Kapitel II
Der Galton-Watson-Prozeß mit Immigration

In diesem Kapitel werden wir das Modell des einfachen GWP's um die Komponente der *Immigration* erweitern, was bedeutet, daß sich die Generationen der betrachteten Population nicht nur aus den Nachkommen der Elterngeneration sondern aus einer weitern zufälligen Anzahl von einwandernden Individuen zusammensetzen.

1. Modellbeschreibung

Eine natürliche Erweiterung des bisher zugrundeliegenden Evolutionsschemas einfacher GWP bildet die Möglichkeit der *Immigration.* Dies soll bedeuten, daß zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ eine zufällige Anzahl neuer Mitglieder von außen (Immigranten) zur betrachteten Population hinzustoßen kann, um anschließend gemäß derselben Verteilung wie alle anderen Individuen und unabhängig von diesen und deren Vorfahren Nachkommen zu zeugen. Zur Spezifikation des Modells bedarf es dann neben der Angabe der Reproduktionsverteilung offensichtlich auch der eines Immigrationsschemas im Zeitablauf. Das im folgenden behandelte, von Heathcote stammende Modell nimmt an, daß die Anzahl der Immigranten zu sukzessiven Zeitpunkten u.i.v. Zufallsgrößen bilden. Der resultierende stochastische Prozeß der Generationsgrößen heißt dann *Galton-Watson Prozeß mit Immigration.* Hier ist dessen formale Definition.

1.1. Definition. Es seien $(Z_n(j))_{n\geq 0}$, $j \in \mathbb{N}_0$, stochastisch unabhängige GWP mit derselben Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ und Reproduktionsmittel μ. $Z_0(1), Z_0(2), \ldots$ seien außerdem identisch verteilt mit gemeinsamer Verteilung $(c_j)_{j\geq 0}$. Dann heißt

$$Z_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} Z_{n-j}(j), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

ein *Galton-Watson Prozeß mit Immigration (GWPI)* mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, *Immigrationsverteilung* $(c_j)_{j\geq 0}$ und $Z_0 = Z_0(0)$ Urahnen. $(Z_n)_{n\geq 0}$ wird wiederum als subkritisch (kritisch, superkritisch) bezeichnet, falls $\mu < (=, >)\, 1$ gilt.

Die Interpretation von (1.1) ist, daß sich zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ die jeweilige Generation zusammensetzt aus dem Nachwuchs der vorherigen Generation,

$$Z_n' \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} Z_{n-j}(j) \tag{1.2}$$

an der Zahl, sowie der zufälligen Anzahl $Z_0(n)$ von Immigranten, die neu zur Population hinzustoßen, und anschließend wie alle anderen reproduzieren, d.h. Urahnen eines einfachen GWP $(Z_k(n))_{k\geq 0}$ mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ bilden. Dessen j-te Generation bildet damit natürlich eine Teilmenge der $(n+j)$-ten Generation der betrachteten Gesamtpopulation.

Sei $\mathcal{F}_n = \sigma((Z_k(j))_{0\leq j+k\leq n})$ für $n\geq 0$. Die Annahmen in Definition 1.1 implizieren, daß $Z_0(n)$ sowohl von $\mathcal{F}_{n-1}$ als auch von Z_n' unabhängig ist für jedes $n\geq 1$ und daß

$$\mathbb{P}(Z_n'=j, Z_0(n)=k|\mathcal{F}_{n-1}) \;=\; \mathbb{P}(Z_n'=j|\mathcal{F}_{n-1})\,\mathbb{P}(Z_0(n)=k) \quad \text{f.s.} \tag{1.3}$$

für alle $n\geq 1$ and $i,j,k\geq 0$. Da Z_n' die Zahl des Nachwuchses der $(n-1)$-ten Generation angibt, folgt außerdem

$$\mathbb{P}(Z_n'=j|\mathcal{F}_{n-1}) \;=\; \mathbb{P}(Z_n'=j|Z_{n-1}) \;=\; p_j^{*(i)} \quad \text{f.s. auf } \{Z_{n-1}=i\} \tag{1.4}$$

für alle $n\geq 1$ and $i,j\geq 0$. Aus diesen Tatsachen erhalten wir, daß $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine DMK bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ bildet mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{i,j\geq 0}$ der Form

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mathbb{P}(Z_n=j|Z_{n-1}=i) \\ &= \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(Z_n'=j-k, Z_0(n)=k|Z_{n-1}=i) \\ &= \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(Z_n'=j-k|Z_{n-1}=i)\,\mathbb{P}(Z_0(n)=k) \\ &= \sum_{k=0}^{j} p_{j-k}^{*(i)} c_k \end{aligned} \tag{1.5}$$

für all $i,j\in\mathbb{N}_0$.

Wir haben bisher nichts über die Anzahl der Urahnen $Z_0=Z_0(0)$ gesagt. Wir können natürlich auch hier ein kanonisches Modell mit W-Maßen $\mathbb{P}_i, i\in\mathbb{N}_0$ auf einem meßbaren Raum $(\Omega,\mathfrak{A})$ derart konstruieren, daß unter jedem $\mathbb{P}_i$ die Annahmen der obigen Definition erfüllt sind und zusätzlich $\mathbb{P}_i(Z_0=i)=1$ gilt. In den nachfolgenden Untersuchungen ist es aus Gründen der Darstellung am günstigsten, für $Z_0(0)$ dieselbe Verteilung $(c_j)_{j\geq 0}$ wie für die übrigen $Z_0(n)$, $n\geq 1$, vorauszusetzen, was in dem gerade erwähnten kanonischen Modell der Zugrundelegung des W-Maßes $\mathbb{P}=\sum_{j\geq 0} c_j\mathbb{P}_j$ entspricht. Der Leser prüft leicht nach, daß eine Abweichung von dieser Annahme die anschließenden Resultate entweder überhaupt nicht beeinflußt oder nur geringfügige Modifikationen erfordert (☞ z.B. Übung 3.1).

2. Erzeugende Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz einige Informationen über die e.F. von Z_n sammeln, die mit h_n bezeichnet wird. f sei wie im vorhergehenden Paragraphen die e.F. der Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, f_n deren n-te Iteration sowie h die e.F. der Immigrationsverteilung

$(c_j)_{j\geq 0}$. Aufgrund der am Ende von Abschnitt 1 gemachten Verteilungsannahme über Z_0 gilt dann $h_0 = h$. Unter Hinweis auf (1.3) folgt

$$\mathbb{E}(s^{Z_n}|\mathcal{F}_{n-1}) \;=\; \mathbb{E}(s^{Z'_n}|Z_{n-1})\,\mathbb{E}(s^{Z_0(n)}) \;=\; f(s)^{Z_{n-1}}h(s) \quad \text{f.s.} \tag{2.1}$$

für alle $n \geq 1$ und $s \in [0,1]$ und deshalb

$$h_n(s) \;=\; h(s)\,\mathbb{E}(f(s)^{Z_{n-1}}) \;=\; h(s)\cdot h_{n-1}\circ f(s). \tag{2.2}$$

