damit ist P^{col} etwa für die anzusetzende Prämie eines neu in die Versicherung eintretenden Risikos, über das man keine weiteren Informationen hat, als eine gute Referenz geeignet.

Aber auch die individuelle Prämie P^{ind} spielt für den Versicherungsgeber eine wichtige Rolle: Im Wettbewerb werden die Versicherungsgesellschaften dazu gezwungen, die besten Tarife für die verschiedenen Risiken anzubieten. Würde eine Gesellschaft jedes Risiko mit dem selben Tarif belegen, würden - vereinfacht betrachtet - Kunden bei einigen Risiken zu anderen Versicherungen wechseln, die bei *guten* Risiken, d.h. Risiken, die weniger oft eintreten, einen geringeren Prämienbeitrag verlangen. Bei *schlechten* Risiken würden zwar alle bei dieser Gesellschaft bleiben, allerdings würde die Gesellschaft bei Eintreten dieser schlechten Risiken (da sie eben häufiger eintreten oder ein höheres Ausmaß hätten) Verlust machen, weil dieser nicht durch guten Risiken kompensiert würde. In Worten der obigen Definition würde sich die Strukturfunktion des Kollektivs der Versicherung insofern verändern, dass sie verlustreicher wäre, als bei anderen Versicherungen.

Wir wollen uns nun noch einmal den Prämienfindungsprozess genauer anschauen. Dieser Vorgang lässt sich nämlich als zweistufiges Zufallsexperiment veranschaulichen: Die erste Urne repräsentiert das Kollektiv Θ mit Strukturfunktion U . Aus dieser

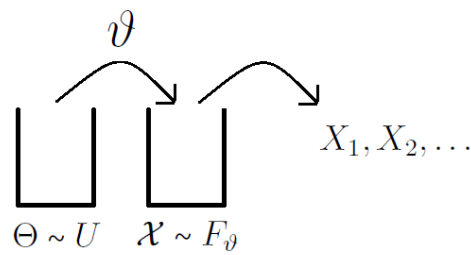


Abbildung 2.1: Veranschaulichung zweistufiges Zufallsexperiment

Urne ziehen wir zuerst gemäß U (daher auch *a-priori Verteilung* genannt) für ein individuelles Risiko / Individuum ein ϑ . Dieses ϑ bestimmt nun die einzelnen Schäden des Individuums, indem wir die Schadenshöhen X_1, X_2, \dots, X_n anhand einer Verteilung F_ϑ abhängig vom Parameter ϑ aus Urne 1, ziehen.

Anhand dieser Interpretation wird die individuelle Prämie selbst zur Zufallsvariablen: Jedes Risiko wird durch sein individuelles Risikoprofil ϑ bestimmt, welches selbst eine Realisation aus Θ mit Strukturfunktion U ist. Wir können ϑ also auch selbst als Zufallsvariable deklarieren. Insbesondere ist dann eben

$$P^{\text{ind}} = \mathbb{E}[X_{n+1} | \Theta = \vartheta] = \mu(\vartheta)$$

im Gegensatz zu P^{col} selbst eine Zufallsvariable.

Unser angestrebte Ziel ist es, letztlich für jedes Risiko in unserem Versicherungsportfolio einen angemessenen Prämienbeitrag zu bestimmen. Haben wir keine weiteren Informationen über ein Risiko bzw. ein Individuum gegeben, ist die kollektive Prämie P^{col} eine sinnvolle Wahl als Schätzer für dessen zu zahlenden Beitrag, da dieser die Schadenserwartungen aller Individuen berücksichtigt und die Gefahr von Verlustgeschäften der Versicherung verringert.

Haben wir aber den Schadensverlauf $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ eines Individuums über einen gewissen Zeitraum beobachtet, dann sollte dieser den Schätzprozess beeinflussen, um dem Versicherungsnehmer möglichst faire und attraktive Konditionen zu bieten. Hierzu schätzen wir die vom Risikoprofil abhängende individuelle Prämie

$$\mu(\vartheta) = \mathbb{E}(X_{n+1} | \Theta = \vartheta)$$

auf Basis des individuellen Schadensverlaufes \mathbf{X} des Individuums mit Risikoprofil ϑ . Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass sich hierfür mithilfe des Bayes-Ansatzes die dann sogenannte *Bayes-Prämie*, welche durch

$$P^{\text{Bayes}} = \mu(\Theta)^* := \mathbb{E}[\mu(\Theta) | \mathbf{X} = \mathbf{x}],$$

für ein $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ definiert ist, ergibt.

Kapitel 3

Bayesianischer Ansatz

3.1 Einführung: Schätz- & Entscheidungstheorie

Wie bereits in Kapitel 2 erschlossen, wollen wir aus unseren gegebenen Daten

$$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$$

und einer unbekanntem Verteilungsfunktion

$$F_{\vartheta}(x) = P_{\vartheta}[X_j \leq x] \quad \forall j = 1, \dots, n$$

einen angemessenen Schätzer für unsere individuelle Prämie bestimmen. Um zu verstehen, wie dieser Schätzer zu bestimmen ist und warum dieser gerade der bestmögliche ist, wollen wir im Folgenden in einer kleinen Einführung in die Schätz- und Entscheidungstheorie erläutern.

Bezeichnungen 6. Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne den Stichprobenraum und $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}$ sei der Parameterraum. Ein $x \in \mathcal{X}$ bezeichnen wir als eine Stichprobe. In unserem Fall wird dies eine Beobachtung des Schadensverlaufes eines Individuums sein. Ein $\vartheta \in \mathcal{P}$ bezeichnen wir als Parameter. Später werden dies die Risikoprofile sein.

Wir wollen nun ϑ , oder allgemeiner den Wert einer beliebigen Funktion von ϑ schätzen, etwa $g(\vartheta)$, wobei $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$. Da wir unsere Beobachtungen x nutzen wollen, suchen wir also eine Funktion $T: \mathcal{X} \rightarrow \{g(\vartheta) : \vartheta \in \mathcal{P}\} \subseteq \mathbb{R}$, welche auf x basiert und $g(\vartheta)$ bestmöglich schätzt. Später wird der individuelle Prämienbeitrag $\mu(\vartheta)$ durch $g(\vartheta)$ repräsentiert.

Definition 7. Eine Funktion

$$T : \mathcal{X} \rightarrow \{g(\vartheta) : \vartheta \in \vartheta\} \subseteq \mathbb{R}$$

heißt **Schätzer** oder **Schätzfunktion** für $g(\vartheta)$. Den Raum aller möglichen Schätzfunktion T bezeichnen wir mit \mathcal{D} .

Die Idee des Findens des bestmöglichen Schätzers müssen wir nun mit einem gewissen Gütekriterium konkretisieren:

Definition 8. Eine Funktion

$$\begin{aligned} L_{g(\vartheta)} : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto L_{g(\vartheta)}[T(x)] \end{aligned}$$

heißt **Verlustfunktion**, $L_{g(\vartheta)}[T(x)]$ bezeichnen wir als **Verlust**.

$L_{g(\vartheta)}[T(x)]$ beschreibt den *Unterschied* zwischen dem ‘wahren’ gesuchten Wert $g(\vartheta)$ und dem Wert, den uns unsere Schätzfunktion $T(x)$ unter Berücksichtigung der gemachten Beobachtungen aus x liefert. In der Literatur wird häufig auch $L[g(\vartheta), T(x)]$ statt $L_{g(\vartheta)}[T(x)]$ geschrieben, um zu verdeutlichen, dass der gesuchte Wert variabel gesetzt werden kann. Wir wollen dies im Folgenden beibehalten.

Wollen wir nun unseren Schätzer für alle möglichen Beobachtungen verhältnismäßig anhand der Verlustfunktion bewerten, so müssen wir den Verlust über jede Beobachtung mitteln. Dies führt zur

Definition 9. Sei ein beliebiger Schätzer T für $g(\vartheta)$ gegeben. Dann ist seine **Risikofunktion** gegeben durch

$$R_{\vartheta}[T] = \int_{\mathcal{X}} L[g(\vartheta), T(x)] F_{\vartheta}(dx) \tag{3.1}$$

$$= \mathbb{E}_{\vartheta} L[g(\vartheta), T(X)] \tag{3.2}$$

Wir können also nun verschiedene Schätzer über den gesamten Beobachtungsraum anhand der Güte in der Verlustfunktion vergleichen. Dies genügt uns allerdings nicht, da es im Allgemeinen nicht möglich ist, einen Schätzer T für $g(\vartheta)$ zu finden, der $R_{\vartheta}[T]$ gleichmäßig über ϑ minimiert. So kann es etwa vorkommen, dass für verschiedene Schätzer T_1 und T_2 $R_{\vartheta_1}[T_1]$ bzw. $R_{\vartheta_1}[T_2]$ an verschiedenen potentiellen Schätzwerten ϑ Minima annehmen. So kann etwa für $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$ gelten, dass $R_{\vartheta_1}[T_1] < R_{\vartheta_1}[T_2]$, aber $R_{\vartheta_2}[T_1] > R_{\vartheta_2}[T_2]$.

Um dennoch einen besten Schätzer zu finden, mitteln wir nun alle Risikofunktionen über den Parameterraum:

Definition 10. Das **Bayes-Risiko** eines Schätzers T für $g(\vartheta)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{R}[T] := \mathbb{E}[L[g(\Theta), T(X)]] \quad (3.3)$$

Mithilfe dieser Definition ist es nun einwandfrei möglich, Schätzer eindeutig anhand wachsendem und sinkendem Bayes-Risiko miteinander zu vergleichen. Insbesondere können wir den Bayes-Schätzer als denjenigen Schätzer deklarieren, der das geringste Bayes-Risiko im Vergleich zu allen anderen möglichen Schätzern für $g(\vartheta)$ hat:

Definition 11. Ein Schätzer $T^* \in \mathcal{D}$ für $g(\vartheta)$ heißt **Bayes-Schätzer** für $g(\vartheta)$, wenn für jeden anderen Schätzer $T \in \mathcal{D}$ für $g(\vartheta)$ gilt:

$$\mathcal{R}[T^*] \leq \mathcal{R}[T].$$

Erinnern wir uns noch einmal an das zweistufige Experiment aus Kapitel 2. Angenommen $P^{(\Theta, X)}$ bezeichne die gemeinsame Verteilung von Θ und X . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[T] &= \mathbb{E}[L[g(\Theta), T(X)]] \\ &= \int_{\mathcal{P} \times \mathcal{X}} L[g(\vartheta), T(x)] P^{(\Theta, X)}(d\vartheta, dx) \\ &= \int_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{X}} L[g(\vartheta), T(x)] P^{X|\Theta=\vartheta}(dx) P^\Theta(d\vartheta) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{P}} L[g(\vartheta), T(x)] P^{\Theta|X=x}(d\vartheta) P^X(dx) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \mathbb{E}[L[g(\Theta), T(x)] | X = x] P^X(dx) \end{aligned}$$

Wir können also über die sogenannte *a-posteriori Verteilung* $P^{\Theta|X=x}$ den Bayes-Schätzer konstruieren. Hierzu wollen wir noch eine Variante des Bayes-Satzes angeben, der uns später bei der Berechnung in unseren Anwendungen helfen wird:

Theorem 12. Seien $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ zwei Zufallsvariablen. Dann gilt

$$f(Y|X = x) = \frac{f_{X|Y=y}(x) f_Y(y)}{\int f_{X|Y=y'}(x) f_Y(y') dy'} \quad (3.4)$$

Für den von uns gesuchten Bayes-Schätzer ergibt sich nun aus obiger Definition:

Satz 13. *Existiert*

$$T^*(x) := \arg \min_{\tau} \mathbb{E}[L[g(\Theta), \tau] | X = x] \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

so ist T^* der Bayes-Schätzer für $g(\vartheta)$ bei der Verlustfunktion L .

Wir wollen diese Idee zur Konstruktion des Bayes-Schätzers nun weiter konkretisieren, um letztlich zu einer berechenbaren Größe zu gelangen. Hierzu schränken wir die Art der Verlustfunktion insofern ein, dass wir uns auf quadratische Verlustfunktionen beschränken:

Definition 14. Die **quadratische Verlustfunktion** ist gegeben durch

$$L[g(\vartheta), T(x)] = [T(x) - g(\vartheta)]^2.$$

Hieraus ergibt sich insbesondere konkret die Vergleichsmöglichkeit von Schätzern, indem wir das Bayes Risiko aus Definition 10 betrachten:

Definition 15. Im Fall einer quadratischen Verlustfunktion ist ein Schätzer \hat{T} für g mindestens so gut wie ein anderer Schätzer \tilde{T} für g , wenn

$$\mathcal{R}[\hat{T}] \stackrel{(3.3)}{=} \mathbb{E}\left[\left(\overline{T(X)} - g(\Theta)\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\overline{T(X)} - g(\Theta)\right)^2\right] \stackrel{(3.3)}{=} \mathcal{R}[\tilde{T}]$$

gilt. $\mathbb{E}[(T(X) - g(\Theta))^2]$ heißt dabei das **quadratische Bayes Risiko** des Schätzers T für g .

Mit dieser Definition können wir nun den Bayes-Schätzer für ein g mit quadratischer Verlustfunktion bestimmen:

Theorem 16. Für die quadratische Verlustfunktion ist der Bayes-Schätzer für g gegeben durch

$$T^*(X) = \mathbb{E}[g(\Theta)|X]. \tag{3.5}$$

Für das quadratische Bayes-Risiko dieses Schätzers gilt

$$\mathcal{R}[T^*(X)] = \mathbb{E}[(T^*(X) - g(\vartheta))^2] = \mathbb{E}[\mathbb{V}(g(\Theta)|X)]$$

Beweis. Nach Satz 13 müssen wir bei quadratischer Verlustfunktion

$$\tau \mapsto \mathbb{E}[(g(\Theta) - \tau)^2 | X = x]$$

für alle $x \in \mathcal{X}$ minimieren. Wir wissen aber aus der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits, dass für Zuvallsvariablen Θ mit $\mathbb{E}[g(\Theta)^2] < \infty$ der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}[g(\Theta)|X]$ obigen Term in $L_2(\Omega, \sigma(X))$ minimiert, wobei $\sigma(X)$ die σ -Algebra aufgespannt von X bezeichnet. Dementsprechend ergibt sich als Bayes-Schätzer

$$T^*(X) = \mathbb{E}[g(\Theta)|X].$$

Für das quadratische Bayes-Risiko gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[T^*(X)] &= \mathbb{E}[(T^*(X) - g(\Theta))^2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(T^*(X) - g(\Theta))^2 | X]] \\ &= \int \mathbb{E}[(T^*(X) - g(\Theta))^2 | X = x] P^X(dx) \\ &= \int \mathbb{E}\left[\left(g(\Theta) - \mathbb{E}[g(\Theta)|X = x]\right)^2 \middle| X = x\right] P^X(dx) \\ &= \int \mathbb{V}[g(\Theta)|X = x] P^X(dx) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{V}[g(\Theta)|X]] \end{aligned}$$

□

3.2 Umsetzung in der Prämienberechnung

In Kombination mit Kapitel 2 können wir mithilfe der Berechnung eines Bayes Schätzers mit einer quadratischen Verlustfunktion auch unser Prämienberechnungsproblem lösen. Wie bereits am Anfang des Kapitels erwähnt, entspricht der Raum \mathcal{X} dem Raum aller Schadensverlaufsbeobachtungen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, also $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. Der abstrakte Raum Θ ist gleichzustellen mit dem Raum aller individuellen Risikoprofile ϑ . Die zu schätzende allgemeine Funktion $g(\vartheta)$ präzisieren wir durch die gesuchte individuelle Prämie $P^{\text{ind}} = \mu(\vartheta)$. Durch simples Einsetzen ergibt sich dann der Bayes Schätzer für die individuelle Prämie (vergleiche Theorem 16):

Theorem 17. Der Bayes Schätzer unter Berücksichtigung der quadratischen Verlustfunktion für die individuelle Prämie $P^{\text{ind}} = \mu(\vartheta)$ ergibt sich im Prämienbewertungspro-

blem zu

$$P^{\text{Bayes}} = \mu(\Theta)^* = \mathbb{E}[\mu(\Theta)|\mathbf{X}] \quad (3.6)$$

mit Bayes-Risiko

$$\mathbb{E}[(\mu(\Theta) - \mu(\Theta)^*)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{V}(\mu(\Theta)|\mathbf{X})]. \quad (3.7)$$

Für die kollektive Prämie $P^{\text{col}} = \mu_0 = \mathbb{E}[\mu(\Theta)]$ ergibt sich außerdem die Zerlegung des erwarteten quadratischen Verlusts

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\mu(\Theta) - \mu_0)^2] &= \mathbb{E}[(\mu(\Theta) - \mu(\Theta)^* + \mu(\Theta)^* - \mu_0)^2] \\ &= \mathbb{E}[(\mu(\Theta) - \mu(\Theta)^*)^2] + \mathbb{E}[(\mu(\Theta)^* - \mu_0)^2] \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \mathbb{E}[\mathbb{V}(\mu(\Theta)|\mathbf{X})] + \mathbb{E}[(\mu(\Theta)^* - \mathbb{E}[\mu(\Theta)])^2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(\mu(\Theta)|\mathbf{X})] + \mathbb{E}[(\mu(\Theta)^* - \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(\Theta)|\mathbf{X}]])^2] \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \mathbb{E}[\mathbb{V}(\mu(\Theta)|\mathbf{X})] + \mathbb{E}[(\mu(\Theta)^* - \mathbb{E}[\mu(\Theta)^*])^2] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{V}(\mu(\Theta)|\mathbf{X})] + \mathbb{V}[\mu(\Theta)^*] \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \mathbb{E}[\mathbb{V}(\mu(\Theta)|\mathbf{X})] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(\mu(\Theta)|\mathbf{X})] := \mu_{\text{PV}}^2 + \sigma_{\text{HM}}^2 \end{aligned}$$

Den ersten Varianzsummand nennen wir häufig den *Erwartungswert der Prozessvarianz* (kurz EPV bzw. formell μ_{PV}^2). **Wichtig:** Er beschreibt die Risiko-interne Varianz bzw. die Schwankung innerhalb des Beobachtungsvektors eines Risikos. Den zweiten Summanden nennen wir die *Varianz des hypothetischen Mittels* (kurz VHM bzw. σ_{HM}^2). Er beschreibt die Risiko-externe Varianz bzw. die Schwankung zwischen den Beobachtungsvektoren des betrachteten Risikos im Vergleich zu Beobachtungsvektoren anderer Risiken. Diese Erkenntnis wird besonders im Bühlmann-Straub Modell bei der Interpretation von Schätzern und Verlusten eine wichtige Rolle spielen, ist in diesem Kapitel allerdings von zweitrangiger Bedeutung, da wir uns zunächst mit nur einem Risiko beschäftigen. Es fällt sofort ins Auge, dass der erste Summand μ_{PV}^2 das Bayes Risiko des Bayes Schätzers P^{Bayes} für die individuelle Prämie ist (vgl. Theorem 16).

Bemerkung. Natürlich lässt sich der Bayesansatz statt für die individuelle Prämie auch für jegliche andere Form von Verlustmaßen anwenden, etwa für aggregierte Schadensgrößen oder die Schadenshäufigkeit.

3.3 Anwendung: Der Poisson-Gamma Fall

Wir wollen das zuvor allgemein gehaltene Modell nun konkretisieren, indem wir uns gewisse Verteilungen vorgeben. Damit können wir dann beispielhaft auch konkret Prämien bestimmen.

Der Erste, der ein diesartiges Modell entwickelte, war der Aktuar F. Bichsel Ende der 60er Jahre. Hierbei handelte es sich um ein Modell, das in der KFZ-Haftpflichtversicherung angewandt wurde. Sein Ziel war, nicht nur die gesamten anfallenden Schäden in einer Versicherung zu decken, sondern auch die individuelle Schadenserwartung anhand der PS-Stärke der Fahrzeuge zu berücksichtigen. Somit wollte er verhindern, dass *gute* Risiken, welche fast nie Schäden verursachten, gleichgestellt werden mit Risiken, die bereits eine ganze Reihe an Schäden verursacht hatten.

Annahmen 18 (Bichsel). Wir gehen davon aus, dass die Schadenshöhe eines Individuums im j -ten Jahr X_j beträgt und diese lediglich von der Anzahl der Schäden N_j dieses Individuums in Jahr j und einer Konstanten C , die sich über die PS-Stärke des Fahrzeugs des Individuums bestimmt, in der Form $X_j = CN_j$ abhängt.

Haben wir also ein Risikoprofil ϑ eines Individuums gegeben, so nimmt dieses lediglich Einfluss auf die Schadenzahl N_j im j -ten Jahr:

$$\mathbb{E}[X_j|\Theta = \vartheta] = C \cdot \mathbb{E}[N_j|\Theta = \vartheta] \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Man beachte, dass die Konstante C in diesen Annahmen allein die PS-Stärke repräsentiert. In der Realität hat diese Eigenschaft von Fahrzeugen selbstverständlich auch Einfluss auf die Schadenzahlen N_j . Es handelt sich also hier auch um stark vereinfachte Annahmen.

Um also nun Aussagen über die Schadenserwartungen eines einzelnen Individuums zu treffen, müssen wir die Verteilung von N_j konkretisieren. Hierzu machen wir folgende Annahmen:

Annahme 19. Gegeben $\Theta = \vartheta$, seien die Zufallsvariable N_j für $1 \leq j \leq n$ unabhängig identisch Poisson-verteilt mit Poisson-Parameter ϑ , d.h.

$$P(N_j = k|\Theta = \vartheta) = e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^k}{k!}.$$

Nun ist die Frage, wie sich für die einzelnen Individuen das Risikoprofil ϑ , welches hier als Poisson-Parameter fungiert, bestimmen lässt. In diesem Modell hat der Raum aller Risikoprofile Θ eine Gamma-Verteilung:

Annahme 20. Die Strukturfunktion $U(\vartheta)$ des Kollektivs Θ hat eine Gamma-Verteilungsdichte mit Parameter γ und β , d.h. die Dichte von $U(\vartheta)$ lässt sich darstellen durch

$$u(\vartheta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \vartheta^{\gamma-1} e^{-\beta\vartheta} \quad \forall \vartheta \geq 0.$$

Hier wird auch nochmal die Zweistufigkeit der Urnendarstellung aus Unterkapitel 2.2.3 deutlich: Wir ziehen zunächst aus der ersten Urne gemäß einer Gamma-Verteilung ein Risikoprofil für das Individuum, welches die Poisson-Verteilung der zweiten Urne im Poisson-Parameter bestimmt. Aus der zweiten Urne wird dann das entsprechende Verlustmaß (in diesem Fall die Anzahl der Schäden des Individuums) gezogen.

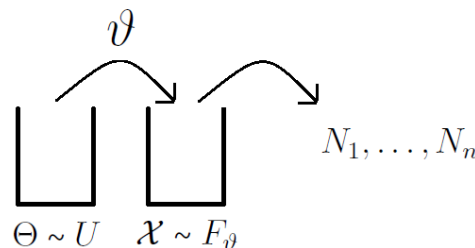


Abbildung 3.1: Veranschaulichung zweistufiges Zufallsexperiment: Poisson-Gamma

Es folgt

Satz 21. *Unter den gemachten Annahmen ergibt sich für die erwartete Schadenszahl, die wir mit \hat{N} bezeichnen wollen:*

$$\begin{aligned} \hat{N}^{ind} &= \mathbb{E}[N_{n+1} | \Theta = \vartheta] = \vartheta \\ \hat{N}^{col} &= \mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta} \\ \hat{N}^{Bayes} &= \frac{\gamma + N_\Sigma}{\beta + n} \end{aligned}$$

wobei wir verkürzend schreiben

$$N_{\Sigma} := \sum_{j=1}^n N_j.$$

Die entsprechenden Werte für P^{ind} , P^{col} und P^{Bayes} ergeben sich durch Multiplikation mit C .

Beweis. \hat{N}^{ind} und \hat{N}^{col} ergeben sich direkt aus den gemachten Annahmen der Poisson- und Gamma-Verteilung und den Formeln für F^{ind} und F^{col} , die denen, die wir ja bereits für die Prämie bestimmt haben, bis auf den Faktor C entsprechen:

$$\mathbb{E}[N_j | \Theta = \vartheta] = \vartheta \Rightarrow F^{ind} = \mathbb{E}[N_j | \Theta = \vartheta] = \vartheta$$

$$\mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow F^{col} = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}.$$

Wie wir im Kapitel 3 erfahren haben, benötigen wir für die Bestimmung der Bayes Prämie die a-posteriori Verteilung bzw. dessen Dichte. D.h. wir bestimmen diejenige Dichte, die gilt, nachdem wir eine Beobachtung über den Vektor $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_n)$ gemacht haben; daher auch a-posteriori Verteilung. Diese ergibt sich aus der Bayes-Regel aus Theorem 12. Wir müssen also nur einsetzen:

$$u(\vartheta | \mathbf{N}) \stackrel{(3.4)}{=} \frac{\frac{\beta\gamma}{\Gamma(\gamma)} \vartheta^{\gamma-1} e^{-\beta\vartheta} \prod_{i=1}^n e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^{N_j}}{N_j!}}{\int_{\vartheta} \frac{\beta\gamma}{\Gamma(\gamma)} \vartheta^{\gamma-1} e^{-\beta\vartheta} \prod_{j=1}^n e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^{N_j}}{N_j!} d\vartheta} = \text{const} \cdot \vartheta^{(\gamma+N_{\Sigma})-1} e^{-(\beta+n)\vartheta}$$

wobei const nicht von ϑ abhängt. Betrachten wir uns nochmal die Dichte einer Gamma-Verteilung in Annahme 20 erkennen wir, dass es sich bei der a-posteriori Dichte wieder um eine Dichte einer Gamma-Verteilung handelt, diesmal aber mit Parametern

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \gamma + N_{\Sigma} \\ \beta^* &= \beta + n. \end{aligned}$$

Mithilfe der a-posteriori Dichte können wir nun einfach F^{Bayes} ausrechnen, denn dies ist nach Theorem 17 gegeben durch

$$\begin{aligned} F^{Bayes} &= \mathbb{E}[\Theta | \mathbf{N}] = \int_{\Theta} \vartheta u(\vartheta | \mathbf{N}) d\vartheta \\ &= \frac{\gamma + N_{\Sigma}}{\beta + n} \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwandt, dass der Ausdruck gerade den Erwartungswert von Θ unter der Gamma-Verteilung mit Parametern γ^* und β^* beschreibt, der ja bekanntlich $\frac{\gamma^*}{\beta^*}$ ist. □

Bemerkung. Wir können den Bayes Schätzer für die Schadenszahl folgendermaßen zerlegen und erkennen daran schön, aus welchen Bestandteilen er besteht:

$$\begin{aligned}
 F^{\text{Bayes}} &= \frac{\gamma + N_{\Sigma}}{\beta + n} \\
 &= \frac{\gamma}{\beta + n} + \frac{\sum_{j=1}^n N_j}{\beta + n} \\
 &= \frac{\beta}{\beta + n} \frac{\gamma}{\beta} + \frac{n}{\beta + n} \frac{\sum_{j=1}^n N_j}{n} \\
 &= Z \bar{N} + (1 - Z) \frac{\gamma}{\beta} \\
 &= Z \bar{N} + (1 - Z) F^{\text{col}}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wir stellen also fest, dass der Bayes Schätzer für die individuelle Schadenshäufigkeit eine Summe aus der durchschnittlichen Schadenszahl $\bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_j$ und der kollektiven Schadenshäufigkeit F^{col} gewichtet mit dem sogenannten Credibility-Gewicht $Z = \frac{n}{\beta+n}$ ist. Diese Interpretation macht auch Sinn:

- ▷ steigt die Anzahl beobachteter Schadenszahlen, sprich n , so steigt auch das Credibility-Gewicht Z . Dementsprechend wird der zugehörigen durchschnittlichen Schadenszahl des Individuums mehr *Credibility* zur Berechnung des Bayes Schätzers zugerechnet.
- ▷ sinkt die Anzahl beobachteter Schadenszahlen eines Individuums, sprich n , so sinkt auch das Credibility Gewicht Z , aber dafür das Komplement $1 - Z$, welches der kollektiven Prämie in diesem Fall mehr *Credibility* zuweist. Die Berücksichtigung vom durchschnittlichen Wert der Schadenszahl \bar{N} wird dann weniger zugerechnet.

Betrachten wir die erwarteten quadratischen Verluste unserer Schätzer genauer, erhalten wir:

Satz 22. *Der erwartete quadratische Verlust von ...*

(i) \bar{N} ist gegeben durch

$$\frac{1}{n} \frac{\gamma}{\beta}$$

(ii) F^{col} ist gegeben durch

$$\frac{\gamma}{\beta^2}$$

(iii) F^{Bayes} ist gegeben durch

$$Z \cdot \frac{1}{n} \frac{\gamma}{\beta} = (1 - Z) \cdot \frac{\gamma}{\beta^2}$$

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\bar{N} - \Theta)^2] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[(\bar{N} - \Theta)^2 \mid \Theta = \vartheta\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{V}(\bar{N} \mid \Theta = \vartheta)\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\Theta]}{n} = \frac{1}{n} \frac{\gamma}{\beta}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(F^{\text{col}} - \Theta)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\gamma}{\beta} - \Theta\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[\Theta] - \Theta)^2\right] \\ &= \mathbb{V}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta^2}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(F^{\text{Bayes}} - \Theta)^2] &= \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[\Theta \mid \mathbf{N}] - \Theta)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{V}[\Theta \mid \mathbf{N}]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{\gamma + N_{\Sigma}}{(\beta + n)^2}\right] \\ &= \frac{\gamma}{(\beta + n)^2} \mathbb{E}\left(1 + \frac{N_{\Sigma}}{\gamma}\right) \\ &= \frac{\gamma}{(\beta + n)^2} \left(1 + \frac{\mathbb{E}N_{\Sigma}}{\gamma}\right) \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{\gamma}{(\beta + n)^2} \left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \\ &= \frac{\beta\gamma}{\beta(\beta + n)^2} + \frac{n\gamma}{\beta(\beta + n)^2} \\ &= \frac{\gamma(n + \beta)}{\beta(\beta + n)^2} \\ &= \frac{\gamma}{\beta(\beta + n)} \\ &= \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{\beta + n} \\ &= \frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{\beta} (1 - Z) = \frac{1}{n} \frac{\gamma}{\beta} Z\end{aligned}$$

□

3.3.1 Schätzen der Strukturparameter (Momentenmethode)

Bisher sind wir davon ausgegangen, dass uns die Parameter der Strukturfunktion als bekannt vorausgesetzt sind. Dies ist sicherlich äußerst realitätsfern, und wir versuchen dieses Problem im Folgenden zu lösen, indem wir uns aus den gegebenen Versicherungsdaten Schätzer für die Parameter der Strukturfunktion U konstruieren. In diesem Fall handelt es sich um die Gamma-Verteilung und die zu schätzenden Parameter sind γ und β . Um diese Parameter zu schätzen, liegen uns mehrere mathematische Lösungsmöglichkeiten vor. Wir beschäftigen uns mit der Momentenmethode. Hierzu gehen wir davon aus, dass $N^{(i)}$ für verschiedene Individuen $1 \leq i \leq R$ unabhängig identisch verteilt seien.

