# Kapitel I
# Der einfache Galton-Watson-Prozeß

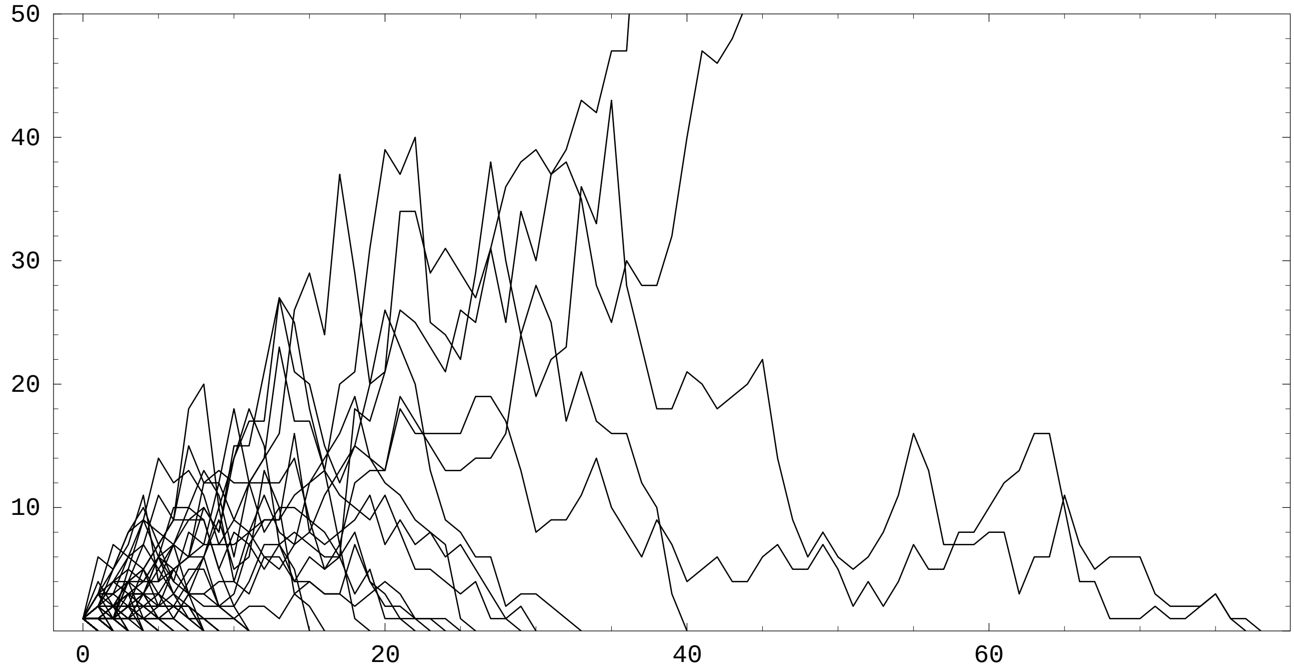


Bild 1.1. 100 Simulationspfade eines Galton-Watson-Prozesses.

Vorlesungen über eine spezielle Klasse stochastischer Prozesse, und die Verzweigungsprozesse bilden eine solche Klasse, beginnen sehr häufig mit einem auf besonders einfachen Annahmen basierenden Modell, dessen Analyse sowohl grundlegendes mathematisch-methodisches Rüstzeug für spätere Betrachtungen bereitstellt als auch erste Einblicke in typische Verhaltensphänomene gewährt und damit zur Schärfung der Intuition der Hörer beiträgt. Sein Wert im Hinblick auf Anwendungen in der realen Welt kann dagegen durchaus begrenzt sein. Ein derartiges Modell steht auch am Anfang des vorliegenden Textes und wird im folgenden eingehend behandelt.

## 1. Modellbeschreibung

Wir stellen uns eine nicht näher spezifizierte Population von Individuen vor, deren Verhalten im Zeitablauf wir im folgenden zuerst informell beschreiben. Dabei nehmen wir einen rein *genealogischen Standpunkt* ein, interessieren uns demgemäß nur für die Abstammungsstruktur und verzichten auf eine Spezifikation von Geburtszeitpunkten und Lebensdauern der einzelnen Individuen. Jedes Mitglied zeugt am Lebensende unabhängig von allen Vorfahren sowie anderen Mitgliedern seiner Generation eine zufällige Anzahl von Nachkommen gemäß stets derselben Verteilung. Es sei $Z_n$ die Größe der Population zum Zeitpunkt $n$, womit die Anzahl ihrer Mitglieder in der $n$-ten Generation gemeint ist. Die $Z_0$ Mitglieder der Anfangsgeneration (Urpopulation) bezeichnen wir als *Urahnen*. Unter diesen Annahmen heißt $(Z_n)_{n\ge 0}$ *einfacher Galton-Watson-Verzweigungsprozeß* oder kürzer *Galton-Watson-Prozeß*. Wir geben als nächstes eine formale Definition.

**1.1. Definition.** Ein *Galton-Watson-Prozeß (GWP)* $(Z_n)_{n\ge 0}$ *mit Reproduktionsverteilung* $(p_j)_{j\ge 0}$ ist eine (zeitlich homogene) diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{i,j\ge 0}$ der Form

$$p_{ij} \;=\; \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) \;=\; p_j^{*(i)}, \tag{1.1}$$

wobei $(p_j^{*(i)})$ die $i$-fache Faltung von $(p_j)_{j\ge 0}$ bezeichnet. Für $i = 0$ bedeutet dies die Dirac-Verteilung in 0, d.h. $p_j^{*(0)} = \delta_{0j}$, das Kronecker-Symbol.

Für unsere weiteren Studien ist es sinnvoll, den Prozeß $(Z_n)_{n\ge 0}$ in das folgende *Standardmodell* einzubetten: Auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ seien W-Maße $\mathbb{P}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, sowie Zufallsgrößen $Z_0$ und $X_{nk}$, $k, n \in \mathbb{N}$, mit Werten in $\mathbb{N}_0$ gegeben. Unter $\mathbb{P}_i$ gelte $Z_0 = i$ fast sicher, und die $X_{nk}$ seien stochastisch unabhängig mit derselben Verteilung $(p_j)_{j\ge 0}$. Definiere rekursiv

$$Z_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{nk} \tag{1.2}$$

für $n \ge 1$, wobei die "leere Summe" wie gewöhnlich als 0 vereinbart sei. Dann bildet $(Z_n)_{n\ge 0}$ unter jedem $\mathbb{P}_i$ einen GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\ge 0}$ und $i$ Urahnen. Die notwendigen Rechnungen für einen strengen Beweis sind ebenso wie die Spezifikation eines solchen Modells

$$(\Omega, \mathfrak{A}, (\mathbb{P}_i)_{i\ge 0}, (X_{nk})_{k,n\ge 1}, (Z_n)_{n\ge 0})$$

problemlos. Wir verzichten darauf, da sie für unsere weiteren Betrachtungen keine Rolle spielen. Für eine Einführung in die (wenigen) hier benötigten Fakten über Markov-Ketten einschließlich des zuvor genannten Standardmodells verweisen wir den Leser auf Kapitel I in [2].

Setzen wir $\mathcal{F}_0 \overset{\text{def}}{=} \sigma(Z_0)$ und $\mathcal{F}_n \overset{\text{def}}{=} \sigma(Z_0, X_{jk}, 1 \le j \le n, k \ge 1)$ für $n \ge 1$, so läßt sich die Markov-Eigenschaft (1.1) zu

$$p_{ij} \;=\; \mathbb{P}(Z_{n+1} = j | \mathcal{F}_n) \;=\; p_j^{*(i)} \quad \text{f.s. auf } \{Z_n = i\} \tag{1.3}$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ verallgemeinern, wobei "f.s." ohne Spezifikation eines speziellen W-Maßes hier und im folgenden stets "$\mathbb{P}_k$-f.s. für alle $k \in \mathbb{N}_0$" bedeutet. Beachte, daß $Z_1$ unter $\mathbb{P}_1$ die Verteilung $(p_j)_{j\ge 0}$ besitzt.

Als nächstes notieren wir ohne Beweis eine Eigenschaft, die uns häufig die Beschränkung auf den Fall eines Urahnen gestattet und die sich leicht aus dem unabhängigen und verteilungsidentischen Reproduktionsverhalten der Individuen einer Galton-Watson-Population ergibt.