Eine andere Rechnung unter Rückgriff auf (1.1) liefert

$$\begin{aligned} h_n(s) &= \prod_{j=0}^{n} \mathbb{E}(s^{Z_{n-j}(j)}) \\ &= \prod_{j=0}^{n} \left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}(s^{Z_{n-j}(j)}|Z_0(j)=k)\, c_k \right) \\ &= \prod_{j=0}^{n} \left(\sum_{k\geq 0} f_{n-j}(s)^k c_k \right) \\ &= \prod_{j=0}^{n} h\circ f_j(s) \\ &= h\circ f_n(s)\cdot h_{n-1}(s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

für alle $n \geq 1$ und $s \in [0,1]$. Diese Rekursionsformel zeigt, daß h_n monoton fallend gegen eine Limesfunktion h_∞ auf $[0,1]$ konvergiert, die $h_\infty(1) = 1$ und $h_\infty(s) = \sum_{k\geq 0} d_k s^k$ für $s \in [0,1)$ und geeignete $d_k \geq 0$ erfüllt. Darüber hinaus impliziert (2.2)

$$h_\infty(s) \;=\; h(s)\cdot h_\infty\circ f(s) \tag{2.4}$$

für $s \in [0,1]$. Im nächsten Abschnitt geben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß h_∞ e.F. einer Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ bildet, also dafür, daß $\lim_{s\uparrow 1} h_\infty(s) = 1$.

3. Subkritischer und kritischer Fall: Ein Stabilitätsgesetz und ein Gamma-Grenzwertsatz

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, daß sich ein einfacher GWP niemals auf einem positiven, endlichen Niveau stabilisiert. Eine naheliegende Frage lautet deshalb, ob dies mittels einer geeigneten Immigrationsrate erreicht werden kann. Es ist klar, daß eine positive Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Immigranten pro Generation das Aussterben des Prozesses mit Sicherheit ausschließt, auch wenn der Zustand 0 anders als beim einfachen GWP nicht mehr absorbierend ist und daher zwischenzeitlich angenommen werden kann. Wenn aber auch die Explosion des Prozesses ausgeschlossen werden soll, darf jedes Mitglied nur einen endlichen Stammbaum generieren, muß der zugehörige GWP also Austerbewahrscheinlichkeit 1 haben, d.h. subkritisch oder kritisch sein. Satz 3.1 gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für ein derartiges Stabilitätsresultat. Die Notation der beiden vorhergehenden Abschnitte behalten wir selbstverständlich bei.

3.1. Satz (Foster, Williamson). *Gegeben ein GWPI $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $0<\mu\leq 1$, gilt: Z_n konvergiert für $n\to\infty$ genau dann in Verteilung gegen eine endliche Zufallsgröße Z_∞ mit e.F. h_∞, wenn*

$$\int_0^1 \frac{1-h(s)}{f(s)-s}\,ds \;<\; \infty. \tag{3.1}$$

In diesem Fall bildet h_∞ die eindeutige auf ganz $[0,1]$ stetige Lösung der Gleichung (2.4) mit Wert 1 in 1.

Sei $\xi=(\xi_j)_{j\geq 0}$ die Verteilung von Z_∞. Dann impliziert Satz 3.1 vermöge

$$\xi_j \;=\; \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z_{n+1}=j) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}(Z_n=i)p_{ij} \;=\; \sum_{i\geq 0}\xi_i p_{ij}$$

für alle $j\geq 0$, daß ξ eine stationäre Verteilung von $(Z_n)_{n\geq 0}$ bildet, d.h. die Invarianzgleichung $\xi\boldsymbol{P}=\xi$ erfüllt. Als DMK ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ folglich unter $\mathbb{P}_\xi=\sum_{j\geq 0}\xi_j\mathbb{P}_j$ ein stationärer Prozeß, d.h.

$$\mathbb{P}_\xi((Z_n)_{n\geq 0}\in\cdot) \;=\; \mathbb{P}_\xi((Z_{k+n})_{n\geq 0}\in\cdot)$$

für alle $k\in\mathbb{N}$. Man kann ferner zeigen, daß jeder Zustand $j\in\mathbb{N}_0$ mit $\xi_j>0$ positiv rekurrent ist und daß (☞ Übung 3.1) Z_n sogar unter jeder Startverteilung die asymptotische Verteilung ξ besitzt, die damit bis auf skalares Vielfaches die einzige Lösung der obigen Invarianzgleichung bildet.

Als Folgerung aus Satz 3.1 und einem analytischen Lemma ähnlich zu Lemma I.6.5 ergibt sich das folgende, ältere Resultat von Heathcote im subkritischen Fall. Zum Beweis ☞ Übung 3.3.

3.2. Korollar (Heathcote). *Gegeben ein subkritischer GWPI $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $p_0<1$, gilt: Z_n konvergiert für $n\to\infty$ genau dann in Verteilung gegen eine endliche Zufallsgröße Z_∞ mit e.F. h_∞, wenn*

$$\sum_{n\geq 2} c_n\,\log n<\infty. \tag{3.2}$$

Für einen kritischen GWPI $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit endlicher Reproduktionsvarianz σ^2 und endlichem *Immigrationsmittel* $\nu=\sum_{j\geq 1}c_j=h'(1)$ ist die Situation anders, denn mit Hilfe von Satz 3.1 folgt leicht, daß Z_n nicht in Verteilung gegen einen endlichen Limes konvergieren kann (Übung 3.4). Stattdessen gilt ein bedingter Grenzwertsatz von ähnlichem Typ wie für einfache kritische GWP, ☞ (I.9.4) in Satz I.9.1. Die folgende, zugegebenermaßen sehr grobe Heuristik möge zu dessen Interpretation beitragen: Pro Zeiteinheit immigrieren durchschnittlich ν Mitglieder und bilden Urahnen unabhängiger einfacher GWP, von denen unter Hinweis auf (I.9.2) in Satz I.9.1

etwa $\frac{2\nu}{n\sigma^2}$ nach n Generationen nicht ausgestorben sind. Langfristig sollten daher im Mittel $\frac{2\nu}{\sigma^2}$ Prozesse überleben. Gemäß (I.9.4) sind diese aber nach Normierung alle approximativ exponentialverteilt mit Parameter $\frac{2}{\sigma^2}$, so daß für $\frac{Z_n}{n}$ bedingt unter $Z_n > 0$ eine Gamma-Verteilung mit Parametern $\frac{2\nu}{\sigma^2}$ und $\frac{2}{\sigma^2}$ plausibel erscheint, falls $n \to \infty$.

3.3. Satz (Pakes, Seneta). *Sind σ^2 und ν beide endlich, so konvergiert $\frac{Z_n}{n}$ in Verteilung gegen eine $\Gamma(\alpha, 1/\beta)$-verteilte Zufallsgröße Z_∞ mit $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\nu}{\sigma^2}$ and $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{2}$. Z_∞ besitzt folglich die Lebesgue-Dichte*

$$\gamma_{\alpha,\beta}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}\, \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t). \tag{3.3}$$

Bevor wir zum Beweis der beiden Sätze schreiten, sei noch bemerkt, daß im Fall eines kritischen GWPI mit *unendlicher* Reproduktionsvarianz sehr wohl Konvergenz in Verteilung möglich ist. Ein Beispiel hierfür wird in Übung 3.5 behandelt, ☞ auch Abschnitt 5 für weitere Untersuchungen der DMK $(Z_n)_{n\geq 0}$ im kritischen Fall.