Theorem 23. Sind X_1, \dots, X_n unabhängig (nicht notwendigerweise identisch) verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ und Varianz $\mathbb{V}(X_i) = \sigma$ für alle $1 \leq i \leq n$, dann ist

$$\hat{\mu} := \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für μ und

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\mu}) &= \mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) \\ &= \mu \end{aligned}$$

Damit wäre die Erwartungstreue für $\hat{\mu}$ gezeigt. Für die Erwartungstreue von $\hat{\sigma}^2$ betrachte:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\bar{X}) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right) - n\mathbb{E}[(\bar{X} - \mu)^2] \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] - n\mathbb{V}(\bar{X}) \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) - n\frac{\sigma^2}{n} \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} \left[\left(\sum_{i=1}^n \sigma^2\right) - \sigma^2 \right] \\
 &= \frac{1}{n-1} [(n-1)\sigma^2] \\
 &= \sigma^2
 \end{aligned}$$

Damit wäre auch der zweite Teil des Theorems bewiesen. □

Dieses Theorem lässt sich also auf jedes beliebige Verlustmaß - in unserem Fall die Schadenszahlen - unter obigen Voraussetzungen anwenden. Dementsprechend sind die erwartungstreuen Momente gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_N &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R N^{(i)} \\
 \hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (N^{(i)} - \bar{N})^2
 \end{aligned}$$

Die Idee der Momentenmethode ist nun, die ersten beiden Momente der Zufallsvariablen N unter den Bedingungen der Gamma-Verteilung gleich diesen erwartungstreuen Momenten zu setzen. Somit erhalten wir folgendes Gleichungssystem, welches uns die Lösungen für die Schätzer von $\hat{\gamma}$ und $\hat{\beta}$ liefert:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_N &\stackrel{!}{=} \mathbb{E}[N_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_i|\Theta = \vartheta]] = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta} \\
 \hat{\sigma}_N^2 &\stackrel{!}{=} \mathbb{V}[N_i] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[N|\Theta = \vartheta]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[N|\Theta = \vartheta]] \\
 &= \mathbb{E}[\Theta] + \mathbb{V}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)
 \end{aligned}$$

Wir können also nun aus gegebenen Versicherungsdaten den Schätzer für die Scha-

denzanzahl zukünftiger Perioden empirisch bestimmen. Aus der Zerlegung (3.8) ergibt sich damit die

Definition 24. Der **empirische Bayes Schätzer** ist gegeben durch

$$F_{\text{emp}}^{\text{Bayes}} = \hat{Z} \bar{N} + (1 - \hat{Z}) \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}},$$

wobei

$$\hat{Z} = \frac{n}{n + \hat{\beta}}.$$

3.3.2 Praktische Anwendung

Um den Anwendungsbereich der obigen Ergebnisse zu verstehen, werden wir diese in einem Zahlenbeispiel im Folgenden anwenden.

Wir betrachten im Beispiel eine Periode eines beliebigen Versicherungsportfolios. Unser Ziel soll es sein, anhand einer selbst programmierten Schadenshäufigkeit in den Verträgen des Versicherungsportfolios die Strukturparameter anhand der simulierten Daten zu schätzen.

Wir befinden uns nach wie vor im Poisson-Gamma Modell, und wollen nun Schadenshöhen anhand einer angemessenen Poisson-Verteilung simulieren. Angemessen in dem Sinne, dass wir ein Maximum an Schäden mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht überschreiten wollen.

Im Code wird dieses Maximum durch `maxclaims` repräsentiert. Dementsprechend gehen wir in der Funktion `bayes` schrittweise die $1/(1-\text{policies})$ Quantile für verschiedene Poisson-Parameter `lambda`st durch, damit wir `maxclaims` mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/(1-\text{policies})$ nicht überschreiten. `policies` bezeichnet hierbei die Anzahl der Versicherungspolizen im Versicherungsportfolio, die 0 bis `maxclaims` Schäden verursachen können. Anschließend wird aus der Tabelle `lambdas` aller zulässigen Poisson-Parameter zufällig ein `finallambda` ausgewählt, welches zur Bestimmung einer möglichen Schadensverteilung durch die Poisson-Verteilung mit Parameter `finallambda` herangezogen wird (`rpois(policies, finallambda)`).

```
# Definition der Funktion

bayes <- function(policies,maxclaims)
{
  # Setzen notwendiger Parameter, Vektoren und
  # Konstanten

  lambdas = numeric(0)

  lambdatest = 0
  claimtest = 0

  j = 0

  # Probation aller zulässigen Parameterwerte für
  # Lambdaunter den Quantilsbedingungen 1-(1/policies)
  # und lambdatest

  while(claimtest <= maxclaims && lambdatest <0.5)
  {
    lambdatest = lambdatest + 0.001
    claimtest = qpois(1-(1/policies),lambdatest)

    j = j+1
    lambdas[j] = lambdatest
  }

  # Zufällige Auswahl eines Eintrages aus dem Vektor
  # aller zulässigen Werte für lambda

  i = floor(runif(1,1,length(lambdas)))

  # Auslesen des zufälligen Wertes

  finallambda = lambdas[i]

  # Simulation von policies Schäden anhand
  # des zufälligen Poisson-Parameterwertes

  K = rpois(policies,finallambda)

  # Ausgabe Simulation

  tabelle = c(table(K))
  return(tabelle)
}
```

Eine Ausführung der Funktion mit Werten `policies = 250.000` und `maxclaims = 6` führt zu folgenden Einträgen in Spalte (1) und (2):

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Anzahl an Schadensfällen k	Verträge mit k Schadensfällen N_k	$k \cdot N_k$	$(k - \hat{\mu}_N)^2$	$N_k \cdot (5)$
0	167.273	0	0,162	27.043,284
1	67.183	67.183	0,358	24.018,161
2	13.520	27.040	2,553	34.521,097
3	1.815	5.445	6,749	12.249,740
4	193	772	12,945	2.498,385
5	15	75	21,141	317,112
6	1	6	31,337	31,337
-	250.000	100.521	-	100.679,114

Tabelle 3.1: Anwendung einer Poisson Verteilung aus zulässigen Parameterwerten

Zunächst schätzen wir also die Strukturparameter. Hierzu benutzen wir die Ergebnisse aus Theorem 23 und nutzen die Berechnungen der Spalten (3) bis (5):

Schätzer für $\mathbb{E}[N_i] = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mu}_N = \bar{N} &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R N^{(i)} \\
 &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R k^{(i)} N_k^{(i)} \\
 &= \frac{1}{R} \sum_{k=0}^4 k N_k \\
 &= \frac{1}{250.000} \cdot 100.521 = 0,402
 \end{aligned}$$

Schätzer für $\mathbb{V}[N_i] = \mathbb{E}[\Theta] + \mathbb{V}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_N^2 &= \frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (N^{(i)} - \bar{N})^2 \\
 &= \frac{1}{R-1} \sum_{i=1}^R (k^{(i)} N_k^{(i)} - \bar{N})^2 \\
 &= \frac{1}{R-1} \sum_{k=0}^4 (k - \hat{\mu}_N)^2 N_k \\
 &= \frac{1}{249.999} \cdot 100.679,114 = 0,403
 \end{aligned}$$

Bemerkung. Dass für die Schätzer des Erwartungswertes und der Varianz nahezu die gleichen Werte entstehen ist nicht überraschend, da wir die Simulation anhand einer Poisson-Verteilung ausgerichtet haben. Bei dieser gilt Gleichheit zwischen Erwartungswert und Varianz.

Es gilt nun also das Gleichungssystem

$$\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}} = 0,402 \quad \wedge \quad \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}} \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right) = 0,403$$

zu lösen. Es folgt

$$\hat{\beta} = \frac{1}{\frac{0,403}{\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}} - 1} = 634,134 \quad \wedge \quad \hat{\gamma} = 0,402 \cdot \hat{\beta} = 254,975$$

Da wir uns weiterhin mit dem Poisson-Gamma Fall beschäftigen wollen, erhalten wir für die unbedingte Verteilung der Schäden in einer Versicherungsperiode

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \int_{\Theta} P(N = k | \Theta = \vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \\ &= \int_{\Theta} e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^k}{k!} \frac{\beta^\vartheta}{\Gamma(\gamma)} \vartheta^{\gamma-1} e^{-\beta\vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{k!} \int_{\Theta} e^{-(\beta+1)\vartheta} \vartheta^{\gamma+k-1} d\vartheta \\ &= \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{(\beta+1)^{\gamma+k}} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)k!} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\gamma \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \\ &= \binom{\gamma+k-1}{k} p^\gamma (1-p)^k \end{aligned}$$

wobei

$$p := \frac{\beta}{\beta+1}. \tag{3.10}$$

Dies ist offensichtlich eine negative Binomialverteilung mit Parameter p . Für den Parameter p der negativen Binomialverteilung folgt aus (3.10) dann

$$\hat{p} = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta}+1} = 0,998.$$

Zum Vergleich erhalten wir für eine negative Binomialverteilung mit Parametern $\hat{p} = 0,998$ und $\hat{\gamma} = 254,975$:

(1)	(2)	(3)
Anzahl an Schadensfällen	Verträge mit k Schadensfällen	Verträge mit k Schadensfällen anhand $n\mathcal{B}in(\hat{\gamma}, \hat{p})$
0	167.273	167.284
1	67.183	67.157
2	13.520	13.533
3	1.815	1.825
4	193	185
5	15	15
6	1	1
-	250.000	250.000

Tabelle 3.2: Vergleich Schadenszahlen und Schätzung Poisson-Gamma Modell

Wir sehen also, dass wir für die geschätzten Werte der Verteilung der Schadenszahlen anhand der bestimmten negativen Binomialverteilung mit Strukturparametern \hat{p} und $\hat{\gamma}$ sehr gut an die gegebenen Schadenszahlen (welche in unserem Fall anhand einer Poisson-Verteilung simuliert wurden) heranreichen!

Kapitel 4

Grundlagen der Credibility Schätzung

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass der allgemeine Bayes-Schätzer bei quadratischer Verlustfunktion gegeben ist durch $T^*(\Theta) = \mathbb{E}[g(\Theta)|\mathbf{X}]$, oder konkretisiert für unser Prämienberechnungsproblem $\mu^*(\Theta) = \mathbb{E}[\mu(\Theta)|\mathbf{X}]$. Dieser Schätzer ist äußerst allgemein gehalten und führt, wie wir in der Anwendung in Unterkapitel 3.3.2 gesehen haben, bereits zu einer sehr komplizierten Berechnung über die a-posteriori Verteilung. Im Allgemeinen ist diese allerdings in einer geschlossenen analytischen Form nicht berechenbar, da wir weder die notwendigen bedingten Verteilungen, noch die a-priori Verteilungen aus Datensätzen schätzen können.

Um dieses Problem in der Praxis lösbar zu machen, schränken wir die Auswahl an möglichen Schätzern $\mu^*(\Theta)$ ein, indem wir nur noch diejenigen Schätzer zulassen wollen, die linear von unserem Beobachtungsvektor \mathbf{X} abhängen. Im Gegenzug werden wir die Verteilungsannahmen und bedingten Abhängigkeiten der Verlustmaßbeobachtungen bedingt unter $\Theta = \vartheta$ verallgemeinern und nur noch auf Existenz eines endlichen Erwartungswertes und Varianz eingrenzen. Damit kommen wir zunächst zum einfachen Credibility Modell:

4.1 Das einfache Credibility Modell

Wir betrachten im Folgenden zunächst primär wieder die Schadenshöhen der Individuen als Verlustmaß, können dies aber jederzeit verallgemeinern. Hierzu einige

Annahmen 25 (einfaches Credibility Modell). Für die Zufallsvariablen X_j , $1 \leq j \leq n$ im Gesamtschadensverlauf \mathbf{X} eines Individuums gelten:

▷ **bedingte Unabhängigkeit**

bedingt unter $\Theta = \vartheta$ sind die Zufallsvariablen X_j ($j = 1, \dots, n$) unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F_ϑ und den bedingten Momenten

$$\begin{aligned}\mu(\Theta) &= \mathbb{E}[X_j | \Theta = \vartheta] < \infty \\ \sigma^2(\Theta) &= \mathbb{V}[X_j | \Theta = \vartheta] < \infty.\end{aligned}$$

▷ **Verteilung Parameterraum**

ϑ ist eine Zufallsvariable mit Verteilung gemäß $U(\vartheta)$

Wie auch zuvor gelten trotz der Verallgemeinerungen in diesen Annahmen weiterhin natürlich

$$\begin{aligned}P^{\text{ind}} &= \mu(\Theta) = \mathbb{E}[X_{n+1} | \Theta] \\ P^{\text{col}} &= \mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta).\end{aligned}$$

Ferner definieren wir

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[\mu(\Theta)] &= \mathbb{V}[\mathbb{E}[X_j | \Theta]] := \sigma_{\text{HM}}^2 & \forall 1 \leq j \leq n \\ \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}[X_j | \Theta]] := \mu_{\text{PV}}^2 & \forall 1 \leq j \leq n\end{aligned}$$

Anstatt aber allgemeine Schätzer für P^{ind} zuzulassen, beschränken wir uns wie bereits erwähnt auf Schätzer, die linear vom Beobachtungsvektor \mathbf{X} abhängen. Der potentielle Credibility-Schätzer P^{cred} für P^{ind} eines Risikos soll also von der Form

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$$

sein. Für diesen ergibt sich:

4.2 Der Credibility Schätzer

Satz 26. Der Credibility Schätzer P^{cred} für P^{ind} im einfachen Credibility Modell ist gegeben durch

$$P^{cred} = \hat{X}_{n+1} = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu_0 \quad (4.1)$$

wobei

$$Z = \frac{n}{n + K} \quad K = \frac{\mu_{PV}^2}{\sigma_{HM}^2} = \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}.$$

Beweis. \hat{X}_{n+1} geht durch Minimierung des mittleren quadratischen Fehlers aus der gemeinsamen Verteilung von Θ , X_{n+1} und $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ hervor. D.h. der Schätzer für X_{n+1} ist gegeben durch

$$\hat{X}_{n+1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n \quad (4.2)$$

wobei $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ so gewählt seien, dass sie das quadratische Risiko

$$\mathcal{R}(\hat{X}_{n+1}) = \mathbb{E}[(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2], \quad (4.3)$$

minimieren. Um den Schätzer mit geringsten mittleren quadratischen Fehler zu bestimmen, bedienen wir uns der Methodik der linearen Regression. Dazu sei $\mathbf{Y} := (1, \mathbf{X})^t$ der $(n + 1) \times 1$ Vektor, bestehend aus einer 1 und den Beobachtungen. Ferner sei $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ der $(n + 1) \times 1$ Vektor bestehend aus der Regressionskonstante α_0 und den Regressionskoeffizienten. $\boldsymbol{\alpha}_s$ sei der $n \times 1$ Vektor nur bestehend aus den Koeffizienten. Dementsprechend können wir (4.2) umschreiben zu

$$\hat{X}_{n+1} = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha}_s^t \mathbf{X} = \boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{Y}. \quad (4.4)$$

Dies führt zum mittleren quadratischen Fehler aus (4.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\hat{X}_{n+1}) &= \mathbb{E}[(X_{n+1} - \boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{Y})^2] \\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2 - 2\boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{Y} X_{n+1} + \boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{Y} \mathbf{Y}^t \boldsymbol{\alpha}] \\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - 2\boldsymbol{\alpha}^t \mathbb{E}[\mathbf{Y} X_{n+1}] + \boldsymbol{\alpha}^t \mathbb{E}[\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t] \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dieser Ausdruck wird durch den sogenannten *kleinsten Quadrate Schätzer*

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y} X_{n+1}]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t]}$$

minimiert, denn aus (4.5) wird mit $\hat{\alpha}$:

$$\begin{aligned}
 (4.5) &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - 2 \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t X_{n+1}]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}]} \mathbb{E}[\mathbf{Y} X_{n+1}] + \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t X_{n+1}]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}]} \mathbb{E}[\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t] \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y} X_{n+1}]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t]} \\
 &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - 2 \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}]} \mathbb{E}[X_{n+1}^2] + \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}]} \mathbb{E}[X_{n+1}] \mathbb{E}[\mathbf{Y} X_{n+1}] \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t]} \\
 &= \mathbb{E}[X_{n+1}^2] - 2 \mathbb{E}[X_{n+1}^2] + \frac{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}]}{\mathbb{E}[\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}]} \mathbb{E}[X_{n+1}^2] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Betrachten wir den Nenner und Zähler des kleinsten Quadrate Schätzer $\hat{\alpha}$ noch einmal genauer:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\mathbf{Y} X_{n+1}) &= \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \cdot X_{n+1} \right] = \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ X_1 \cdot X_{n+1} \\ \vdots \\ X_n \cdot X_{n+1} \end{pmatrix} \right] \\
 \mathbb{E}(\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t) &= \mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \cdot (1, X_1, \dots, X_n) \right] = \mathbb{E} [1^2 + X_1^2 + \dots + X_n^2]
 \end{aligned}$$

Definieren wir nun mit $\mathbf{M}_{\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t}$ die Matrix der Kreuzsummenprodukte der Abweichung vom jeweiligen Mittel $\mathbb{E}[X_i]$ der einzelnen Regressoren X_i , d.h.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\mathbf{Y} \mathbf{Y}^t} &= \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1 - \mathbb{E}X_1] \mathbb{E}[X_1 - \mathbb{E}X_1] & \dots & \mathbb{E}[X_1 - \mathbb{E}X_1] \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}X_n] \\ \mathbb{E}[X_2 - \mathbb{E}X_2] \mathbb{E}[X_1 - \mathbb{E}X_1] & \dots & \mathbb{E}[X_2 - \mathbb{E}X_2] \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}X_n] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}X_n] \mathbb{E}[X_1 - \mathbb{E}X_1] & \dots & \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}X_n] \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}X_n] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbb{V}[X_1] & Co\mathbb{V}[X_1, X_2] & \dots & Co\mathbb{V}[X_1, X_n] \\ Co\mathbb{V}[X_2, X_1] & \mathbb{V}[X_2] & \dots & Co\mathbb{V}[X_2, X_n] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Co\mathbb{V}[X_n, X_1] & Co\mathbb{V}[X_n, X_2] & \dots & \mathbb{V}[X_n] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

und $\mathbf{M}_{\mathbf{Y}X_{n+1}}$ durch

$$\mathbf{M}_{\mathbf{Y}X_{n+1}} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[X_1 - \mathbb{E}X_1] \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}X_{n+1}] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_n - \mathbb{E}X_n] \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}X_{n+1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{CoV}[X_1, X_{n+1}] \\ \vdots \\ \text{CoV}[X_n, X_{n+1}] \end{bmatrix},$$

dann wissen wir aus Grundlagen der Linearen Regression, dass die kleinsten Quadrate Schätzer der Regressionskoeffizienten $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_s^t = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n)$ gegeben sind durch

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^t}^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{Y}X_{n+1}} \quad (4.6)$$

Bevor wir diese Matrizenmultiplikation durchführen, schauen wir uns nochmal die Einträge der Matrizen $\mathbf{M}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^t}$ und $\mathbf{M}_{\mathbf{Y}X_{n+1}}$ an:

Nach Theorem 17 folgt

$$\mathbb{V}[X_i] = \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] + \mathbb{V}[\mu(\Theta)] = \mu_{\text{PV}}^2 + \sigma_{\text{HM}}^2 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

und für $i \neq j$ folgt für $\text{CoV}(X_i, X_j)$ mithilfe des Verschiebungssatzes:

$$\begin{aligned} \text{CoV}[X_i, X_j] &= \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i X_j | \Theta]] - \mu_0^2 \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i | \Theta] \mathbb{E}[X_j | \Theta]] - \mu_0^2 \\ &= \mathbb{E}[[\mu(\Theta)]^2] - [\mathbb{E}[\mu(\Theta)]]^2 \\ &= \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \\ &= \mathbb{V}[\mathbb{E}[X | \Theta]] \\ &= \sigma_{\text{HM}}^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.6) vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_s &= \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] + \mathbb{V}[\mu(\Theta)] & \dots & \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{V}[\mu(\Theta)] & \dots & \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] + \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \\ \vdots \\ \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \end{pmatrix} \\ &= [\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] \mathbf{I} + \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \mathbf{1}\mathbf{1}^t]^{-1} [\mathbb{V}[\mu(\Theta)] \mathbf{1}] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]} \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]} \mathbf{1}\mathbf{1}^t \right)^{-1} \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{K} \mathbf{1}\mathbf{1}^t \right)^{-1} \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \mathbf{1} \\
 &= \frac{1}{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{n+K} \mathbf{1}\mathbf{1}^t \right) \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \mathbf{1} \\
 &= \frac{1}{K} \left(\mathbf{1} - \frac{1}{n+K} \mathbf{1}\mathbf{1}^t \right) \mathbf{1} \\
 &= \frac{1}{K} \left(\mathbf{1} - \frac{n}{n+K} \mathbf{1} \right) \\
 &= \frac{1}{n+K} \mathbf{1}
 \end{aligned}$$

wenn wir mit \mathbf{I} die $n \times n$ Einheitsmatrix, mit $\mathbf{1}$ den $n \times 1$ Einheitsvektor und

$$K := \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]} = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}$$

definieren und beachten, dass $\mathbf{1}^t \mathbf{1} = n$ gilt.

Der kleinste Quadrate Schätzer der Regressionskonstanten $\hat{\alpha}_0$ ist mit dem Wissen aus den Grundlagen der Linearen Regression gegeben durch

$$\hat{\alpha}_0 = \mathbb{E}[X_{n+1}] - \hat{\alpha}_1 \mathbb{E}[X_1] - \dots - \hat{\alpha}_n \mathbb{E}[X_n] = \mu_0 - \mu_0 \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_i$$

und vereinfacht sich mit den Definitionen zu

$$\hat{\alpha}_0 = \mu_0 - \mu_0 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_s^t \mathbf{1}.$$

Fassen wir also die Lösungen für den Schätzer der Regressionskonstanten und der Regressionskoeffizienten in (4.4) zusammen, erhalten wir für den Schätzer kleinsten mittleren quadratischen Fehlers \hat{X}_{n+1} :

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_{n+1} &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_s^t \mathbf{X} \\
 &= (\mu_0 - \mu_0 \hat{\boldsymbol{\alpha}}_s^t \mathbf{1}) + \hat{\boldsymbol{\alpha}}_s^t \mathbf{X} \\
 &= \left(\mu_0 - \frac{\mu_0}{n+K} \mathbf{1}^t \mathbf{1} \right) + \frac{1}{n+K} \mathbf{1}^t \mathbf{X} \\
 &= \left(\mu_0 - \frac{\mu_0}{n+K} n \right) + \frac{1}{n+K} n \bar{X} \\
 &= \left(\frac{\mu_0(n+K)}{n+K} - \frac{n\mu_0}{n+K} \right) + \frac{n\bar{X}}{n+K} \\
 &= \left(\mu_0 - \frac{n\mu_0}{n+K} \right) + \frac{n\bar{X}}{n+K} \\
 &= \left(1 - \frac{n}{n+K} \right) \mu_0 + \frac{n}{n+K} \bar{X}
 \end{aligned}$$

Als bester Schätzer ergibt sich also

$$\hat{X}_{n+1} = (1 - Z)\mu_0 + Z\bar{X},$$

wobei wir

$$Z = \frac{n}{n + K}$$

und

$$K := \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]} = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}$$

definiert haben. □

Betrachten wir die äußere Form des Credibility Schätzers $P^{\text{cred}} = \hat{X}_{n+1} = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu_0$ noch einmal genauer, insbesondere die Auswirkungen des Schätzers bei sich verändernden Strukturparametern: Es gilt

$$Z = \frac{n}{n + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}},$$

weshalb folgt:

$$Z \rightarrow 1, \text{ wenn } \mu_{\text{PV}}^2 \rightarrow 0 \text{ oder } \sigma_{\text{HM}}^2 \rightarrow \infty$$

Verläuft das Credibility Gewicht Z gegen 1, bedeutet dies nichts anderes, als, dass dem Wert \bar{X} , also der individuellen Beobachtung, volle Glaubwürdigkeit zugeschrieben wird und der Credibility Schätzer mehr und mehr auf der individuellen Beobachtung basiert. Dies macht im Hinblick auf μ_{PV}^2 und σ_{HM}^2 auch Sinn: Existiert nahezu keine Schwankung innerhalb der individuellen Beobachtungen, was die Variable μ_{PV}^2 per Definition durch Streben gegen 0 beschreibt, soll der Schätzer auf selbigen Beobachtungen basieren. Existiert außerdem eine hohe Varianz zu Beobachtungen anderer Risiken, was die Variable σ_{HM}^2 per Definition durch Streben gegen Unendlich beschreibt, wird ebenfalls mehr Wert auf individuelle Beobachtungen durch ein hohes Credibility Gewicht gelegt.

$$Z \rightarrow 0, \text{ wenn } \mu_{\text{PV}}^2 \rightarrow \infty \text{ oder } \sigma_{\text{HM}}^2 \rightarrow 0$$

Im Umkehrschluss sind analoge Interpretationen möglich im Hinblick darauf, dass mehr Wert auf das Kollektivmittel μ_0 bei der Bestimmung des Credibility Schätzers gelegt wird.

Wir können allerdings auch den quadratischen Verlust des Credibility Schätzers für

Interpretationen anhand der gegebenen Variablen und Konstanten heranziehen. Um den quadratischen Verlust von P^{cred} zu bestimmen, betrachten wir das

Theorem 27. Der quadratische Verlust von $P^{\text{col}} = \mu_0$ ist gegeben durch

$$\mathcal{R}(\mu_0) = \mathbb{V}[\mu(\Theta)].$$

Der quadratische Verlust von \bar{X} ist gegeben durch

$$\mathcal{R}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)].$$

Beweis. Die Ergebnisse folgen direkt durch Einsetzen in die Verlustfunktion:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mu_0) &= \mathbb{E}[(\mu_0 - \mu(\Theta))^2] \\ &= \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\bar{X}) &= \mathbb{E}[(\bar{X} - \mu(\Theta))^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \mu(\Theta)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j - \mu(\Theta)\right)^2 \middle| \Theta\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2} \left(\sum_{j=1}^n (X_j - \mu(\Theta))\right)^2 \middle| \Theta\right] \middle| \Theta\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2} n \mathbb{V}[X_i | \Theta]\right] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] \end{aligned}$$

□

Nun ergibt sich schließlich der

Satz 28. Der quadratische Verlust des Credibility Schätzers P^{cred} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(P^{\text{cred}} - \mu(\Theta))^2] &= (1 - Z) \cdot \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \\ &= Z \cdot \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{n} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta) - P^{\text{cred}})^2 \right] &= \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta) - Z\bar{X} - (1-Z)\mu_0)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta) + Z\mu(\Theta) - Z\mu(\Theta) - Z\bar{X} - (1-Z)\mu_0)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(Z\mu(\Theta) + (1-Z)\mu(\Theta) - Z\bar{X} - (1-Z)\mu_0)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(Z(\mu(\Theta) - \bar{X}) + (1-Z)(\mu(\Theta) - \mu_0))^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(Z(\mu(\Theta) - \bar{X}))^2 \right] + \mathbb{E} \left[2Z(1-Z)(\mu(\Theta) - \bar{X})(\mu(\Theta) - \mu_0) \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[((1-Z)(\mu(\Theta) - \mu_0))^2 \right] \\
 &= Z^2 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta) - \bar{X})^2 \right] + (1-Z)^2 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta) - \mu_0)^2 \right] \\
 &= Z^2 \mathcal{R}(\bar{X}) + (1-Z)^2 \mathcal{R}(\mu_0) \\
 &= Z^2 \frac{1}{n} \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] + (1-Z)^2 \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \\
 &= \left(\frac{n}{n + \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}} \right)^2 \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{n} + \left(\frac{\frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}}{n + \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}} \right)^2 \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \\
 &= \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{n + \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}} = Z \cdot \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{n} \\
 &= \frac{\frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}}{n + \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\mathbb{V}[\mu(\Theta)]}} = (1-Z) \cdot \mathbb{V}[\mu(\Theta)]
 \end{aligned}$$

□

Vergleichen wir noch einmal die Güte der Schätzer, die wir bisher eingeführt haben, indem wir deren quadratische Verluste betrachten:

Im vorherigen Kapitel haben wir festgestellt, dass der Bayes Schätzer angewandt auf die Betrachtung des Schadensvektors \mathbf{X} einen quadratischen Verlust hat in Höhe von

$$\mathbb{E}[\mathbb{V}(\mu(\Theta)) | \mathbf{X}].$$

Der quadratische Verlust des Schätzers für die kollektive Prämie μ_0 beträgt laut Theorem 27

$$\mathbb{V}[\mu(\Theta)].$$

Zudem haben wir gerade gesehen, dass der Credibility Schätzer einen quadratischen Verlust von

$$(1-Z) \mathbb{V}[\mu(\Theta)]$$

aufweist. Da $0 \leq Z \leq 1$ fällt sofort ins Auge, dass der quadratische Verlust des Credibility Schätzers stets geringer ist, als der des Schätzers für das kollektive Mittel.