**1.2. Lemma.** *Jeder GWP $(Z_n)_{n\ge 0}$ mit Reproduktionsverteilung $(p_i)_{i\ge 0}$ und $j$ Urahnen ist die Summe von $j$ unabhängigen GWP $(Z_n^{(i)})_{n\ge 0}$, $1 \le i \le j$, mit derselben Reproduktionsverteilung und einem Urahnen. Ist $(Z_n)_{n\ge 0}$ in einem Standardmodell gegeben, folgt insbesondere*

$$\mathbb{P}_j((Z_n)_{n\ge 0} \in \cdot\,) \;=\; \mathbb{P}_1((Z_n)_{n\ge 0} \in \cdot\,)^{*(j)} \tag{1.4}$$

*für alle $j \in \mathbb{N}_0$.*

Will man, gegeben eine Galton-Watson-Population mit einem Urahnen, deren genalogische Struktur darstellen, etwa um die Stammbäume beliebiger Mitglieder formal identifizierbar zu machen, so läßt sich dies dadurch bewerkstelligen, daß man die Individuen geeignet *markiert* und die Markierungen als Knoten in einem zufälligen Baum, genannt *Galton-Watson-Baum (GWB)*, auffaßt. Üblicherweise geschieht dies durch Einbettung in einen sogenannten *Ulam-Harris-Baum* mit der Knotenmenge

$$\mathbb{V} \;=\; \bigcup_{n\ge 0} \mathbb{N}^n,$$

wobei $\mathbb{N}^0$ aus der Wurzel $\varnothing$ besteht und jeder Knoten $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{V}\backslash\{\varnothing\}$, den man zumeist kürzer in der Form $v_1...v_n$ schreibt, vermöge des eindeutigen Pfades

$$\varnothing \;\to\; v_1 \;\to\; v_1v_2 \;\to ... \to\; v_1...v_n$$

durch Kanten mit der Wurzel verbunden ist. Mit $|v|$ werde die Länge (Generation) von $v$ bezeichnet, also $|v_1..v_n| = n$ und speziell $|\varnothing| = 0$. Als weitere übliche Schreibweise werden wir $uv \stackrel{\text{def}}{=} u_1...u_m v_1...v_n$ für die Verkettung von zwei Vektoren $u = u_1...u_m$ und $v = v_1...v_n$ benutzen.

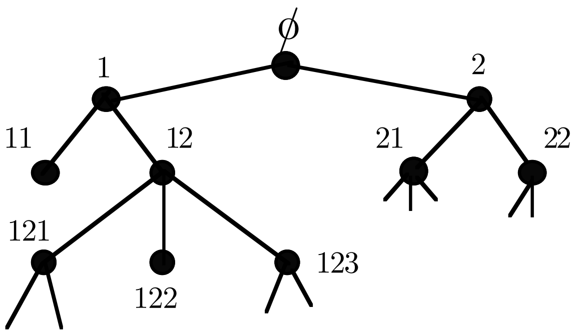


Bild 1.2. Ausschnitt eines Galton-Watson-Baums

Den GWB $\boldsymbol{GW}$ zu $(Z_n)_{n\ge 0}$ erhält man nun in kanonischer Weise wie folgt als Teilbaum von $\mathbb{V}$: Der Urahne wird mit $\varnothing$ markiert, dessen Kinder mit $1, ..., Z_1$. Bezeichnet $X_i$ die Anzahl der Kinder des Individuums $i$, so erhalten dessen Kinder die Markierung $i1, i2, ..., iX_i$. Im nächsten Schritt erhalten die $X_{ij}$ Nachkommen des Mitglieds $ij$ der 2. Generation die Markierungen $ij1, ..., ijX_{ij}$ für jedes $1 \le i \le Z_1$ und $1 \le j \le X_i$. So fortfahrend, erhält jedes Mitglied der $n$-ten Generation eine Markierung $v_1...v_n \in \mathbb{N}^n$, und es bildet dann $v_1...v_{n-1}$ (die

Markierung von) dessen "Mutter", $v_1...v_{n-2}$ (die Markierung von) dessen "Großmutter", usw. Bild 1.2 veranschaulicht das Vorgehen. Umgekehrt gilt: Bezeichnet $\{X_v : v \in \mathbb{V}\}$ eine Familie unabhängiger, identisch nach $(p_j)_{j\geq 0}$ verteilter Zufallsgrößen und $\boldsymbol{GW}$ den Teilbaum von $\mathbb{V}$ mit der Knotenmenge

$$\{\varnothing\} \cup \{1, ..., X_{v_1}\} \cup \{v_1 v_2 : 1 \leq v_2 \leq X_{v_1}, 1 \leq v_1 \leq X_\varnothing\} \cup ...,$$

so ist dieser ein GWB mit zugehörigem GWP

$$Z_n \; = \; |\{v \in \boldsymbol{GW} : |v| = n\}|, \quad n \geq 0.$$

Zudem gilt (vgl. (1.2))

$$Z_n \; = \sum_{v\in \boldsymbol{GW}, |v|=n-1} X_v \tag{1.6}$$

für alle $n \geq 1$.

Im Fall von mehr als einem Urahnen ($Z_0 \geq 2$) erzeugt jeder dieser Urahnen einen von den anderen unabhängigen und jeweils identisch verteilten GWB (also eine Kopie), was einmal mehr aus der Tatsache folgt, daß alle Individuen unabhängig voneinander und nach derselben Verteilung Nachkommen erzeugen. Eine präzise Formulerung dieses Resultats und die hierfür notwendige Definition von GWB als meßbare Abbildungen auf einem W-Raum geben wir in Abschnitt III.2.

## 2. Erzeugende Funktionen und Momente

Sieht man von der Anzahl der Urahnen einmal ab, so ist das stochastische Verhalten eines GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ vollständig durch dessen Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ determiniert und diese wiederum durch ihre *erzeugende Funktion (e.F.)*

$$f(s) \; = \; \sum_{j\geq 0} p_j s^j, \quad s \in [-1, 1]. \tag{2.1}$$

Wir werden sehen, daß viele der nachfolgenden Resultate zu einem wesentlichen Teil auf der Analyse e.F. beruhen. Ihre wichtigsten Eigenschaften sind daher in einem Anhang zu diesem Kapitel zusammengestellt (☞ auch die Abschnitte 40 und 42 in [1]).

Im folgenden sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ in einem Standardmodell gegeben. Erwartungswert und Varianz unter $\mathbb{P}_i,\ i \in \mathbb{N}_0$, werden mit $\mathbb{E}_i$ bzw. $\mathbb{V}ar_i$ bezeichnet. Statt $\mathbb{P}_1, \mathbb{E}_1, \mathbb{V}ar_1$ schreiben wir kürzer nur $\mathbb{P}$, $\mathbb{E}$ bzw. $\mathbb{V}ar$. Offensichtlich gilt

$$f(s) \; = \; \mathbb{E}_i(s^{X_{nk}}) \tag{2.2}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $k, n \in \mathbb{N}$, insbesondere $f(s) = \mathbb{E}(s^{Z_1})$. Wir werden als nächstes die e.F. $f_n$ von $Z_n$ unter $\mathbb{P}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bestimmen. Durch Differentiation erhalten wir daraus anschließend auch $\mathbb{E}Z_n$ und $\mathbb{V}ar\, Z_n$. Wir benötigen zunächst das folgende

**2.1. Lemma.** *Seien $T, X_1, X_2, ...$ stochastisch unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgrößen und $X_1, X_2, ...$ ferner identisch verteilt mit gemeinsamer e.F. $f$. Sei $g$ die e.F. von $T$. Dann hat*

$$Y \;=\; \sum_{j=1}^{T} X_j \qquad \Big( \stackrel{\text{def}}{=} \; 0 \;\; auf \; \{T=0\} \Big)$$

*die e.F.* $\mathbb{E}(s^Y) = g \circ f(s)$. *Ferner gilt mit* $\mu = \mathbb{E}X_1$ *und* $\sigma^2 = Var X_1$

$$\mathbb{E}Y \;=\; \mu\,\mathbb{E}T \tag{2.3}$$

*sowie unter der Voraussetzung* $\mathbb{E}T < \infty$

$$Var Y \;=\; \sigma^2\mathbb{E}T \;+\; \mu^2 Var T. \tag{2.4}$$

Beweis: Unter Benutzung der Annahmen des Lemmas sowie des Multiplikationssatzes für e.F. folgt für alle $s \in [-1,1]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(s^Y) \;&=\; \mathbb{P}(T=0) \;+\; \sum_{j\geq 1} \int_{\{T=j\}} s^{X_1+...+X_j}\; d\mathbb{P} \\
&=\; \mathbb{P}(T=0) \;+\; \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(T=j)\,\mathbb{E}(s^{X_1+...+X_j}) \\
&=\; \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(T=j)\, f(s)^j \\
&=\; \mathbb{E}(f(s)^T) \\
&=\; g(f(s)),
\end{aligned}$$

was die erste Behauptung beweist. Die Beziehungen in (2.3) und (2.4) ergeben sich nun leicht durch Differentiation und Grenzübergang $s \uparrow 1$. ◊

Eine Anwendung von Lemma 2.1 liefert uns die e.F. von $Z_n$ unter $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$ sowie den zugehörigen Erwartungswert und die Varianz. Sei

$$\mu \;=\; \mathbb{E}Z_1 \;=\; \sum_{j\geq 1} jp_j \;=\; f'(1) \tag{2.5}$$

das sogenannte *Reproduktionsmittel*, das die erwartete Anzahl von Nachkommen für jedes Populationsmitglied angibt. Beachte, daß $\mu$ immer existiert, aber unendlich sein kann. Ist $\mu$ endlich, so existiert auch

$$\sigma^2 \;=\; \mathrm{Var}\, Z_1 \;=\; \sum_{j\geq 1} j^2 p_j \;-\; \mu^2 \;=\; f''(1) + f'(1)(1-f'(1)) \tag{2.6}$$

und wird als *Reproduktionsvarianz* bezeichnet.