Beweis von Satz 3.1: Wir hatten bereits am Ende des vorigen Abschnitts festgestellt, daß h_n punktweise auf $[0,1]$ gegen eine Funktion h_∞ konvergiert, nämlich

$$h_\infty = \prod_{j\geq 0} h \circ f_j = \prod_{j\geq 0} \big(1 - (1 - h\circ f_j)\big).$$

Diese ist e.F. einer möglicherweise defekten Verteilung Q auf $\mathbb{N}_0$, und nach dem Stetigkeitssatz I.A.5 gilt $Q(\mathbb{N}_0) = 1$ genau dann, wenn h_∞ in 1 linksseitig stetig ist, d.h. $\lim_{s\uparrow 1} h_\infty(s) = 1$ gilt. Statt h_∞ betrachten wir im folgenden $\log h_\infty$ auf $[0,1]$. Wegen

$$0 \leq -\sum_{j\geq n} \log h\circ f_j(s) \leq -\sum_{j\geq n} \log h \circ f_j(0)$$

für alle $s \in [0,1]$ und $n \geq 0$ ist $\log h_\infty$ genau dann gleichmäßiger Limes der stetigen Funktionen $\sum_{j=0}^n \log h\circ f_j$ und damit ebenfalls stetig auf $[0,1]$, wenn

$$-\sum_{j\geq 0} \log h\circ f_j(0) \asymp \sum_{j\geq 0} (1 - h\circ f_j(0)) < \infty. \tag{3.4}$$

Statt der im Satz behaupteten Äquivalenz reicht es demnach, die Äquivalenz von (3.1) und (3.4) zu beweisen. Aufgrund der Konvexität von f, h sind

$$\frac{1-h(s)}{1-s} \quad \text{und} \quad \frac{1-s}{f(s)-s} = \left(1 - \frac{1-f(s)}{1-s}\right)^{-1}$$

beide monoton wachsend in s, was zusammen mit $f_j(0) \uparrow 1$

$$\sum_{j\geq 0}(1 - h\circ f_j(0)) = \sum_{j\geq 0} \frac{1 - h\circ f_j(0)}{f\circ f_j(0) - f_j(0)} (f_{j+1}(0) - f_j(0))$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \frac{1-h(s)}{f(s)-s}\, ds \\
&\leq \sum_{j\geq 0} \frac{1-h\circ f_{j+1}(0)}{f\circ f_{j+1}(0)-f_{j+1}(0)}\,(f_{j+1}(0)-f_j(0)) \\
&= \sum_{j\geq 0}(1-h\circ f_{j+1}(0))\,\frac{f_{j+1}(0)-f_j(0)}{f\circ f_{j+1}(0)-f\circ f_j(0)}
\end{aligned}$$

liefert. Da außerdem für alle $j \geq 0$ nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f_{j+1}(0)-f_j(0)}{f\circ f_{j+1}(0)-f\circ f_j(0)} \;=\; \frac{1}{f'(s_j)}$$

für ein $f_j(0) < s_j < f_{j+1}(0)$ und da $f'(s_j) \to f'(1) = \mu \in (0,1]$ gilt, konvergiert die letzte Summe der obigen Ungleichung genau dann, wenn dies für die erste Summe der Fall ist, und wir erhalten somit die gewünschte Äquivalenz.

Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit von h_∞ als auf $[0,1]$ stetige Lösung von (2.4) mit Wert 1 in 1. Sei also $\tilde{h}_\infty$ eine weitere solche Lösung. Eine Iteration der Beziehung (2.4) ergibt auf $[0,1)$

$$\begin{aligned}
|h_\infty - \tilde{h}_\infty| &= |h|\,|h_\infty\circ f - \tilde{h}_\infty\circ f| \\
&\leq |h_\infty\circ f - \tilde{h}_\infty\circ f| \\
&= |h|\,|h_\infty\circ f_2 - \tilde{h}_\infty\circ f_2| \\
&\leq |h_\infty\circ f_2 - \tilde{h}_\infty\circ f_2| \\
&\;\vdots \\
&\leq |h_\infty\circ f_n - \tilde{h}_\infty\circ f_n| \;\to\; |h_\infty(1) - \tilde{h}_\infty(1)| \;=\; 0,
\end{aligned}$$

falls $n \to \infty$. Die Konvergenz am Ende folgt aus der Stetigkeit von $h_\infty, \tilde{h}_\infty$ in 1 sowie der Tatsache, daß $f_n \uparrow 1$ auf $[0,1)$ gemäß Korollar I.3.2. ◇

Beweis von Satz 3.3: Die L.T. von $\frac{Z_n}{n}$ ist durch $h_n(e^{-t/n})$ gegeben, die von Z_∞ durch $(1+\beta t)^{-\alpha}$ (☞ Tabelle am Ende des Anhangs zu Kapitel I). Nach dem Stetigkeitssatz für L.T. (☞ [1], Theorem 45.7 oder [3], Theorem 2 auf S. 431) reicht es deshalb zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \log h_n(e^{-t/n}) \;=\; -\alpha\, \log(1+\beta t) \tag{3.5}$$

für alle $t > 0$. (2.3) impliziert

$$\log h_n(e^{-t/n}) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \log h\circ f_j(e^{-t/n}) \tag{3.6}$$

für alle $t > 0$ und $n \geq 0$. Weitere Bestandteile des Beweises von (3.5) sind eine Taylor-Entwicklung von $-\log h$ in 1, nämlich

$$-\log h(s) \;=\; (\nu + \rho(s))(1-s), \tag{3.7}$$

wobei $\lim_{s\uparrow 1}\rho(s)=0$, und Lemma I.9.3, das

$$\frac{1}{1-f_j(s)}-\frac{1}{1-s} \;=\; j(\beta+r_j(s)) \tag{3.8}$$

liefert, wobei $\lim_{j\to\infty} r_j(s)=0$ gleichmäßig in $s\in[0,1)$. (3.8) läßt sich umschreiben zu

$$1-f_j(s) \;=\; \frac{1-s}{1+j(\beta+r_j(s))(1-s)}. \tag{3.9}$$

Wir erhalten nun aus (3.6)-(3.9)

$$\begin{aligned}-\log h_n(e^{-t/n}) \;&=\; \sum_{j=0}^{n}\big(\nu+\rho\circ f_j(e^{-t/n})\big)\big(1-f_j(e^{-t/n})\big)\\ &=\; S_n(e^{-t/n}) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \sum_{j=0}^{n}\frac{\big(\nu+\rho\circ f_j(e^{-t/n})\big)\big(1-e^{-t/n}\big)}{1+j\big(\beta+r_j(e^{-t/n})\big)\big(1-e^{-t/n}\big)}\end{aligned}$$

für alle $t>0$. Für festes $t>0$ und beliebiges $\varepsilon\in(0,\beta)$ sei $m\in\mathbb{N}$ so groß, daß

$$\sup_{n\ge m}\sup_{j\ge 1}|\rho\circ f_j(e^{-t/n})| \;<\; \varepsilon \quad \text{und} \quad \sup_{n\ge m}\sup_{j\ge 1}|r_j(e^{-t/n})| \;<\; \varepsilon,$$

wobei $f(e^{-t/m})\le f_j(e^{-t/n})\le 1$ für alle $n\ge m$ and $j\ge 1$ beachtet werde. Offensichtlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_m(e^{-t/n}) \;=\; 0,$$

und für $n\ge m$

$$\sum_{j=m}^{n}\frac{(\nu-\varepsilon)(1-e^{-t/n})}{1+j(\beta+\varepsilon)(1-e^{-t/n})} \;\le\; S_n(e^{-t/n})-S_{m-1}(e^{-t/n}) \;\le\; \sum_{j=m}^{n}\frac{(\nu+\varepsilon)(1-e^{-t/n})}{1+j(\beta-\varepsilon)(1-e^{-t/n})}.$$