Wir haben bereits gesehen, dass bei höheren Schwankungen innerhalb der individuellen Beobachtungen oder bei geringer Varianz zu Beobachtungen anderer Risiken die Abhängigkeit vom Kollektivmittel bei der Bestimmung des Credibility Schätzers steigt. Dies schlägt sich durch ein gegen 0 strebendes Credibility Gewicht nieder. Steigt aber die Abhängigkeit des Schätzers vom kollektiven Mittel, folgt auch direkt, dass dessen quadratischer Verlust sich näher an den des kollektiven Mittels annähert, was im Vergleich von $\mathbb{V}[\mu(\Theta)]$ zu $(1 - Z) \mathbb{V}[\mu(\Theta)]$ erkennbar ist, da bei sinkendem Z $1 - Z$ gegen 1 strebt und somit

$$(1 - Z) \mathbb{V}[\mu(\Theta)] \longrightarrow \mathbb{V}[\mu(\Theta)].$$

Aus Theorem 16 und Satz 28 folgt außerdem direkt, dass der quadratische Verlust des Credibility Schätzers stets größer gleich dem des Bayes Schätzers ist. Dies scheint im ersten Augenblick enttäuschend zu sein, da wir uns erhofft hatten, den Credibility Schätzer als einfachsten und besten Schätzer zu deklarieren. Da wir jedoch beim Credibility Schätzer auf Vorwissen über Schadensverteilungen und Strukturfunktion verzichten können, und lediglich vergangene Schadensverläufe zur Berechnung hinzuziehen, ist der Unterschied mit Hinblick auf den Aufwand der Berechnungen für den Bayes Schätzer verkraftbar. Natürlich nähert sich der quadratische Verlust des Bayes Schätzers umso näher dem des Credibility Schätzers an, desto linearer der Bayes Schätzer vom bisherigen Schadensverlauf X abhängt.

Kapitel 5

Das einfache Bühlmann-Modell

5.1 Modelleinführung

Bisher haben wir nur einzelne Risiken mit ihren eigenen Verlustmaßverlauf \mathbf{X} betrachtet und für diese den bestmöglichen individuellen Schätzer bestimmt. Bühlmann verallgemeinert in seinem Modell diese Situation: In der Realität hat man üblicherweise ein ganzes Portfolio mit ähnlichen Risiken gegeben, die, in einem Kollektiv zusammengefasst, alle einen Beobachtungsvektor an Verlustmaßen produzieren. Wir konzentrieren uns erneut auf die Schadenshöhe als Verlustmaß und kommen analog zu Kapitel 4 zu folgenden Notationen und Annahmen:

Angenommen wir haben ein Kollektiv bestehend aus R Risiken gegeben. Zur Vereinfachung gehen wir davon aus, dass alle Risiken zum selben Zeitpunkt in die Versicherung eingetreten sind (diese Annahme wird später noch verallgemeinert). Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{X}^{(i)} = \left(X_1^{(i)}, \dots, X_n^{(i)} \right)$$

den bisherigen Schadensverlauf des i -ten Risikos, wobei $1 \leq i \leq R$. Das Risikoprofil ϑ_i des i -ten Risikos sei eine Realisierung der Zufallsvariablen Θ_i .

Annahmen 29 (einfaches Bühlmann Modell). Für die Zufallsvariablen $X_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq n$ im Gesamtschadensverlauf $\mathbf{X}^{(i)}$ des i -ten Risikos, $1 \leq i \leq R$ gelten:

▷ **bedingte Unabhängigkeit**

bedingt unter $\Theta_i = \vartheta_i$ sind die Zufallsvariablen $X_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, n$) unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F_{ϑ_i} und den bedingten Momenten

$$\mu(\Theta_i) = \mathbb{E} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i = \vartheta_i \right] < \infty$$

$$\sigma^2(\Theta_i) = \mathbb{V} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i = \vartheta_i \right] < \infty$$

▷ **Unabhängigkeit der Risiken**

Die Paare $(\Theta_1, X^{(1)}), \dots, (\Theta_R, X^{(R)})$ der R Individuen seien unabhängig identisch verteilt.

▷ **Verteilung Parameterraum**

Θ_i ist für $1 \leq i \leq R$ eine Zufallsvariable mit Verteilung gemäß $U(\vartheta_i)$.

Weiterhin halten wir fest, dass

$$\begin{aligned} P_i^{\text{ind}} &= \mu(\Theta_i) = \mathbb{E} \left[X_{n+1}^{(i)} \mid \Theta_i \right] \\ P^{\text{col}} &= \mu_0 = \int_{\vartheta \in \Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta), \end{aligned}$$

wobei

$$\Theta = \bigcup_{i=1}^R \Theta_i$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\mu(\Theta_i)] &= \mathbb{V} \left[\mathbb{E} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] := \sigma_{\text{HM}}^2 & \forall 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq R \\ \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{V} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] := \mu_{\text{PV}}^2 & \forall 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq R \end{aligned}$$

5.2 Der inhomogene Credibility Schätzer

Wie auch zuvor wollen wir uns auf Schätzer beschränken, die linear vom Beobachtungsvektor abhängen. Da wir aber nun eine ganze Reihe von Beobachtungsvektoren für jedes Risiko gegeben haben, soll der Schätzer für jedes Risiko sowohl linear von seinem, als auch von den Beobachtungsvektoren der anderen Risiken abhängen. Wir lösen das Problem im folgenden im Gegensatz zum Vorgehen aus Kapitel 4 nicht per Regressionsansatz, sondern mit partiellen Ableitungen.

Satz 30. *Der inhomogene Credibility Schätzer im einfachen Bühlmann Modell ist gegeben durch*

$$P_{inhom}^{cred} = \widehat{\mu(\Theta_i)} = Z\bar{X}_i + (1 - Z)\mu_0,$$

wobei

$$Z = \frac{n}{n + K} \quad K = \frac{\sigma_{HM}^2}{\mu_{PV}^2} \quad \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^{(i)}.$$

Beweis. Wir suchen also einen Schätzer unter allen Schätzern, die linear von den Beobachtungsvektoren aller Risiken abhängen. Somit muss er der Klasse

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}, 1) := \left\{ \widehat{\mu(\Theta_i)} : \widehat{\mu(\Theta_i)} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(k)} X_j^{(k)} \mid \alpha_0, \alpha_j^{(k)} \in \mathbb{R} \right\} \quad (5.1)$$

entstammen. Sprich er hat die Form

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = \hat{\alpha}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j^{(k)} X_j^{(k)},$$

wobei die reellen Koeffizienten $\hat{\alpha}_j^{(k)}$ das Minimierungsproblem

$$\mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \hat{\alpha}_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j^{(k)} X_j^{(k)} \right)^2 \right] = \min_{\substack{\alpha_j^{(k)} \in \mathbb{R} \\ 1 \leq k \leq R \\ 1 \leq j \leq n}} \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(k)} X_j^{(k)} \right)^2 \right]$$

lösen. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der $X_j^{(k)}$ für festes k identisch sind, kann aufgrund dieser Invarianz angenommen werden, dass

$$\hat{\alpha}_1^{(k)} = \dots = \hat{\alpha}_n^{(k)} := \hat{b}_k^{(i)}$$

gilt. Demzufolge reduziert sich die notwendige Form des Schätzers zu

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = \hat{\alpha}_0^{(i)} + \sum_{k=1}^R \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k$$

mit

$$\bar{X}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^{(k)}$$

und das Minimierungsproblem zu

$$\mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \hat{\alpha}_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R \hat{b}_k^{(i)} \bar{X}_k \right)^2 \right] = \min_{\substack{\alpha_0^{(i)}, b_k^{(i)} \in \mathbb{R} \\ 1 \leq k \leq R}} \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right)^2 \right]$$

Jetzt betrachten wir die partiellen Ableitungen nach $\alpha_0^{(i)}$ und $b_l^{(i)}$, $1 \leq l \leq R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_0^{(i)}} \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(k)} X_j^{(k)} \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[-2 \left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial}{\partial b_l^{(i)}} \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(k)} X_j^{(k)} \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[-\bar{X}_l \left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \right] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Es folgen die Äquivalenzumformungen für ein $1 \leq l \leq R$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[-2 \left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \right] &= 0 \\ \mathbb{E} \left[-\bar{X}_l \left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E} [\bar{X}_k] \cdot \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \right] &= 0 \\ \mathbb{E} [\bar{X}_l] \cdot \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der 1. von der 2. Gleichung und Ausmultiplikation folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [\bar{X}_l \cdot \mu(\Theta_i)] - \mathbb{E} [\bar{X}_l] \alpha_0^{(i)} - \mathbb{E} \left[\bar{X}_l \sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right] \\ &- \mathbb{E} [\bar{X}_k] \mathbb{E} [\mu(\Theta_i)] + \alpha_0^{(i)} \mathbb{E} (\bar{X}_k) + \mathbb{E} (\bar{X}_k) \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right] \\ &= \mathbb{E} [\bar{X}_l \cdot \mu(\Theta_i)] - \mathbb{E} [\bar{X}_l] \mathbb{E} [\mu(\Theta_i)] - b_l^{(i)} \left[\mathbb{E} (\bar{X}_l^2) - b_l^{(i)} \mathbb{E} (\bar{X}_l)^2 \right] \\ &- \left(\mathbb{E} \left[\bar{X}_l \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right] - \mathbb{E} [\bar{X}_l] \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^R b_k^{(i)} \bar{X}_k \right] \right) \end{aligned}$$

$$= CoV[\bar{X}_l, \mu(\Theta_i)] - b_l^{(i)} \mathbb{V}[\bar{X}_l] \stackrel{!}{=} 0$$

denn für $k \neq l$ sind \bar{X}_k und \bar{X}_l unabhängig nach den Voraussetzungen, weshalb der letzte Klammersausdruck verschwindet. Ebenso folgt für $l \neq i$, dass $CoV(\bar{X}_l, \mu(\Theta_i))$ aufgrund von Unabhängigkeit verschwindet, selbiges muss also für $b_l^{(i)} \mathbb{V}[\bar{X}_l]$ gelten, damit weiterhin die Nullgleichheit gilt. Dies folgt aber gerade aus der Annahme der Unabhängigkeit der Risiken. Demzufolge ist die bereinigte Forderung

$$CoV[\bar{X}_i, \mu(\Theta_i)] = b_i^{(i)} \mathbb{V}[\bar{X}_i], \quad (5.2)$$

d.h. wir haben für das i -te Risiko nur eine Abhängigkeit von den Schadensbeobachtungen des i -ten Risikos:

$$\mathbb{E}[\mu(\Theta_i) - \alpha_0^{(i)} - b_i^{(i)} \bar{X}_i]. \quad (5.3)$$

Mit den Modellvoraussetzungen

$$\begin{aligned} CoV[\bar{X}_i, \mu(\Theta_i)] &= \mathbb{V}[\mu(\Theta_i)] = \sigma_{\text{HM}}^2 \\ \mathbb{V}[\bar{X}_i] &= \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)]}{n} + \mathbb{V}[\mu(\Theta_i)] = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{n} + \sigma_{\text{HM}}^2 \end{aligned}$$

folgt direkt durch Einsetzen für (5.3) und (5.2)

$$\begin{aligned} b_i^{(i)} &= \frac{\sigma_{\text{HM}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2 + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{n}} = \frac{n}{n + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}} \\ \alpha_0^{(i)} &= (1 - b_i^{(i)}) \mu_0 \end{aligned}$$

Damit folgt die bereits bekannte Form für den inhomogenen Credibility Schätzer im einfachen Bühlmann Modell

$$P_{\text{inhom}}^{\text{cred}} = \widehat{\mu(\Theta_i)} = Z \bar{X}_i + (1 - Z) \mu_0,$$

wobei

$$Z = \frac{n}{n + K} \quad K = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}.$$

□

Wir stellen also fest, dass trotz Berücksichtigung aller Beobachtungsvektoren aller R Risiken der individuelle Teil des inhomogenen Credibility Schätzers im einfachen Bühlmann Modell für ein einzelnes Risiko trotzdem nur auf den Beobachtungen des

einzelnen Risikos basiert. Die Beobachtungsvektoren der anderen Risiken gehen hierbei lediglich in das kollektive Mittel μ_0 ein. Die Unterscheidung von Berücksichtigung vom Beobachtungsvektor $\mathbf{X}^{(i)}$ nur eines Risikos und allen Beobachtungen aller Risiken $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(R)})$ ist also hinfällig im Vergleich zum Credibility Schätzer aus Kapitel 4.

5.3 Der homogene Credibility Schätzer

Betrachten wir den inhomogenen Credibility Schätzer genau, stellen wir fest, dass durch den Summand $(1-Z)\mu_0$ ein konstanter Term Einfluss auf den Schätzer hat, der gewisse Annahmen über das Kollektivmittel fordert. Da wir aber jederzeit bestrebt sind, unsere Modelle und somit unsere Schätzer möglichst allgemein zu halten, ist es sinnvoll, diesen Term ebenfalls durch einen vom Beobachtungsvektor linear abhängigen Term zu ersetzen. Sinnvoll erscheint hier das Ersetzen von μ_0 durch das Gesamt-Kollektivmittel

$$\bar{X} := \frac{1}{Rn} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n X_j^{(i)}.$$

Im Gegenzug zu dieser Verallgemeinerung müssen wir allerdings eine weitere Annahme über die zugelassenen Schätzer treffen: Sie müssen erwartungstreu sein. Zudem fällt der konstante Term α_0 weg. Im Gegensatz zum Raum (5.1) ergibt sich also der neue Raum für mögliche homogene Schätzer

$$\mathcal{L}_e(\mathbf{X}) := \left\{ \overline{\mu(\Theta_i)} : \overline{\mu(\Theta_i)} = \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} X_j^{(k)} \mid \mathbb{E}[\overline{\mu(\Theta_i)}] = \mathbb{E}[\mu(\Theta_i)], \beta_j^{(k)} \in \mathbb{R} \right\}. \quad (5.4)$$

Der homogene Credibility Schätzer hat also die Form

$$\overline{\mu(\Theta_i)} = \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_j^{(k)} X_j^{(k)},$$

wobei die reellen Koeffizienten $\hat{\beta}_j^{(k)}$ das Minimierungsproblem

$$\mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_j^{(k)} X_j^{(k)} \right)^2 \right] = \min_{\substack{\beta_j^{(k)} \in \mathbb{R} \\ 1 \leq k \leq R \\ 1 \leq j \leq n}} \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} X_j^{(k)} \right)^2 \right]$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} = 1$$

lösen, denn die Forderung nach Erwartungstreue führt zu

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\overline{\mu(\Theta_i)} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} X_j^{(k)} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} \mathbb{E} X_j^{(k)} \\
 &= \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)} \mathbb{E} [\mu(\Theta_i)] \\
 &= \mathbb{E} [\mu(\Theta_i)] \sum_{k=1}^R \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Analog zum Beweis zum inhomogenen Schätzer ergibt sich der

Satz 31. Der homogene Credibility Schätzer definiert durch $P_{hom}^{cred} := \overline{\mu(\Theta_i)}$ ist gegeben durch

$$P_{hom}^{cred} = \overline{\mu(\Theta_i)} = Z \bar{X}_i + (1 - Z) \bar{X},$$

wobei

$$Z = \frac{n}{n + K} \quad K = \frac{\sigma_{HM}^2}{\mu_{PV}^2} \quad \bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^{(i)} \quad \bar{X} = \frac{1}{nR} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n X_j^{(i)}.$$

Kapitel 6

Die verallgemeinerte Credibility Schätzung

6.1 Die letzte Verallgemeinerung

Auf dem Weg zur bestmöglichen Verallgemeinerung in der Credibility Theorie im Bühlmann-Straub Modell, sind wir nun an dem Punkt angekommen, an dem wir unsere Annahmen über den Beobachtungsvektor und die zu schätzende Größe lockern wollen.

Bisher war meistens die individuelle Prämie der nächsten Periode die interessant zu schätzende Größe, gegeben durch $\mu(\Theta_i)$. Hierzu haben wir zumeist die Schadensbeobachtung - ausgedrückt durch \mathbf{X} - ausgenutzt und ferner angenommen, dass die Wahrscheinlichkeitsstruktur bekannt ist und die individuellen Schadenshöhen $X_j^{(i)}$ bedingt unter Θ_i unabhängig identisch verteilt seien für alle $1 \leq i \leq R$ und $1 \leq j \leq n$.

Im Folgenden wollen wir nur noch annehmen, dass wir eine unbekannt reellwertige Zufallsvariable $g(\Theta)$ auf Basis einiger bekannter Zufallsvariablen $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$, welche wir nur noch als allgemeines *Verlustmaß* bezeichnen wollen, schätzen wollen. Hierzu verallgemeinern wir auch die Räume der zulässigen Schätzer (5.1) und (5.4):

Definition 32. Der Schätzer aus der Menge

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1}) := \left\{ \widehat{g(\Theta)} : \widehat{g(\Theta)} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j V_j \mid \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}, \quad (6.1)$$

der das Schätzproblem für $g(\Theta)$ durch Minimierung des quadratischen Risikos

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{g(\Theta)} - g(\Theta) \right)^2 \right]$$

minimiert, heißt **inhomogener Credibility Schätzer** und wird mit $\widehat{g(\Theta)}$ bezeichnet.

Der Schätzer aus der Menge

$$\mathcal{L}_e(\mathbf{V}) := \left\{ \widehat{g(\Theta)} : \widehat{g(\Theta)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j V_j \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}; \mathbb{E}[\widehat{g(\Theta)}] = \mathbb{E}[g(\Theta)] \right\}, \quad (6.2)$$

der das Schätzproblem für $g(\Theta)$ durch Minimierung des quadratischen Risikos minimiert, heißt **homogener Credibility Schätzer** und wird mit $\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}}$ bezeichnet. Falls kein erwartungstreuer Schätzer gemäß (7.4) existiert, ist $\mathcal{L}_e(\mathbf{V})$ leer und $\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}}$ existiert nicht.

6.2 Credibility Schätzer als orthogonale Projektion

Anhand der oben gemachten Definition kann man das Schätzproblem für die Zufallsvariable $g(\Theta)$ am einfachsten mithilfe Projektionen in Hilberträumen darstellen. Hierzu eine kleine Einführung:

Definition 33. Ein **Hilbertraum** H ist ein bezüglich der induzierten Norm vollständiger Vektorraum über \mathbb{R} , in dem ein **Skalarprodukt** gilt, d.h. eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- **Bilinearität**

$$\begin{aligned} \langle \alpha x + \beta y, z \rangle &= \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \\ \langle x, \alpha y + \beta z \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

- **Symmetrie**

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in H,$$

- **positive Definitheit**

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

Eine **Norm** bezeichnet hierbei eine Abbildung $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften

- **Definitheit**

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall x \in H,$$

- absolute Homogenität

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in H, \alpha \in \mathbb{R},$$

- Subadditivität

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Wir wollen diese Definitionen nun in unserem allgemein gehaltenen Modell anwenden. Hierzu definieren wir

$$\mathcal{L}^2 := \{Z : Z \text{ ist Zufallsvariable mit } \mathbb{E}[Z^2] < \infty\}.$$

$(\mathcal{L}^2, +, \cdot)$ ist dann offensichtlich ein Vektorraum, was wir nicht nachrechnen wollen. Definieren wir auf diesem Raum für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}^2$ das Skalarprodukt

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}[XY],$$

damit

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \langle X - \mathbb{E}X, Y - \mathbb{E}Y \rangle$$

und die zugehörige Norm

$$\|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Durch die Norm ergibt sich die Metrik

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\mathbb{E}[(X - Y)^2]},$$

wodurch wir zwei Elemente $X, Y \in \mathcal{L}^2$ als **identisch** bezeichnen, wenn

$$d(X, Y) = 0 = \mathbb{E}[(X - Y)^2]$$

gilt. Durch die so definierten Abbildungen wird der Vektorraum $(\mathcal{L}^2, +, \cdot)$ zu einem vollständigen Vektorraum über \mathbb{R} mit Skalarprodukt und Norm, also einem Hilbertraum.

Wir definieren weiter:

Definition 34. Eine Teilmenge \mathcal{M} von \mathcal{L}^2 heißt **affiner Unterraum**, wenn ein $Z \in \mathcal{L}^2$

und ein Untervektorraum $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ von \mathcal{L}^2 existiert, sodass

$$\mathcal{M} = Z + \mathcal{M}_{\mathcal{M}}.$$

Definition 35. Zwei Elemente $X, Y \in \mathcal{L}^2$ heißen **orthogonal zueinander** ($X \perp Y$), wenn für ihr Skalarprodukt gilt

$$\langle X, Y \rangle = 0.$$

Für $Y \in \mathcal{L}^2$ und einen abgeschlossenen oder affinen Unterraum $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}^2$ von \mathcal{L}^2 ist die **orthogonale Projektion** von Y auf \mathcal{M} durch ein $Y^* \in \mathcal{M}$ gegeben, wenn

$$Y - Y^* \perp \mathcal{M}$$

gilt, i.e.

$$Y - Y^* \perp M_1 - M_2 \quad \forall M_1, M_2 \in \mathcal{M},$$

bzw.

$$\langle Y - Y^*, M_1 - M_2 \rangle = 0.$$

Für die **orthogonale Projektion von Y auf \mathcal{M}** schreiben wir dann

$$Y^* = \text{Pr}(Y|\mathcal{M}).$$

Es gilt der folgende

Satz 36. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $Y^* = \text{Pr}(Y|\mathcal{M})$

(ii) $Y^* \in \mathcal{M}$ und $\langle Y - Y^*, M - Y^* \rangle = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}$

(iii) $Y^* \in \mathcal{M}$ und $\|Y - Y^*\| \leq \|Y - M\| \quad \forall M \in \mathcal{M}$,

d.h. die orthogonale Projektion von Y auf \mathcal{M} existiert immer (ii) und ist eindeutig (iii). Falls es sich bei \mathcal{M} um einen nicht-affinen Unterraum handelt, vereinfacht sich (ii) zu

(ii)' $Y^ \in \mathcal{M}$ und $\langle Y - Y^*, M \rangle = 0 \quad \forall M \in \mathcal{M}$.*

Teilaussage (iii) zeigt uns insbesondere, dass - gegeben eine Projektion $Y^* = \text{Pr}(Y|\mathcal{M})$ von Y auf \mathcal{M} - Y^* den Abstand

$$d(Y, \mathcal{M}) = \|Y - Y^*\| = \sqrt{\mathbb{E}[(Y - Y^*)^2]}$$

über alle $M \in \mathcal{M}$ minimiert. Dies wird uns noch bei unserer Darstellung im Schätzproblem weiterhelfen!

Zum Abschluss der Einführung über Hilberträume und Projektionen erhalten wir noch zwei Sätze, die wir ohne Beweis geben wollen:

Satz 37. *Seien \mathcal{M} und \mathcal{N} abgeschlossene oder affine Unterräume vom Hilbertraum \mathcal{L}^2 mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Dann gelten für $Y \in \mathcal{L}^2$*

$$(i) \quad \Pr(Y|\mathcal{M}) = \Pr(\Pr(Y|\mathcal{N})|\mathcal{M})$$

$$(ii) \quad \|Y - \Pr(Y|\mathcal{M})\|^2 = \|Y - \Pr(Y|\mathcal{N})\|^2 + \|\Pr(Y|\mathcal{N}) - \Pr(Y|\mathcal{M})\|^2$$

Satz 38 (Linearität von Projektionen).

(i) *Sei \mathcal{M} ein abgeschlossener linearer Unterraum vom Hilbertraum \mathcal{L}^2 . Dann gilt für $X, Y \in \mathcal{L}^2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$\Pr(\alpha X + \beta Y|\mathcal{M}) = \alpha \Pr(X|\mathcal{M}) + \beta \Pr(Y|\mathcal{M}). \quad (6.3)$$

(ii) *Sei \mathcal{N} ein affiner linearer Unterraum vom Hilbertraum \mathcal{L}^2 . Dann gilt für $X, Y \in \mathcal{L}^2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$\Pr((\alpha + \beta)^{-1}(\alpha X + \beta Y)|\mathcal{N}) = (\alpha + \beta)^{-1} [\alpha \Pr(X|\mathcal{N}) + \beta \Pr(Y|\mathcal{N})] \quad (6.4)$$

Um dies alles nun auf unser Schätzproblem anzuwenden, stellen wir fest, dass sowohl unser zu schätzende Zufallsvariable $g(\Theta)$, als auch die Beobachtungsvektoreinträge V_j von \mathbf{V} für alle $1 \leq j \leq n$ Elemente des Raumes \mathcal{L}^2 sind. Um Aussagen über Projektionen dieser Elemente zu treffen, benötigen wir nun noch entsprechende abgeschlossene Unterräume \mathcal{M} von \mathcal{L}_2 .

Zuerst fallen uns die Räume $\mathcal{L}(\mathbf{V}, 1)$ und $\mathcal{L}_e(\mathbf{V})$ aus Definition 32 ein. Hierbei handelt es sich bei $\mathcal{L}(\mathbf{V}, 1)$ tatsächlich um einen abgeschlossenen, und bei $\mathcal{L}_e(\mathbf{V})$ um einen abgeschlossenen affinen Unterraum von \mathcal{L}^2 . Ferner definieren wir uns den Raum

$$\mathcal{G}(\mathbf{V}) := \{ Z : Z = g(\mathbf{V}) \mid g \text{ reell \& } \mathbb{E}[g(\mathbf{V})^2] < \infty \}.$$

Dass es sich hierbei um einen abgeschlossenen Unterraum von \mathcal{L}^2 handelt, ist sofort klar.

Nun können wir endlich eine alternative Darstellung unseres Schätzproblems für $g(\mathbf{V})$ durch Projektionen vornehmen, indem wir uns an den Ergebnissen der inhomogenen und homogenen Credibility Schätzer und dem Bayeschätzer aus Kapitel 3 und 5 orientieren. Hierzu nutzen wir zentral aus, dass in der Anwendung unserer Schätzung der Metrikabstand dem quadratischen Bayes-Risiko entspricht (vergleiche Anfang dieses Kapitels).

Definition 39. Wollen wir die Funktion $g(\Theta)$ schätzen, so ergeben sich mögliche Schätzer durch

- den Bayes Schätzer von $g(\Theta)$ basierend auf \mathbf{V} durch

$$g(\Theta)^* := \Pr(g(\Theta), \mathcal{G}(\mathbf{V})). \quad (6.5)$$

- den inhomogenen Credibility Schätzer von $g(\Theta)$ basierend auf \mathbf{V} durch

$$\overline{\overline{g(\Theta)}} := \Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})). \quad (6.6)$$

- den homogenen Credibility Schätzer von $g(\Theta)$ basierend auf \mathbf{V} durch

$$\overline{\overline{g(\Theta)}}^{\text{hom}} := \Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}_e(\mathbf{V})). \quad (6.7)$$

Abschließend wollen wir nun noch einige Aussagen über die Güte dieser Schätzer treffen:

Theorem 40. Es gelten

- (i) Unter den linearen Schätzern $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$ ist der inhomogene Credibility Schätzer $\overline{\overline{g(\Theta)}}$ die beste lineare Approximation des Bayes-Schätzers $g(\Theta)^*$.
- (ii) Unter den homogenen Schätzern $\mathcal{L}_e(\mathbf{V})$ ist der homogene Credibility Schätzer $\overline{\overline{g(\Theta)}}^{\text{hom}}$ die beste lineare Approximation des Credibility Schätzers $\overline{\overline{g(\Theta)}}$ und die des Bayes-Schätzers $g(\Theta)^*$.

(iii)

$$\underbrace{\mathbb{E} \left[\left(\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta) \right)^2 \right]}_{\text{Gesamtabw. Cred.Schätzer}} = \underbrace{\mathbb{E} \left[\left(\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta)^* \right)^2 \right]}_{\text{approx. Abweichung}} + \underbrace{\mathbb{E} \left[\left(g(\Theta)^* - g(\Theta) \right)^2 \right]}_{\text{Bayes Risiko}}$$

Beweis.