**2.2. Satz.** *Für alle $n \geq 1$ gilt: Die e.F. von $Z_n$ unter $\mathbb{P}$ ist durch*

$$f_n \;=\; f^{\circ(n)} \;\stackrel{\text{def}}{=}\; f \circ ... \circ f \tag{2.7}$$

*gegeben, der zugehörige Erwartungswert durch $\mathbb{E}Z_n = \mu^n$ und die zugehörige Varianz durch*

$$Var\, Z_n \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sigma^2\mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1}, & falls\ \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & falls\ \mu = 1 \end{cases}, \tag{2.8}$$

*sofern $\mu < \infty$.*

Beweis: Für alle $n \geq 1$ sind $Z_{n-1}, X_{n1}, X_{n2}, ...$ unter $\mathbb{P}$ stochastisch unabhängig sowie die $X_{nk}, k \geq 1$ identisch verteilt mit gemeinsamer e.F. $f$. Da außerdem $Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_{nk}$, folgt aus Lemma 2.1 $f_n = f_{n-1} \circ f$ für alle $n \geq 1$ und daraus natürlich (2.7). Lemma 2.1 impliziert weiter $\mathbb{E}Z_n = \mu\,\mathbb{E}Z_{n-1}$ für alle $n \geq 1$, also $\mathbb{E}Z_n = \mu^n$. Nimmt man $\mu < \infty$ an und setzt $W_n \stackrel{\text{def}}{=} \mu^{-n}Z_n$, so erhält man schließlich

$$\text{Var}\, W_n \;=\; \frac{\sigma^2}{\mu^{n+1}} \;+\; \text{Var}\, W_{n-1}$$

für alle $n \geq 1$ und daraus leicht (2.8). ♢

## 3. Die Aussterbewahrscheinlichkeit

Bei der Untersuchung stochastischer Populationsmodelle ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die betrachtete Population ausstirbt, genannt *Aussterbewahrscheinlichkeit*, natürlicherweise von großem Interesse. Im Fall eines einfachen GWP's $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ erweist sich deren Berechnung als lösbares Problem, wie wir im folgenden zeigen werden.

Da das Aussterbeereignis absorbierend ist, d.h. aus $Z_n = 0$ stets $Z_{n+k} = 0$ für alle $k \geq 1$ folgt, gilt unter der Annahme eines Standardmodells für die Aussterbewahrscheinlichkeit $q(j)$ unter $\mathbb{P}_j$

$$\begin{aligned} q(j) \;&=\; \mathbb{P}_j\left(\bigcup_{k\geq 0}\{Z_k = 0\}\right) \\ &=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_j\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{Z_k = 0\}\right) \\ &=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_j(Z_n = 0). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Darüber hinaus liefert Lemma 1.2

$$\mathbb{P}_j(Z_n = 0) \;=\; \mathbb{P}_j(Z_n^{(i)} = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq j) \;=\; \mathbb{P}(Z_n = 0)^j$$

für alle $j, n \geq 1$, d.h. $q(j) = q(1)^j$. Es reicht deshalb, das Aussterben von $(Z_n)_{n\geq 0}$ unter $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$ zu untersuchen, wobei wir statt $q(1)$ kürzer $q$ schreiben werden.

Aufgrund der trivialen Implikationen

$$p_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0;$$
$$p_0 + p_1 = 1,\ 0 < p_0 < 1 \quad \Rightarrow \quad q = 1$$

können wir uns hiernach auf den Fall

$$0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1 \tag{3.2}$$

beschränken. Die im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Notation wird beibehalten. $f$ bezeichnet demnach die e.F. von $(p_j)_{j\geq 0}$, also $Z_1$ unter $P = \mathbb{P}_1$, $f_n$ die e.F. von $Z_n$ unter $\mathbb{P}$ sowie $\mu = \mathbb{E}Z_1 = f'(1)$ das Reproduktionsmittel.

**3.1. Satz.** *Die Aussterbewahrscheinlichkeit $q$ ist der kleinste Fixpunkt von $f$ in $[0,1]$, d.h. die kleinste Lösung der Gleichung $f(s) = s$ in diesem Intervall. Sofern (3.2) gilt, hat $f$ genau einen Fixpunkt in $[0,1)$, falls $\mu > 1$, und keinen, falls $\mu \leq 1$. Damit gilt $p_0 < q < 1$, falls $\mu > 1$, und andernfalls $q = 1$.*

Beweis: Gemäß (3.1) gilt $q = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0)$. Da $f$ außerdem auf $[0,1]$ stetig ist und $f_{n+1} = f \circ f_n$ für alle $n \geq 1$ gilt, folgt

$$f(q) \;=\; \lim_{n\to\infty} f \circ f_n(0) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(0) \;=\; q.$$

Sei nun $a \in [0,1]$ ein beliebiger Fixpunkt von $f$. Da alle $f_n$ auf $[0,1]$ monoton wachsend sind, erhalten wir

$$a \;=\; f(a) \;=\; f_n(a) \;\geq\; f_n(0)$$

für alle $n \geq 1$, also $a \geq \lim_{n\to\infty} f_n(0) = q$. Folglich muß $q$ der kleinste Fixpunkt in $[0,1]$ sein.

Sei ab jetzt (3.2) vorausgesetzt. Dann ist $f$ gemäß Lemma A.4 streng monoton wachsend und strikt konvex auf $[0,1]$. Wir definieren $g(s) = f(s) - s$ und notieren $g(0) = p_0 > 0$ sowie $g(1) = 0$.

Wegen $f'(s) < f'(1) = \mu$ für alle $s \in [0,1)$ folgt aus $\mu \leq 1$, daß $g'(s) = f'(s) - 1 < 0$ für alle $s \in [0,1)$. $g$ ist also streng monoton fallend mit $g(0) > 0 = g(1)$ und $q = 1$ somit die einzige Lösung von $f(s) = s$ in $[0,1]$.

Sei nun $\mu > 1$. In einer linken Umgebung von 1 wächst $f(s)$ dann schneller gegen 1 als $s$ selbst, denn $g'(1) = \mu - 1 > 0$ und $g'$ ist stetig. Andererseits gilt $f(s) > s$ in einer rechten Umgebung von 0 wegen $g(0) > 0$ und der Stetigkeit von $g$. Unter Verwendung des Zwischenwertsatzes existiert folglich mindestens ein Fixpunkt $s_1 \in (0,1)$ von $f$. Nehmen wir an, es gäbe einen zweiten $s_2 \in (0,1)$, o.B.d.A. $s_1 < s_2 < 1$. Wir hätten dann $g(s_1) = g(s_2) = g(1) = 0$, was die Existenz von $a, b \in (0,1)$, $s_1 < a < s_2 < b < 1$ mit $g'(a) = g'(b) = 0$, d.h. $f'(a) = f'(b)$ implizierte (Satz von Rolle). Dies aber ist aufgrund der strengen Monotonie von

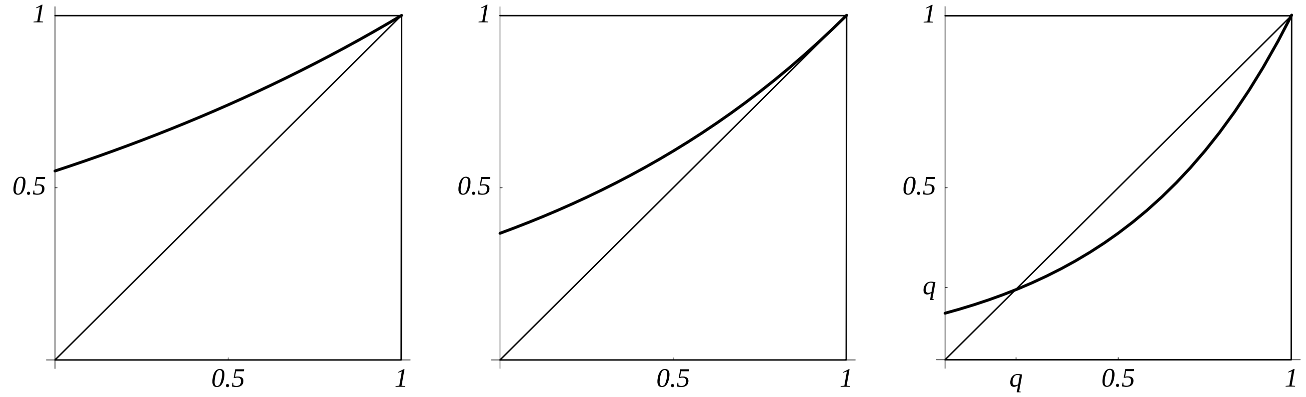


Bild 3.1. Erzeugende Funktion in den Fällen "$\mu < 1$", "$\mu = 1$" und "$\mu > 1$".