Unter Benutzung dieser Tatsachen sowie der einfachen Ungleichung

$$\frac{A}{B}\log\left(\frac{1+B(n-1)}{1+Bm}\right) \;\le\; \sum_{j=m}^{n}\frac{A}{1+Bj} \;\le\; \frac{A}{B}\log\left(\frac{1+Bn}{1+B(m-1)}\right)$$

für alle $A,B>0$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}&\frac{\nu-\varepsilon}{\beta+\varepsilon}\log\left(\frac{1+(\beta+\varepsilon)(1-e^{-t/n})(n-1)}{1+(\beta+\varepsilon)(1-e^{-t/n})m}\right)\\ &\qquad\le\; S_n(e^{-t/n})-S_{m-1}(e^{-t/n})\\ &\qquad\le\; \frac{\nu+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\log\left(\frac{1+(\beta-\varepsilon)(1-e^{-t/n})n}{1+(\beta-\varepsilon)(1-e^{-t/n})(m-1)}\right).\end{aligned}$$

Schließlich ergibt ein Grenzübergang $n\to\infty$

$$\begin{aligned}\frac{\nu-\varepsilon}{\beta+\varepsilon}\log(1+(\beta+\varepsilon)t) \;&\le\; \liminf_{n\to\infty} S_n(e^{-t/n})\\ &\le\; \limsup_{n\to\infty} S_n(e^{-t/n}) \;\le\; \frac{\nu+\varepsilon}{\beta-\varepsilon}\log(1+(\beta-\varepsilon)t),\end{aligned}$$

was (3.5) beweist, weil $\varepsilon \in (0, \beta)$ beliebig gewählt war. $\diamondsuit$

Übungen zu Abschnitt 3

Übung 3.1. Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWPI in einem kanonischen Modell mit $0 < \mu \leq 1$. Zeigen Sie, daß Z_n unter jedem $\mathbb{P}_i, i \in \mathbb{N}_0$, in Verteilung gegen die zu h_∞ aus Satz 3.1 gehörende Verteilung $\xi = (\xi_j)_{j\geq 0}$ konvergiert. Begründen Sie ferner, daß damit ξ bis auf skalares Vielfaches die einzige Lösung der Invarianzgleichung $\xi \boldsymbol{P} = \xi$ bildet und daß alle Zustände j mit $\xi_j = 0$ transient sind.

Übung 3.2. Zeigen Sie, daß in der Situation von Satz 3.1 $\min_{n\geq 0} Z_n = j_0$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt, wobei $j_0 = \min\{j \geq 0 : c_j > 0\}$.

Übung 3.3. (a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

$$\sum_{n\geq 2} c_n \log n < \infty, \tag{3.2}$$

$$\sum_{n\geq 0} (1 - h(1 - \delta^n)) < \infty \quad \text{für ein (alle) } \delta \in (0, 1) \tag{3.10}$$

und

$$\int_0^1 \frac{1 - h(s)}{1 - s}\, ds < \infty. \tag{3.11}$$

[Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Äquivalenz von (3.10) und (3.11) mittels eines ähnlichen Arguments wie vor (I.6.16) im Beweis von Lemma I.6.4.]

(b) Beweisen Sie Korollar 3.2 mittels Teil (a) und Satz 3.1.

Übung 3.4. Zeigen Sie mittels Satz 3.1 und *ohne* Benutzung von Satz 3.3, daß ein kritischer GWPI $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit endlicher Reproduktionsvarianz σ^2 und Immigrationsmittel $\nu \in (0, \infty)$ keinen endlichen Verteilungslimes besitzen kann.

Übung 3.5. (a) Zeigen Sie, daß $f(s) = s + \beta(1 - s)^\alpha$ für $\alpha \in (1, 2)$ und $\beta \in (0, \frac{1}{\alpha})$ e.F. einer Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ mit Erwartungswert 1 und Varianz ∞ bildet.

(b) (Seneta) Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWPI mit Immigrationsmittel $\nu \in (0, \infty)$ und einer Reproduktionsverteilung, deren e.F. f von der Form in Teil (a) ist. Zeigen Sie, daß Z_n für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine endliche Zufallsgröße Z_∞ konvergiert.

Übung 3.6. Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWPI mit $0 < \mu \leq 1$ und stationärer Verteilung $(\xi_j)_{j\geq 0}$ mit Erwartungswert η. Zeigen Sie: $\eta < \infty$ genau dann, wenn $\mu < 1$ und $\nu < \infty$, und in diesem Fall gilt $\eta = \frac{\nu}{1-\mu}$.

4. Der superkritische Fall: Ein Pendant zum Satz von Heyde, Seneta

Betrachten wir abschließend den superkritischen Fall und nehmen $\mu \in (1,\infty)$ an. Im Rückblick auf die Überlegungen für einfache superkritische GWP erscheint es naheliegend, zunächst das asymptotische Verhalten von $W_n = \mu^{-n} Z_n$ zu untersuchen. Im Fall endlichen Immigrationsmittels ν kann man in der Tat leicht nachweisen, daß

$$\frac{1}{\mu^n}\left(Z_n \;-\; \frac{\nu(\mu^{n+1}-1)}{\mu-1}\right) \;=\; W_n \;-\; \frac{\nu(\mu^{n+1}-1)}{\mu^{n+1}-\mu^n}, \quad n \geq 0 \tag{4.1}$$

ein $\mathfrak{L}_1$-beschränktes Martingal definiert und deshalb $\mathbb{P}$-f.s. gegen eine integrierbare Zufallsgröße $W - \frac{\nu\mu}{\mu-1}$ konvergiert (Übung 4.1). Jedoch ergibt sich mit Satz 4.1 weiter unten ein allgemeineres Ergebnis, wenn man noch einmal den Spuren folgt, die in I.6 zum Satz von Heyde-Seneta führten.

Wir erinnern daran, daß $Z_n = \sum_{j=0}^n Z_j(n-j)$, wobei $(Z_n(j))_{n\geq 0}$ u.i.v. einfache superkritische GWP mit Urahnenverteilung $(c_j)_{j\geq 0}$ bilden. Bezeichne g_n wie in Kapitel I die Inverse von f_n auf $(q,1)$, q wie bisher der kleinste Fixpunkt von f auf $[0,1]$, und sei $k_n = -1/\log g_n(s)$ für ein beliebiges $s \in (q,1)$. Gemäß Satz I.6.1 gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} k_n^{-1} Z_n(j) \;=\; V^*(j) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $j \geq 0$, und die $V^*(j), j \geq 0$ sind offenkundig u.i.v. Setzen wir nun

$$\varphi(t) \;=\; \mathbb{E}(e^{-tV^*(j)}|Z_0(j)=1), \quad t \geq 0,$$

so ergibt sich die unbedingte L.T. der $V^*(j)$ zu

$$\phi(t) \;=\; \sum_{k\geq 0} c_k\, \mathbb{E}(e^{-tV^*(j)}|Z_0(j)=k) \;=\; \sum_{k\geq 0} c_k \varphi(t)^k \;=\; h \circ \varphi(t), \tag{4.2}$$

wobei in mittlerweile vertrauter Weise Lemma I.1.2 verwendet wurde. Wir erinnern daran, daß gemäß Satz I.6.7 φ die Funktionalgleichung

$$\varphi(\mu t) \;=\; f \circ \varphi(t) \tag{4.3}$$

für alle $t \geq 0$ erfüllt. Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun den angekündigten Satz formulieren, der im Anschluß gezeigt werden soll.