(i) Da $\mathcal{G}(\mathbf{V})$ und $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$ abgeschlossene Unterräume von \mathcal{L}^2 mit $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1}) \subset \mathcal{G}(\mathbf{V})$ sind, gilt aus Definition 39 und Satz 37 (i) direkt, dass

$$\begin{aligned}\overline{\overline{g(\Theta)}} &= \Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})) \\ &= \Pr(\Pr(g(\Theta) | \mathcal{G}(\mathbf{V})) | \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})) \\ &= \Pr(g(\Theta)^* | \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1}))\end{aligned}$$

(ii) Da $\mathcal{G}(\mathbf{V})$, $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$ und $\mathcal{L}_e(\mathbf{V})$ abgeschlossene Unterräume von \mathcal{L}^2 mit $\mathcal{L}_e(\mathbf{V}) \subset \mathcal{G}(\mathbf{V})$ und $\mathcal{L}_e(\mathbf{V}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$ sind, gilt aus Definition 39 und Satz 37 (i) direkt, dass

$$\begin{aligned}\overline{\overline{g(\Theta)}}^{\text{hom}} &= \Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}_e(\mathbf{V})) \\ &= \Pr(\Pr(g(\Theta) | \mathcal{G}(\mathbf{V})) | \mathcal{L}_e(\mathbf{V})) \\ &= \Pr(g(\Theta)^* | \mathcal{L}_e(\mathbf{V}))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{g(\Theta)}}^{\text{hom}} &= \Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}_e(\mathbf{V})) \\ &= \Pr(\Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})) | \mathcal{L}_e(\mathbf{V})) \\ &= \Pr\left(\overline{\overline{g(\Theta)}} \middle| \mathcal{L}_e(\mathbf{V})\right)\end{aligned}$$

(iii) Aus Satz 37 (ii) folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta)\right)^2\right] &= \left\|\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta)\right\|^2 \\ &= \|\Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})) - g(\Theta)\|^2 \\ &= \|\Pr(g(\Theta) | \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})) - \Pr(g(\Theta) | \mathcal{G}(\mathbf{V}))\|^2 \\ &\quad + \|\Pr(g(\Theta) | \mathcal{G}(\mathbf{V})) - g(\Theta)\|^2 \\ &= \left\|\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta)^*\right\|^2 + \|g(\Theta)^* - g(\Theta)\|^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta)^*\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[(g(\Theta)^* - g(\Theta))^2\right]\end{aligned}$$

□

Letztlich zeigt uns Theorem 40 wieder, dass wir durch Einschränkungen gewisser Voraussetzungen verschiedene optimale Schätzer unter den Zulässigen erhalten. Wir wollen stets das Funktional $g(\Theta)$ schätzen. Im allgemeinsten Raum aller reellen, quadratintegrierbaren Funktionale $\mathcal{G}(\mathbf{V})$ ist der Bayes Schätzer $g(\Theta)^*$ noch der beste Schätzer mit Hinblick auf den quadratischen Verlust. Das folgt aus Teilaussage (iii). Beschränken wir uns auf vom Beobachtungsvektor linear abhängigen Funktionale $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$, gelangen wir zum inhomogenen Schätzer $\overline{\overline{g(\Theta)}}$ (siehe (i)), schränken wir weiter ein auf erwartungstreue, vom Beobachtungsvektor linear abhängige Funktionale $\mathcal{L}_e(\mathbf{V})$, erhalten wir den homogenen Schätzer $\overline{\overline{g(\Theta)}}^{\text{hom}}$ (siehe (ii)) als besten Schätzer. Wir stehen letztlich wieder vor dem selben Problem aus dem Ende von Kapitel 4, indem wir feststellen müssen, dass wir einen gewissen Kompromiss zwischen Einfachheit in der Berechnung (durch Wahl eines Credibility Schätzers (homogen oder inhomogen) bei Vernachlässigung von Schadensverteilungen / Strukturfunktion) und Präzision (durch aufwendige Berechnungen der a priori / a posteriori Verteilungen für den Bayes Schätzer) des - im Hinblick auf den quadratischen Verlust - besten Schätzer für unser Funktional eingehen müssen. Wollen wir uns mit den Schätzern insofern zufrieden geben, dass wir Wert auf Einfachheit bei minimalen Modellvoraussetzungen legen, erhalten wir im folgenden Kapitel ein Kriterium zur Bestimmung des optimalen Credibility Schätzers.

6.3 Orthogonalitätsbedingungen für Schätzer

Wie wir im vorherigen Kapitel festgestellt haben, können wir unser Bewertungsproblem für $g(\Theta)$ über Projektionen auf Hilberträumen bzw. deren Unterräumen darstellen. Mit den oben gemachten Annahmen und Definitionen sind wir nun in der Lage einzuschätzen, ob es sich bei einem vorliegenden Schätzer um einen inhomogenen oder homogenen Credibility Schätzer handelt. Zunächst betrachten wir den inhomogenen Credibility Schätzer:

Theorem 41 (Orthogonalitätsbedingung für inhomogene Credibility Schätzer). Sei $\overline{\overline{g(\Theta)}} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$. Dann ist $\overline{\overline{g(\Theta)}}$ ein inhomogener Credibility Schätzer für $g(\Theta)$ basierend auf dem Beobachtungsvektor $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), \mathbf{1} \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), V_j \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Beweis. Wir haben in Satz 36 festgestellt, dass der inhomogene Credibility Schätzer, gegeben durch die Projektion aus Definition 39 $\Pr(g(\Theta), \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1}))$, genau dann existiert, wenn

$$\left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), \mathbf{V} \right\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1}),$$

da es bei $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$ um einen nicht affinen abgeschlossenen Unterraum von \mathcal{L}^2 handelt und wir so Bedingung (ii)' aus dem Satz anwenden können. Da $(1, V_1, \dots, V_n)$ eine Basis von $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$ ist, muss obige Gleichung also lediglich für diesen Basisvektor gelten, da es dann für alle $\mathbf{V} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$ gilt. Eingesetzt für \mathbf{V} sind dies aber eben die oben geforderten Bedingungen. \square

Durch dieses Theorem erhalten wir auch noch eine andere Darstellung unserer Bedingungen, die sogenannten *Normalgleichungen*.

Folgerung 42 (Normalgleichung für inhomogene Credibility Schätzer). *Sei $\overline{\overline{g(\Theta)}} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{1})$. Dann ist $\overline{\overline{g(\Theta)}}$ ein inhomogener Credibility Schätzer für $g(\Theta)$ basierend auf dem Beobachtungsvektor $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ genau dann, wenn folgende normale Gleichungen erfüllt sind:*

$$\mathbb{E} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta) \right] = 0 \quad \text{und} \quad \text{CoV} [g(\Theta), V_j] = \text{CoV} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}}, V_j \right] \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Beweis. Aus Theorem 41 folgt, dass wir einen inhomogenen Credibility Schätzer vorliegen haben genau dann, wenn

$$\left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), \mathbf{1} \right\rangle = 0$$

gilt. Dann folgt durch Einsetzen mit dem Skalarprodukt direkt

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), \mathbf{1} \right\rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E} \left[\left(\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta) \right) \cdot \mathbf{1} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbb{E} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Nun zum zweiten, für den wir ebenfalls analog Theorem 41 ausnutzen. Dementsprechend liegt ein inhomogener Credibility Schätzer vor, wenn auch

$$\left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), V_j \right\rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

erfüllt ist. Dann folgen die Äquivalenzumformungen für alle $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), V_j \right\rangle &= 0 \\
 \Leftrightarrow & \left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), V_j \right\rangle - \mathbb{E}V_j \left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), 1 \right\rangle &= 0 \\
 \Leftrightarrow & \left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), V_j - \mathbb{E}V_j \right\rangle &= 0 \\
 \Leftrightarrow & \left\langle \left(\overline{\overline{g(\Theta)}} - \mathbb{E}V_j \right) - (g(\Theta) - \mathbb{E}V_j), V_j - \mathbb{E}V_j \right\rangle &= 0 \\
 \Leftrightarrow & \left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - \mathbb{E}V_j, V_j - \mathbb{E}V_j \right\rangle - \langle g(\Theta) - \mathbb{E}V_j, V_j - \mathbb{E}V_j \rangle &= 0 \\
 \Leftrightarrow & \text{CoV} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}}, V_j \right] - \text{CoV} [g(\Theta), V_j] &= 0
 \end{aligned}$$

wobei wir die oben eingeführten Skalarprodukteigenschaften und die erste Bedingung

$$\left\langle \overline{\overline{g(\Theta)}} - g(\Theta), 1 \right\rangle = 0$$

benutzt haben. □

In unser speziellen Anwendung der linear aufgebauten Schätzer erhalten wir sogar noch konkreter direkt durch Einsetzen:

Folgerung 43. *Ist der inhomogene Credibility Schätzer gegeben durch die lineare Form*

$$\overline{\overline{g(\Theta)}} = \hat{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k V_k,$$

so ergeben sich die Normalgleichungen für $j = 1, \dots, n$ zu

$$\mathbb{E}V_k - \hat{\alpha}_0 - \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k \mathbb{E}V_k = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k \text{CoV} [V_k, V_j] = \text{CoV} [g(\Theta), V_j].$$

Außerdem folgt

$$\mathbb{V} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}} \right] = \text{CoV} \left[g(\Theta), \overline{\overline{g(\Theta)}} \right].$$

Beweis. Ersteres folgt direkt durch Einsetzen der linearen Form von $\overline{\overline{g(\Theta)}}$. Letzteres gilt, denn

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}} \right] &= \text{CoV} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}}, \hat{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k V_k \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k \text{CoV} \left[\overline{\overline{g(\Theta)}}, V_k \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k \text{CoV}[g(\Theta), X_k] \\
 &= \text{CoV}\left[g(\Theta), \hat{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^n \hat{\alpha}_k V_k\right] \\
 &= \text{CoV}\left[g(\Theta), \widehat{g(\Theta)}\right],
 \end{aligned}$$

wobei wir die zweite Normalgleichung benutzt haben und, dass der konstante Term $\hat{\alpha}_0$ in der Kovarianz keine Rolle spielt. \square

Ähnliche Aussagen können wir nun auch für den homogenen Credibility Schätzer treffen, ohne, dass wir auf die Beweise eingehen wollen, da es sich um analoges Vorgehen handelt:

Theorem 44 (Orthogonalitätsbedingung für homogene Credibility Schätzer). Sei $\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}} \in \mathcal{L}_e(\mathbf{V})$. Dann ist $\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}}$ ein homogener Credibility Schätzer für $g(\Theta)$ basierend auf dem Beobachtungsvektor $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
 &\left\langle \widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}} - g(\Theta), 1 \right\rangle \\
 &\quad \text{und} \\
 &\left\langle g(\Theta) - \widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}}, \widehat{g(\Theta)} - \widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}} \right\rangle = 0 \quad \forall \widehat{g(\Theta)} \in \mathcal{L}_e(\mathbf{V}).
 \end{aligned}$$

Da es sich bei $\mathcal{L}_e(\mathbf{V})$ lediglich um einen affinen Unterraum handelt, ist eine Darstellung über einen Basisvektor leider nicht möglich, sondern die Bedingung muss über alle Elemente des Raumes gefordert werden. Dies schlägt sich auch in der Normalgleichung nieder:

Folgerung 45 (Normalgleichung für homogene Credibility Schätzer). Sei $\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}} \in \mathcal{L}_e(\mathbf{V})$. Dann ist $\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}}$ ein homogener Credibility Schätzer für $g(\Theta)$ basierend auf dem Beobachtungsvektor $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_n)$ genau dann, wenn folgende normale Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}\left[\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}} - g(\Theta)\right] = 0 \\
 &\quad \text{und} \\
 &\text{CoV}\left[\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}} - g(\Theta), \widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}}\right] = \text{CoV}\left[\widehat{g(\Theta)}^{\text{hom}} - g(\Theta), \widehat{g(\Theta)}\right] \quad \forall \widehat{g(\Theta)} \in \mathcal{L}_e(\mathbf{V}).
 \end{aligned}$$

Kapitel 7

Das Bühlmann-Straub Modell

In diesem Kapitel wollen wir die zuvor erhaltenen Erkenntnisse über Credibility Schätzer als orthogonale Projektionen von Hilberträumen anwenden. Wir betrachten hierzu das Modell von Bühlmann und Straub, das eine Verallgemeinerung des Modells von Bühlmann darstellt.

Neben der allgemeinen Betrachtung eines Verlustmaßes, in unserem Fall bisher immer $X_j^{(i)}$, wollen wir im Folgenden eine weitere Variable einführen, die unser bisheriges Modell erweitern soll. Dabei handelt es sich um das zu $X_j^{(i)}$ gehörige *Volumenmaß* $m_j^{(i)}$, welches verschiedene Interpretationen haben kann: Schlichterweise kann es einfach die Anzahl der Schäden darstellen, die zum Schaden $X_j^{(i)}$ geführt haben. Auch kann es sich dabei um die Anzahl der Risiken, die in einer Periode j zum Schaden $X_j^{(i)}$ beitragen, handeln. Die Interpretationen sind vielschichtig.

Da die Schadenshöhe zur Prämienberechnung zumeist die interessante Größe ist, betrachten wir im Folgenden selbige als Verlustmaß V . Sie lässt sich aber auch durch andere Verlustmaße ersetzen.

7.1 Modelleinführung

Angenommen, wir haben $R \geq 1$ Versicherungsblöcke (einzelne Individuen oder ganze Risikoklassen) mit jeweiligen Volumenmaß $m_j^{(i)}$, wobei $1 \leq i \leq R$ und $1 \leq j \leq n$, gegeben. Aus Beobachtungen ergebe sich der Beobachtungsvektor des Verlustmaßes für jedes $1 \leq i \leq R$ von

$$\mathbf{S}^{(i)} = (S_1^{(i)}, \dots, S_n^{(i)}),$$

wobei in diesem Fall $S_j^{(i)}$ der in der j -ten Periode beobachtete aggregierte Verlust des i -ten Versicherungsblocks ist. Die durchschnittliche Schadenshöhe pro Volumenmaß

des i -ten Blockes ergibt sich dann im j -ten Jahr zu

$$X_j^{(i)} = S_j^{(i)} / m_j^{(i)}.$$

Zur besseren Veranschaulichung betrachten wir wieder unseren Spezialfall, dass nur Risiken betrachtet werden, die über eine ganze Periode versichert sind, so sei $m_j^{(i)}$ eine natürliche Zahl, welche die Anzahl der Risiken im i -ten Versicherungsblock im j -ten Jahr bezeichnet. Die durchschnittliche Schadenshöhe des i -ten Blockes ergibt sich dann im j -ten Jahr zu

$$X_j^{(i)} = \frac{1}{m_j^{(i)}} \sum_{\nu=1}^{m_j^{(i)}} S_j^{(i)(\nu)},$$

wobei $S_j^{(i)(\nu)}$ die aggregierte Schadenshöhe des ν -ten Risikos im i -ten Versicherungsblock in Periode j bezeichnet mit

$$S_j^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{m_j^{(i)}} S_j^{(i)(\nu)}.$$

Mithilfe dieser Definitionen und Notationen können wir also nun für eine ganze Klasse von Risiken in einem Versicherungsblock die durchschnittliche Schadenshöhe $X_j^{(i)}$ untersuchen und sie mit anderen (aus anderen Blöcken) vergleichen und ggf. neue Risiken einem passenden Block zuordnen. Wir kommen schließlich zu folgenden

Annahmen 46 (Bühlmann-Straub Modell). Für die Zufallsvariablen $X_j^{(i)}$, $1, \leq j \leq n$ im durchschnittlichen Gesamtschadensverlauf $\mathbf{X}^{(i)}$ des i -ten Versicherungsblockes, $1 \leq i \leq R$ gelten:

▷ **bedingte Unabhängigkeit**

bedingt unter $\Theta_i = \vartheta_i$ sind die Zufallsvariablen $X_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, n$) unabhängig (nicht zwangsweise identisch) verteilt mit den bedingten Momenten

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i \right] &= \mu(\Theta_i) < \infty \\ \mathbb{V} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i \right] &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{m_j^{(i)}} \end{aligned}$$

▷ **Unabhängigkeit der Blöcke**

Die Paare $(\Theta_1, \mathbf{X}^{(1)}), \dots, (\Theta_R, \mathbf{X}^{(R)})$ der R Versicherungsblöcke sind unabhängig

▷ **Verteilung Parameterraum**

Θ_i seien für $1 \leq i \leq R$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilung gemäß $U(\vartheta_i)$.

Da $X_j^{(i)}$ ein Durchschnittswert ist, scheint es sinnvoll, dass auch dessen Varianz vom Normierungswert, der sich in unserem Fall durch das Volumenmaß darstellt, abhängt. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left[X_j^{(i)}\right] &= \mathbb{V}\left[\frac{1}{m_j^{(i)}} \sum_{\nu=1}^{m_j^{(i)}} S_j^{(i)(\nu)}\right] \\ &= \frac{1}{m_j^{(i)2}} \mathbb{V}\left[\sum_{\nu=1}^{m_j^{(i)}} S_j^{(i)(\nu)}\right] \\ &= \frac{1}{m_j^{(i)2}} m_j^{(i)} \mathbb{V}\left[S_j^{(i)(k)}\right] \\ &= \frac{1}{m_j^{(i)}} \mathbb{V}\left[S_j^{(i)(k)}\right] \end{aligned}$$

für ein $k = 1, \dots, m_j^{(i)}$. Für die spätere Herleitung der Schätzer machen wir noch einige

Bezeichnungen 47. Das gewichtete Mittel des durchschnittlichen Schadens des i -ten Versicherungsblock ist gegeben durch

$$\bar{X}^{(i)} = \frac{1}{m_{\Sigma}^{(i)}} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} X_j^{(i)},$$

wobei

$$m_{\Sigma}^{(i)} = \sum_{j=1}^n m_j^{(i)}$$

das **Gesamt-Volumenmaß für Versicherungsblock i** bezeichnet. Weiterhin bezeichnen wir

$$\begin{aligned} P_i^{\text{ind}} &= \mu(\Theta_i) = \mathbb{E}\left[X_{n+1}^{(i)} \mid \Theta\right] \\ P^{\text{col}} &= \mu_0 = \int_{\vartheta \in \Theta} \mu(\Theta) dU(\Theta), \end{aligned}$$

wenn

$$\Theta = \bigcup_{i=1}^R \Theta_i$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left[\mathbb{E}\left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i\right]\right] &= \mathbb{V}[\mu(\Theta_i)] := \sigma_{HM}^2 & \forall 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq R \\ \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i\right]\right] &= \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)]}{m_\Sigma^{(i)}} := \frac{\mu_{PV}^2}{m_\Sigma^{(i)}} & \forall 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq R. \end{aligned}$$

7.2 Homogener vs. inhomogene Schätzer

Um nun die passenden Credibility Schätzer für unser letztes Modell zu finden, wollen wir - wie bereits erwähnt - die zuvor gewonnenen Erkenntnisse über Credibility Schätzer als orthogonale Projektionen in Hilberträumen ausnutzen. Wir beginnen mit dem inhomogenen Credibility Schätzer:

In unserem Fall der verursachten Schäden wollen wir also den reinen Prämienbeitrag $\mu(\Theta_i)$ für jeden der R Versicherungsblöcke basierend auf den Beobachtungsvektoren aller Versicherungsblöcke schätzen. $\mu(\Theta_i)$ entspricht hierbei der allgemeinen Funktion $g(\Theta)$, die es zu schätzen gilt. Als Anwendung der Folgerung 42 ergibt sich der

Satz 48 (inhomogener Credibility Schätzer im Bühlmann-Straub Modell). *Der inhomogene Credibility Schätzer im Bühlmann-Straub Modell ist gegeben durch*

$$\overline{\overline{\mu(\Theta_i)}} = Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \mu_0,$$

wobei

$$Z^{(i)} = \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)} + K} \quad K = \frac{\mu_{PV}^2}{\sigma_{HM}^2}.$$

Beweis. Gemäß Theorem 41 müssen wir die Orthogonalitätsbedingungen zeigen. Dies erledigen wir über die Normalgleichungen aus Folgerung 42. Es muss also gelten für alle $1 \leq i \leq R$:

$$\mathbb{E}\left[\overline{\overline{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i)\right] = 0 \quad \text{und} \quad \text{CoV}\left[\mu(\Theta_i), X_j^{(i)}\right] = \text{CoV}\left[\overline{\overline{\mu(\Theta_i)}}, X_j^{(i)}\right] \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Für die erste Bedingung gilt:

$$\mathbb{E}\left[\overline{\overline{\mu(\Theta_i)}} - \mu(\Theta_i)\right] = \mathbb{E}\left[Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \mu_0 - \mu(\Theta_i)\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= Z^{(i)} \mathbb{E} [\bar{X}^{(i)}] + (1 - Z^{(i)}) \mathbb{E} \mu_0 - \mathbb{E} [\mu(\Theta_i)] \\
 &= Z^{(i)} \mu_0 + (1 - Z^{(i)}) \mu_0 - \mu_0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung zeigen wir in zwei Schritten: Zunächst leiten wir den Credibility Schätzer derart her, dass er nur auf den Beobachtungen des zu betrachtenden Risikos abhängt und zeigen anschließend, dass dies auch der Credibility Schätzer ist, der auf allen Beobachtungen aller Risiken basiert:

1. Schritt: Risikoblock i : Abhängigkeit nur von $\mathbf{X}^{(i)}$

Demzufolge muss der Credibility Schätzer die Form

$$\overline{\mu(\Theta_i)} = Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \mu_0$$

haben. Für die 2. Normalgleichung muss dann gelten:

$$\begin{aligned}
 \text{CoV} \left[\overline{\mu(\Theta_i)}, \bar{X}^{(i)} \right] &= \text{CoV} \left[Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \mu_0, \bar{X}^{(i)} \right] \\
 &= Z^{(i)} \text{CoV} \left[\bar{X}^{(i)}, \bar{X}^{(i)} \right] \\
 &= Z^{(i)} \mathbb{V} \left[\bar{X}^{(i)} \right] \stackrel{!}{=} \text{CoV} \left[\mu(\Theta_i), \bar{X}^{(i)} \right] \\
 \Leftrightarrow Z^{(i)} &= \frac{\text{CoV} \left[\mu(\Theta_i), \bar{X}^{(i)} \right]}{\mathbb{V} \left[\bar{X}^{(i)} \right]} \tag{7.1}
 \end{aligned}$$

Es gilt aber (vgl. Annahmen 46)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{V} \left[\bar{X}^{(i)} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{V} \left[\bar{X}^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] + \mathbb{V} \left[\mathbb{E} \left[\bar{X}^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] \\
 &= \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} + \sigma_{\text{HM}}^2 \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

und nach den Rechenregeln für die Kovarianz

$$\begin{aligned}
 \text{CoV} \left[\mu(\Theta_i), \bar{X}^{(i)} \right] &= \mathbb{E} \left[\text{CoV} \left[\mu(\Theta_i), \bar{X}^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] + \text{CoV} \left[\mu(\Theta_i), \mathbb{E} \left[\bar{X}^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] \\
 &= 0 + \mathbb{V} \left[\mu(\Theta_i) \right] \\
 &= \mathbb{V} \left[\mathbb{E} \left[\bar{X}^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] = \mu_{\text{PV}}^2.
 \end{aligned}$$

Aus der Normalgleichung (7.1) oben folgt dann, dass

$$Z^{(i)} = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} + \sigma_{\text{HM}}^2} = \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{(i)} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}} = \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{(i)} + K}$$

gelten muss.

2. Schritt: Risikoblock i : Abhängigkeit von allen $\mathbf{X}^{(k)}$, $1 \leq k \leq R$

Wir müssen wieder die 2. Normalgleichung zeigen. Diese hat aufgrund der Abhängigkeit von allen Risikobeobachtungen die Form

$$CoV\left[\overline{\mu(\Theta_i)}, X_j^{(i)}\right] \stackrel{!}{=} CoV\left[\mu(\Theta_i), X_j^{(i)}\right] \stackrel{s.o.}{=} \mu_{PV}^2 \quad (7.3)$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} CoV\left[\overline{\mu(\Theta_i)}, X_j^{(i)}\right] &= Z^{(i)} \left(\sum_k \frac{m_k^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} CoV\left[X_k^{(i)}, X_j^{(i)}\right] \right) \\ &= Z^{(i)} \left(\sum_k \frac{m_k^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} \left(\frac{\mu_{PV}^2}{m_k^{(i)}} \delta_{kj} + \sigma_{HM}^2 \right) \right) \\ &= Z^{(i)} \left(\sum_k \frac{m_k^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} \sigma_{HM}^2 + \frac{\mu_{PV}^2}{m_\Sigma^{(i)}} \right) \\ &= \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)} + \frac{\mu_{PV}^2}{\sigma_{HM}^2}} \left(\sum_k \frac{m_k^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} \sigma_{HM}^2 + \frac{\mu_{PV}^2}{m_\Sigma^{(i)}} \right) \\ &= \mu_{PV}^2, \end{aligned}$$

indem wir in der zweiten Gleichung (7.2) angewandt haben, und anschließend, dass die Zufallsvariablen $X_k^{(i)}$ und $X_j^{(i)}$ für $k \neq j$ unabhängig voneinander sind. Damit wäre (7.3) gezeigt.

□

Um den quadratischen Verlust vom inhomogenen Credibility Schätzer im Bühlmann-Straub Modell zu bestimmen, betrachten wir das

Theorem 49. Der quadratische Verlust von μ_0 ist gegeben durch

$$\mathcal{R}(\mu_0) = \sigma_{HM}^2.$$

Der quadratische Verlust von $\bar{X}^{(i)}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{R}(\bar{X}^{(i)}) = \frac{\mu_{PV}^2}{m_\Sigma^{(i)}}.$$

Beweis. Es gelten:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mu_0) &= \mathbb{E}[(\mu_0 - \mu(\Theta_i))^2] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbb{E}[\mu(\Theta_i) - \mu(\Theta_i)])^2] \\ &= \mathbb{V}[\mu(\Theta_i)] = \sigma_{HM}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\bar{X}^{(i)}) &= \mathbb{E}[(\bar{X}^{(i)} - \mu(\Theta_i))^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{m_\Sigma^{(i)}} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{m_\Sigma^{(i)}} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i)\right)^2 \middle| \Theta_i\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{1}{m_\Sigma^{(i)^2}} \left(\sum_{j=1}^n (X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i))\right)^2 \middle| \Theta_i\right] \middle| \Theta_i\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{m_\Sigma^{(i)}} m_\Sigma^{(i)} \mathbb{V}[X_j^{(i)} | \Theta_i]\right] \\ &= \frac{1}{m_\Sigma^{(i)}} \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)] = \frac{\mu_{PV}^2}{m_\Sigma^{(i)}}\end{aligned}$$

□

Nun ergibt sich der

Satz 50. *Der quadratische Verlust des inhomogenen Credibility Schätzers im Bühlmann-Straub Modell ist*

$$\mathbb{E}\left[\left(\overline{\mu(\Theta_i)} - \mu(\Theta_i)\right)^2\right] = (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 = Z^{(i)} \frac{\mu_{PV}^2}{m_\Sigma^{(i)}}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\mu(\Theta_i) - \overline{\mu(\Theta_i)}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[(\mu(\Theta_i) - Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} - (1 - Z^{(i)}) \mu_0)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(\mu(\Theta_i) + Z^{(i)} \mu(\Theta_i) - Z^{(i)} \mu(\Theta_i) - Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} - (1 - Z^{(i)}) \mu_0)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Z^{(i)} \mu(\Theta_i) + (1 - Z^{(i)}) \mu(\Theta_i) - Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} - (1 - Z^{(i)}) \mu_0)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Z^{(i)} (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)}) + (1 - Z^{(i)}) \mu(\Theta_i - \mu_0))^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Z^{(i)} (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)}))^2\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbb{E} \left[2Z^{(i)} (1 - Z^{(i)}) (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)}) (\mu(\Theta_i) - \mu_0) \right] \\
& + \mathbb{E} \left[((1 - Z^{(i)}) (\mu(\Theta_i) - \mu_0))^2 \right] \\
& = Z^{(i)2} \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)})^2 \right] + (1 - Z^{(i)})^2 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - \mu_0)^2 \right] \\
& = Z^{(i)2} \mathcal{R}(\bar{X}^{(i)}) + (1 - Z^{(i)})^2 \mathcal{R}(\mu_0) \\
& = Z^{(i)2} \frac{1}{m_{\Sigma}^{(i)}} \mu_{\text{PV}}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \sigma_{\text{HM}}^2 \\
& = \left(\frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{(i)} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}} \right)^2 \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} + \left(\frac{\frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}}{m_{\Sigma}^{(i)} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}} \right)^2 \sigma_{\text{HM}}^2 \\
& = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}} = Z^{(i)} \cdot \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} \\
& = \frac{\frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}}{m_{\Sigma}^{(i)} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}} = (1 - Z^{(i)}) \cdot \sigma_{\text{HM}}^2
\end{aligned}$$

□

Kommen wir zum homogenen Credibility Schätzer im Bühlmann-Straub Modell: Da dieser keinen konstanten Term mehr enthalten darf (μ_0), stellt sich die Darstellung des homogenen Credibility Schätzers in einer anderen Weise dar. In Theorem 40 haben wir gesehen, dass dann für unseren Fall gelten muss:

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \Pr \left(\widehat{\mu(\Theta_i)} \mid \mathcal{L}_e(\mathbf{X}) \right)$$

wobei

$$\mathcal{L}_e(\mathbf{X}) := \left\{ \widehat{\mu(\Theta)} : \widehat{\mu(\Theta)} = \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(i)} X_j^{(i)} \mid \alpha_j^{(i)} \in \mathbb{R}; \mathbb{E}[\widehat{\mu(\Theta)}] = \mathbb{E}[\mu(\Theta)] \right\} \quad (7.4)$$

die Menge aller möglichen Linearkombinationen aus den Beobachtungen aller Versicherungsblöcke ist mit Bedingung, dass der Schätzer erwartungstreu ist. Aus Satz 38 ergibt sich dann, dass $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$ die folgende Form hat:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} & = \Pr \left(\widehat{\mu(\Theta_i)} \mid \mathcal{L}_e(\mathbf{X}) \right) \\
& = \Pr \left(Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \mu_0 \mid \mathcal{L}_e(\mathbf{X}) \right) \\
& = Z^{(i)} \Pr \left(\bar{X}^{(i)} \mid \mathcal{L}_e(\mathbf{X}) \right) + (1 - Z^{(i)}) \Pr \left(\mu_0 \mid \mathcal{L}_e(\mathbf{X}) \right)
\end{aligned} \quad (7.5)$$

Wir erkennen bereits, dass $\bar{X}^{(i)}$ in $\mathcal{L}_e(\mathbf{X})$ liegt: Die Linearität aus den Beobachtungen

ist klar und für die Erwartungstreue gilt

$$\mathbb{E}[\bar{X}^{(i)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\bar{X}^{(i)} | \Theta_i]] = \mathbb{E}[\mu(\Theta_i)] = \mu_0.$$

Es gilt also

$$\Pr(\bar{X}^{(i)} | \mathcal{L}_e(\mathbf{X})) = \bar{X}^{(i)},$$

weshalb sich (7.5) reduziert zu

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \Pr(\mu_0 | \mathcal{L}_e(\mathbf{X})). \quad (7.6)$$

Nun benötigen wir noch einen Schätzer für μ_0 , der selbigen Wert auf $\mathcal{L}_e(\mathbf{X})$ projiziert. Hierzu folgende

Proposition 51. *Im Bühlmann-Straub Modell ist ein Schätzer $\widehat{\mu}_0$ für μ_0 gegeben durch*

$$\widehat{\mu}_0 = \Pr(\mu_0 | \mathcal{L}_e(\mathbf{X})) = \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \bar{X}^{(i)}$$

mit

$$\begin{aligned} Z^{(i)} &= \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)} + K} \\ Z_\Sigma &= \sum_{i=1}^R Z_\Sigma^{(i)} \\ Z_\Sigma^{(i)} &= \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_j^{(i)} + K} \end{aligned}$$

Beweis. Ähnlich zum Vorgehen aus dem Beweis von Satz 48 suchen wir einen Schätzer $\widehat{\mu}_0$ für μ_0 , der sich durch

$$\widehat{\mu}_0 = \Pr(\mu_0 | \mathcal{L}_e(X^{(1)}, \dots, X^{(R)})) \quad (7.7)$$

darstellt und zeigen dann, dass

$$\widehat{\mu}_0 = \widehat{\mu}_0^{\text{hom}} = \Pr(\mu_0 | \mathcal{L}_e(\mathbf{X})) \quad (7.8)$$

gilt.