$f'$ ($f$ strikt konvex) ausgeschlossen. $q < 1$ ist demnach der einzige Fixpunkt von $f$ in $[0,1)$, und es gilt außerdem $q > p_0$, weil

$$q \;\geq\; \mathbb{P}(Z_1 = 0) \;+\; \mathbb{P}(Z_1 > 0, Z_2 = 0) \;\geq\; p_0 \;+\; p_n p_0^n$$

für hinreichend großes $n \geq 1$, so daß $p_n > 0$. Der Beweis des Satzes ist hiermit vollständig. $\diamondsuit$

Bild 3.1 veranschaulicht die Situation für die Fälle "$\mu < 1$", "$\mu = 1$" und "$\mu > 1$". Sofern $\mu > 1$ und $f$ vollständig bekannt ist, wird man zunächst versuchen, die Aussterbewahrscheinlichkeit $q$ durch Lösen der Gleichung $f(s) = s$ explizit zu berechnen. Zwei Spezialfälle, in denen dies möglich ist, werden in Übung 3.4 sowie im nächsten Abschnitt behandelt. Leider bilden sie Ausnahmen. Man kann $q$ aber immer mittels einer einfachen Iteration von $f$ approximativ bestimmen und dabei sogar eine exponentielle Konvergenzrate gewährleisten, wie das anschließende Korollar beweist. Eine Illustration des Vorgehens gibt Bild 3.2.

**3.2. Korollar.** *Unter der Voraussetzung von (3.2) gilt $f_n(s) \uparrow q$ für alle $s \in [0,q]$ und $n \to \infty$, und die Konvergenz ist gleichmäßig in $s$. Für $s \in (q,1)$ gilt $f_n(s) \downarrow q$, falls $n \to \infty$, und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jedem Kompaktum von $(q,1)$. Ist $\mu > 1$, also $q \in (0,1)$, folgt außerdem $f'(q) < 1$ und*

$$0 \;<\; q - f_n(s) \;<\; f'(q)^n \tag{3.3}$$

*für alle $n \geq 1$ und $s \in [0,q)$.*

Beweis: Für $s \in [0,q)$ gilt $s < f(s) < f(q) = q$, da $f$ streng monoton wachsend ist. Iteriert man diese Ungleichung, so folgt

$$s < f_1(s) < f_2(s) < ... < f_n(s) < f_n(q) = q$$

für alle $n \geq 1$ und daraus weiter $f_n(s) \uparrow \hat{q} \leq q$, falls $n \to \infty$. Da außerdem

$$\hat{q} \;=\; \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(s) \;=\; f\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(s)\Big) \;=\; f(\hat{q}),$$

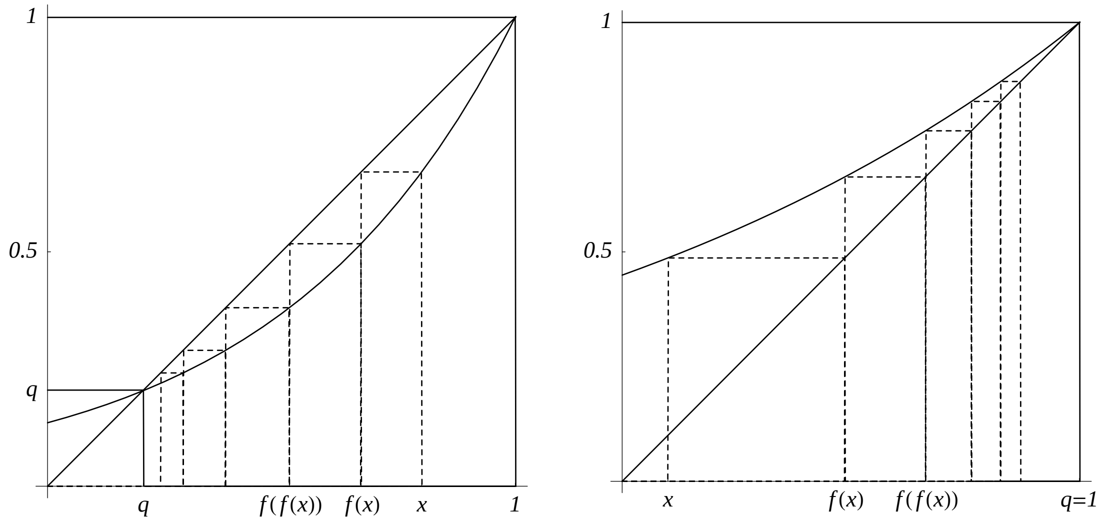


BILD 3.2. Approximation von $q$ durch die Iterationsfolge $f_n(x)$, $n \geq 0$.

andererseits $q$ gemäß vorhergehendem Satz der kleinste Fixpunkt von $f$ ist, muß $\hat{q} = q$ gelten. Die nachgewiesene Konvergenz $f_n(s) \uparrow q$ ist somit gleichmäßig wegen

$$0 \;<\; q - f_n(s) \;\leq\; q - f_n(0)$$

für alle $n \geq 1$ und $s \in [0, q)$.

Für $s \in (q, 1)$ erhält man auf analoge Weise $f_n(s) \downarrow \tilde{q} \in [q, 1)$, falls $n \to \infty$, wobei $\tilde{q}$ einen Fixpunkt von $f$ bildet. Es folgt wiederum $\tilde{q} = q$, da nach Satz 3.1 kein Fixpunkt $\in (q, 1)$ existiert. Die Konvergenz ist ferner kompakt gleichmäßig, denn

$$0 \;\leq\; f_n(s) - q \;\leq\; q - f_n(t)$$

für alle $n \geq 1,\ t \in [q, 1)$ und $s \in [q, t]$.

Sei schließlich $\mu > 1$ angenommen, so daß $q \in (0, 1)$ gemäß Satz 3.1. Aus der strikten Konvexität von $f$ folgt

$$f'(q) \;<\; \frac{f(1) - f(q)}{1 - q} \;=\; 1.$$

Aus demselben Grund gilt

$$0 \;<\; \frac{q - f(s)}{q - s} \;<\; f'(q)$$

für alle $s \in [0, q)$ und deshalb weiter ($f_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} s$)

$$0 \;<\; \frac{q - f_n(s)}{q - s} \;=\; \prod_{j=0}^{n-1} \frac{q - f(f_j(s))}{q - f_j(s)} \;<\; f'(q)^n$$

für alle $n \geq 1$ und $s \in [0, q)$, was (3.3) beweist. ♢

Das letzte Ergebnis dieses Abschnitts zeigt die Instabilität eines GWP in Form einer Dichotomie, die man als *Explosions-Extinktions-Prinzip* bezeichnen kann und die, wie wir noch sehen werden, typisch ist für Verzweigungsprozesse mit unabhängiger Reproduktion. Sie steht im Kontrast zum Verhalten biologischer Populationen, die gewöhnlich in Verteilung einen Gleichgewichtszustand mit ihrer Umgebung anstreben (☞ [9], Ch. 1).

**3.3. Satz.** *Für einen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ sind, sofern $p_1 \neq 1$, alle Zustände $k \neq 0$ transient, und es gilt*

$$q \;=\; \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0\Big) \;=\; 1 \;-\; \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\Big). \tag{3.4}$$

Beweis: Falls $p_1 \neq 1$, folgt für alle $k \geq 1$

$$\mathbb{P}(Z_{n+i} \neq k \text{ für alle } i \geq 1 | Z_n = k) \;\geq\; \left\{ \begin{matrix} p_0^k, & \text{falls } p_0 > 0 \\ 1 - p_1^k, & \text{falls } p_0 = 0 \end{matrix} \right\} \;>\; 0$$

und daraus die Transienz aller $k \geq 1$ für die Markov-Kette $(Z_n)_{n\geq 0}$. Dies wiederum impliziert jedoch sofort (3.4). ♢

Weitere Untersuchungen von $(Z_n)_{n\geq 0}$ müssen offensichtlich eine detailliertere Beschreibung von $Z_n$ gegen 0 bzw. $\infty$ zum Ziel haben, wobei drei qualitativ völlig unterschiedliche Fälle auftreten: der *subkritische Fall* "$\mu < 1$", der *superkritische Fall* "$\mu > 1$" und der *kritische Fall* "$\mu = 1$" (☞ Bild 3.3a-c). Entsprechend wird dann auch $(Z_n)_{n\geq 0}$ als subkritisch, superkritisch bzw. kritisch bezeichnet. Inhalt der nachfolgenden Abschnitte bilden die wichtigsten Grenzwertsätze für diese drei Fälle. Der nächste Abschnitt behandelt jedoch zunächst einen wichtigen Spezialfall.

## Übungen zu Abschnitt 3

Im folgenden gilt weiter die bisher verwendete Notation. Insbesondere bezeichnet $q$ die Aussterbewahrscheinlichkeit eines GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ gegeben $Z_0 = 1$.

**Übung 3.1.** ***(Zellteilung)*** Betrachte einen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ der speziellen Form

$$p_0, p_2 > 0, \quad p_1 \in [0,1) \quad \text{und} \quad p_j = 0 \text{ sonst} \tag{3.5}$$

Im Fall "$p_1 = 0$" kann $(Z_n)_{n\geq 0}$ als Größe einer Zellkultur (oder eines Gewebes) angesehen werden, deren einzelne Zellen jeweils eine Zeiteinheit leben und sich anschließend in zwei neue teilen oder absterben. Bestimmen Sie die Aussterbewahrscheinlichkeit $q$.