4.1. Satz. *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWPI mit endlichem Reproduktionsmittel μ und $c_0 < 1$. Dann gilt mit den zuvor eingeführten Bezeichnungen, daß $W^* \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} k_n^{-1} Z_n$ $\mathbb{P}$-f.s. existiert, wobei*

$$\sum_{k\geq 2} c_k \log k = \infty \quad \Rightarrow \quad W^* = \infty \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \tag{4.4}$$

und

$$\sum_{k\geq 2} c_k \log k < \infty \quad \Rightarrow \quad 0 < W^* < \infty \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \tag{4.5}$$

In letzterem Fall genügt die L.T ψ von W^* der Gleichung

$$\psi(t) \;=\; \prod_{j\geq 0} h \circ \varphi\left(\frac{t}{\mu^j}\right) \tag{4.6}$$

für alle $t \geq 0$. Sofern die Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ die Bedingung $(ZlogZ)$ erfüllt, kann man für $(k_n)_{n\geq 0}$ auch speziell $(\mu^{-n})_{n\geq 0}$ als Normierungsfolge wählen.

Zum Beweis dieses Resultats geben wir zunächst ein Lemma, das nichts anderes als das Gegenstück zu Lemma I.6.4 bildet. Wir erinnern daran, daß $\mathcal{F}_n = \sigma((Z_k(j))_{0\leq j+k\leq n})$ für $n \geq 0$ (☞ Abschnitt 1), und definieren $X_n(s) = g_n(s)^{Z_n}$ für $n \geq 0$ und $s \in (q, 1)$.

4.2. Lemma. *$(X_n(s))_{n\geq 0}$ bildet für jedes $s \in (q, 1)$ ein nichtnegatives Supermartingal mit Werten in $[0, 1]$ und konvergiert $\mathbb{P}$-f.s. sowie in $\mathfrak{L}_p$, $p \geq 1$, gegen eine Zufallsgröße $X(s)$.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, daß $(X_n(s))_{n\geq 0}$ ein Supermartingal bildet, denn dann folgen die weiteren Behauptungen sofort aus der $[0, 1]$-Wertigkeit. Unter Benutzung von (1.2)-(1.4) erhalten wir aber für alle $n \geq 0$ und $s \in (q, 1)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g_{n+1}(s)^{Z_{n+1}}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(g_{n+1}(s)^{Z_{n+1}}|Z_n) \\
&= \mathbb{E}(g_{n+1}(s)^{Z'_{n+1}} g_{n+1}(s)^{Z_0(n+1)}|Z_n) \\
&= \mathbb{E}(g_{n+1}(s)^{Z'_{n+1}}|\mathcal{F}_n)\, \mathbb{E}(g_{n+1}(s)^{Z_0(n+1)}) \\
&= g_n(s)^{Z_n}\, h \circ g_{n+1}(s) \\
&\leq g_n(s)^{Z_n} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},
\end{aligned}$$

also das Gewünschte. ♢

Beweis von Satz 4.1: Mit $k_n = -1/\log g_n(s)$, $W_n^* = -\log X_n(s) = k_n^{-1} Z_n$ und $W^* = -\log X(s)$ für ein fest gewähltes $s \in (q, 1)$ folgt aus Lemma 4.2 die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz von W_n^* gegen W^*, wobei W^* mit positiver Wahrscheinlichkeit ∞ sein kann. Seien ψ und ψ_n die L.T.von W^* bzw. W_n^*. Dann gilt weiter $\psi_n(t) \to \psi(t)$ für alle $t \geq 0$ und $n \to \infty$ nach dem Stetigkeitssatz für L.T. (☞ [1], Theorem 45.7 oder [3], Theorem 2 auf S. 431). Mittels der Definition der $k_n, n \geq 0$ und der Beziehung (2.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\psi_n(t) &= h_n(e^{t \log g_n(s)}) \\
&= h_n(g_n(s)^t) \\
&= h \circ f_n(g_n(s)^t) \cdot h_{n-1}(g_n(s)^t) \\
&= h\Big(\mathbb{E}\big(g_n(s)^{tZ_n(0)}\big|Z_0(0) = 1\big)\Big) \cdot \mathbb{E}\big(g_n(s)^{tZ_{n-1}}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\big(g_n(s)^{tZ_n(0)}\big)\cdot\mathbb{E}\big(g_n(s)^{tZ_{n-1}}\big) \\ &= \mathbb{E}\big(e^{-tZ_n(0)/k_n}\big)\cdot\psi_{n-1}\left(\frac{tk_{n-1}}{k_n}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Da $k_n^{-1}Z_n(0) \to V^*(0)$ $\mathbb{P}$-f.s., folgt mit (4.2)

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big(g_n(s)^{tZ_n(0)}\big) \;=\; \phi(t) \;=\; h\circ\varphi(t). \tag{4.8}$$

Außerdem gilt $k_n/k_{n-1} \to \mu$ gemäß Satz I.6.1, so daß

$$\lim_{n\to\infty}\psi_{n-1}\left(\frac{tk_{n-1}}{k_n}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(e^{-t(k_{n-1}/k_n)W_{n-1}^*}) \;=\; \psi\left(\frac{t}{\mu}\right). \tag{4.9}$$

Zusammen ergeben (4.7)–(4.9) für alle $t > 0$ die rekursive Beziehung

$$\psi(t) \;=\; h\circ\varphi(t)\cdot\psi\left(\frac{t}{\mu}\right) \tag{4.10}$$

und deshalb bei Iteration

$$\psi(t) \;=\; \psi(0+)\cdot\prod_{j\ge 0} h\circ\varphi\left(\frac{t}{\mu^j}\right) \;=\; \psi(0+)\cdot\prod_{j\ge 0} h\circ g_j\circ\varphi(t), \tag{4.11}$$

wobei $\psi(0+) = \lim_{t\downarrow 0}\psi(t) \le \psi(0)$ (und Gleichheit genau dann gilt, wenn $W^* < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s.). Für die zweite Identität in (4.11) beachte, daß $\varphi(t) > \varphi(\infty) = \mathbb{P}(V^*(0) = 0|Z_0(0) = 1) = q$ gemäß Satz I.6.1 und daß (4.3) daher $g\circ\varphi(t) = \varphi(\frac{t}{\mu})$, also $g_j\circ\varphi(t) = \varphi(\frac{t}{\mu^j})$ für alle $t > 0$ und $j \ge 1$ impliziert. Für $t = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(e^{-W_n^*}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(g_n(s)^{Z_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} h_n\circ g_n(s) \\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n} h\circ f_j\circ g_n(s) \\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{j=0}^{n} h\circ g_{n-j}(s) \\ &= \prod_{j\ge 0} h\circ g_j(s) \end{aligned} \tag{4.12}$$

wobei (2.3) benutzt wurde. Als nächstes erinnern wir an (I.6.21), d.h.

$$1 - a^n \;\le\; g_n(s) \;\le\; 1 - b^n$$

für alle $n \ge k$ sowie geeignete $a, b \in (0,1)$ und $k \in \mathbb{N}$, denn damit liefert Übung 3.3, daß das unendliche Produkt in (4.12), also $\psi(1)$ genau dann positiv ist, wenn $\sum_{k\ge 2} c_k \log k < \infty$.