1. Schritt: Abhängigkeit nur von $\bar{X}^{(1)}, \dots, \bar{X}^{(R)}$

Wir betrachten als mögliche Lösung

$$\widehat{\mu}_0 = \sum_{i=1}^R \alpha^{(i)} \bar{X}^{(i)} = \Pr(\mu_0 | \mathcal{L}_e(\bar{X}^{(1)}, \dots, \bar{X}^{(r)}))$$

Gemäß der Orthogonalitätsbedingung muss dann gelten

$$\begin{aligned} \mu_0 - \widehat{\mu}_0 & \perp \bar{X}_m - \bar{X}_n & \forall s, t \in \{1, \dots, R\} \\ \Leftrightarrow \langle \mu_0 - \widehat{\mu}_0, \bar{X}^{(s)} - \bar{X}^{(t)} \rangle & = 0 & \forall s, t \in \{1, \dots, R\} \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[(\mu_0 - \widehat{\mu}_0)(\bar{X}^{(s)} - \bar{X}^{(t)})] & = 0 & \forall s, t \in \{1, \dots, R\} \\ \Leftrightarrow \text{Cov}[\widehat{\mu}_0, \bar{X}^{(s)}] & = \text{Cov}[\widehat{\mu}_0, \bar{X}^{(t)}] & \forall s, t \in \{1, \dots, R\} \end{aligned}$$

Da aber

$$\text{Cov}[\widehat{\mu}_0, \bar{X}^{(s)}] = \sum_{i=1}^R \alpha^{(i)} \text{Cov}[\bar{X}^{(i)}, \bar{X}^{(s)}] = \alpha^{(s)} \mathbb{V}[\bar{X}^{(s)}],$$

da die $X^{(i)}$ unabhängig sind, d.h. bei $s \neq t$ $\text{Cov}[\bar{X}^{(s)}, \bar{X}^{(t)}] = 0$ gilt; folgt

$$\text{Cov}[\widehat{\mu}_0, \bar{X}^{(s)}] = \text{Cov}[\widehat{\mu}_0, \bar{X}^{(t)}] \quad \forall s, t \in \{1, \dots, R\},$$

also

$$\alpha^{(i)} \mathbb{V}[\bar{X}^{(i)}] = \text{const} \quad \forall i = 1, \dots, R,$$

d.h. die Faktoren $\alpha^{(i)}$ sind invers proportional zur Varianz von $\bar{X}^{(i)}$. Betrachten wir die Varianz genauer, ergibt sich aus dem bekannten Resultat über die Varianz von $\bar{X}^{(i)}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\bar{X}^{(i)}] & = \sigma_{\text{HM}}^2 + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} \\ & = \sigma_{\text{HM}}^2 \left(\frac{m_{\Sigma}^{(i)} \sigma_{\text{HM}}^2 + \mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)} \sigma_{\text{HM}}^2} \right) \\ & = \sigma_{\text{HM}}^2 Z^{(i)-1} \end{aligned}$$

Für den Schätzer muss also unter Berücksichtigung von $\sum_{i=1}^R \alpha^{(i)} = 1$, dass

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_0 & = \sum_{i=1}^R \alpha^{(i)} \bar{X}^{(i)} \\ & = \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \bar{X}^{(i)} \end{aligned}$$

2. Schritt: Abhängigkeit von allen Linearkombinationen aus $\mathbf{X} \Rightarrow \widehat{\mu}_0 = \widehat{\mu}_0$

Auch hier benutzen wir unsere Orthogonalitätsbedingungen. Wir müssen laut Folgerung 42 zeigen, dass

$$\mathbb{E}[\widehat{\mu}_0 - \mu_0] = 0$$

und

$$CoV[\widehat{\mu}_0 - \mu_0, \widehat{\mu}_0] = CoV[\widehat{\mu}_0 - \mu_0, \widehat{\mu}] \quad \forall \widehat{\mu} \in \mathcal{L}_e(\mathbf{X}).$$

Ersteres folgt aus

$$\mathbb{E}[\bar{X}^{(i)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\bar{X}^{(i)} | \Theta_i]] = \mathbb{E}[\mu(\Theta_i)] = \mu_0,$$

denn dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widehat{\mu}_0 - \mu_0] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^R \alpha^{(i)} \bar{X}^{(i)} - \mu_0\right] \\ &= \mathbb{E}[\bar{X}^{(i)}] - \mu_0 = 0 \end{aligned}$$

wegen $\sum_{i=1}^R \alpha^{(i)} = 1$. Für die zweite Forderung betrachten wir

$$\begin{aligned} CoV[\widehat{\mu}_0 - \mu_0, \widehat{\mu}_0] &= CoV[\widehat{\mu}_0, \widehat{\mu}_0] \\ &= \mathbb{V}[\widehat{\mu}_0] \\ &= \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \bar{X}^{(i)}\right] \\ &= \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)^2}}{Z_\Sigma^2} \mathbb{V}[\bar{X}^{(i)}] \\ &= \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)^2}}{Z_\Sigma^2} \sigma_{HM}^2 Z^{(i)^{-1}} \\ &= \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma^2} \sigma_{HM}^2 \\ &= \frac{\sigma_{HM}^2}{Z_\Sigma^2} \sum_{i=1}^R Z^{(i)} = \frac{\sigma_{HM}^2}{Z_\Sigma} \end{aligned}$$

Für den anderen Teil der Gleichung betrachte ein beliebiges $\widehat{\mu} \in \mathcal{L}_e(\mathbf{X})$, was sich darstellen lässt durch

$$\widehat{\mu} = \sum_{s=1}^R \sum_{t=1}^n \frac{\alpha_t^{(s)}}{\alpha_\Sigma^{(s)}} X_t^{(s)}.$$

Der Normierungsterm $\frac{\alpha_t^{(s)}}{\alpha_\Sigma^{(s)}}$ gewährleistet uns hierbei die Erwartungstreue, die in

$\mathcal{L}_e(\mathbf{X})$ gefordert ist. Damit gilt für die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
 \text{CoV}[\widehat{\mu}_0 - \mu_0, \widehat{\mu}] &= \text{CoV}[\widehat{\mu}_0, \widehat{\mu}] \\
 &= \text{CoV}\left[\sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \bar{X}^{(i)}, \sum_{s=1}^R \sum_{t=1}^n \frac{\alpha_t^{(s)}}{\alpha_\Sigma} X_t^{(s)}\right] \\
 &= \text{CoV}\left[\sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} X_j^{(i)}, \sum_{s=1}^R \sum_{t=1}^n \frac{\alpha_t^{(s)}}{\alpha_\Sigma} X_t^{(s)}\right] \\
 &= \text{CoV}\left[\sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} X_j^{(i)}, \sum_{t=1}^n \frac{\alpha_t^{(i)}}{\alpha_\Sigma} X_t^{(i)}\right] \\
 &= \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} \sum_{t=1}^n \frac{\alpha_t^{(i)}}{\alpha_\Sigma} \text{CoV}[X_j^{(i)}, X_t^{(i)}] \\
 &= \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} \left[\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^n \frac{\alpha_t^{(i)}}{\alpha_\Sigma} \sigma_{\text{HM}}^2 + \frac{\alpha_j^{(i)}}{\alpha_\Sigma} \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_j^{(i)}} \right] \\
 &= \sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} \frac{\alpha_\Sigma^{(i)}}{\alpha_\Sigma} + \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_\Sigma^{(i)}} \frac{\alpha_\Sigma^{(i)}}{\alpha_\Sigma} \\
 &= \sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)} \alpha_\Sigma^{(i)}}{Z_\Sigma \alpha_\Sigma} + \sum_{i=1}^R \frac{1}{Z_\Sigma} \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_\Sigma^{(i)} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}} \frac{\alpha_\Sigma^{(i)}}{\alpha_\Sigma} \\
 &= \sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)} \alpha_\Sigma^{(i)}}{Z_\Sigma \alpha_\Sigma} + \sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{i=1}^R \frac{1 - Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \frac{\alpha_\Sigma^{(i)}}{\alpha_\Sigma} \\
 &= \sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)} \alpha_\Sigma^{(i)}}{Z_\Sigma \alpha_\Sigma} + \frac{\sigma_{\text{HM}}^2}{Z_\Sigma} - \sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)} \alpha_\Sigma^{(i)}}{Z_\Sigma \alpha_\Sigma} \\
 &= \frac{\sigma_{\text{HM}}^2}{Z_\Sigma}
 \end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass für $s \neq i$ die Kovarianzen aufgrund der Unabhängigkeit der Beobachtungen verschwinden. Damit gilt die geforderte Gleichheit in der Normalengleichung.

□

Es folgt der Satz für den homogenen Schätzer

Satz 52 (homogener Credibility Schätzer im Bühlmann-Straub Modell). *Der homogene Credibility Schätzer im Bühlmann-Straub Modell ist gegeben durch*

$$\widehat{\mu}(\Theta_i)^{\text{hom}} = Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \widehat{\mu}_0,$$

wobei

$$Z^{(i)} = \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{(i)} + K}, \quad K = \frac{\mu_{PV}^2}{\sigma_{HM}^2}, \quad \widehat{\mu}_0 = \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \bar{X}^{(i)}, \quad Z_{\Sigma} = \sum_{i=1}^R Z^{(i)}, \quad \bar{X}^{(i)} = \frac{1}{m_{\Sigma}^{(i)}} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} X_j^{(i)}.$$

Außerdem erhalten wir:

Theorem 53. Der quadratische Verlust des homogenen Credibility Schätzers im Bühlmann-Straub Modell ist gegeben durch

$$\mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] = \sigma_{HM}^2 (1 - Z^{(i)}) \left(1 + \frac{1 - Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \right).$$

Beweis. Wir nutzen wieder Satz 37, da wir wissen, dass

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \Pr [\Pr (\mu(\Theta_i) | \mathcal{L}(\mathbf{X}, 1) | \mathcal{L}_e(\mathbf{X}))].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)} - \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mu(\Theta_i)} - \widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} \right)^2 \right] \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + \mathbb{E} \left[\left(Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \mu_0 - Z^{(i)} \bar{X}^{(i)} - (1 - Z^{(i)}) \widehat{\mu}_0 \right)^2 \right] \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \mathbb{E} \left[\left(\mu_0 - \widehat{\mu}_0 \right)^2 \right] \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} (\bar{X}^{(i)} - \mu_0) \right)^2 \right] \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \sum_{i=1}^R \left(\frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \right)^2 \mathbb{E} \left[\left(\bar{X}^{(i)} - \mu_0 \right)^2 \right] \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \sum_{i=1}^R \left(\frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \right)^2 \left(\frac{\mu_{PV}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} + \sigma_{HM}^2 \right) \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \sum_{i=1}^R \left(\frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \right)^2 \left(\frac{\mu_{PV}^2 + m_{\Sigma}^{(i)} \sigma_{HM}^2}{m_{\Sigma}^{(i)} \sigma_{HM}^2} \right) \sigma_{HM}^2 \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \sum_{i=1}^R \left(\frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \right)^2 \frac{1}{Z^{(i)}} \sigma_{HM}^2 \\ &= (1 - Z^{(i)}) \sigma_{HM}^2 + (1 - Z^{(i)})^2 \frac{\sigma_{HM}^2}{Z_{\Sigma}} \\ &= \sigma_{HM}^2 (1 - Z^{(i)}) \left(1 + \frac{1 - Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \right) \end{aligned}$$

wobei wir den quadratischen Verlust des inhomogenen Credibility Schätzers aus Satz 50 benutzt haben. \square

7.3 Schätzen der Strukturparameter

In der Realität sind weder die Parameter μ_0, σ_{HM}^2 , noch μ_{PV}^2 bekannt, sondern müssen aus den gegebenen Daten geschätzt werden, um die Schätzer im Bühlmann-Modell oder den anderen Modellen zu berechnen. Für μ_0 haben wir bereits den erwartungstreuen Schätzer $\widehat{\mu}_0$ kennengelernt, weshalb wir uns im Folgenden nur noch auf die Schätzer für σ_{HM}^2 und μ_{PV}^2 konzentrieren wollen:

Satz 54.

(i) Ein erwartungstreuer Schätzer für μ_{PV}^2 ist gegeben durch

$$\widehat{\mu_{PV}^2} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})^2$$

(ii) Ein erwartungstreuer Schätzer für σ_{HM}^2 ist gegeben durch

$$\widehat{\sigma_{HM}^2} = \frac{\sum_{i=1}^R m_{\Sigma}^{(i)} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2 - \widehat{\mu_{PV}^2} (R-1)}{m_{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)2}}{m_{\Sigma}}}$$

wobei

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \bar{X}^{(i)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\widehat{\mu_{PV}^2} \mid \Theta_i \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})^2 \mid \Theta_i \right] \\ &= \frac{1}{R} \frac{1}{n-1} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i) + \mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)})^2 \mid \Theta_i \right] \\ &= \frac{1}{R(n-1)} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^n 2m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i)) (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)}) + m_{\Sigma}^{(i)} (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)})^2 \right) \mid \Theta_i \right] \\ &= \frac{1}{R(n-1)} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i))^2 + \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} \mu(\Theta_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu(\Theta_i) \bar{X}^{(i)} - X_j^{(i)} \bar{X}^{(i)} - \mu(\Theta_i)^2) + m_{\Sigma}^{(i)} (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)})^2 \right) \mid \Theta_i \right] \\ &= \frac{1}{R(n-1)} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i))^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2m_{\Sigma}^{(i)} (\mu(\Theta_i)^2 - 2\bar{X}^{(i)} \mu(\Theta_i) + \bar{X}^{(i)2}) + m_{\Sigma}^{(i)} (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)})^2 \right) \mid \Theta_i \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{R(n-1)} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i))^2 - m_{\Sigma}^{(i)} (\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)})^2 \right) \middle| \Theta_i \right] \\
&= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^n m_j^{(i)} \mathbb{E} \left[(X_j^{(i)} - \mu(\Theta_i))^2 \middle| \Theta_i \right] - m_{\Sigma}^{(i)} \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - \bar{X}^{(i)})^2 \middle| \Theta_i \right] \right) \\
&= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^n m_j^{(i)} \mathbb{V} \left[X_j^{(i)} \middle| \Theta_i \right] - m_{\Sigma}^{(i)} \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_{\Sigma}^{(i)^2}} m_j^{(i)} \mathbb{V} \left[X_j^{(i)} \middle| \Theta_i \right] \right) \\
&= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^n m_j^{(i)} \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{m_j^{(i)}} - \frac{1}{m_{\Sigma}^{(i)}} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)^2} \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{m_j^{(i)}} \right) \\
&= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R (n\sigma^2(\Theta_i) - \sigma^2(\Theta_i)) = \frac{1}{R(n-1)} R(n-1) \sigma^2(\Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i)
\end{aligned}$$

Dazu äquivalent ist auf beiden Seiten die Erwartungswertumformung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\widehat{\mu_{\text{PV}}^2} \middle| \Theta_i \right] \right] = \mathbb{E} \left[\sigma^2(\Theta_i) \right] \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E} \left[\widehat{\mu_{\text{PV}}^2} \right] = \mu_{\text{PV}}^2
\end{aligned}$$

Damit wäre die Erwartungstreue von $\widehat{\mu_{\text{PV}}^2}$ gezeigt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^R m_{\Sigma}^{(i)} (\bar{X}^{(i)} - \bar{\bar{X}}^{(i)})^2 - \widehat{\mu_{\text{PV}}^2} (R-1)}{m_{\Sigma}^{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}^{(i)}}} \right] \\
&= \frac{\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^R m_{\Sigma}^{(i)} (\bar{X}^{(i)} - \bar{\bar{X}}^{(i)})^2 \right] - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1)}{m_{\Sigma}^{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}^{(i)}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^R \left(m_{\Sigma}^{(i)} \mathbb{E} \left[(\bar{X}^{(i)} - \bar{\bar{X}}^{(i)})^2 \right] \right) - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1)}{m_{\Sigma}^{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}^{(i)}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^R \left(m_{\Sigma}^{(i)} \left[\mathbb{V} \left[\bar{X}^{(i)} \right] + \mathbb{V} \left[\bar{\bar{X}}^{(i)} \right] - 2Cov \left[\bar{X}^{(i)}, \bar{\bar{X}}^{(i)} \right] \right] \right) - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1)}{m_{\Sigma}^{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}^{(i)}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^R \left(m_{\Sigma}^{(i)} \left[\sigma_{\text{HM}}^2 + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} + \sum_{s=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(s)^2}}{m_{\Sigma}^{\Sigma^2}} \mathbb{V} \left[\bar{X}^{(s)} \right] - 2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{\Sigma}} \mathbb{V} \left[\bar{X}^{(i)} \right] \right] \right) - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1)}{m_{\Sigma}^{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}^{(i)}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^R \left(m_{\Sigma}^{(i)} \left[\mu_{\text{PV}}^2 + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} + \sum_{s=1}^R \left(\frac{m_{\Sigma}^{(s)^2}}{m_{\Sigma}^2} \sigma_{\text{HM}}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(s)} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2}}{m_{\Sigma}^{(i)}} \right) - 2 \left(\sigma_{\text{HM}}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}} \right) \right] \right) - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1) \\
 = & \frac{\sum_{i=1}^R \left(m_{\Sigma}^{(i)} \left[\sigma_{\text{HM}}^2 + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}^{(i)}} + \sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{s=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(s)^2}}{m_{\Sigma}^2} + \frac{\sigma_{\text{HM}}^2}{m_{\Sigma}} - 2 \left(\sigma_{\text{HM}}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(s)}}{m_{\Sigma}} + \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{m_{\Sigma}} \right) \right] \right) - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1)}{m_{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}}} \\
 = & \frac{\sigma_{\text{HM}}^2 \sum_{i=1}^R m_{\Sigma}^{(i)} \left[1 + \sum_{s=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(s)^2}}{m_{\Sigma}^2} - 2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \right] + \mu_{\text{PV}}^2 \sum_{i=1}^R m_{\Sigma}^{(i)} \left[\frac{1}{m_{\Sigma}^{(i)}} - \frac{1}{m_{\Sigma}} \right] - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1)}{m_{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}}} \\
 = & \frac{\sigma_{\text{HM}}^2 \left[m_{\Sigma} + m_{\Sigma} \sum_{s=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(s)^2}}{m_{\Sigma}^2} - 2 \sum_{i=1}^R m_{\Sigma}^{(i)} \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \right] + \mu_{\text{PV}}^2 (R-1) - \mu_{\text{PV}}^2 (R-1)}{m_{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}}} \\
 = & \frac{\sigma_{\text{HM}}^2 \left[m_{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}} \right]}{m_{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)^2}}{m_{\Sigma}}} = \sigma_{\text{HM}}^2
 \end{aligned}$$

Damit ist auch die Erwartungstreue von $\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2}$ gezeigt. □

Bemerkung. Der Schätzer für σ_{HM}^2 kann negativ werden, was bedeutet, dass es keinen beobachtbaren Unterschied zwischen den Risiken gibt. Wir definieren in diesem Fall $\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2} := 0$.

Mithilfe dieser Schätzer für die Strukturparameter können wir nun den homogenen Credibility Schätzer allein auf Basis gegebener Beobachtungsdaten bestimmen. Daher nennen wir ihn auch den *empirischen Credibility Schätzer*.

Kapitel 8

Anwendungen

Abschließend wollen wir nun die gewonnenen Ergebnisse im Bühlmann-Straub Modell auf reale Gegebenheiten praktisch anwenden. Hierbei werden wir verschiedene Verlustmaße betrachten, auf die sich die jeweiligen Ergebnisse anwenden lassen können. Als kleinen Ausblick werden wir zum Schluss auch noch unser Modell für außergewöhnlich große aufgetretene Schäden modifizieren und zeigen damit, dass es in der Realität noch einige Modellerweiterungen durch zusätzliche Einflussfaktoren geben kann.

Neben einigen Programmierbelegen im Anhang finden sich alle Berechnungen in einer Excel Tabelle auf dem beiliegenden Datenträger.

8.1 Schätzen der Schadensrate: Ein allgemeiner Fall

Aus den Jahrbüchern 2000 bis 2011 des Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft haben wir folgende Daten über den Fahrzeugbestand in Deutschland und der zugehörigen Anzahl an Schäden, die bei Versicherungen eingegangen sind - inklusive deren Gesamtschadenshöhe - gegeben, aufgeteilt nach Vollkasko-, Teilkasko- und Haftpflichtschäden:

Wir wollen im Folgenden den empirischen Credibility Schätzer mithilfe von Satz 52 in Verbindung mit Satz 54 für die Schadensrate $X := \frac{S}{m}$ der Risikoklassen *Vollkasko*, *Teilkasko* und *Haftpflicht* für das Jahr 2012 bestimmen, wobei S den Gesamtschaden einer Risikogruppe und m die Anzahl der Individuen in einer Risikogruppe bezeichne. Hierzu bedarf es einiger Berechnungen, die zur Übersichtlichkeit in der folgenden Tabelle darstellen wollen:

Meldejahr	Fahrzeugbestand PKW in Tsd. mit			Anzahl Schäden in Tsd. mit			Gesamtschaden in Mio. €		
	Vollkasko	Teilkasko	Haftpflicht	Vollkasko	Teilkasko	Haftpflicht	Vollkasko	Teilkasko	Haftpflicht
2000	17 398	13 987	37 586	2 722	1 336	3 017	4 212	973	10 376
2001	17 942	13 585	37 911	2 677	1 224	2 934	4 242	879	10 290
2002	18 481	13 285	38 239	2 974	1 366	2 901	4 614	1 036	10 118
2003	18 981	13 136	38 752	2 929	1 269	2 842	4 478	922	9 936
2004	19 218	13 003	38 969	2 895	1 225	2 785	4 337	841	9 797
2005	19 418	12 874	39 056	2 916	1 196	2 700	4 280	796	9 622
2006	19 940	12 736	39 440	3 015	1 180	2 653	4 349	788	9 354
2007	20 177	12 624	39 475	3 215	1 246	2 633	4 530	823	9 433
2008	20 662	12 592	39 771	3 436	1 305	2 585	5 014	953	9 290
2009	21 743	12 225	39 963	3 561	1 233	2 656	5 057	809	9 348
2010	22 586	12 085	40 343	3 718	1 189	2 783	5 371	785	9 513
2011	23 025	12 207	40 994	3 836	1 184	2 727	5 738	870	9 504

Tabelle 8.1: PKW-Bestand, Schadenszahl und Gesamtschaden 2000-2011 [GDV00]

Jahr	Versicherte			Schadensrate			(1)	(2)	(3)
	m_j^V	m_j^T	m_j^H	X_j^V	X_j^T	X_j^H	$m_j^V (X_j^V - \bar{X}^V)^2$	$m_j^T (X_j^T - \bar{X}^T)^2$	$m_j^H (X_j^H - \bar{X}^H)^2$
	Tsd.	Tsd.	Tsd.	€	€	€			
1	17 398	13 987	37 586	242,10	69,56	276,06	957 606	40 162	30 158 736 637
2	17 942	13 585	37 911	236,43	64,70	271,43	54 990	136 201	21 278 929 297
3	18 481	13 285	38 239	249,66	77,98	264,60	4 149 356	1 358 589	10 876 603 840
4	18 981	13 136	38 752	235,92	70,19	256,40	29 294	70 625	2 910 240 327
5	19 218	13 003	38 969	225,67	64,68	251,40	1 558 032	132 544	525 232 007
6	19 418	12 874	39 056	220,41	61,83	246,36	3 950 692	469 669	73 250 816
7	19 940	12 736	39 440	218,10	61,87	237,17	5 477 142	458 224	4 400 854 459
8	20 177	12 624	39 475	224,51	65,19	238,96	2 084 735	90 454	3 037 748 859
9	20 662	12 592	39 771	242,67	75,68	233,59	1 319 024	768 632	7 959 007 572
10	21 743	12 225	39 963	232,58	66,18	233,92	95 633	35 090	7 629 673 005
11	22 586	12 085	40 434	237,80	64,96	235,27	220 476	102 585	6 278 854 344
12	23 025	12 207	40 994	249,21	71,27	231,84	4 860 767	141 155	10 357 033 184
Σ	239 571	154 339	470 590	234,68	67,87	247,73	24 757 747	3 803 929	105 486 164 347

Tabelle 8.2: Berechnungen Bühlmann-Straub Modell: Schadensrate

Es ergeben sich also:

$$\bar{X}^V = 234,68 \text{ €}$$

$$\bar{X}^T = 67,87 \text{ €}$$

$$\bar{X}^H = 247,73 \text{ €}$$

$$m_{\Sigma}^V = 239.571.000$$

$$m_{\Sigma}^T = 154.339.000$$

$$m_{\Sigma}^H = 470.590.000$$

$$m_{\Sigma}^{\Sigma} = 864.500.000$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sum_{i=1}^3 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{\Sigma}} \bar{X}^{(i)} \\ &= 212,00 \text{ €} \end{aligned}$$

Die Schätzer für σ_{HM}^2 und μ_{PV}^2 berechnen wir anhand Satz 54:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_{\text{PV}}^2} &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} \left(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{12-1} \sum_{j=1}^{12} m_j^{(i)} \left(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{11} (24.757.747.156 + 3.803.929.358 + 105.486.164.347) \\ &= 4.062.055.784\end{aligned}$$

Den Schätzer für σ_{HM}^2 schreiben wir etwas um, damit die Darstellung der Berechnungen in tabellarischer Form übersichtlich bleiben. Auf die genauen Zwischenschritte wollen wir verzichten, da es sich um einfache Umformungen handelt:

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2} &= \frac{\sum_{i=1}^R m_{\Sigma}^{(i)} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2 - \widehat{\mu_{\text{PV}}^2} (R-1)}{m_{\Sigma} - \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)2}}{m_{\Sigma}}} \\ &= \max \left[0, C \cdot \left[\frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2 - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{\text{PV}}^2}}{m_{\Sigma}} \right] \right]\end{aligned}$$

mit

$$C = \frac{R-1}{R} \left[\sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \left(1 - \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \right) \right]^{-1}$$

und die sonst üblichen Definitionen aus Satz 54 gelten. Um C zu berechnen, benötigen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \left(1 - \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \right) &= 0,20032 + 0,14666 + 0,24803 \\ &= 0,59501\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}C &= \frac{3-1}{3} [0,59501]^{-1} \\ &= 1,1204\end{aligned}$$

Womit wir schließlich den Schätzer für σ_{HM}^2 anhand Tabellenspalten (1) bis (3) erhalten:

$$\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2} = \max \left[0, 1,1204 \cdot \left[\frac{3}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2 - \frac{3 \cdot \widehat{\mu_{\text{PV}}^2}}{m_{\Sigma}} \right] \right]$$

$$= 7.625$$

Daraus folgt

$$\widehat{K} = \frac{\widehat{\mu_{PV}^2}}{\widehat{\sigma_{HM}^2}} = 532.742$$

und hieraus wiederum

$$\widehat{Z}^V = \frac{m_{\Sigma}^V}{m_{\Sigma}^V + \widehat{K}} = 0,9977812$$

$$\widehat{Z}^T = \frac{m_{\Sigma}^T}{m_{\Sigma}^T + \widehat{K}} = 0,9965601$$

$$\widehat{Z}^H = \frac{m_{\Sigma}^H}{m_{\Sigma}^H + \widehat{K}} = 0,9988692$$

$$\widehat{Z}_{\Sigma} = \widehat{Z}^V + \widehat{Z}^T + \widehat{Z}^H = 2,9932105$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_0 &= \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \bar{X}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\widehat{Z}^{(i)}}{\widehat{Z}_{\Sigma}} \bar{X}^{(i)} \\ &= \frac{0,9977812}{2,9932105} 234,68 \text{ €} + \frac{0,9965601}{2,9932105} 67,87 \text{ €} + \frac{0,9988692}{2,9932105} 247,73 \text{ €} = 183,50 \text{ €} \end{aligned}$$

Nach Satz 52 ergibt sich nun also mit geschätzten Strukturparametern der empirische Credibility Schätzer aus

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = \widehat{Z}^{(i)} \bar{X}^{(i)} + (1 - \widehat{Z}^{(i)}) \widehat{\mu}_0.$$

Es folgt also für die empirischen Credibility Schätzer für die Schadensrate der Voll- und Teilkaskoversicherung und der Haftpflichtversicherung:

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\Theta_V)}^{\text{hom}} &:= \widehat{X}^V = 0,9977812 \cdot 234,68 \text{ €} + (1 - 0,9977812) \cdot 183,50 \text{ €} \\ &= 234,56 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu(\Theta_T)}^{\text{hom}} &:= \widehat{X}^T = 0,9965601 \cdot 67,87 \text{ €} + (1 - 0,9965601) \cdot 183,50 \text{ €} \\ &= 68,27 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mu(\Theta_H)}^{\text{hom}} &:= \widehat{X}^H = 0,9988692 \cdot 247,73 \text{ €} + (1 - 0,9988692) \cdot 183,50 \text{ €} \\ &= 247,66 \text{ €}\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass aufgrund des hohen Credibility Gewichts aller Risikoklassen sich auch der Credibility Schätzer für die Schadensraten nahezu komplett an der durchschnittlichen Schadensrate der jeweiligen Klassen orientiert. Dies rührt vorallem daher, dass wir im Vergleich zur Varianz des hypothetischen Mittels (σ_{HM}^2) eine sehr hohe erwartete Prozessvarianz (μ_{PV}^2) haben, sodass der Koeffizient K im Verhältnis zu den Werten m_{Σ}^V , m_{Σ}^T und m_{Σ}^H verschwindend gering ist. Dies zeigt, dass das Varianzverhalten der einzelnen Klassen sehr ähnlich ist und bei der Bestimmung des Schätzers fast komplett auf den klasseninternen Durchschnittswert zurückgegriffen werden kann.