**Übung 3.2.** Zeigen Sie, daß für jeden GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $p_1 \neq 0$ gilt:

$$\frac{p_0}{1-p_1} \;\leq\; q \;\leq\; \frac{p_0}{1-p_0-p_1}. \tag{3.6}$$

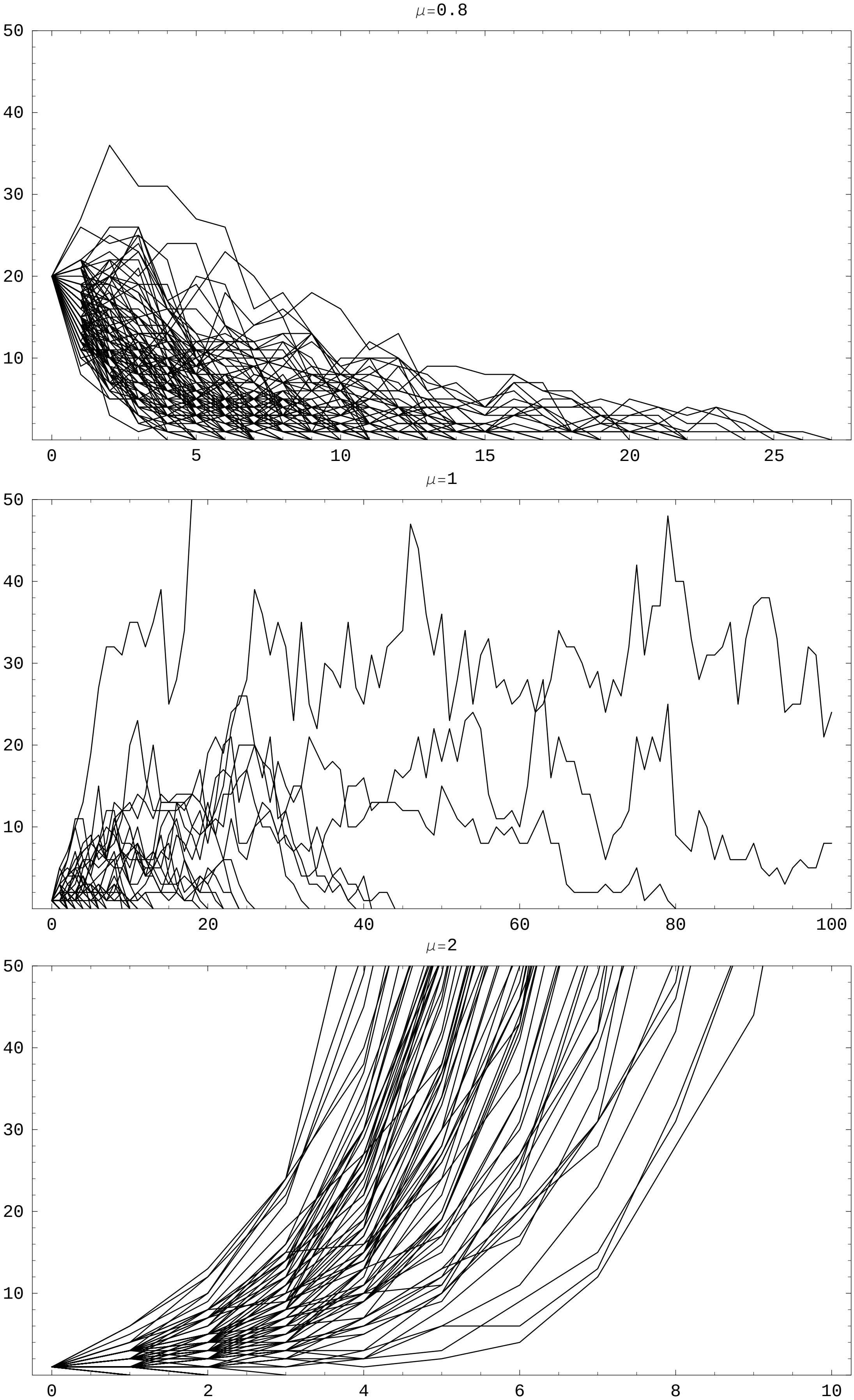


Bild 3.3a-c. Je 100 Simulationspfade eines GWP's mit Poissonscher Reproduktionsverteilung

**Übung 3.3.** Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWP mit geometrischer Reproduktionsverteilung, d.h. $p_j = (\frac{1}{\mu+1})(\frac{\mu}{\mu+1})^j$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. [Dies ist ein Spezialfall des im nächsten Abschnitt untersuchten Beispiels.] Bestimmen Sie die Aussterbewahrscheinlichkeit $q$ und vergleichen Sie diese als Funktion von $\mu$ durch Eintrag in ein Koordinatensystem mit den Schranken $h_1(\mu) = \frac{\mu+1}{(\mu+1)^2-\mu}$ und $h_2(\mu) = \frac{\mu+1}{\mu^2}$ in (3.6).

**Übung 3.4.** Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWP mit Poissonscher Reproduktionsverteilung, d.h. $p_j = e^{-\mu}\frac{\mu^j}{j!}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, daß $q < \frac{1}{\mu}$ und $f'(q) \leq f'(\frac{1}{\mu}) < 1$. [Damit hat man unter Hinweis auf Korollar 3.2 auch eine explizite obere Schranke, nämlich $f'(\frac{1}{\mu})^n$, für die Abweichung der Iterationsfolge $f_n(0)$ von $q$.] Vergleichen Sie $h_3(\mu) = \frac{1}{\mu}$ mit den Schranken $h_1(\mu) = \frac{e^{-\mu}}{1-\mu e^{-\mu}}$ und $h_2(\mu) = \frac{e^{-\mu}}{1-(1+\mu)e^{-\mu}}$ in (3.6) durch Eintragen in ein Koordinatensystem (Bereich $1 \leq \mu \leq 4$).

(b) Berechnen Sie mittels Iteration auf einem PC die Aussterbewahrscheinlichkeit $q$ bis auf $10^{-4}$ Genauigkeit für die Fälle $\mu = 1.1,\ 1.2, ...,\ 3.0$, und tragen Sie $q$ als Funktion von $\mu$ zu den Schranken $h_i(\mu),\ i = 1, 2, 3$, in das Koordinatensystem ein.

**Übung 3.5.** Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWP mit binomialer Reproduktionsverteilung, d.h. $p_j = \binom{n}{j}(\frac{\mu}{n})^j(1-\frac{\mu}{n})^{n-j}$ für $0 \leq j \leq n$ und $p_j = 0$ sonst, wobei $1 < \mu \leq n$.

(a) Zeigen Sie, daß wie zuvor $q < \frac{1}{\mu}$ gilt, daß aber $f'(\frac{1}{\mu}) > 1$ für hinreichend kleine $\mu > 1$.

(b) Berechnen Sie mittels Iteration auf einem PC die Aussterbewahrscheinlichkeit $q$ bis auf $10^{-4}$ Genauigkeit für $n = 3$ und $\mu = 1.1,\ 1.2, ...,\ 2.0$. Tragen Sie $q$ als Funktion von $\mu$ mit den Schranken

$$h_1(\mu) = \frac{(1-\frac{\mu}{n})^n}{1-\mu(1-\frac{\mu}{n})^{n-1}} \quad \text{und} \quad h_2(\mu) = \frac{(1-\frac{\mu}{n})^n}{1-(1+\mu(1-\frac{1}{n}))(1-\frac{\mu}{n})^{n-1}}$$

aus (3.6) sowie $h_3(\mu) = \frac{1}{\mu}$ in ein Koordinatensystem ein (Bereich $1 \leq \mu \leq 2$).

(c) Erstellen Sie ein entsprechendes Schaubild für den Fall "$n = 2$" (Bereich $1 \leq \mu \leq 2$). [$q$ ist hier aus Übung 3.1 explizit bekannt und stimmt mit $h_2(\mu)$ überein.]

**Übung 3.6.** Zeigen oder widerlegen Sie, daß für jeden superkritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ die Ungleichung $q \leq \frac{1}{\mu}$ aus den vorhergehenden Übungen erfüllt ist.

**Übung 3.7.** Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP mit Reproduktionsverteilung $p_j = \frac{1}{(j+1)(j+2)}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie die e.F. $f$ von $(p_j)_{j\geq 0}$ sowie mittels Iteration die zugehörige Aussterbewahrscheinlichkeit $q$.

**Übung 3.8.** Zeigen oder widerlegen Sie: Zwei superkritische GWP mit gleichem Reproduktionsmittel und gleicher Aussterbewahrscheinlichkeit (bei einem Urahnen) besitzen bereits dieselbe Reproduktionsverteilung. [Beachte, daß diese Behauptung für zwei kritische GWP trivialerweise falsch ist.]

**Übung 3.9.** Es sei $(Z_n(k))_{n\ge 0}$ für jedes $k \ge 1$ ein GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j(k))_{j\ge 0}$ und Aussterbewahrscheinlichkeit $q(k)$ bei einem Urahnen. Sei $(Z_n)_{n\ge 0}$ ein weiterer GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\ge 0}$ und Aussterbewahrscheinlichkeit $q$ bei einem Urahnen. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} p_j(k) \;=\; p_j \text{ für alle } j \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} q(k) \;=\; q. \tag{3.7}$$

Aus der schwachen Konvergenz der Reproduktionsverteilungen folgt also stets die Konvergenz der zugehörigen Aussterbewahrscheinlichkeiten.