Unter Hinweis auf Lemma I.6.4 gilt nun ($Z_0 = Z_0(0)$)

$$\varphi(1) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-Z_n(0)/k_n}|Z_0 = 1) \;=\; \lim_{n\to\infty} E_1(g_n(s)^{Z_n(0)}) \;=\; s$$

so daß mit (4.11) and (4.12)

$$0 \;<\; \prod_{j\geq 0} h\circ g_j(s) \;=\; \psi(1) \;=\; \psi(0+)\prod_{j\geq 0} h\circ g_j(s),$$

d.h. $\psi(0+) = \mathbb{P}(W^* < \infty) = 1$ folgt. (4.6) ergibt sich dann daraus einfach durch Einsetzen in (4.11). Daß W^* $\mathbb{P}$-f.s. positiv ist, kann sich der Leser leicht selbst überlegen, indem er etwa $\psi(\infty) = \lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0$ mittels (4.10) nachweist (☞ Übung 4.2).

Falls $\sum_{k\geq 2} c_k \log k \;=\; \infty$, folgt $\psi(1) \;=\; 0$, und dies ist nur im Fall $\mathbb{P}(W^* \;=\; \infty) \;=\; 1$ möglich.

Sei schließlich noch ($ZlogZ$) für $(p_j)_{j\geq 0}$ angenommen. Dann gilt aber $\lim_{n\to\infty}\mu^{-n}k_n \in (0,\infty)$ (☞ (I.6.17)), was die letzte Behauptung des Satzes beweist. ♢

Übungen zu Abschnitt 4

Übung 4.1. Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWPI mit Immigrationsmittel $\nu \in (0,\infty)$. Zeigen Sie:

(a) Der in (4.1) definierte Prozeß bildet ein $\mathfrak{L}_1$-beschränktes Martingal und konvergiert folglich gegen eine integrierbare Zufallsgröße.

(b) Bezeichnen W und $V(j)$ die $\mathbb{P}$-f.s. Limiten von $W_n = \mu^{-n}Z_n$ (existiert gemäß (a)) bzw. $\mu^{-n}Z_n(j)$, falls $n\to\infty$, so folgt $W = \sum_{j\geq 0}\mu^{-j}V(j)$ $\mathbb{P}$-f.s.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent (vgl. Satz I.6.2 von Kesten, Stigum):

$$\mathbb{P}(W>0) = 1, \tag{4.13}$$

$$\mathbb{E}W = \frac{\nu\mu}{\mu-1}, \tag{4.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} E|W_n - W| \;=\; 0, \tag{4.15}$$

$$(W_n)_{n\geq 0} \text{ ist gleichgradig integrierbar,} \tag{4.16}$$

$$\mathbb{E}\sup_{n\geq 0} W_n < \infty, \tag{4.17}$$

$$\sum_{k\geq 1} p_k\, k\, \log k \;<\; \infty. \tag{$ZlogZ$}$$

(d) Ist ($ZlogZ$) verletzt, folgt $W = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

Übung 4.2. Gegeben seien die Situation von Satz 4.1 und die davor eingeführten Bezeichnungen. Es gelte $\sum_{k\geq 2} c_k \log k < \infty$. Zeigen Sie:

(a) $W^* = \sum_{j\geq 0}\mu^{-j}V^*(j) = V^*(0) + \mu^{-1}\widehat{W}^*$ $\mathbb{P}$-f.s., wobei $\widehat{W}^*$ eine von $V^*(0)$ unabhängige Kopie von W^* bildet.

(b) W^* ist $\mathbb{P}$-f.s. positiv mit nicht-degenerierter Verteilung.
(c) $EW^* < \infty$ genau dann, wenn $\nu < \infty$ und $(ZlogZ)$ gelten.

5.* Noch einmal der kritische Fall: Kriterien für Null-Rekurrenz und Transienz

In diesem Abschnitt kehren wir noch einmal zum kritischen Fall zurück und gehen der Frage nach, unter welchen Bedingungen ein kritischer GWPI $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit endlicher Reproduktionsvarianz σ^2 und endlichem Immigrationsmittel ν null-rekurrent ist. Wir hatten ja bereits bemerkt, daß mittels des Kriteriums (3.1) von Foster, Williamson leicht folgt (Übung 3.4), daß $(Z_n)_{n\geq 0}$ keinen endlichen Verteilungslimes und somit keine positiv rekurrenten Zustände besitzt. Die Frage der Null-Rekurrenz ist dagegen noch offen, und der anschließende Satz von Pakes gibt eine beinah erschöpfende Auskunft.

Der Einfachheit nehmen wir im folgenden an, daß $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine *irreduzible* DMK bildet, wozu $c_0 = h(0) > 0$ und $\sigma^2, \nu > 0$ notwendige Bedingungen sind (☞ auch Übung 3.2). Zur Untersuchung der Null-Rekurrenz können wir uns dann auf die Untersuchung des Zustands 0 beschränken. Legen wir wieder ein kanonisches Modell mit $\mathbb{P} = \sum_{i\geq 0} c_i\mathbb{P}_i$, $\mathbb{P}_i(Z_0 = i) = 1$ und $p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i(Z_n = j)$ für alle $i, j, n \in \mathbb{N}_0$ zugrunde, so gilt (☞ Satz 7.18 in [2])

$$0 \text{ null-rekurrent (transient)} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} p_{00}^{(n)} \; = (<)\; \infty, \tag{5.1}$$

sofern vorausgesetzt wird, daß 0 nicht ergodisch ist, also $\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = 0$ gilt. Wir definieren noch die e.F. von Z_n unter $\mathbb{P}_i$ durch

$$h_{in}(s) \;=\; E_i(s^{Z_n}) \;=\; \sum_{j\geq 0} p_{ij}^{(n)} s^j \tag{5.2}$$

für $i, n \in \mathbb{N}_0$.

5.1. Satz (Pakes). *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein irreduzibler, kritischer GWPI mit Reproduktionsvarianz $\sigma^2 \in (0,\infty)$ und Immigrationsmittel $\nu \in (0,\infty)$. Sei ferner $\gamma = \frac{2\nu}{\sigma^2} = \frac{2h'(1)}{f''(1)}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist null-rekurrent, falls $\gamma < 1$, und transient, falls $\gamma > 1$.

(b) Gilt außerdem $\sum_{j\geq 2} p_j j^2 \log j < \infty$ und $\sum_{j\geq 2} c_j j \log j < \infty$, so existiert eine auf $[0,1)$ positive und endliche Funktion $H(s) = \sum_{j\geq 0} a_j s^j$ mit nichtnegativen Koeffizienten derart, daß H die Funktionalgleichung (2.4) löst, d.h. $H = h \cdot H \circ f$, und

$$\lim_{n\to\infty} n^{\gamma} h_{in}(s) \;=\; H(s) \tag{5.3}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $s \in [0,1)$. Insbesondere ist $(Z_n)_{n\geq 0}$ dann im Fall "$\gamma = 1$" null-rekurrent.