Dass dies nicht immer der Fall sein muss, wollen wir im Folgenden durch eine Illustration anhand zweier Punktdiagramme zeigen. Wir werden dabei die Credibility Gewichte und die Credibility Schätzer der 3 Klassen Vollkasko, Teilkasko und Haftpflicht gegen die Anzahl der versicherten PKW innerhalb der jeweiligen Klasse auftragen. Hierbei gehen wir davon aus, dass die Schadensrate innerhalb der Risikoklassen für alle Jahre konstant bleibt, um aus den Bestandsdaten einen möglichen Credibility Schätzer (bzw. dessen Gewicht Z) für potentielle, verschieden große Kollektiva in den Klassen zu bestimmen. Der Programmiercode einschließlich einiger Erklärungen zum Vorgehen bei den Berechnungen finden sich im Anhang.

Die Abbildung zeigt also die Anzahl der Risiken eines potentiellen Kollektivums für alle 3 Klassen in Abhängigkeit zu deren zuzuordnenden Credibility Gewicht. Alle 3 Kurven ähneln einer logarithmisch steigenden Kurve, die sich an den Wert 1 annähert. Dies macht Sinn, denn haben wir für ein potentielles Kollektiv nur eine geringe Zahl von versicherten PKW über einen gewissen Zeitraum (etwa nahe 0), kann diesem nur ein geringes Credibility Gewicht zugemessen werden, da größere Datensätze fehlen. Je größer das potentielle Kollektiv, desto höher steigt das Credibility Gewicht (bis idealerweise 1). Wir erkennen, dass für die Klasse Vollkasko und Haftpflicht, deren Kurven fast identisch verlaufen, das Credibility Gewicht bei steigender PKW Zahl viel früher und intensiver steigt, als bei der Klasse Teilkasko. Beispielsweise wird in ersteren ein Credibility Gewicht von über 50 % bereits bei ca. 240.000 versicherten PKW im Kollektiv erreicht wird, was bei Beobachtungszeitraum von 12 Jahren im Schnitt etwa 20.00 versicherten Fahrzeugen pro Jahr entspricht, wenn wir davon ausgehen, dass ein Fahrzeug über ein ganzes Jahr versichert wird. Liegt die

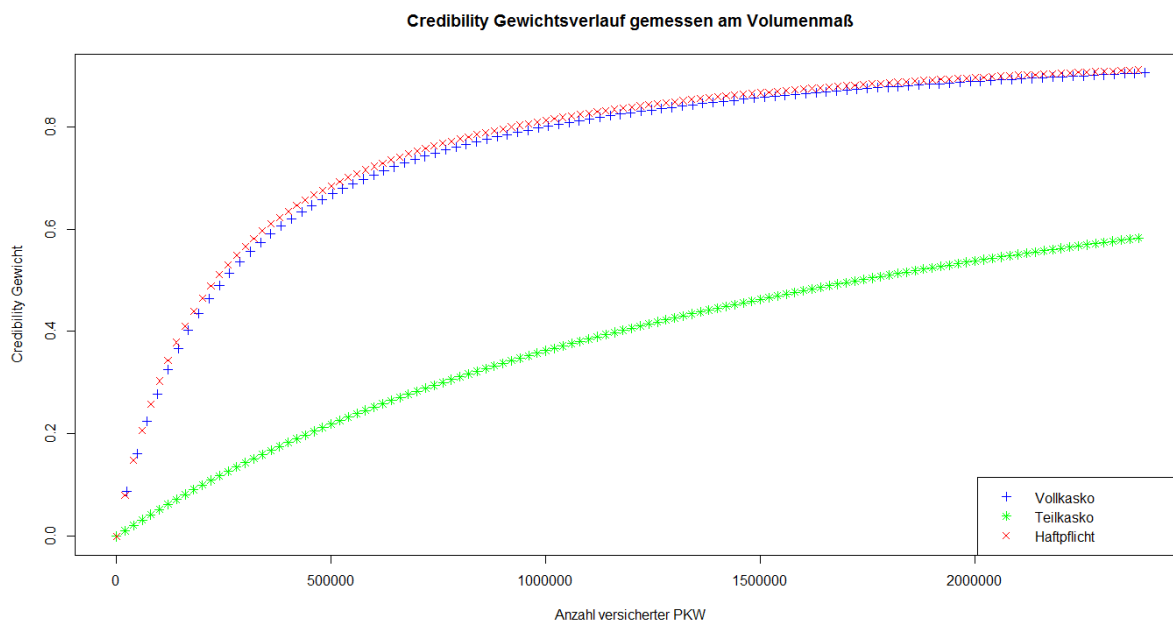


Abbildung 8.1: Credibility Gewichtsverlauf gemessen am Volumenmaß

potentielle Kollektivzahl über diesen Werten, hat die gesamtdurchschnittliche Schadensrate μ_0 bei der Berechnung der Kollektivschadensrate bereits einen geringeren Einfluss als die individuell beobachtete Schadensrate der jeweiligen Klasse. Im Gegensatz dazu bedarf es bei der Teilkaskoversicherung für ein Credibility Gewicht von 50 % schon über 2.400.000 versicherten PKW über 12 Jahre, sprich ca. 10 mal so viele!

Diese Entwicklung spiegelt sich natürlich auch in der Abbildung wieder, wenn wir den Credibility Schätzer selbst gegen das Volumenmaß der Anzahl versicherter PKW auftragen:

Bei geringen Volumenmaßzahlen durch eine geringe Anzahl versicherter PKW über den Beobachtungszeitraum für ein potentielles Kollektiv liegen die Credibility Schätzer noch nahe dem Gesamtmittel μ_0 . Je mehr Daten wir über die Kollektive haben und wir diesen mehr Credibility zuschreiben können, desto mehr nähert sich deren Credibility Schätzer dem individuellen Risikomittel der Klasse an. Da sich das Credibility Gewicht der Klasse Vollkasko und Haftpflicht schneller an 1 nähert, nähert sich schlussendlich auch der Credibility Schätzer der Klassen Vollkasko und Haftpflicht schneller an die Risikomittel, als der der Klasse Teilkasko.

Interessant in diesem Beispiel ist auch zu beobachten, dass das Gesamtmittel μ_0 über dem Risikomittel der Klasse Teilkasko liegt, aber unter dem der Klassen Vollkasko

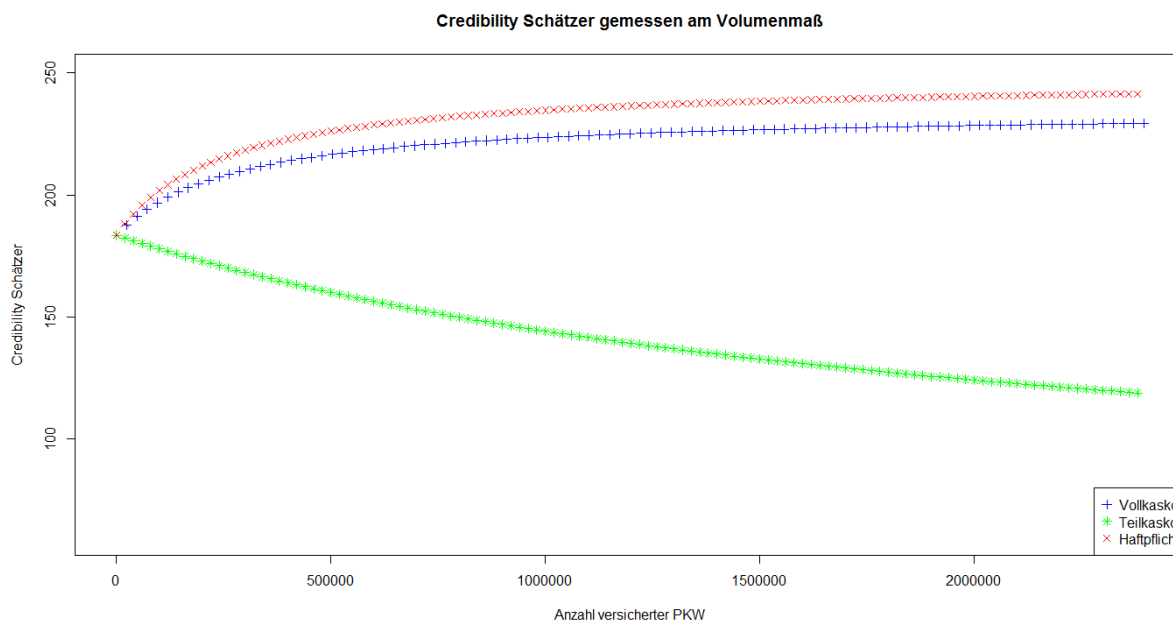


Abbildung 8.2: Credibility Schätzer gemessen am Volumenmaß

und Haftpflicht. Demnach müssen potentielle Kollektiva geringeren Credibility Gewichts in der Klasse Teilkasko eben aufgrund des geringen Credibility Gewichts die Schadensrate der Klassen Vollkasko und Haftpflicht mitverantworten, wohingegen Kollektiva mit geringem Credibility Gewicht in den Klassen Vollkasko und Haftpflicht eben nicht sofort so stark belastet werden, wie man es von Kollektiva höheren Gewichtes erwarten würde. Dieser Effekt sinkt natürlich stetig mit steigendem Credibility Gewichten.

8.2 Schätzen der Schadenshäufigkeit: Poisson-Fall

In der Realität sind für Versicherungen neben der durchschnittlichen Schadensraten vor allem die Häufigkeiten, mit der bestimmte Schäden auftreten, relevant. Wir haben bereits erfahren, dass die Schadenszahlen häufig anhand einer Poisson-Variable modelliert werden. Wir werden dies nun genauer spezifizieren und somit auch die Formeln für unsere Credibility-Schätzer anpassen. Zunächst allerdings einige

Notationen 55. Bezeichnet $N_j^{(i)}$ die Anzahl der Schäden der i -ten Risikogruppe im j -ten Jahr, so ergibt sich bei $m_j^{(i)}$ Versicherten Individuen in der i -ten Risikogruppe im j -ten Jahr eine Schadenshäufigkeit von

$$F_j^{(i)} = \frac{N_j^{(i)}}{m_j^{(i)}}.$$

Bemerkung. Wir können $N_j^{(i)}$ und $m_j^{(i)}$ auch anders interpretieren, etwa, wenn wir uns für die Schadenshäufigkeiten von großen Schäden unterhalb aller Schäden in einem Versicherungsportfolio interessieren, könnte $N_j^{(i)}$ die Anzahl der großen und $m_j^{(i)}$ die Anzahl aller Schäden bezeichnen. Den Interpretationen sind hierbei keinerlei Grenzen gesetzt, wir werden uns im folgenden Beispiel aber auf obige Notationen konzentrieren.

Wir konkretisieren nun unsere Idee, dass die Schadenszahlen $N_j^{(i)}$ häufig Poissonverteilt sind.

Annahmen 56. Für die Zufallsvariablen $N_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq n$ im Gesamtverlauf $\mathbf{N}^{(i)}$ der Anzahl der Schäden des i -ten Versicherungsblockes, $1 \leq i \leq R$ gelten

▷ **bedingte poissonverteilte Unabhängigkeit**

bedingt unter $\Theta_i = \vartheta_i$ sind die Zufallsvariablen $N_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, n$) unabhängig Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_j^{(i)} := m_j^{(i)} \Theta_i \lambda_0$

▷ **Unabhängigkeit der Blöcke**

Die Paare $(\Theta_1, \mathbf{N}^{(1)}), \dots, (\Theta_R, \mathbf{N}^{(R)})$ der R Versicherungsblöcke sind unabhängig. $\Theta_1, \dots, \Theta_R$ sind zudem unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}[\Theta_i] = 1$

Hierbei bezeichnet λ_0 analog zu μ_0 das Gesamtmittel der Schadenshäufigkeiten aller Risiken.

Aufgrund der Definition von $F_j^{(i)} = \frac{N_j^{(i)}}{m_j^{(i)}}$ ergeben sich durch die Eigenschaften von $N_j^{(i)}$ direkt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[F_j^{(i)} \mid \Theta_i\right] &= \Theta_i \lambda_0 \\ \mathbb{V}\left[F_j^{(i)} \mid \Theta_i\right] &= \frac{\Theta_i \lambda_0}{m_j^{(i)}}\end{aligned}$$

Die zu schätzende Größe $\mu(\Theta_i)$ für die Schadenshäufigkeit muss also den Erwartungswert einer Poisson-Verteilung mit Parametern $\Theta_i \lambda_0$ besitzen. Es gilt also

$$\begin{aligned}\mu(\Theta_i) &= \Theta_i \lambda_0 \\ \sigma^2(\Theta_i) &= \Theta_i \lambda_0,\end{aligned}$$

da Erwartungswert und Varianz bei einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen übereinstimmen. Hieraus ergeben sich die Strukturparameter zu

$$\begin{aligned}\lambda_0 &:= \mathbb{E}[\mu(\Theta_i)] \\ \mu_{\text{PV}}^2 &:= \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)] = \lambda_0 \\ \sigma_{\text{HM}}^2 &:= \mathbb{V}[\mu(\Theta_i)] = \lambda_0^2 \mathbb{V}[\Theta_i],\end{aligned}$$

da $\mathbb{E}[\Theta_i] = 1$ nach Annahmen. Es folgt auch direkt, dass

$$K = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0^2 \mathbb{V}[\Theta_i]} = (\lambda_0 \mathbb{V}[\Theta_i])^{-1}.$$

Mit diesen Eigenschaften ergeben sich sofort der inhomogene und homogene Credibility Schätzer für die Schadenshäufigkeit aus Satz 48 und Satz 52:

Korollar 57 (Credibility Schätzer für die Schadenshäufigkeit). Auf Basis der Annahmen 56 ist der inhomogene Credibility-Schätzer für die Schadenshäufigkeit $F_j^{(i)}$ gegeben durch

$$\overline{\overline{\mu(\Theta_i)}} = Z^{(i)} \bar{F}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \lambda_0.$$

Der homogene Credibility Schätzer für die Schadenshäufigkeit $F_j^{(i)}$ ergibt sich zu

$$\overline{\overline{\mu(\Theta_i)}}^{\text{hom}} = Z^{(i)} \bar{F}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \widehat{\lambda}_0$$

Hierbei bezeichnen

$$\bar{F}^{(i)} = \frac{1}{m_{\Sigma}^{(i)}} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} F_j^{(i)} \quad Z^{(i)} = \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{(i)} + K} \quad K = (\lambda_0 \mathbb{V}[\Theta_i])^{-1} \quad \hat{\lambda}_0 = \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_{\Sigma}} \bar{F}^{(i)}.$$

Kommen wir zur konkreten Anwendung. Im Folgenden haben wir Daten aus der Diebstahlstatistik aus Deutschland für die Jahre zwischen 2000 und 2011 gegeben. Hierbei betrachten wir die Bundesländer, welche unseren verschiedenen Risikoklassen darstellen sollen. Wir wollen für jedes Bundesland die Credibility Schätzer für die Schadenshäufigkeit bestimmen.

Land / Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	Σ
Baden-Würt.	2 845	2 553	2 361	2 099	1 872	1 593	1 229	1 005	899	923	838	837	19 054
Bayern	3 193	2 889	2 514	2 396	2 250	1 844	1 439	1 101	1 086	1 164	1 185	1 027	22 088
Berlin	4 737	3 946	3 571	2 978	2 736	2 446	2 213	2 065	2 223	3 020	3 290	3 272	36 497
Bremen	454	420	387	380	344	319	194	178	173	165	130	169	3 313
Brandenb.	2 350	1 843	1 772	1 557	1 346	1 083	947	943	1 205	1 403	1 686	1 758	17 893
Hamburg	2 104	2 138	1 969	1 712	1 481	1 028	874	794	787	909	1 017	1 209	16 022
Hessen	3 072	2 704	2 531	2 380	2 131	1 760	1 338	1 077	847	921	946	999	20 706
Meck.-Vorp.	1 729	1 330	1 226	1 008	771	616	553	493	474	520	560	585	9 865
Nieders.	4 002	3 601	3 177	3 337	2 998	2 427	1 905	1 593	1 522	1 642	1 688	1 533	29 425
Nordrhein-W.	9 127	8 942	8 882	8 125	7 978	6 392	4 659	4 192	3 653	3 543	4 063	4 205	73 761
Rheinland-Pf.	1 369	1 104	1 068	906	855	764	603	492	349	405	414	396	8 725
Saarland	315	278	296	253	196	202	147	135	116	107	92	82	2 219
Sachsen	2 317	1 776	1 548	1 368	1 248	1 118	953	837	1 208	1 578	1 638	1 522	17 111
Sachsen-Anh.	1 901	1 427	1 108	999	807	742	667	576	572	692	764	837	11 092
Schleswig-H.	1 910	1 579	1 551	1 429	1 131	931	768	691	698	791	769	844	13 092
Thüringen	942	772	607	539	491	470	306	299	279	387	379	342	5 813

Tabelle 8.3: Anzahl Diebstähle Zufallsvariable N versicherter PKW nach Ländern

Land / Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Baden-Würt	4 064	4 255	3 935	4 198	4 680	3 983	4 097	5 025	4 495	4 615	4 190	4 185
Bayern	4 561	4 815	5 028	4 792	5 625	4 610	4 797	5 505	5 430	5 820	5 925	5 135
Berlin	861	858	850	851	829	843	820	826	855	863	889	909
Bremen	206	210	204	211	215	213	216	198	216	206	217	211
Brandenb	904	922	886	916	897	903	947	943	1 004	1 002	1 054	1 034
Hamburg	539	548	547	552	549	541	546	567	562	568	565	576
Hessen	2 560	2 458	2 531	2 644	2 664	2 514	2 676	2 693	2 823	3 070	3 153	2 498
Meck -Vorp	576	578	557	560	593	560	553	616	593	650	622	650
Nieders	3 335	3 274	3 177	3 337	3 331	3 467	3 175	3 186	3 044	3 284	3 376	3 833
Nordrhein-W	7 021	6 878	6 832	6 771	7 253	7 102	6 656	6 987	7 306	7 086	8 126	7 008
Rheinland-Pf	1 711	1 840	1 780	1 812	1 710	1 910	2 010	1 640	1 745	2 025	2 070	1 980
Saarland	450	463	423	422	490	505	490	450	580	535	460	410
Sachsen	1 545	1 480	1 548	1 520	1 560	1 597	1 588	1 674	1 726	1 578	1 638	1 691
Sachsen-Anh	864	839	852	833	897	824	834	960	953	865	955	930
Schleswig-H	1 194	1 128	1 193	1 191	1 131	1 164	1 280	1 152	1 163	1 318	1 282	1 206
Thüringen	785	772	867	770	818	783	765	997	930	968	948	855

Tabelle 8.4: versicherter PKW-Bestand Volumenmaß m (in Tsd.) nach Ländern

Tabelle 8.3 zeigt die Auflistung der Anzahl der Diebstähle versicherter PKW nach Bundesländern in den Jahren von 2000 bis 2011. Die Zahl der Diebstähle soll im Folgenden eben der Zufallsvariable N entsprechen. Tabelle 8.4 zeigt den Bestand versicherter PKW in Deutschland nach Bundesländern in den Jahren 2000 bis 2011. Entsprechend soll es sich hier um das Volumenmaß m handeln. Durch Division von N

durch m erhalten wir die jeweiligen Schadenshäufigkeiten für die Länder in den verschiedenen Jahren.

Zur weiteren Berechnung benötigen wir allerdings zuerst Schätzer für unsere Strukturparameter λ_0 und μ_{PV}^2 . Um diese zu bestimmen, machen wir uns ein Rekursionsverfahren zu Nutzen, da wir wissen, dass Erwartungswert und Varianz bei der Poisson-Verteilung übereinstimmen müssen:

Rekursionsanfang:

Wir geben uns zunächst einen Schätzwert für λ_0 durch

$$\widehat{\lambda}_{0[0]} := \bar{F} = \frac{1}{m_{\Sigma}} \sum_{i=1}^R \bar{F}^{(i)}$$

vor. Mithilfe dieses Wertes berechnen wir σ_{HM}^2 . Um die Berechnungen tabellarisch zu vereinfachen, schreiben wir den Schätzer für σ_{HM}^2 wieder folgendermaßen um:

$$\widehat{\sigma}_{HM[0]}^2 = \max \left[0, C \left[T - \frac{R \cdot \widehat{\lambda}_{0[0]}}{m_{\Sigma}} \right] \right]$$

mit

$$C := \frac{R-1}{R} \left[\sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \left(1 - \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \right) \right]^{-1}$$
$$T := \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{F}^{(i)} - \bar{F})^2$$

Es ergibt sich schließlich

$$\widehat{K}_{[0]} = \frac{\widehat{\lambda}_{0[0]}}{\widehat{\sigma}_{HM[0]}^2}.$$

Rekursionsschritt ($n \mapsto n + 1$):

Mit dem so gewonnenen geschätzten Wert für K berechnen wir den Credibility-Schätzer rekursiv weiter und stoppen dann, wenn sich der Wert für K nicht mehr ausschlaggebend ändert:

$$\widehat{K}_{[n]} = \frac{\widehat{\lambda}_{0[n]}}{\widehat{\sigma}_{\text{HM}[n]}^2}$$

$$Z_{[n]}^{(i)} = \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{(i)} + \widehat{K}_{[n]}}$$

$$\widehat{\lambda}_{0[n+1]} = \sum_{i=1}^R \frac{Z_{[n]}^{(i)}}{Z_{\Sigma[n]}} \bar{F}^{(i)}$$

$$\widehat{\sigma}_{\text{HM}[n+1]}^2 = \max \left[0, C \cdot \left[T - \frac{R \cdot \widehat{\lambda}_{0[n+1]}}{m_{\Sigma}^{\Sigma}} \right] \right]$$

Wir stellen unsere Berechnungen erneut tabellarisch dar:

Land	Anzahl Risiken	Anzahl Diebstähle	Häufigkeit	(1)	(2)
i	$m_{\Sigma}^{(i)}$	$N_{\Sigma}^{(i)} = m_{\Sigma}^{(i)} \bar{F}_i$	\bar{F}_i	$m_{\Sigma}^{(i)} (\bar{F}_i - \bar{F})^2$	$\frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{\Sigma}} \left(1 - \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}^{\Sigma}} \right)$
	Tsd.		Promille		
Baden-Würt	51 721	19 054	0,3684	8,93	0,115
Bayern	62 043	22 088	0,3560	11,36	0,133
Berlin	10 254	36 497	3,5592	78,98	0,026
Bremen	2 523	3 313	1,3133	0,71	0,006
Brandenb	11 411	17 893	1,5680	7,01	0,028
Hamburg	6 661	16 022	2,4054	17,51	0,017
Hessen	32 284	20 706	0,6414	0,66	0,076
Meck -Vorp	7 109	9 865	1,3877	2,59	0,018
Nieders	39 818	29 425	0,7390	0,08	0,091
Nordrhein-W	85 026	73 761	0,8675	0,59	0,170
Rheinland-Pf	22 233	8 725	0,3924	3,41	0,054
Saarland	5 678	2 219	0,3908	0,88	0,014
Sachsen	19 145	17 111	0,8938	0,23	0,047
Sachsen-Anh	10 607	11 092	1,0458	0,73	0,026
Schleswig-H	14 401	13 092	0,9091	0,23	0,035
Thüringen	10 257	5 813	0,5667	0,48	0,026
Summe	391 172	306 676	0,7840	134,38	0,882

Tabelle 8.5: Berechnungen Bühlmann-Straub Modell: Schadenshäufigkeit

Bemerkung. Für die Berechnungen für die Strukturparameter werden nur die aggregierten Größen benötigt, nicht jedoch die Ausprägungen der einzelnen Variablen in den unterschiedlichen Jahren.

Es ergeben sich direkt

$$\begin{aligned}\bar{F} &= 0,0784\% \\ T &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{F}^{(i)} - \bar{F})^2 \\ &= \frac{16}{15} \frac{1}{391.172.210} \sum_{i=1}^{16} m_{\Sigma}^{(i)} (\bar{F}^{(i)} - \bar{F})^2 \\ &= \frac{16}{15} \frac{134,38}{391.172.210} \\ &= 3,664 \cdot 10^{-7} \\ C &:= \frac{R-1}{R} \left[\sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \left(1 - \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{15}{16} \frac{1}{0,882} = 1,063\end{aligned}$$

Damit folgt für die Strukturparameter des ersten Rekursionsanfangs

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{0[0]} &= 0,0784\% \\ \widehat{\sigma}_{\text{HM}[0]}^2 &= 1,063 \left[3,664 \cdot 10^{-7} - \frac{16 \cdot 0,0784\%}{391.172} \right] \\ &= 3,894 \cdot 10^{-7} \\ \widehat{K} &= \frac{0,0784\%}{3,894 \cdot 10^{-7}} = 2013,31\end{aligned}$$

Hiermit folgen wiederum die ersten beiden Rekursionsschritte

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{0[1]} &= \frac{0,017401}{15,99696} = 0,109\% \\ \widehat{\sigma}_{\text{HM}[1]}^2 &= \max \left[0, 1,063 \left[3,664 \cdot 10^{-7} - \frac{16 \cdot 0,109\%}{391.172} \right] \right] \\ &= 3,894 \cdot 10^{-7} \\ \widehat{K} &= \frac{0,109\%}{3,894 \cdot 10^{-7}} = 2.793,44\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_{0[2]} &= \frac{0,017399}{15,99578} = 0,109\% \\ \widehat{\sigma}_{\text{HM}[2]}^2 &= \max \left[0, 1,063 \left[3,664 \cdot 10^{-7} - \frac{16 \cdot 0,109\%}{391.172} \right] \right] \\ &= 3,894 \cdot 10^{-7} \\ \widehat{K} &= \frac{0,109\%}{3,894 \cdot 10^{-7}} = 2.793,39\end{aligned}$$

wobei wir die Ergebnisse folgender Tabelle bei der Bestimmung von $Z_{[k]}^{(i)}$ bzw. $\widehat{\lambda}_{0[k]}$ für $k = 0, 1$ benutzt haben. Da sich \widehat{K} nicht mehr ausschlaggebend vom 1. in den 2. Rekursionsschritt geändert hat, sind $\widehat{\lambda}_0$ und $\widehat{\sigma}_{\text{HM}}^2$ unsere benötigten Schätzer, die die Eigenschaft der Übereinstimmung von Erwartungswert und Varianz einer Poisson-Verteilung gewährleisten. Anhand der Gewichte ergeben sich nun die homogenen Credibility Schätzer direkt durch Einsetzen aus Korollar 57 in

$$\overline{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}} = Z_{[2]}^{(i)} \bar{F}^{(i)} + (1 - Z_{[2]}^{(i)}) \widehat{\lambda}_{0[2]} :$$

Die Ergebnisse sind tabellarisch in der folgenden Tabelle dargestellt:

i	$Z_{[0]}^{(i)}$	$Z_{[0]}^{(i)} \cdot \bar{F}^{(i)}$	$Z_{[1]}^{(i)}$	$Z_{[1]}^{(i)} \cdot \bar{F}^{(i)}$	$\overline{\mu(\Theta_i)}^{\text{hom}}$
					Promille
1	0,99996	0,000368	0,99995	0,000368	0,3684
2	0,99997	0,000356	0,99995	0,000356	0,3560
3	0,99980	0,003558	0,99973	0,003558	3,3585
4	0,99920	0,001312	0,99889	0,001312	1,3131
5	0,99982	0,001568	0,99976	0,001568	1,5679
6	0,99970	0,002405	0,99958	0,002404	2,4048
7	0,99994	0,000641	0,99991	0,000641	0,6414
8	0,99972	0,001387	0,99961	0,001387	1,3876
9	0,99995	0,000739	0,99993	0,000739	0,7390
10	0,99998	0,000867	0,99997	0,000867	0,8675
11	0,99991	0,000392	0,99987	0,000392	0,3925
12	0,99965	0,000391	0,99951	0,000391	0,3912
13	0,99989	0,000894	0,99985	0,000894	0,8938
14	0,99981	0,001046	0,99974	0,001045	1,0458
15	0,99986	0,000909	0,99981	0,000909	0,9091
16	0,99980	0,000567	0,99973	0,000567	0,5669
Summe	15,99696	0,017401	15,99578	0,017399	

Tabelle 8.6: Ergebnisse Bühlmann-Straub Modell: Schadenshäufigkeit

8.3 Schätzen der durchschn. Schadenshöhe

Im Gegensatz zur Schadensrate, wollen wir nun die durchschnittliche Schadenshöhe bestimmen. Ferner wollen wir auch die Anwendung des Spezialfalles zeigen, dass Risiken nicht über den kompletten Beobachtungszeitraum Schäden produzieren. Hierzu einige

Notationen 58. Bezeichnet $N^{(i)}$ die Anzahl der Schäden der i -ten Risikogruppe in einem oder mehreren Jahren, so ergeben sich bei Einzelschäden der i -ten Risikogruppe in Höhe von $Y_\nu^{(i)}$ mit $\nu = 1, \dots, n^{(i)}$ und daraus resultierenden Gesamtschadenshöhe der Risikogruppe $S^{(i)} := \sum_{\nu=1}^{n^{(i)}} Y_\nu^{(i)}$ eine durchschnittliche Schadenshöhe der i -ten Risikogruppe von

$$Y^{(i)} = \frac{S^{(i)}}{N^{(i)}}.$$

Bemerkung. Der Zählindex ν ist in verschiedene Art und Weisen interpretierbar. Er kann sowohl, wie in der Bezeichnung beschrieben, der Index für die Anzahl der Schäden sein, kann jedoch auch die Zeitintervalle zählen.