## 4. Die gebrochen-rationale Reproduktionsverteilung

Die folgende Reproduktionsverteilung, die aufgrund der Form (4.2) ihrer e.F. $f$ als *gebrochen-rational* bezeichnet wird, bildet eines der wenigen Beispiele nicht-trivialer Natur, in denen alle Iterationen $f_n$, $n \ge 1$, von $f$ explizit bestimmt werden kann. Zu beliebig vorgegebenen Parametern $b, p \in (0,1), b+p \le 1$ seien

$$p_k = bp^{k-1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad p_0 = 1 - \sum_{k\ge 1} p_k = \frac{1-b-p}{1-p} \tag{4.1}$$

Für $b = p(1-p)$ erhält man die wohlbekannte geometrische Verteilung mit Parameter $1-p$ [$NB(1, 1-p)$-Verteilung]. Die e.F. $f$ von $(p_j)_{j\ge 0}$ ergibt sich zu

$$f(s) \;=\; 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bs}{1-ps}, \tag{4.2}$$

wie man leicht nachrechnet, und das zugehörige Reproduktionsmittel $\mu$ als

$$\mu \;=\; \frac{b}{(1-p)^2}. \tag{4.3}$$

Wir notieren, daß $f$ als Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{p} > 1$ besitzt. Da (4.2) noch keine brauchbare Beziehung zur Berechnung der $f_n$ bildet, werden wir jetzt einige Umformungen durchführen. Für beliebige Punkte $u, v < \frac{1}{p}$ ist

$$\frac{f(s) - f(u)}{f(s) - f(v)} \;=\; \frac{s-u}{s-v} \cdot \frac{1-pv}{1-pu}, \tag{4.4}$$

und es gilt im Anschluß, $u, v$ geschickt zu wählen. Dazu seien 1 und $\hat{q}$ die beiden Fixpunkte von $f$, die möglicherweise auch zusammenfallen können. In der Tat gilt $\hat{q} = 1$, falls $\mu = 1$, während $\hat{q} = q < 1$, falls $\mu > 1$, und $q = 1 < \hat{q}$, falls $\mu < 1$.

Sei im folgenden $\mu \ne 1$ angenommen. Wählt man dann $u = \hat{q}$ und $v = 1$ in (4.4), so ergibt sich

$$\frac{1-p}{1-p\hat{q}} \;=\; \lim_{s\uparrow 1} \left(\frac{f(s)-\hat{q}}{s-\hat{q}}\right)\left(\frac{f(s)-1}{s-1}\right)^{-1} \;=\; \frac{1}{f'(1)} \;=\; \frac{1}{\mu} \tag{4.5}$$

und damit in (4.4)

$$\frac{f(s)-\hat{q}}{f(s)-1} \;=\; \frac{s-\hat{q}}{\mu(s-1)}. \tag{4.6}$$

Diese Beziehung läßt sich nun leicht iterieren, und man erhält

$$\frac{f_n(s)-\hat{q}}{f_n(s)-1} \;=\; \frac{s-\hat{q}}{\mu^n(s-1)} \tag{4.7}$$

für alle $n \geq 1$. Löst man schließlich nach $f_n(s)$ auf, folgt [für $\mu \neq 1$]

$$f_n(s) \;=\; 1 \;-\; \mu^n\left(\frac{1-\hat{q}}{\mu^n-\hat{q}}\right) \;+\; \frac{\mu^n\left(\frac{1-\hat{q}}{\mu^n-\hat{q}}\right)^2 s}{1-\left(\frac{\mu^n-1}{\mu^n-\hat{q}}\right)s} \tag{4.8}$$

für alle $n \geq 1$. Im Fall "$\mu > 1$" implizieren (4.3) und (4.5) außerdem

$$q \;=\; \hat{q} \;=\; \frac{1-b-p}{(1-p)p} \;=\; \frac{p_0}{p}. \tag{4.9}$$

Zwischen den Paaren $(\mu, q) \in (1,\infty)\times[0,1)$ und $(p,b) \in (0,1)^2,\ b+p < 1$ besteht eine Bijektion, d.h. für jedes Reproduktionsmittel $\mu > 1$ und jede Aussterbewahrscheinlichkeit $q < 1$ existiert genau eine Reproduktionsverteilung vom gebrochen-rationalen Typ (4.1) mit Mittelwert $\mu$ und zugehöriger Aussterbewahrscheinlichkeit $q$. Aus (4.3) und (4.9) folgt nämlich leicht

$$p \;=\; \frac{\mu-1}{\mu-q} \quad \text{und} \quad b \;=\; \frac{\mu(1-q)^2}{(\mu-q)^2}. \tag{4.10}$$

Falls $\mu = 1$, gilt $b = (1-p)^2$ gemäß (4.3), und man erhält direkt aus (4.2)

$$f(s) \;=\; \frac{p-(2p-1)s}{1-ps}. \tag{4.11}$$

Eine Iteration dieser Beziehung liefert schließlich

$$f_n(s) \;=\; \frac{np-((n+1)p-1)s}{(n-1)p+1-nps} \tag{4.12}$$

für alle $n \geq 1$.

Basierend auf dem Zensus der Vereinigten Staaten von 1920, untersuchte Lotka [11]-[13] die Aussterbewahrscheinlichkeit weißer amerikanischer Familien unter Beschränkung auf die männlichen Vertreter. Er fand heraus, daß die empirischen Reproduktionswahrscheinlichkeiten sich gut durch eine gebrochen-rationale Verteilung annähern lassen bei Wahl der Parameter $b = 0.2126$ und $p = 0.5893$ [$\Rightarrow p_0 = 0.4825$]. Diese Werte finden sich in seiner Arbeit [13] von 1939 und differieren leicht von denen der beiden früheren Beiträge. Legt man als Modell einen GWP zugrunde, so liefert die Theorie als Aussterbewahrscheinlichkeit $q = 0.819$.

## Übungen zu Abschnitt 4

**Übung 4.1.** Es seien $f$ eine e.F., $f_n$ ihre $n$-te Iteration und $h$ eine auf $[0,1]$ injektive Funktion derart, daß $g \stackrel{\text{def}}{=} h^{-1} \circ f \circ h$ wieder eine e.F. bildet. Zeigen Sie, daß die $n$-te Iteration von $g$ durch $g_n = h^{-1} \circ f_n \circ h$ gegeben ist.

**Übung 4.2.** Als Anwendung der vorhergehenden Übung seien $f(s) = \frac{s}{\mu-(\mu-1)s}$ für ein $\mu > 1$ und $h(s) = s^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $f$ und $g = h^{-1} \circ f \circ h$ e.F. bilden und daß

$$g_n(s) \;=\; \frac{s}{(\mu^n - (\mu^n - 1)s^k)^{1/k}} \tag{4.13}$$

für alle $n \geq 1$.

**Übung 4.3.** Sei $f(s) = 1 - p(1-s)^\alpha$ für beliebige $p, \alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie, daß $f$ eine e.F. definiert mit Iterationen

$$f_n(s) \;=\; 1 - p^{1+\alpha+\ldots+\alpha^{n-1}}(1-s)^{\alpha^n} \tag{4.14}$$

für alle $n \geq 1$.

## 5. Ein Martingal und erste Grenzwertsätze

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist der Beweis eines ersten Grenzwertsatzes für GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ unter Anwendung des Martingal-Konvergenzsatzes auf $W_n = \mu^{-n}Z_n,\ n \geq 0$. Daß $(W_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bildet, wurde implizit schon in Satz 2.2 zur Berechnung von $\mathit{Var}\, Z_n$ benutzt. Im folgenden werden die Bezeichnungen aus den früheren Abschnitten beibehalten. $(Z_n)_{n\geq 0}$ sei stets in einem Standardmodell gegeben, und wir erinnern daran, daß $\mathcal{F}_0 = \sigma(Z_0)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0,\ X_{jk}, 1 \leq j \leq n, k \geq 1)$ für $n \geq 1$ sowie $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n)$. Für eine Einführung in die Martingaltheorie (in diskreter Zeit) einschließlich des fundamentalen Konvergenzsatzes verweisen wir den Leser auf [2], Kapitel III.