Beweis von Satz 5.1(a): Wie bereits vor dem Satz bemerkt, reicht es, den Zustand 0 zu betrachten, und da wir bereits wissen, daß positive Rekurrenz ausgeschlossen ist, müssen wir gemäß (5.1) $\sum_{n\ge 0} p_{00}^{(n)} = (<)\,\infty$, falls $\gamma < (>)\,1$, nachweisen. Das Konvergenzkriterium von Raabe (☞ z.B. [4], S.207) besagt

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{p_{00}^{(n+1)}}{p_{00}^{(n)}}\right) \begin{array}{c} > \\ < \end{array} 1 \quad\Rightarrow\quad \sum_{n\ge 0} p_{00}^{(n)} \begin{array}{c} = \\ < \end{array} \infty.$$

Wie man leicht einsieht, gilt mit (2.3)

$$p_{00}^{(n+1)} \;=\; \mathbb{P}_0(Z_{n+1}=0) \;=\; \mathbb{P}(Z_n = 0) \;=\; h_n(0) \;=\; \prod_{j=0}^{n} h\circ f_j(0)$$

für alle $n \ge 0$ und deshalb weiter

$$n\left(1 - \frac{p_{00}^{(n+1)}}{p_{00}^{(n)}}\right) \;=\; n\,(1 - h\circ f_n(0)).$$

Die Taylor-Entwicklung $h(s) = 1 - \nu(1-s) + o(1-s)$ $(s \uparrow 1)$ sowie $n(1 - f_n(0)) \to \frac{2}{\sigma^2}$ (Lemma I.9.3) implizieren schließlich

$$n\,(1 - h\circ f_n(0)) \;=\; \nu n\,(1 - f_n(0)) \;+\; n\,o(1 - f_n(0)) \;\to\; \gamma \quad (n\to\infty)$$

und somit das Gewünschte.

Für den Beweis von Teil (b) benötigen wir zwei Lemmata, wobei das erste von ähnlichem Typ wie Lemma I.6.5 ist und das zweite eine Verschärfung von Lemma I.9.3 darstellt. Zu beliebiger e.F. $g(s) = \sum_{n\ge 0} a_j s^j$ mit $g'(1) < \infty$ seien zuvor definiert:

$$g^{\langle 1\rangle}(s) \;=\; \frac{1-g(s)}{1-s} \quad \text{und} \quad g^{\langle 2\rangle}(s) \;=\; \frac{g^{\langle 1\rangle}(1) - g^{\langle 1\rangle}(s)}{1-s} \tag{5.4}$$

für $s \in [0,1)$ sowie $g^{\langle 1\rangle}(1) = g'(1)$, $g^{\langle 2\rangle}(1) = \frac{g''(1)}{2}$. Aufgrund der Konvexität von g und g' sind diese Funktionen monoton wachsend, und es folgt unter Hinweis auf (I.6.25) in Übung I.6.1

$$\begin{aligned} g^{\langle 1\rangle}(s) \;&=\; \sum_{j\ge 0} a_{j+1}^{\langle 1\rangle} s^j, \quad a_k^{\langle 1\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\ge k} a_j, \\ g^{\langle 2\rangle}(s) \;&=\; \sum_{j\ge 0} a_{j+1}^{\langle 2\rangle} s^j, \quad a_k^{\langle 2\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\ge k} a_{j+1}^{\langle 1\rangle} \end{aligned} \tag{5.5}$$

für alle $s \in [0,1]$.

5.2. Lemma. *Sei $f(s) = \sum_{j\ge 0} p_j s^j$ die e.F. einer Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ und $\delta_n \in (0,1)$ mit $1 - \delta_n \simeq \frac{c}{n}$ für $n \to \infty$ und ein $c \in (0,\infty)$. Dann sind $\sum_{n\ge 1}(1 - f(\delta_n))/n < \infty$ und $\sum_{j\ge 2} p_j \log j < \infty$ äquivalente Bedingungen.*

Beweis: Es genügt die Behauptung für $\delta_n = \frac{c}{n}$, $c \in (0,1)$, zu zeigen, da stets $m, n_0 \in \mathbb{N}$ und $0 < c_1 < c_2 < 1$ existieren, so daß $\frac{c_1}{n+m} \le \delta_n \le \frac{c_2}{n-m}$ für alle $n \ge n_0$. Wie schon im Beweis von Lemma I.6.5, bedeute $\sum_{n\ge1} x_n \asymp \sum_{n\ge1} y_n$, daß die beiden Reihen entweder gemeinsam endlich oder gemeinsam unendlich sind. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge1} \frac{1}{n}(1 - f(1-c/n)) &= \sum_{n\ge1} \frac{c}{n^2} f^{\langle 1\rangle}(1-c/n) \\
&\asymp \sum_{n\ge1} \int_{1-c/n}^{1-c/(n+1)} f^{\langle 1\rangle}(s)\, ds \\
&= \int_{1-c}^{1} f^{\langle 1\rangle}(s)\, ds \\
&\asymp \sum_{n\ge1} \frac{p_n^{\langle 1\rangle}}{n} \\
&= \sum_{n\ge1} p_n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \\
&\asymp \sum_{n\ge1} p_n \log n,
\end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen. ♢

5.3. Lemma. *Ist $f(s) = \sum_{j\ge0} p_j s^j$ eine kritische e.F. mit $\sigma^2 = f''(1) < \infty$, so gilt*

$$\sum_{n\ge1} \frac{1}{n} \left| \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s} \right) \right| \;<\; \infty \tag{5.6}$$

genau dann, wenn $\sum_{j\ge2} p_j j^2 \log j < \infty$.

Beweis: Sei $g(s) = \frac{2}{\sigma^2} f^{\langle 2\rangle}(s)$, so daß $g(1) = 1$ gilt. Wir erhalten unter Beachtung von $\frac{f(s)-s}{1-s} = 1 - f^{\langle 1\rangle}(s)$ für $s \in [0,1)$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s} \right) &= \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{1-f_j(s)} - \frac{1}{1-f_{j-1}(s)} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{f \circ f_{j-1}(s) - f_{j-1}(s)}{(1-f_{j-1}(s))(1-f_j(s))} \\
&= \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - f^{\langle 1\rangle} \circ f_{j-1}(s)}{1-f_j(s)} \\
&= \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - f^{\langle 1\rangle} \circ f_{j-1}(s)}{1-f_{j-1}(s)} \;+\; O\left(\frac{\log n}{n} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g \circ f_{j-1}(s) \right) \;+\; O\left(\frac{\log n}{n} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2n} \sum_{j=1}^{n} (1 - g \circ f_{j-1}(s)) + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \quad (n \to \infty),$$

wobei in der drittletzten Zeile beachtet werde, daß $1 - f^{\langle 1 \rangle} \circ f_{j-1}(s) = O(\frac{1}{j})$, $1 - f_j(s) = O(\frac{1}{j})$ und $f_j(s) - f_{j-1}(s) = O(\frac{1}{j^2})$ (☞ Übung I.9.4) für $j \to \infty$ gelten. Damit folgt offensichtlich