Wir machen nun unsere üblichen Annahmen über die zu untersuchende Größe Y , um die Ergebnisse des Bühlmann-Straub Modells auf diesen Spezialfall anwenden zu können:

Annahme 59. Für die Zufallsvariablen $Y_\nu^{(i)}$, $1 \leq \nu \leq n^{(i)}$ im Gesamtverlauf $\mathbf{Y}^{(i)}$ der durchschnittlichen Schadenshöhe des i -ten Versicherungsblockes, $1 \leq i \leq R$ gelten

▷ **bedingte Unabhängigkeit**

bedingt unter $\vartheta_i = \Theta_i$ sind die Zufallsvariablen $Y_\nu^{(i)}$ ($\nu = 1, \dots, n^{(i)}$) unabhängig identisch verteilt mit bedingten Momenten

$$\mu(\Theta_i) = \mathbb{E}[Y|\Theta_i]$$

$$\sigma^2(\Theta_i) = \mathbb{V}[Y|\Theta_i]$$

bzw.

$$\mathbb{E}[\bar{Y}^{(i)}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$$

$$\mathbb{V}[\bar{Y}^{(i)}|\Theta_i, n^{(i)} = n^{(i)}] = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{n^{(i)}}.$$

Bemerkung. Als Zählindex ν werden wir im folgenden Beispiel weiterhin den Zeitparameter verwenden, da wir nur die einzelnen durchschnittlichen Ausprägungen des Gesamtschadens über die Zeit betrachten. Die Gewichte $m_\nu^{(i)}$ sind in diesem Fall alle 1 (ein Fahrzeug wird über ein ganzes Jahr versichert), weshalb $\sum_{\nu=1}^{n^{(i)}} m_\nu^{(i)} = n^{(i)}$ folgt. Dementsprechend bezeichnet $n^{(i)}$ die Anzahl der Fahrzeuge einer Klasse i , die über den Beobachtungszeitraum versichert sind.

Als direktes Ergebnis für den Credibility Schätzer der durchschnittlichen Schadenshöhe ergibt sich

Korollar 60 (Credibility Schätzer für die durchschn. Schadenshöhe). Auf Basis der Annahme 59 ist der Credibility-Schätzer für die durchschn. Schadenshöhe $Y_\nu^{(i)}$ gegeben durch

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = Z^{(i)} \bar{Y}^{(i)} + (1 - Z^{(i)}) \widehat{\mu}_0.$$

Hierbei bezeichnen

$$\bar{Y}^{(i)} = \frac{1}{n^{(i)}} \sum_{\nu=1}^{n^{(i)}} Y_\nu^{(i)} \quad Z^{(i)} = \frac{n^{(i)}}{n^{(i)} + K} \quad K = \frac{\mu_{\text{PV}}^2}{\sigma_{\text{HM}}^2} \quad \widehat{\mu}_0 = \sum_{i=1}^R \frac{Z^{(i)}}{Z_\Sigma} \bar{Y}^{(i)}.$$

Als analoge Schätzer zu den Schätzern für die Strukturparameter aus vorherigen Kapiteln ergeben sich

$$\widehat{\mu_{\text{PV}}^2} = \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \sum_{\nu=1}^{n^{(i)}} n_\nu^{(i)} \left(Y_\nu^{(i)} - \bar{Y}^{(i)} \right)^2$$

$$\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2} = \max \left[0, C \cdot \left(\frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \left(\bar{Y}^{(i)} - \bar{Y} \right)^2 - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{\text{PV}}^2}}{n_\Sigma} \right) \right]$$

mit

$$C = \frac{R-1}{R} \left[\sum_{i=1}^R \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \left(1 - \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \right) \right]^{-1}$$

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^R \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \bar{Y}^{(i)}.$$

Als Basis für eine Beispielrechnung nutzen wir erneut Auszüge aus den Jahrbüchern 2001-2012 des Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft. Hieraus erhalten wir eine Aufstellung der Gesamtschäden aller PKW Diebstähle nach Marke und die entsprechenden Schadensanzahlen.

Marke / Jahr	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	Σ
VW	72 747	7 813	87 661	86 722	79 976	63 368	54 423	58 546	67 743	72 857	72 883	724 846
Audi	73 153	62 233	55 193	46 304	39 447	32 604	27 597	23 641	31 627	41 340	37 255	470 401
Daimler	62 268	67 628	52 632	43 509	30 307	23 776	19 580	15 306	15 009	12 582	11 534	354 136
Opel	11 115	9 284	8 616	7 018	5 600	4 275	3 478	3 303	3 209	3 195	3 062	62 156
BMW	33 791	37 083	42 293	53 435	51 643	43 587	34 554	35 384	50 848	64 708	75 859	523 188
Ford	5 936	5 334	5 612	5 374	4 581	4 116	3 413	3 338	3 867	3 520	3 581	48 675
Fiat	3 818	3 670	3 385	2 582	2 202	1 817	1 417	1 206	1 374	1 355	1 198	24 054
Renault	4 177	4 247	4 771	4 431	3 165	2 306	2 593	2 156	2 023	2 243	4 302	36 414
Mazda	2 218	1 705	1 529	1 248	1 357	1 997	1 843	1 015	2 613	3 908	4 039	23 471
Nissan	2 811	2 351	1 788	1 613	1 086	1 318	988	895	815	958	827	15 448
Honda	1 742	1 181	1 145	834	562	496	485	438	1 061	4 555	5 170	17 669
Toyota	5 617	3 659	2 143	2 792	3 539	4 007	3 401	3 275	6 707	12 357	12 028	59 526
Peugeot	1 642	1 360	1 956	2 212	1 766	1 505	1 408	1 062	1 310	974	1 111	16 307
Mitsubishi	2 131	1 653	1 812	1 723	1 847	1 422	1 034	631	618	754	546	14 172
Seat	1 685	2 205	2 677	2 934	2 968	1 868	2 023	2 568	4 147	2 787	3 045	28 908
Citroen	634	727	1 049	993	617	649	731	587	867	953	1 261	9 070
Skoda	1 730	2 142	3 578	5 331	4 981	3 399	3 749	4 787	7 849	8 131	7 754	53 430
Porsche	3 364	3 493	4 408	5 823	8 985	10 404	6 826	7 987	6 558	8 651	4 732	71 230
Volvo	-	-	-	1 039	1 235	754	797	901	718	970	562	6 976
Hyundai	-	-	-	-	-	-	-	-	-	481	554	1 035

Tabelle 8.7: Gesamtschaden Diebstähle Zufallsvariable S nach Marken in Tsd. Euro

Marke / Jahr	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	Σ
VW	10 953	1 069	10 090	9 409	8 292	6 434	5 652	5 921	6 698	6 792	6 736	78 046
Audi	5 810	5 580	5 041	4 426	3 471	2 574	2 080	1 992	2 413	2 782	2 624	38 793
Daimler	5 067	4 994	3 957	3 284	2 466	1 803	1 4801	198	1 302	1 227	1 023	27 801
Opel	3 943	3 195	2 751	2 154	1 574	1 234	1 051	936	822	767	744	19 171
BMW	3 415	2 986	2 864	3 047	2 650	2 271	1 879	1 803	2 038	2 573	2 889	28 415
Ford	1 821	1 555	1 482	1 282	997	862	764	741	773	648	665	11590
Fiat	818	784	732	554	501	367	327	321	271	257	250	5 182
Renault	718	691	720	665	509	397	429	410	384	378	520	5 821
Mazda	510	424	345	274	241	228	216	143	246	337	354	3 318
Nissan	597	474	386	320	238	186	164	174	137	131	130	2 937
Honda	382	294	259	209	129	104	112	86	121	287	323	2 306
Toyota	441	380	284	293	294	328	290	260	373	718	778	4 439
Peugeot	334	298	319	304	271	243	218	197	219	184	203	2 790
Mitsubishi	291	212	237	189	159	150	126	93	101	90	83	1 731
Seat	279	337	358	343	305	235	250	282	414	324	368	3 495
Citroen	172	144	163	149	121	105	117	103	134	130	164	1 502
Skoda	158	186	326	474	431	348	363	493	734	778	768	5 059
Porsche	125	137	146	191	196	222	164	162	144	211	136	1 834
Volvo	-	-	-	146	119	84	90	88	78	93	79	777
Hyundai	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	101	180

Tabelle 8.8: Anzahl Diebstähle Zufallsvariable N nach Marken

Wir konzentrieren uns auf die durchschnittliche Schadenshöhe. Es ergibt sich also durch Division des Gesamtschaden durch die Anzahl der Schäden der durchschnittliche Schaden der einzelnen Marken. Diese sind in folgender Tabelle aufgeführt.

Marke / Jahr	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
VW	6 651	7 309	8 688	9 217	9 645	9 849	9 629	9 888	10 114	10 727	10 820
Audi	12 591	11 153	10 949	10 462	11 365	12 667	13 268	11 868	13 107	14 860	14 198
Daimler	12 289	13 542	13 301	13 249	12 290	13 187	13 230	12 777	11 528	10 255	11 275
Opel	2 819	2 906	3 132	3 258	3 558	3 464	3 309	3 529	3 904	4 166	4166
BMW	9 895	12 419	14 767	17 537	19 488	19 193	18 390	19 625	24 950	25 149	26 258
Ford	3 260	3 430	3 787	4 192	4 595	4 775	4 468	4 506	5 003	5 433	5 385
Fiat	4 668	4 719	4 624	4 661	4 395	4 950	4 334	3 758	5 071	5 271	4 793
Renault	5 818	6 146	6 626	6 663	6 218	5 808	6 044	5 259	5 268	5 934	8 274
Mazda	4 349	4 022	4 431	4 553	5 629	8 758	8 534	7 098	10 621	11 596	11 409
Nissan	4 708	4 959	4 631	5 040	4 562	7 087	6 024	5 141	5 949	7 313	6 363
Honda	4 561	4 018	4 419	3 991	4 360	4 774	4 329	5 094	8 766	15 870	16 006
Toyota	12 738	9 629	7 546	9 528	12 036	12 215	11 728	12 598	17 980	17 211	15 461
Peugeot	4 916	4 564	6 131	7 276	6 516	6 195	6 460	5 391	5 982	5 295	5 474
Mitsubishi	7 324	7 799	7 645	9 118	11 616	9 483	8 205	6 789	6 115	8 373	6 578
Seat	6 038	6 544	7 479	8 554	9 731	7 951	8 092	9 108	10 017	8 602	8 272
Citroen	3 686	5 051	6 435	6 664	5 102	6 178	6 247	5 703	6 471	7 334	7 692
Skoda	10 947	11 515	10 976	11 246	11 557	9 767	10 329	9 709	10 694	10 451	10 096
Porsche	26 910	25 498	30 192	30 488	45 843	46 865	41 620	49 301	45 540	40 999	34 792
Volvo	-	-	-	7 116	10 382	8 978	8 851	10 235	9 205	10 435	7 112
Hyundai	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6 090	5 486

Tabelle 8.9: durchschn. Schadenshöhe Zufallsvariable $Y = \frac{S}{N}$ nach Marken

Wir erhalten unsere benötigten Größen aus der folgenden Tabelle:

Marke	$n^{(i)}$	$\bar{Y}^{(i)}$	$\frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \bar{Y}^{(i)}$	$\sum_\nu n_\nu^{(i)} (Y_\nu^{(i)} - \bar{Y}^{(i)})^2$	$\frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \left(1 - \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma}\right)$	$\frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} (\bar{Y}^{(i)} - \bar{Y})^2$
		Tsd.				
VW	78 046	9 287	2 956,30	124 345 389 441	0,47	426 935
Audi	38 793	12 126	1 918,54	65 768 601 583	0,19	446 753
Daimler	27 801	12 738	1 444,35	19 240 644 561	0,13	596 019
Opel	19 171	3 242	253,51	2 983 269 102	0,08	4 057 091
BMW	28 415	18 412	2 133,83	784 200 561 127	0,13	7 355 650
Ford	11 590	4 200	198,52	5 766 067 508	0,05	1 843 992
Fiat	5 182	4 642	98,11	510 142 008	0,02	711 872
Renault	5 821	6 256	148,52	3 393 708 395	0,02	4 16 781
Mazda	3 318	7 074	95,73	30 136 735 114	0,01	153 851
Nissan	2 937	5 260	63,01	2 003 393 964	0,01	322 120
Honda	2 306	7 662	72,07	59 174 094 073	0,01	72 852
Toyota	4 439	13 410	242,78	43 264 349 853	0,02	159 070
Peugeot	2 790	5 845	66,51	1 788 426 384	0,01	240 866
Mitsubishi	1 731	8 187	57,80	3 436 956 660	0,01	36 015
Seat	3 495	8 271	117,90	4 825 674 368	0,01	67 398
Citroen	1 502	6 038	36,99	1 992 713 970	0,01	118 988
Skoda	5 059	10 561	217,92	1 684 197 851	0,02	277
Porsche	1 834	38 839	290,51	119 001 175 271	0,01	6 030 166
Volvo	777	8 978	28,45	1 357 777 740	0	6 823
Hyundai	180	5 751	4,22	16 171 483	0	16 179
Σ	245 187		10 466	1 274 890 050 456	1,22	23 079 700

Tabelle 8.10: Berechnungen Bühlmann-Straub Modell: durchschn. Schadenshöhe

Es ergeben sich direkt

$$n_\Sigma = 245187$$

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^I \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \bar{Y}^{(i)} = 10.466$$

$$C = \frac{I-1}{I} \left[\sum_{i=1}^I \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma} \left(1 - \frac{n^{(i)}}{n_\Sigma}\right) \right]^{-1} = \frac{20-1}{20} \cdot 1,22^{-1} = 0,78$$

Zunächst bestimmen wir wieder Schätzer der Strukturparameter σ_{HM}^2 und μ_{PV}^2 :

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_{\text{PV}}^2} &= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \sum_{\nu=1}^{n^{(i)}} n_{\nu}^{(i)} \left(Y_{\nu}^{(i)} - \bar{Y}^{(i)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{20 \cdot 11} \cdot 1.274.890.050.456 = 5.794.954.775\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2} &= \max \left[0, C \cdot \left(\frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{n^{(i)}}{n_{\Sigma}} \left(\bar{Y}^{(i)} - \bar{Y} \right)^2 - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{\text{PV}}^2}}{n_{\Sigma}} \right) \right] \\ &= \max \left[0, 0,78 \cdot \left(\frac{20}{20-1} \cdot 23.079.700 - \frac{20 \cdot 8.794.954.775}{209} \right) \right] = 18.553.400\end{aligned}$$

$$\widehat{K} = \frac{\widehat{\mu_{\text{PV}}^2}}{\widehat{\sigma_{\text{HM}}^2}} = 312,34$$

Schließlich folgen die Schätzer für jede Marke:

Marke	$Z^{(i)}$	$\widehat{\mu(\Theta_i)}$
VW	0,996	9 292,04
Audi	0,992	12 112,50
Daimler	0,989	12 712,78
Opel	0,984	3 357,68
BMW	0,989	18 325,75
Ford	0,974	4 363,67
Fiat	0,943	4 971,82
Renault	0,949	6 469,01
Mazda	0,914	7 363,85
Nissan	0,904	5 758,33
Honda	0,881	7 994,37
Toyota	0,934	13 214,84
Peugeot	0,899	6 307,93
Mitsubishi	0,847	8 532,19
Seat	0,918	8 449,49
Citroen	0,828	6 797,02
Skoda	0,942	10 554,67
Porsche	0,854	34 706,88
Volvo	0,713	9 398,97
Hyundai	0,366	8 729,24

Tabelle 8.11: Ergebnisse Bühlmann-Straub Modell: durchschn. Schadenshöhe

Wir sehen an diesem Beispiel sehr schön, dass die Credibility Gewichte der Marken, die weniger versicherte Fahrzeuge über den Beobachtungszeitraum haben (im Extremfall bei Volvo und Hyundai, die erst ab 2003 bzw. 2009 in die Versicherung eintreten), geringer ausfallen, als andere. So wird etwa bei Hyundai das Gesamtmittel aller Marken mehr Credibility zugewiesen, als den individuellen Hyundai Mitteln, was dazu führt, dass der Credibility Schätzer von Hyundai mit 8.729 € über dem Hyundai Mittel über zwei Jahre in Höhe von 5.751 € liegt.

8.4 Umgang mit großen Schäden

8.4.1 Allgemeiner Umgang

In der Realität kann es vorkommen, dass unerwartet hohe Schäden auftreten. Für Risikogruppen, die über längere Zeit nur eine geringe Schadenssumme produzierten und dementsprechend dank großem Credibility-Gewicht auch eine relativ geringe Prämie zahlen müssen, kann ein Auftreten eines exorbitanten Schadens innerhalb einer anderen Gruppe zu einem akuten Anstieg der zu zahlenden Prämie führen. Dies folgt daraus, dass durch eine höhere Varianz in der Schadenssumme durch den großen Schaden auch das Credibility-Gewicht für erstere Gruppe sinken kann und somit die zu zahlende Prämie zum Schadensausgleich für die Versicherung plötzlich steigt. Da dies allerdings lediglich für Einzelfälle, die diesen plötzlichen Schadenszuwachs zu verantworten haben, gelten sollte, und die übrigen Versicherten dafür nicht einstehen sollten, bedient man sich einer Technik, die exorbitant große Schäden aus der Berechnung für den Prämienbeitrag herauszufiltert, indem man die Schadensdaten passend transformiert (die sog. *Trunkierung*). Hierzu bedienen wir uns einer Funktion f , die unsere Ausgangsdaten (etwa die durchschnittliche Schadenshöhe) in ein passendes Ausmaß transformiert. In der Regel wird versucht, eine Obergrenze festzulegen, auf die eine Zufallsvariable reduziert wird, falls die Obergrenze überschritten wird. Zunächst eine allgemeine Definition:

Definition 61. Der beste Schätzer der Form

$$\widehat{\mu_X(\Theta_i)} = \alpha_0 + \sum_{i,j} \alpha_j^{(i)} U_j^{(i)}$$

für $P^{\text{ind}} = \mu_X(\Theta_i) = \mathbb{E} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i \right]$ heißt der *semi-lineare Credibility Schätzer* für $\mu_X(\Theta_i)$ basierend auf den transformierten Daten $\left(U_j^{(i)} \right)_{i,j} := \left(f \left(X_j^{(i)} \right) \right)_{i,j}$.

Wir könnten nun mit unseren bisherigen Ergebnissen für das Bühlmann-Straub Modell den homogenen und inhomogenen Credibility Schätzer für $\mu_Y(\Theta_i) = \mathbb{E} \left[U_j^{(i)} \mid \Theta_i \right]$ basierend auf den Daten $\left(U_j^{(i)} \right)_{i,j}$ berechnen. Das wollen wir allerdings nicht, da unsere Ausgangslage die Daten $\left(X_j^{(i)} \right)_{i,j}$ sind und auch größere Schäden in Betracht gezogen werden sollen (allerdings nur in einem gewissen Ausmaß). Es gilt also weiterhin die Größe $\mu_X(\Theta_i) = \mathbb{E} \left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i \right]$ zu schätzen.

Theorem 62. Der semi-lineare Credibility Schätzer für $\mu_X(\Theta)$ im Bühlmann-Straub Modell basierend auf den durch f transformierten Daten $\left(U_j^{(i)} \right)_{i,j} := \left(f \left(X_j^{(i)} \right) \right)_{i,j}$ ist

gegeben durch

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_X^{(f)}(\Theta_i) &= \mu_X + \frac{\sigma_{\text{HM},XU}}{\sigma_{\text{HM},X}^2} Z_U^{(i)} (\bar{U}^{(i)} - \mu_U) \\ &= \mu_X + \frac{\sigma_{\text{HM},X}}{\sigma_{\text{HM},U}} \rho_{XU} Z_U^{(i)} (\bar{U}^{(i)} - \mu_U)\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\mu_X &= \mathbb{E}[\mu_X(\Theta_i)] & \mu_U &= \mathbb{E}[\mu_U(\Theta_i)] \\ \sigma_{\text{HM},X}^2 &= \mathbb{V}[\mu_X(\Theta_i)] & \sigma_{\text{HM},U}^2 &= \mathbb{V}[\mu_U(\Theta_i)] \\ \sigma_{\text{HM},XU} &= \text{Cov}(\mu_X(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i)) \\ \rho_{XU} &= \text{Corr}(\mu_X(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i)) = \frac{\sigma_{\text{HM},XU}}{\sigma_{\text{HM},X} \sigma_{\text{HM},U}} \\ \mu_{\text{PV},U}^2 &= \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left[U_j^{(i)} \mid \Theta_i\right]\right] \\ Z_U^{(i)} &= \frac{n_i}{n_i + K_U} & K_U &= \frac{\mu_{\text{PV},U}^2}{\sigma_{\text{HM},U}^2} \\ \bar{U}^{(i)} &= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} U_j^{(i)}\end{aligned}$$

Der quadratische Verlust des semi-linearen Credibility Schätzerst ist dann

$$\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mu}_X^{(f)}(\Theta_i) - \mu_X(\Theta_i)\right)^2\right] = \sigma_{\text{HM},X}^2 \left(1 - \rho_{XU}^2 Z_U^{(i)}\right)$$

Beweis. Nach Kapitel 6 und 7 hat der Credibility Schätzer im Bühlmann-Straub Modell der Form

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_X^{(f)}(\Theta_i) &= \Pr(\mu_X(\Theta_i) | L(1, \mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(R)})) \\ &= \Pr(\mu_X(\Theta_i) | L(1, \mathbf{U}^{(i)})) \\ &= \Pr(\Pr(\mu_X(\Theta_i) | L(1, \mathbf{U}_i, \mu_U(\Theta_i))) | L(1, \mathbf{U}^{(i)}))\end{aligned}$$

die Normalgleichungen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mu_X^{(f)}(\Theta_i)\right] &= \mathbb{E}[\mu_X(\Theta_i)] = \mu_X \\ \text{Cov}(\mu_X(\Theta_i), U_j^{(i)}) &= \text{Cov}(\mu_X^{(f)}(\Theta_i), U_j^{(i)}) \\ \text{Cov}(\mu_X(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i)) &= \text{Cov}(\mu_X^{(f)}(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i))\end{aligned}$$

zu erfüllen, wenn wir

$$\mu_X^{(f)}(\Theta_i) := \Pr(\Pr(\mu_X(\Theta_i) | L(1, \mathbf{U}^{(i)}, \mu_U(\Theta_i))) | L(1, U^{(i)}))$$

definieren. Dies hängt nicht von $U_j^{(i)}$, da $U_j^{(i)}$ zwar lediglich Informationen über $\mu_U(\Theta_i)$ enthalten, dies aber bereits als Variable in der Definition von $\mu_X^{(f)}(\Theta_i)$ gegeben ist. Das heißt, dass $\mu_X^{(f)}(\Theta_i)$ die Form

$$\mu_X^{(f)}(\Theta_i) = \alpha_0^{(f)} + \alpha_1^{(f)} \mu_U(\Theta_i).$$

hat. Insbesondere folgt, dass mit der letzten Normalgleichung automatisch die Vorletzte erfüllt ist, denn

$$\mathbb{E} \left[\mu_X(\Theta_i) \cdot U_j^{(i)} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mu_X(\Theta_i) \cdot U_j^{(i)} \mid \Theta_i \right] \right] = \mathbb{E} \left[\mu_X(\Theta_i) \cdot \mu_U(\Theta_i) \right]$$

und damit die Kovarianzterme übereinstimmen. Wir können die mittlere Normalgleichung also zunächst vernachlässigen und betrachten nochmals erstere und letztere: Mit obiger Darstellung folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \text{CoV}[\mu_X(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i)] &= \text{CoV}[\mu_X^{(f)}(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i)] \\ &= \text{CoV}[\alpha_0^{(f)} + \alpha_1^{(f)} \mu_U(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i)] \\ &= \alpha_1^{(f)} \mathbb{V}[\mu_U(\Theta_i)] \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mu_X^{(f)}(\Theta_i) &= \mu_X + \frac{\text{CoV}[\mu_X(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i)]}{\mathbb{V}[\mu_U(\Theta_i)]} (\mu_U(\Theta_i) - \mu_U) \\ &= \mu_X + \frac{\sigma_{\text{HM},XU}}{\sigma_{\text{HM},U}^2} Z_U^{(i)} (\bar{U}^{(i)} - \mu_U), \end{aligned}$$

wenn wir $\bar{U}^{(i)}$ als Credibility-Schätzer für $\mu_U(\Theta_i)$ wählen.

Für den quadratischen Verlust folgt:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left(\widehat{\mu}_X^{(f)}(\Theta_i) - \mu_X(\Theta_i) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\mu_X(\Theta_i) - \mu_X'(\Theta_i) \right)^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\mu_X'(\Theta_i) - \widehat{\mu}_X^{(f)}(\Theta_i) \right)^2 \right] \\ &= \left(\sigma_{\text{HM},X}^2 - 2 \frac{\sigma_{\text{HM},XU}}{\sigma_{\text{HM},U}^2} \sigma_{\text{HM},XU} + \frac{\sigma_{\text{HM},XU}^2}{(\sigma_{\text{HM},U}^2)^2} \sigma_{\text{HM},U}^2 \right) + \frac{\sigma_{\text{HM},XU}^2}{(\sigma_{\text{HM},U}^2)^2} \sigma_{\text{HM},U}^2 (1 - Z_U^{(i)}) \\ &= \sigma_{\text{HM},X}^2 - \frac{\sigma_{\text{HM},XU}^2}{\sigma_{\text{HM},U}^2} Z_U^{(i)} \end{aligned}$$

□

Wie auch in den Kapiteln zuvor müssen wir erneut unsere Strukturparameter schätzen. Diese ergeben sich analog zum Bühlmann-Straub Modell aus den Größen:

$$\begin{aligned}
 S_X &= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n \left(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)} \right)^2 \\
 S_U &= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n \left(U_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)} \right)^2 \\
 S_{XU} &= \frac{1}{R(n-1)} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^n \left(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)} \right) \left(U_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)} \right) \\
 T_X &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{n_i}{n_\Sigma} \left(\bar{X}^{(i)} - \bar{X} \right)^2 \\
 T_U &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{n_i}{n_\Sigma} \left(\bar{U}^{(i)} - \bar{U} \right)^2 \\
 T_{XU} &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{n_i}{n_\Sigma} \left(\bar{X}^{(i)} - \bar{X} \right) \left(\bar{U}^{(i)} - \bar{U} \right) \\
 C &= \frac{R-1}{R} \left[\sum_{i=1}^R \frac{n_i}{n_\Sigma} \left(1 - \frac{n_i}{n_\Sigma} \right) \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

sodass für die Schätzer gilt:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mu_{PV,X}^2} &= S_X \\
 \widehat{\mu_{PV,U}^2} &= S_U \\
 \widehat{\sigma_{HM,X}^2} &= \max \left[C \cdot \left(T_X - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{PV,X}^2}}{n_\Sigma} \right), 0 \right] \\
 \widehat{\sigma_{HM,U}^2} &= \max \left[C \cdot \left(T_U - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{PV,U}^2}}{n_\Sigma} \right), 0 \right] \\
 \widehat{\sigma_{HM,XU}} &= \operatorname{sgn} \left(T_{XU} - \frac{R \cdot S_{XU}}{n_\Sigma} \right) \cdot \sqrt{\min \left[C^2 \cdot \left(T_{XU} - \frac{R \cdot S_{XU}}{n_\Sigma} \right)^2, \left(\widehat{\sigma_{HM,X}^2} \cdot \widehat{\sigma_{HM,U}^2} \right) \right]} \\
 \widehat{\mu_X} &= \left(\sum_{i=1}^R Z_X^{(i)} \bar{X}^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^R Z_X^{(i)} \right)^{-1} \\
 \widehat{\mu_U} &= \left(\sum_{i=1}^R Z_U^{(i)} \bar{U}^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^R Z_U^{(i)} \right)^{-1}
 \end{aligned}$$

8.4.2 Berücksichtigung von Volumenmaßen

Nun stellt sich die Frage, ob man die Ideen der Trunkierung aus dem vorherigen Kapitel auch auf ein Bühlmann-Straub Modell mit Volumenmaßen anwenden kann. Dies ist nicht der Fall, denn die durchschnittliche Schadenshöhe $X_j^{(i)}$ hängt in diesem Fall vom Volumenmaß $m_j^{(i)}$ ab. Wollen wir nun etwa eine gewisse Obergrenze für zu große Schäden festlegen, wir also etwas wie $U_j^{(i)} = \min(X_j^{(i)}, t)$ definieren, so erfüllt $U_j^{(i)}$ aufgrund der Abhängigkeit von $X_j^{(i)}$ von $m_j^{(i)}$ nicht mehr die benötigten Voraussetzungen des Bühlmann-Straub Modells. Dieses Problem lässt sich aber insofern lösen, dass wir nicht mehr einzelnen Schäden eine Maximalgrenze vorgeben, sondern unsere Modellannahmen leicht modifizieren:

Notationen 63. Bezeichnet $N_j^{(i)}$ die Anzahl der Schäden der i -ten Risikogruppe im j -ten Jahr, so ergibt sich bei Einzelschäden $Y_j^{(i,\nu)}$ der i -ten Risikogruppe im j -ten Jahr ein Gesamtschadensvolumen in Höhe von

$$S_j^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{N_j^{(i)}} Y_j^{(i,\nu)}$$

und somit eine Schadensrate der i -ten Risikogruppe im j -ten Jahr von

$$X_j^{(i)} = \frac{S_j^{(i)}}{m_j^{(i)}}.$$

Annahmen 64. Für die Zufallsvariablen $X_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq n$ im Schadensratenverlauf $\mathbf{X}^{(i)}$ des i -ten Versicherungsblockes, $1 \leq i \leq R$ gelten:

▷ **bedingte Unabhängigkeit**

bedingt unter $\Theta_i = \vartheta_i$ sind die Zufallsvariablen $N_j^{(i)}$ und $Y_j^{(i,\nu)}$ ($j = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, R$, $\nu = 1, \dots, N_j^{(i)}$) unabhängig voneinander, wobei $N_j^{(i)}$ $\text{Poisson}(m_j^{(i)}\eta(\Theta_i))$ verteilt und $Y_j^{(i,\nu)}$ unabhängig identisch verteilt ist mit Verteilungsfunktion $F_{\Theta_i}(y)$.