**5.1. Satz.** *Sofern $0 < \mu < \infty$, bildet $W_n = \mu^{-n}Z_n,\ n \geq 0$ unter jedem $\mathbb{P}_i,\ i \geq 0$, ein nichtnegatives Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, und es existiert eine nichtnegative Zufallsgröße $W$, so daß $\mathbb{E}_i W \leq i$ und*

$$\lim_{n\to\infty} W_n \;=\; W \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.} \tag{5.1}$$

*für alle $i \geq 0$. Ferner gilt*

$$\mathbb{P}_i(W \in \cdot\,) \;=\; \mathbb{P}_1(W \in \cdot\,)^{*(i)} \tag{5.2}$$

*für alle $i \geq 0$, insbesondere $\mathbb{P}_i(W = 0) = \mathbb{P}_1(W = 0)^i$.*

Beweis: Sei $0 < \mu < \infty$. Gemäß (1.2) gilt für jedes $n \geq 1$

$$Z_n \;=\; \sum_{k=1}^{Z_{n-1}} X_{nk},$$

wobei $Z_{n-1}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-meßbar und die $X_{nk}, k \geq 1$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_{n-1}$ mit gemeinsamer Verteilung $(p_j)_{j \geq 0}$. Es folgt deshalb für alle $i \geq 0$

$$\mathbb{E}(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) \;=\; Z_{n-1}\,\mathbb{E}_1 Z_1 \;=\; Z_{n-1}\,\mu \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.}$$

und daraus offensichtlich, daß $(W_n)_{n \geq 0}$ unter jedem $\mathbb{P}_i$ ein nichtnegatives Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ bildet. Da jedes nichtnegative Martingal trivialerweise $\mathfrak{L}_1$-beschränkt ist, folgt weiter (5.1) unter Anwendung des Martingal-Konvergenzsatzes. Fatous Lemma impliziert schließlich

$$\mathbb{E}_i W \;=\; \mathbb{E}_i \liminf_{n\to\infty} W_n \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_i W_n \;=\; \mathbb{E}_i W_0 \;=\; i$$

für alle $i \geq 0$. Der Beweis von (5.2) bleibt dem Leser überlassen und bildet Übung 5.1. $\diamondsuit$

Der Wert des vorhergehenden Satzes ist relativ beschränkt, weil er nur auf $\{W > 0\}$ eine befriedigende Auskunft über das Wachstum von $Z_n$ liefert. Zudem hat dieses Ereignis im Fall "$\mu \leq 1, p_1 \neq 1$" wegen $q = 1$ unter jedem $\mathbb{P}_i$ die Wahrscheinlichkeit 0, und es gilt ferner stets

$$\{Z_n \to 0\} \;=\; \{Z_n = 0 \text{ für ein } n \geq 1\} \;\subset\; \{W = 0\} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.} \tag{5.3}$$

Bleibt also nur der superkritische Fall. Zwar sichert (5.3) hier $\{W > 0\} \subset \{Z_n \to \infty\}$ $\mathbb{P}_i$-f.s., doch um $\mu^n$ als richtige Normalisierung für $Z_n$ auszuweisen, bedarf es der stärkeren Eigenschaft $\{W > 0\} = \{Z_n \to \infty\}$ $\mathbb{P}_i$-f.s. oder gleichbedeutend

$$\mathbb{P}_i(Z_n \to \infty) \;=\; \mathbb{P}_i(W > 0) \tag{5.4}$$

für alle $i \geq 0$, die i.a. nicht zu gelten braucht, wie wir noch sehen werden. Eine genauere Auskunft in Form einer Dichotomie gibt das folgende

**5.2. Lemma.** *(a) Entweder gilt $W = 0$ $\mathbb{P}_i$-f.s. für alle $i \geq 0$ oder (5.4), d.h. die Ereignisse $\{W > 0\}$ und $\{Z_n \to \infty\}$ stimmen $\mathbb{P}_i$-f.s. überein.*

*(b) Falls $\mu \leq 1$ und $p_1 \neq 1$, folgt $W = 0$ $\mathbb{P}_i$-f.s. für alle $i \geq 0$.*

Beweis: (a) Sei $p(i) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_i(W = 0)$ für $i \geq 0$. Aus $p(i) = p(1)^i < 1$ für ein $i \geq 1$ folgt dann $p(1) < 1$ und somit $p(j) < 1$ für alle $j \geq 1$. Wir definieren $Y_n = \mathbb{P}(W = 0|\mathcal{F}_n)$ für $n \geq 0$. Da $\{W = 0\} \in \mathcal{F}_\infty$ und $(Y_n)_{n \geq 0}$ unter $\mathbb{P}_i$ ein nichtnegatives, beschränktes Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ bildet, folgt (☞ Satz 22.3 in [2])

$$\lim_{n\to\infty} Y_n \;=\; \mathbb{P}(W = 0|\mathcal{F}_\infty) \;=\; \mathbf{1}_{\{W=0\}} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.}$$

Für beliebig fixiertes $n \geq 0$ gilt nun

$$Z_{n+k} \;=\; \sum_{j=1}^{Z_n} Z_k^{(j)}, \quad k \geq 0$$

wobei die $(Z_k^{(j)})_{k\ge 0}$, $1 \le j \le Z_n$, unter jedem $\mathbb{P}_i$ bedingt unter $\mathcal{F}_n$ stochastisch unabhängige Kopien von $(Z_n)_{n\ge 0}$ unter $\mathbb{P}_1$ definieren. Mit $W_k^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} Z_k^{(j)}$ und $W^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} W_k^{(j)}$ erhalten wir deshalb

$$W \;=\; \lim_{k\to\infty} W_{n+k} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mu^n}\sum_{j=1}^{Z_n} W_k^{(j)} \;=\; \frac{1}{\mu^n}\sum_{j=1}^{Z_n} W^{(j)},$$

und die $W^{(j)}$, $1 \le j \le Z_n$, bilden bedingt unter $\mathcal{F}_n$ unabhängige Kopien von $W$. Damit folgt unter Beactung der Markov-Eigenschaft von $(Z_n)_{n\ge 0}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W=0|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\mu^n}\sum_{j=1}^{n} W^{(j)} = 0 \,\middle|\, Z_n\right) \\
&= \mathbb{P}(W^{(j)}=0,\, 1\le j\le Z_n | Z_n) \\
&= p(1)^{Z_n} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

für jedes $n \ge 0$ und schließlich unter Benutzung von Satz 3.3

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\{W=0\}} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W=0|\mathcal{F}_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W=0|Z_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} p(1)^{Z_n} \\
&= \mathbf{1}_{\{Z_n\to 0\}} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.},
\end{aligned}$$

was offensichtlich (a) beweist.

(b) Hier ist wegen $q = 1$ (☞ Satz 3.1) und somit $W = 0$ $\mathbb{P}_i$-f.s. für alle $i \ge 0$ nichts mehr zu zeigen. ♢

**5.3. Bemerkung.** Wählt man statt $(\mu^n)_{n\ge 0}$ eine andere Normalisierungsfolge $(k_n)_{n\ge 0}$ derart, daß $W_n = k_n^{-1} Z_n$ unter jedem $\mathbb{P}_i$, $i \ge 0$, fast sicher konvergiert und $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{k_{n+1}} > 0$, so bleiben die Aussagen von Lemma 5.2 unverändert gültig.

Mit Blick auf Lemma 5.2 bedarf es im superkritischen Fall, in dem Explosion unter jedem $\mathbb{P}_i$ mit positiver Wahrscheinlichkeit eintritt, einer eingehenderen Untersuchung. Unser Ziel ist, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (5.4) anzugeben, was ein keineswegs einfaches Problem darstellt und im nächsten Abschnitt ausführlich behandelt wird. Zuvor geben wir jedoch eine hinreichende Bedingung im folgenden Satz. Unter Hinweis auf (5.2) können wir uns bei seiner Formulierung auf den Fall eines Urahnen beschränken. Wir schreiben wie schon früher $\mathbb{P}, \mathbb{E}, \mathbb{V}ar$ anstelle von $\mathbb{P}_1, \mathbb{E}_1$ bzw. $\mathbb{V}ar_1$. Ferner sei $\sigma^2 = \mathbb{V}ar\, Z_1$ die Reproduktionsvarianz und $W = W^{(1)}$.

**5.4. Satz.** *Falls $1 < \mu < \infty$ und $\sigma^2 < \infty$, gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n - W)^2 \;=\; 0. \tag{5.5}$$

$$\mathbb{E}W = 1 \quad \textit{und} \quad VarW = \frac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)}. \tag{5.6}$$

$$\mathbb{P}(W=0) = q. \tag{5.7}$$

BEWEIS: Falls $\sigma^2 < \infty$, gilt gemäß (2.7) in Satz 2.2

$$\mathbb{E}W_n^2 \;=\; \frac{\mathbb{E}Z_n^2}{\mu^{2n}} \;=\; \frac{\mathrm{Var}Z_n + \{\mathbb{E}Z_n\}^2}{\mu^{2n}} \;=\; \frac{\sigma^2(1-\mu^{-n})}{\mu(\mu-1)} + 1 \tag{5.8}$$

für alle $n \geq 0$ und folglich

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}W_n^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}W_n^2 \;=\; \frac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)} + 1 \;<\; \infty, \tag{5.9}$$

d.h. $(W_n)_{n\geq 0}$ ist $\mathfrak{L}_2$-beschränkt. Sowohl (5.5) als auch $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}W_n^r = \mathbb{E}W^r$ für $r = 1,2$ folgen deshalb aus Satz 22.7 in [2]. (5.6) ergibt sich aus $\mathbb{E}W_n \equiv 1$ zusammen mit (5.9). $\mathbb{E}W = 1$ impliziert natürlich $\mathbb{P}(W > 0) > 0$, so daß (5.7) eine Konsequenz von (5.4) bildet. ♢

## Übungen zu Abschnitt 5

**Übung 5.1.** Es sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP in einem Standardmodell und $(k_n)_{n\geq 0}$ eine Normalisierungsfolge, so daß $W_n = k_n^{-1} Z_n$ unter jedem $\mathbb{P}_i$ $(i \geq 0)$ fast sicher gegen eine Zufallsgröße $W$ konvergiert. Zeigen Sie, daß dann (5.2) gilt.