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left| \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 - f_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right)\right| \asymp \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} (1 - g \circ f_{j-1}(s))$$
$$\asymp \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} (1 - g \circ f_{j-1}(s)),$$

und die letzte Reihe konvergiert wegen $j(1 - f_{j-1}(s)) \to \frac{2}{\sigma^2}$ gemäß Lemma 5.2 genau dann, wenn $\sum_{j \geq 2} p_j^{\langle 2 \rangle} \log j < \infty$. Eine einfache Rechnung zeigt aber (☞ Übung 5.1), daß diese Bedingung äquivalent ist zu $\sum_{j \geq 2} p_j j^2 \log j < \infty$. ◊

Beweis von Satz 5.1(b): Wir notieren als erstes, daß in den Bezeichnungen von Abschnitt 1

$$h_{in}(s) = E_i\left(s^{\sum_{j=0}^{n} Z_{n-j}(j)}\right) = E_i(s^{Z_n(0)}) \prod_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(s^{Z_j(n-j)}) = f_n(s)^i \prod_{j=0}^{n-1} h \circ f_j(s)$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in [0,1]$ gilt, so daß es wegen $f_n(s) \to 1$ für $n \to \infty$ reicht, die Behauptung (5.3) für $n^\gamma h_{0n}(s)$ zu zeigen. Offensichtlich gilt

$$n^\gamma h_{0n}(s) = h(s) \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{j}\right)^\gamma h \circ f_j(s) \tag{5.7}$$

für alle $s \in [0,1]$, und diese Folge konvergiert gegen einen endlichen positiven Limes, falls $\sum_{j \geq 1} d_j(s) - 1$, $d_j(s) \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \frac{1}{j})^\gamma h \circ f_j(s)$, absolut konvergiert. Unter Benutzung der Entwicklungen $(1 + \frac{1}{j})^\gamma = 1 + \frac{\gamma}{j} + O(\frac{1}{j^2})$ und $1 - h \circ f_j(s) = O(\frac{1}{j})$ für $j \to \infty$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d_n(s) - 1 &= \frac{\gamma}{n} - (1 - h \circ f_n(s)) - \frac{\gamma}{n}(1 - h \circ f_n(s)) + O(n^{-2})\, h \circ f_n(s) \\ &= \frac{\gamma}{n} - \nu(1 - f_n(s)) + (\nu - h^{\langle 1 \rangle} \circ f_n(s))(1 - f_n(s)) + O(n^{-2}), \end{aligned} \tag{5.8}$$

falls $n \to \infty$. Für den dritten Term der letzten Zeile folgt wegen $n(1 - f_n(s)) \to \frac{2}{\sigma^2}$ bei Anwendung von Lemma 5.2 auf $\tilde{h} \stackrel{\text{def}}{=} \nu^{-1} h^{\langle 1 \rangle}$ für alle $s \in [0,1)$

$$\sum_{n \geq 1} (\nu - h^{\langle 1 \rangle} \circ f_n(s))(1 - f_n(s)) \asymp \sum_{n \geq 1} (1 - \tilde{h} \circ f_n(s))/n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n \geq 1} c_n^{\langle 1 \rangle} \log n < \infty,$$

und die letzte Reihe wiederum konvergiert genau dann, wenn $\sum_{j \geq 2} c_j j \log j < \infty$, was nach Voraussetzung der Fall ist.

Zu untersuchen bleiben der erste und zweite Ausdruck der letzten Zeile in (5.8). Mit

$$\Delta_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right)$$

folgt leicht

$$\nu(1-f_n(s)) = \left(\frac{n}{\nu} + \frac{1}{\nu(1-s)} - \frac{n}{\nu}\Delta_n(s)\right)^{-1}$$

und damit weiter nach einfacher Rechnung unter Beachtung von $\Delta_n(s) \to 0$ für $s \in [0,1)$ und $n \to \infty$

$$\frac{\gamma}{n} - \nu(1-f_n(s)) = \frac{\nu/(1-s) - n\nu\Delta_n(s)}{n^2(1+1/n(1-s)-\Delta_n(s))} = \frac{-\nu\Delta_n(s)}{n} + O(n^{-2}).$$

Da nach Voraussetzung $\sum_{j\ge 2} p_j j^2 \log j < \infty$, liefert Lemma 5.3 $\sum_{n\ge 1}\Delta_n(s)/n < \infty$, und wir erhalten insgesamt $\sum_{n\ge 1}|d_n(s)-1| < \infty$ für alle $s \in [0,1)$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} n^\gamma h_{0n}(s) \stackrel{\text{def}}{=} H(s) \in (0,\infty)$$

für alle $s \in [0,1)$. Wie ein Blick auf (5.7) zeigt, erfüllen die $n^\gamma h_{0n}, n \ge 1$, die Rekursionsgleichung

$$(n+1)^\gamma h_{0,n+1}(s) = h(s)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\gamma n^\gamma h_{0n}(s), \quad s \in [0,1],$$

woraus sich durch Grenzübergang $n \to \infty$ sofort die für H behauptete Funktionalgleichung ergibt. ♢

Übungen zu Abschnitt 5

Übung 5.1. Sei $f(s) = \sum_{j\ge 0} p_j s^j$ eine beliebige e.F. Zeigen Sie

$$\sum_{j\ge 2} p_j^{\langle 2\rangle} \log j < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j\ge 2} p_j^{\langle 1\rangle} j \log j \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j\ge 2} p_j j^2 \log j < \infty, \tag{5.9}$$

wobei die $p_j^{\langle i\rangle}$ $(i=1,2)$ wie in (5.5) definiert sind.

Literatur

[1] ALSMEYER, G. *Wahrscheinlichkeitstheorie (5. Auflage).* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, Universität Münster (2007).

[2] ALSMEYER, G. *Stochastische Prozesse, Teil I (3. Auflage).* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 33, Universität Münster (2005).

ASMUSSEN, S. und HERING, H. *Branching Processes.* Birkhäuser, Boston (1983).

ATHREYA, K.B. und NEY, P. *Branching Processes.* Springer, New York (1972).

[3] FELLER, W. *Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume II (2. Auflage).* Wiley, New York (1971).

FOSTER, J. und WILLIAMSON, L.A. Limit theorems for the Galton-Watson process with time-dependent immigration. *Report, Univ. of Colorado* (1970).

HARRIS, T.E. *The Theory of Branching Processes.* Springer, Heidelberg (1963).

HEATHCOTE, C.R. A branching process allowing immigration. *J. Roy. Statist. Soc.* **B27**, 138-143 (1965).

Korrekturen und Kommentare im gleichen Journal **B28**, 213-217 (1966).

[4] HEUSER, H. *Lehrbuch der Analysis. Teil 1 (8. überarbeitete Auflage).* Teubner, Stuttgart (1990).

JAGERS, P. *Branching Processes with Biological Applications.* Wiley, London (1975).

PAKES, A.G. On the critical Galton-Watson process with immigration. *J. Austral. Math. Soc.* **12**, 476-482 (1971).

SENETA, E. A note on the supercritical Galton-Watson process with immigration. *Math. Biosci.* **6**, 305-312 (1970)

SENETA, E. On the supercritical Galton-Watson process with immigration. *Math. Biosci.* **7**, 9-14 (1970)