▷ **Unabhängigkeit der Blöcke**

Die Paare $(\Theta_1, \mathbf{X}^{(1)}), \dots, (\Theta_R, \mathbf{X}^{(R)})$ der R Versicherungsblöcke sind unabhängig

▷ **Verteilung Parameterraum**

Θ_i seien für $1 \leq i \leq R$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen

Hieraus folgen direkt

$$\mathbb{E}[X_j^{(i)} | \Theta_i] = \eta(\Theta_i) \mathbb{E}[Y_j^{(i,\nu)} | \Theta_i] =: \mu_X(\Theta_i)$$

$$\mathbb{V}\left[X_j^{(i)} \mid \Theta_i\right] = \frac{1}{m_j^{(i)}} \eta(\Theta_i) \mathbb{E}\left[Y_j^{(i,\nu)^2} \mid \Theta_i\right] =: \frac{1}{m_j^{(i)}} \sigma_X^2(\Theta_i)$$

Für die Beschränkung der Schadensraten machen wir noch folgende

Notationen 65. Bezeichnet $N_j^{(i)}$ erneut die Anzahl der Schäden der i -ten Risikogruppe im j -ten Jahr, so notieren wir bei Einzelschäden $Y_j^{(i,\nu)}$ der i -ten Risikogruppe im j -ten Jahr den beschränkten Schaden durch

$$G_j^{(i,\nu)} := \min\left(Y_j^{(i,\nu)}, t\right).$$

Hieraus folgt die aggregierte Schadenshöhe

$$T_j^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{N_j^{(i)}} G_j^{(i,\nu)}$$

und die Schadensrate nach Beschränkung anhand t

$$U_j^{(i)} = \frac{T_j^{(i)}}{m_j^{(i)}}.$$

Analog zum Fall ohne Trunkierung ergeben sich die Momente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[U_j^{(i)} \mid \Theta_i\right] &=: \mu_U^{(\Theta_i)} = \eta(\Theta_i) \cdot \mathbb{E}\left[G_j^{(i,\nu)} \mid \Theta_i\right] \\ \mathbb{V}\left[Z_j^{(i)} \mid \Theta_i\right] &=: \frac{\sigma_U^2(\Theta_i)}{m_j^{(i)}} \\ \sigma_U^2(\Theta_i) &:= \eta(\Theta_i) \mathbb{E}\left[G_j^{(i,\nu)^2} \mid \Theta_i\right] \end{aligned}$$

Wir erhalten mit einem analogen Beweis zum Fall ohne Gewichte den Credibility Schätzer:

Theorem 66. Unter obigen modifizierten Annahmen ist der semi-lineare Credibility Schätzer mit Trunkierung der Schäden zum Punkt t gegeben durch

$$\widehat{\mu}_X^{(m)}(\Theta_i) = \mu_X + \frac{\mu_{\text{PV},X}}{\mu_{\text{PV},U}} \rho_{XU} Z_U^{(i)} \left(Z^{(i)} - \mu_U\right),$$

wobei

$$Z_U^{(i)} = \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)} + \frac{\mu_{\text{PV},U}^2}{\sigma_{\text{HM},U}^2}}$$

$$\rho_{XU} = \text{Corr}(\mu_X(\Theta_i), \mu_U(\Theta_i))$$

$$Z^{(i)} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j^{(i)}}{m_\Sigma^{(i)}} Z_j^{(i)}$$

Als zu berechnende Größen ergeben sich analog zum Fall ohne Gewichte

$$\begin{aligned} S_X &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} \left(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)} \right)^2 \\ S_U &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} \left(X_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)} \right)^2 \\ S_{XU} &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} \left(X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)} \right) \left(U_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)} \right) \\ T_X &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma} \left(\bar{X}^{(i)} - \bar{X} \right)^2 \\ T_U &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma} \left(\bar{U}^{(i)} - \bar{U} \right)^2 \\ T_{XU} &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma} \left(\bar{X}^{(i)} - \bar{X} \right) \left(\bar{U}^{(i)} - \bar{U} \right) \\ C &= \frac{R-1}{R} \left[\sum_{i=1}^R \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma} \left(1 - \frac{m_\Sigma^{(i)}}{m_\Sigma} \right) \right]^{-1} \end{aligned}$$

sodass die Schätzer der Strukturparameter entstehen durch

$$\begin{aligned} \widehat{\mu_{\text{PV},X}^2} &= S_X \\ \widehat{\mu_{\text{PV},U}^2} &= S_U \\ \widehat{\sigma_{\text{HM},X}^2} &= \max \left[C \cdot \left(T_X - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{\text{PV},X}^2}}{n_\Sigma} \right), 0 \right] \\ \widehat{\sigma_{\text{HM},U}^2} &= \max \left[C \cdot \left(T_U - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{\text{PV},U}^2}}{n_\Sigma} \right), 0 \right] \\ \widehat{\sigma_{\text{HM},XU}} &= \text{sgn} \left(T_{XU} - \frac{R \cdot S_{XU}}{n_\Sigma} \right) \cdot \sqrt{\min \left[C^2 \cdot \left(T_{XU} - \frac{R \cdot S_{XU}}{n_\Sigma} \right)^2, \left(\widehat{\mu_{\text{PV},X}^2} \cdot \widehat{\sigma_{\text{HM},U}^2} \right) \right]} \\ \widehat{\mu_X} &= \left(\sum_{i=1}^R Z_X^{(i)} \bar{X}^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^R Z_X^{(i)} \right)^{-1} \\ \widehat{\mu_U} &= \left(\sum_{i=1}^R Z_U^{(i)} \bar{U}^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^R Z_U^{(i)} \right)^{-1} \end{aligned}$$

8.4.3 Anwendung

Wir wollen die Ergebnisse erneut anwenden. Hierzu nutzen wir die bereits bekannten Daten aus Kapitel 8.1: Zur Vereinfachung und Übersichtlichkeit gehen wir im Folgenden von nur einem Gesamtschaden pro Periode aus, der dann auf einen gewissen Punkt reduziert wird, falls dieser überschritten wird. Wir legen diese Grenzen folgendermaßen fest:

$$t^V = 4.600.000.000 \text{ €} \quad t^T = 950.000.000 \text{ €}.$$

Damit ergeben sich:

Jahr	Gesamtschaden		gekürzter Gesamtschaden	
	Vollkasko	Teilkasko	Vollkasko	Teilkasko
	Mio.	Mio.	Mio.	Mio.
2000	4.212	973	4.212	950
2001	4.242	879	4.242	879
2002	4.614	1.036	4.600	950
2003	4.478	922	4.478	922
2004	4.337	841	4.337	841
2005	4.280	796	4.280	796
2006	4.349	788	4.349	788
2007	4.530	823	4.530	823
2008	5.014	953	4.600	950
2009	5.057	809	4.600	809
2010	5.371	785	4.600	785
2011	5.738	870	4.600	870

Tabelle 8.12: Trunkierung: Gesamtschaden & gekürzter Gesamtschaden

Nun stellen wir die benötigten Variablen für unsere Berechnungen in folgender Tabelle zusammen

Jahr	Fahrzeugbestand		Schadensrate		gekürzte Schadensrate		Gesamtschaden			
	m^V	m^T	X^V	X^T	U^V	U^T	$m^V X^V$	$m^T X^T$	$m^V U^V$	$m^T U^T$
	Tsd.	Tsd.	€	€	€	€	Mil	Mil	Mil	Mil
2000	17.398	13.987	242,10	69,56	242,10	67,92	4.212	973	4.212	950
2001	17.942	13.585	236,43	64,70	236,43	64,70	4.242	879	4.242	879
2002	18.481	13.285	249,66	77,98	248,90	61,51	4.614	1.036	4.600	950
2003	18.981	13.136	235,92	70,19	235,92	70,19	4.478	922	4.478	922
2004	19.218	13.003	225,67	64,68	225,67	64,68	4.337	841	4.337	841
2005	19.418	12.874	220,41	61,83	220,41	61,83	4.280	796	4.280	796
2006	19.940	12.736	218,10	61,87	218,10	61,87	4.349	788	4.349	788
2007	20.177	12.624	224,51	65,19	224,51	65,19	4.530	823	4.530	823
2008	20.662	12.592	242,67	75,68	222,63	75,44	5.014	953	4.600	950
2009	21.743	12.225	232,58	66,18	211,56	66,18	5.057	809	4.600	809
2010	22.586	12.085	237,80	64,96	203,67	64,96	5.371	785	4.600	785
2011	23.025	12.207	249,21	71,27	199,78	71,27	5.738	870	4.600	870
Σ	239.571	154.339					56.222	10.475	53.428	10.363

Tabelle 8.13: Trunkierung: Berechnungen 1

Es ergeben sich direkt

$$m_{\Sigma}^{\Sigma} = 393.910.000$$

$$\bar{X}^V = \sum_{j=1}^{12} \frac{m_j^V}{m_{\Sigma}^V} X_j^V = \frac{56.222.000.000}{393.910.000} = 234,68 \text{ €}$$

$$\bar{X}^T = \sum_{j=1}^{12} \frac{m_j^T}{m_{\Sigma}^T} X_j^T = \frac{10.475.000.000}{393.910.000} = 67,87 \text{ €}$$

$$\bar{U}^V = \sum_{j=1}^{12} \frac{m_j^V}{m_{\Sigma}^V} U_j^V = \frac{53.428.000.000}{393.910.000} = 223,02 \text{ €}$$

$$\bar{U}^T = \sum_{j=1}^{12} \frac{m_j^T}{m_{\Sigma}^T} U_j^T = \frac{10.363.000.000}{393.910.000} = 67,14 \text{ €}$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \bar{X}^{(i)} = 169,32 \text{ €}$$

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \bar{U}^{(i)} = 161,94 \text{ €}$$

$$C = \frac{R-1}{R} \left[\sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \left(1 - \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} \right) \right]^{-1} = 1,05$$

Für die weiteren notwendigen Berechnungen stellen wir folgende Tabellen mit Teilergebnissen auf:

j	$(X_j^V - \bar{X}^V)^2$	$(X_j^T - \bar{X}^T)^2$	$(U_j^V - \bar{U}^V)^2$	$(U_j^T - \bar{U}^T)^2$	$(X_j^V - \bar{X}^V)(U_j^V - \bar{U}^V)$	$(X_j^T - \bar{X}^T)(U_j^T - \bar{U}^T)$
1	55,04	2,87	364,10	0,60	141,57	1,31
2	3,06	10,03	179,91	5,96	23,48	7,73
3	224,52	102,26	670,24	19,05	387,92	44,14
4	1,54	5,38	166,53	9,27	16,03	7,06
5	81,07	10,19	7,07	6,09	-23,94	7,88
6	203,46	36,48	6,77	28,24	37,10	32,10
7	274,68	35,98	24,12	27,80	81,39	31,63
8	103,32	7,17	2,24	3,81	-15,22	5,22
9	63,84	61,04	0,15	68,90	-3,07	64,85
10	4,40	2,87	131,17	0,94	24,02	1,64
11	9,76	8,49	374,40	4,79	-60,45	6,37
12	211,11	11,56	539,75	17,03	-337,56	14,03
Σ	1.235,81	294,32	2.466,45	192,46	271,27	223,96

Tabelle 8.14: Trunkierung: Berechnungen 2

j	$m^V (X_j^V - \bar{X}^V)^2$	$m^T (X_j^T - \bar{X}^T)^2$	$m^V (U_j^V - \bar{U}^V)^2$	$m^T (U_j^T - \bar{U}^T)^2$	$m^V \dots$	$m^T \dots$
	Tsd	Tsd	Tsd	Tsd	Tsd	Tsd
1	957.606	40.162	331.980	10.851	2.462.948	18.388
2	54.990	136.201	240.659	-33.157	421.316	104.986
3	4.149.356	1.358.589	478.454	57.987	7.169.154	586.396
4	29.294	70.625	244.946	39.991	304.300	92.728
5	1.558.032	132.544	51.092	-32.079	-460.030	102.417
6	3.950.692	469.669	-50.511	-68.417	720.481	413.241
7	5.477.142	458.224	-97.925	-67.151	1.622.964	402.787
8	2.084.735	90.454	30.220	-24.631	-307.181	65.932
9	1.319.024	768.632	-7.942	104.518	-63.458	816.586
10	95.632	35.090	-249.022	-11.840	522.253	20.060
11	220.476	102.585	-437.024	-26.440	-1.365.419	77.034
12	4.860.767	141.155	-534.927	50.368	-7.772.262	171.278
Σ	24.757.747	3.803.929	201.057	85.341	3.255.067	2.871.832

Tabelle 8.15: Trunkierung: Berechnungen 3

Damit gelten:

$$\begin{aligned}
 S_X &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{11} \sum_{j=1}^{12} m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)})^2 \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 11} (24.757.747.000 + 3.803.929.000) = 2.596.516.047
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_U &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)})^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{11} \sum_{j=1}^{12} m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)})^2 \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 11} (201.057.000 + 85.341.000) = 26.036.202
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{XU} &= \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)}) (U_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{12-1} \sum_{j=1}^{12} m_j^{(i)} (X_j^{(i)} - \bar{X}^{(i)}) (U_j^{(i)} - \bar{U}^{(i)}) \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 11} (3.255.067.029 + 2.871.832.393) = 278.495.428
 \end{aligned}$$

$$T_X = \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{i=1}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X})^2 \\
 &= \frac{2}{393.910.000} (239.571.000 (234,68 - 169,32)^2 + 154.339.000 (67,87 - 169,32)^2) \\
 &= 13.261,06 \\
 T_U &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{U}^{(i)} - \bar{U})^2 \\
 &= 2 \sum_{i=1}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{U}^{(i)} - \bar{U})^2 \\
 &= \frac{2}{393.910.000} (239.571.000 (223,02 - 161,94)^2 + 154.339.000 (67,14 - 161,94)^2) \\
 &= 11.579,13 \\
 T_{XU} &= \frac{R}{R-1} \sum_{i=1}^R \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X}) (\bar{U}^{(i)} - \bar{U}) \\
 &= 2 \sum_{i=1}^2 \frac{m_{\Sigma}^{(i)}}{m_{\Sigma}} (\bar{X}^{(i)} - \bar{X}) (\bar{U}^{(i)} - \bar{U}) \\
 &= \frac{2}{393.910.000} [(239.571.000 \cdot (234,68 - 169,32)(223,02 - 161,94)) \\
 &\quad + (154.339.000 \cdot (67,87 - 169,32)(67,14 - 161,94))] \\
 &= 12.391,59
 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten können wir nun die benötigten Schätzer für die Strukturparameter folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mu_{PV,X}^2} &= S_X = 2.596.516.047 \\
 \widehat{\mu_{PV,U}^2} &= S_U = 26.036.202 \\
 \widehat{\sigma_{HM,X}^2} &= \max \left[0; C \cdot \left(T_X - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{PV,X}^2}}{m_{\Sigma}} \right) \right] \\
 &= \max \left[0; 1,05 \cdot \left(13.261,06 - \frac{2 \cdot 2.596.516.047}{393.910.000} \right) \right] \\
 &= 13.899 \\
 \widehat{\sigma_{HM,U}^2} &= \max \left[0; C \cdot \left(T_U - \frac{R \cdot \widehat{\mu_{PV,U}^2}}{m_{\Sigma}} \right) \right] \\
 &= \max \left[0; 1,05 \cdot \left(12.938,00 - \frac{2 \cdot 26.036.202}{393.910.000} \right) \right] \\
 &= 12.148
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma_{\text{HM},XU}} &= \text{sgn} \left(T_{XU} - \frac{R \cdot S_{XU}}{m_{\Sigma}^{\Sigma}} \right) \cdot \sqrt{\min \left[C^2 \cdot \left(T_{XU} - \frac{R \cdot S_{XU}}{m_{\Sigma}^{\Sigma}} \right)^2, (\sigma_{\text{HM},X}^2 \cdot \sigma_{\text{HM},U}^2)^{\frac{1}{2}} \right]} \\ &= \text{sgn} (12.390, 18) \cdot \sqrt{\min (161.056.889, 168.836.212, 10)} \\ &= 12.691\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{K}_X &= \frac{\widehat{\mu_{\text{PV},X}^2}}{\widehat{\sigma_{\text{HM},X}^2}} = 186.819 & \widehat{K}_U &= \frac{\widehat{\mu_{\text{PV},U}^2}}{\widehat{\sigma_{\text{HM},U}^2}} = 2.143 \\ \widehat{Z}_X^V &= \frac{m_{\Sigma}^V}{m_{\Sigma}^V + \widehat{K}_X} = 0.999221 & \widehat{Z}_U^V &= \frac{m_{\Sigma}^V}{m_{\Sigma}^V + \widehat{K}_U} = 0,99999105 \\ \widehat{Z}_X^T &= \frac{m_{\Sigma}^T}{m_{\Sigma}^T + \widehat{K}_X} = 0,998791 & \widehat{Z}_U^T &= \frac{m_{\Sigma}^T}{m_{\Sigma}^T + \widehat{K}_U} = 0,99998611\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_X &= \left(\sum_{i=1}^R \widehat{Z}_X^{(i)} \bar{X}^{(i)} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^R \widehat{Z}_X^{(i)} \right)^{-1} = 151,29 \\ \widehat{\mu}_U &= \left(\sum_{i=1}^R \widehat{Z}_U^{(i)} \bar{U}^{(i)} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^R \widehat{Z}_U^{(i)} \right)^{-1} = 145,08\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die Schätzer für Voll- und Teilkasko:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_X^{(235)}(\Theta_V) &= \widehat{\mu}_X + \frac{\widehat{\sigma_{\text{HM},X}}}{\widehat{\sigma_{\text{HM},U}}} \widehat{\rho}_{XU} \widehat{Z}_U^V (\bar{U}^V - \widehat{\mu}_U) \\ &= \widehat{\mu}_X + \frac{\widehat{\sigma_{\text{HM},XU}}}{\widehat{\sigma_{\text{HM},U}^2}} \widehat{Z}_U^V (\bar{U}^V - \widehat{\mu}_U) \\ &= 151,29 + \frac{12.691}{12.148} \cdot 0,99999105 \cdot (223,02 - 145,08) \\ &= 232,71 \text{ €}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_X^{(68)}(\Theta_T) &= \widehat{\mu}_X + \frac{\widehat{\sigma_{\text{HM},X}}}{\widehat{\sigma_{\text{HM},U}}} \widehat{\rho}_{XU} \widehat{Z}_U^T (\bar{U}^T - \widehat{\mu}_U) \\ &= \widehat{\mu}_X + \frac{\widehat{\sigma_{\text{HM},XU}}}{\widehat{\sigma_{\text{HM},U}^2}} \widehat{Z}_U^T (\bar{U}^T - \widehat{\mu}_U) \\ &= 151,29 + \frac{12.691}{12.148} \cdot 0,99998611 \cdot (67,14 - 145,08) \\ &= 69,87 \text{ €}\end{aligned}$$

Kapitel 9

Fazit & Ausblick

Was wollten wir mit dieser Arbeit bezwecken? Wir hatten uns zum Ziel genommen, auf verschiedene Art und Weisen Schätzer für bestimmte Versicherungsgrößen zukünftiger Perioden anhand vergangener gesammelter Daten zu berechnen.

Mit einem ersten Ansatz über den Bayes Schätzer haben wir eine sehr intuitive Herangehensweise kennengelernt, die allerdings zu nicht allzu zufriedenstellenden Ergebnissen geführt haben, da wir Informationen über die Schadensverteilung und Struktur des Versicherungskollektivs benötigten. Die Berechnung dieser stellte sich als teilweise sehr aufwändig heraus. Oft wird in der Praxis in solchen Fällen auch auf die Kenntnisse eines erfahrenen Aktuars zurückgegriffen. Dies genügte uns jedoch nicht.

Dementsprechend mussten wir einen gewissen Kompromiss eingehen, indem wir uns in den folgenden Kapiteln nur noch auf solche Schätzer konzentriert haben, die linear vom Beobachtungsvektor abhängen. Um die somit eingeführten Credibility Schätzer zu bestimmen, bedarf es also nur noch der Informationen über den Versicherungsbestand bzw. -verlauf. Nachdem wir das Konzept der Credibility Schätzer mithilfe von Hilberträumen verallgemeinert hatten, konnten wir es auf jegliche denkbare Situation anwenden und uns auch mit Spezialfällen, wie der Trunkierung befassen.

Alles in allem scheint das bisher Eingeführte über Credibility Schätzer einen großen Teil der Berechnungen, die ein Aktuar anstellt, abzudecken. Allerdings haben wir in unseren Ausführungen einige Einschränkungen getroffen, die Raum für viele weitere Möglichkeiten in der Berechnung lassen. Allgemein gesehen haben wir etwa gänzlich auf die Berücksichtigung von Verwaltungskosten und Gewinnabsichten der Ver-

sicherungen verzichtet.

Im Bereich des Bayes Ansatzes haben wir uns bei der Anwendung auf den Spezialfall der Poisson-Gamma Verteilung konzentriert. Auch hier gibt es einige weitere potentielle Möglichkeiten, etwa Binomial-Beta oder Normal-Normal, um nur zwei weitere Beispiele zu nennen.

Die Theorie rund um die Credibility Schätzer scheinen wir relativ allgemein gehalten behandelt zu haben, sodass sie mit bestimmten Notationen und Einschränkungen auf beliebige Sachverhalte anwendbar ist. Aber auch hier gibt es noch einigen Raum für Modellerweiterungen, wie etwa der hierarchischen Credibility oder multidimensionalen Credibility, die sich damit beschäftigt, dass man zur Berechnung der Prämien die Claimhäufigkeiten und Claimgrößen nicht separat berechnet, sondern davon ausgeht, dass diese beiden Größen Einfluss aufeinander haben. Auch darauf haben wir bei unseren Ausführungen bisher keinen Wert gelegt und lediglich getrennt berechnet.

Wie man also sieht, ist die Theorie rund um die Credibility Theorie nahezu unerschöpflich, wir haben aber einen Gesamtüberblick und eine Einführung der wichtigsten Größen und Berechnungsarten gegeben, auf denen sich jede weitere Theorie aufbauen lässt.

Literaturverzeichnis

- [BG05] BÜHLMANN, HANS & GISLER, ALOIS: *A Course in Credibility Theory and its Applications*; Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005
- [FAR06] FARNY, DIETER: *Versicherungsbetriebslehre*; Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2006
- [GDV00] GESAMTVERBAND DER DEUTSCHEN VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT e.V. (Hrsg.): *Jahrbuch 2000-2011*, Berlin, 2001-2012
- [HIP01] HIPP, CHRISTIAN (Hrsg.): *Risikotheorie 1*, Karlsruhe, 2001
- [HIP02] HIPP, CHRISTIAN (Hrsg.): *Risikotheorie 2, Stochastische Methoden und Statistische Verfahren*, Karlsruhe, o.J.
- [ICO12] ICONOMIX, Bildungsinitiative der Schweizerischen Nationalbank: *Was ist eine Versicherung?* [pdf-Dokument online], verfügbar unter: iconomix.ch/fileadmin/user_upload/docs/mat/de/a032_versicherung_arbeitsauftrag.pdf [01.04.2014], Zürich, 2002
- [LON62] LONGLEY-COOK, L.H.: *An Introduction to Credibility Theory*, o.O., 1962
- [MAC97] MACK, THOMAS: *Schadensversicherungsmathematik*, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 1997
- [MAH90] MAHLER, HOWARD C. & DEAN, CURTIS GARY: *Foundations of Casualty Actuarial Science, Chapter 8: Credibility*; Casualty Actuarial Society, Virginia (USA), 1990
- [MEI01] MEINEKE, SABINE: *Bonus-Malus Systeme*; Friedrichsdorf, 2001/2002
- [TSE09] TSE, YIU-KUEN: *Nonlife Actuarial Models. Theory, Methods and Evaluation*; Cambridge University Press, Singapur, 2009

Anhang

```

# Die aus den Bestandsdaten geschätzten Schadensraten bleiben
# innerhalb der Klassen in den Jahren konstant

XV      = 56222000000/239571000
XT      = 10475000000/154339000
XH      = 116581000000/470590000

mV      = 239571000
mT      = 154339000
mH      = 470590000
mS      = mV+mT+mH

barX    = (XV*mV+XT*mT+XH*mH)/mS

# Wir genügen uns hier mit dem Ergebnis für den Erwartungswert
# der Prozessvarianz der Excel Tabelle auf ganze Zahlen gerundet,
# da der Wert sehr hoch ist.

epv     = 4062055784

# Definition der Funktion zur Bestimmung des Credibility
# Gewichts, abhängig von der betrachteten Klasse
# (Vollkasko = 1, Teilkasko = 2, Haftpflicht = 3).

credweight <- function(insured)
{
  if(vth==1)
  {
    mV      = insured
    mT      = 154339000
    mH      = 470590000
  }
  if(vth==2)
  {
    mV      = 239571000
    mT      = insured
    mH      = 470590000
  }

  if(vth==3)
  {
    mV      = 239571000
    mT      = 154339000
    mH      = insured
  }

  mS      = mV+mT+mH
  hilf1   = mV*(barX-XV)^2
  hilf2   = mT*(barX-XT)^2
  hilf3   = mH*(barX-XH)^2
}

```

```
hilf4 = (mV/mS)*(1-(mV/mS))
hilf5 = (mT/mS)*(1-(mT/mS))
hilf6 = (mH/mS)*(1-(mH/mS))
hilf7 = hilf4+hilf5+hilf6

C      = (2/3)/hilf7

vhm    = C*(((1.5*(hilf1+hilf2+hilf3))/mS)-(3*epv)/mS)

K      = epv/vhm

ZV     = mV/(mV+K)
ZT     = mT/(mT+K)
ZH     = mH/(mH+K)

if(vth==1)
{
    return(ZV)
}

if(vth==2)
{
    return(ZT)
}

if(vth==3)
{
    return(ZH)
}
}

# Plotten der verschiedenen Abhängigkeiten für jede Klasse

vth=1
plot(credweight, xlim=c(0, mV/100), col="blue", type="p",
     pch=3, xlab="Anzahl_versicherter_PKW", ylab="Credibility_Gewicht",
     main="Credibility_Gewichtsverlauf_gemessen_am_Volumenmaß")

vth=2
x <- seq(0, mV/100, 20000)
y = credweight(x)
lines(x, y, type="p", pch=8, col="green")

vth=3
x <- seq(0, mV/100, 20000)
y = credweight(x)
lines(x, y, type="p", pch=4, col="red")

legend("bottomright", pch = c(3,8,4), col = c("blue", "green", "red"),
      legend = c("Vollkasko", "Teilkasko", "Haftpflicht"))
```

```

# Die aus den Bestandsdaten geschätzten Schadensraten bleiben
# innerhalb der Klassen in den Jahren konstant

XV      = 56222000000/239571000
XT      = 10475000000/154339000
XH      = 116581000000/470590000

mV      = 239571000
mT      = 154339000
mH      = 470590000
mS      = mV+mT+mH
barX    = (XV*mV+XT*mT+XH*mH)/mS

# Wir genügen uns hier mit dem Ergebnis für den Erwartungswert
# der Prozessvarianz der Excel Tabelle auf ganze Zahlen gerundet,
# da der Wert sehr hoch ist.

epv     = 4468003052

# Definition der Funktion zur Bestimmung des Credibility
# Schätzers, abhängig von der betrachteten Klasse
# (Vollkasko = 1, Teilkasko = 2, Haftpflicht = 3).

credweight <- function(insured)
{
  if(vth==1)
  {
    mV      = insured
    mT      = 154339000
    mH      = 470590000
  }

  if(vth==2)
  {
    mV      = 239571000
    mT      = insured
    mH      = 470590000
  }

  if(vth==3)
  {
    mV      = 239571000
    mT      = 154339000
    mH      = insured
  }

  mS      = mV+mT+mH
  hilf1   = mV*(barX-XV)^2
  hilf2   = mT*(barX-XT)^2
  hilf3   = mH*(barX-XH)^2
}

```



```
hilf4 = (mV/mS)*(1-(mV/mS))
hilf5 = (mT/mS)*(1-(mT/mS))
hilf6 = (mH/mS)*(1-(mH/mS))
hilf7 = hilf4+hilf5+hilf6

C      = (2/3)/hilf7

vhm    = C*(((1.5*(hilf1+hilf2+hilf3))/mS)-(3*epv)/mS)

K      = epv/vhm

ZV     = mV/(mV+K)
ZT     = mT/(mT+K)
ZH     = mH/(mH+K)
ZS     = ZV+ZT+ZH

mu0    = 183.50

sXV    = ZV*XV+(1-ZV)*mu0
sXT    = ZT*XT+(1-ZT)*mu0
sXH    = ZH*XH+(1-ZH)*mu0

if(vth==1)
{
    return(sXV)
}

if(vth==2)
{
    return(sXT)
}

if(vth==3)
{
    return(sXH)
}
}

# Plotten der verschiedenen Abhängigkeiten für jede Klasse

vth=1
plot(credweight, xlim=c(0, mV/100), ylim=c(60, 250), col="blue", type="p",
     pch=3, xlab="Anzahl_versicherter_PKW", ylab="Credibility_Schätzer",
     main="Credibility_Schätzer_gemessen_am_Volumenmaß")

vth=2
x <- seq(0, mV/100, 20000)
y = credweight(x)
lines(x, y, type="p", pch=8, col="green")
```

```
vth=3
x <- seq(0,mV/100,20000)
y = credweight(x)
lines(x,y,type="p",pch=4, col="red")

legend("bottomright", pch = c(3,8,4),
      col = c("blue", "green", "red"),
      legend = c("Vollkasko", "Teilkasko", "Haftpflicht"))
```