## 6. Der superkritische Fall: Zwei Sätze von Heyde-Seneta und Kesten-Stigum

In diesem Abschnitt sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ stets ein superkritischer GWP in einem kanonischen Modell mit nicht-degenerierter Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, d.h. $\mathrm{Var}Z_1 > 0$, und *endlichem* Reproduktionsmittel $\mu$. Die Bezeichnungen der früheren Abschnitte behalten wir natürlich bei. $f$ ist folglich die e.F. von $(p_j)_{j\geq 0}$, $q$ die Aussterbewahrscheinlichkeit unter $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$, $W_n = \mu^{-n} Z_n$ für $n \geq 0$ and $W$ dessen fast sicherer Limes unter $\mathbb{P}$. Nach den Ausführungen im vorigen Abschnitt sollte klar sein, daß es ausreicht, das asymptotische Verhalten von $Z_n$ unter $\mathbb{P}$ zu untersuchen, d.h. bei Annahme eines Urahnen. Es folgen die beiden berühmtesten Grenzwertsätze für superkritische GWP, die es anschließend zu beweisen gilt.

**6.1. Satz (Heyde, Seneta).** *Unter den obigen Annahmen existieren positive $k_n, n \geq 0$, so daß $k_{n+1}/k_n \to \mu$ und $W_n^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} k_n^{-1} Z_n$ $\mathbb{P}$-f.s. gegen einen nicht-degenerierten Limes $W^*$ konvergiert, der $\mathbb{P}(W^* > 0) = \mathbb{P}(Z_n \to \infty) = 1 - q$ erfüllt. Ferner gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\nu^n} \;=\; \begin{cases} 0, \textit{ falls } \nu > \mu \\ \infty, \textit{ falls } 0 < \nu < \mu \end{cases} \qquad \mathbb{P}\textit{-f.s. auf } \{Z_n \to \infty\}. \tag{6.1}$$

**6.2. Satz (Kesten, Stigum).** *Unter den obigen Annahmen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

$$\mathbb{P}(W>0)>0, \tag{6.2}$$

$$\mathbb{E}W=1, \tag{6.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|W_n-W| \;=\; 0, \tag{6.4}$$

$$(W_n)_{n\geq 0} \text{ ist gleichgradig integrierbar}, \tag{6.5}$$

$$\mathbb{E}\sup_{n\geq 0} W_n<\infty, \tag{6.6}$$

$$\mathbb{E}Z_1\log Z_1 \;=\; \sum_{k\geq 1} p_k\, k\,\log k \;<\; \infty. \tag{$ZlogZ$}$$

**6.3. Bemerkungen.** (a) Eine einfache Überlegung unter Benutzung von Satz 6.1 zeigt, daß der nicht-degenerierte Limes eines normalisierten GWP bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig ist. Insbesondere impliziert $(ZlogZ)$ $W^*=cW$ $\mathbb{P}$-f.s. für ein $c\in(0,\infty)$.

(b) Die wichtigsten Fakten über gleichgradige Integrierbarkeit findet der Leser in [1], Abschnitt 50.

Der Beweis von Satz 6.1 basiert erneut auf einem Martingal-Argument und wird durch Lemma 6.4 weiter unten vorbereitet. Was Satz 6.2 betrifft, so folgen die Implikationen "(6.6) $\Rightarrow$ (6.5) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ (6.2)" mit Hilfe von Standardargumenten der W-Theorie, was die notwendige Arbeit auf den Nachweis von "(6.1) $\Rightarrow$ (6.6)" reduziert sowie den der Äquivalenz "(6.1) $\Leftrightarrow$ $(ZlogZ)$", die im wesentlichen aus Lemma 6.5 folgt.

Da $f$ eine konvexe, streng monoton wachsende und bijektive Funktion auf $[q,1]$ bildet, existiert ihre Inverse $g\stackrel{\text{def}}{=}f^{-1}:[q,1]\to[q,1]$, die konkav und wiederum streng monoton wachsend ist mit $g(q)=q$ (☞ Bild 6.1). Sei $g_n\stackrel{\text{def}}{=}g^{\circ(n)}$ für $n\geq 1$ und $g_0\stackrel{\text{def}}{=}id_{[q,1]}$. Es folgt $g_n=f_n^{-1}$, wie man sofort einsieht. Für $n\geq 0$ und $s\in[q,1]$ definieren wir

$$X_n(s) \;=\; g_n(s)^{Z_n} \tag{6.7}$$

und behaupten

**6.4. Lemma.** *Für jedes $s\in[q,1]$ definiert $(X_n(s))_{n\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ mit Werten in [0,1] und konvergiert $\mathbb{P}$-f.s. und in $\mathfrak{L}_p$, $p\geq 1$, gegen eine Zufallsgröße $X_\infty(s)$, die für $s\in(q,1)$ nicht f.s. konstant ist.*

Beweis: Daß $(X_n(s))_{n\geq 0}$ ein Martingal bildet, folgt aus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n(s)|\mathcal{F}_{n-1}) \;&=\; \mathbb{E}\left(g_n(s)^{\prod_{j=1}^{Z_{n-1}} X_{nj}}\,\middle|\,Z_{n-1}\right)\\ &=\; \left(\mathbb{E}(g_n(s)^{Z_1})\right)^{Z_{n-1}}\end{aligned}$$

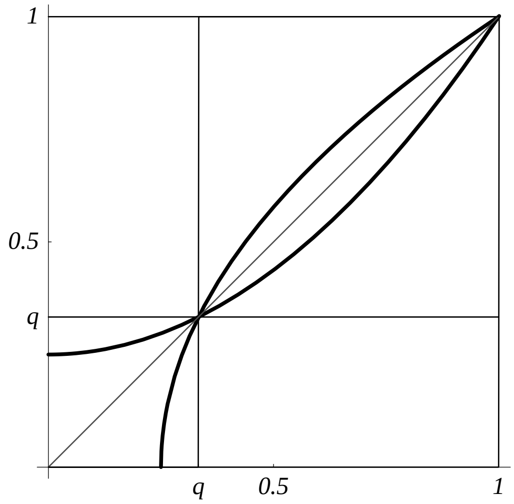


Bild 6.1. Erzeugende Funktion $f$ und ihre Inverse $g$

$$
\begin{aligned}
&= f \circ g_n(s)^{Z_{n-1}} \\
&= X_{n-1}(s) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}
\end{aligned}
$$

für alle $n \geq 1$. Es ist offensichtlich [0,1]-wertig, also beschränkt, und konvergiert deshalb sowohl $\mathbb{P}$-f.s. als auch in $\mathfrak{L}_p$ für alle $p \geq 1$ gemäß Satz 22.7 in [2]. Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}X_\infty(s) \;=\; \mathbb{E}X_0(s) \;=\; g_0(s) \;=\; s$$

für alle $s \in [q,1]$. Da weiter $(X_n^2(s))_{n\geq 0}$ ein Submartingal bildet (☞ Korollar 19.4 in [2]) und $Var\, Z_1 > 0$, folglich $Var\, X_1(s) = Var g(s)^{Z_1} > 0$ für alle $s \in \{t \in [q,1] : 0 < g(t) < 1\} \supset (q,1)$, liefert die Jensensche Ungleichung

$$\mathbb{E}X_\infty^2(s) \;\geq\; \mathbb{E}X_1^2(s) \;>\; \big(\mathbb{E}X_1(s)\big)^2$$

und damit $Var\, X_\infty(s) \geq Var\, X_1(s) > 0$. ♢

Definieren wir nun

$$c_n(s) \;=\; -\log g_n(s) \quad \text{und} \quad Y(s) \;=\; -\log X_\infty(s) \tag{6.8}$$

für $s \in (q,1)$ und $n \geq 0$, so sichert Lemma 6.4, daß $Y(s)$ nichtnegativ und nicht f.s. konstant ist und daß

$$c_n(s)Z_n \;= \log X_n(s) \;\to\; Y(s) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (n \to \infty). \tag{6.9}$$

Bis zu dieser Stelle ist allerdings $\mathbb{P}(Y(s) = \infty) > 0$ nicht ausgeschlossen.

Beweis von Satz 6.1: Aus $g(s) \geq s$ für $s \in [q,1]$ (☞ Bild 6.1) schließen wir $g_n = g^{\circ(n)} \uparrow g_\infty$ für $n \to \infty$, wobei

$$g_\infty(q) = q \quad \text{und} \quad g_\infty(s) = 1 \text{ für } s \in (q,1].$$

Letzteres gilt, weil $g_\infty(s) < 1$ für ein $s \in (q,1)$ zusammen mit Korollar 3.2 den Widerspruch

$$s \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n \circ g_n(s) \;\le\; \lim_{n\to\infty} f_n \circ g_\infty(s) \;=\; q$$

implizieren würde. Da $-\log x \simeq 1-x$, falls $x \uparrow 1$, folgt nun

$$c_n(s) \;=\; -\log\big(1-(1-g_n(s))\big) \;\simeq\; 1-g_n(s)$$

und dann in Kombination mit $\lim_{s\uparrow 1} \frac{1-g(s)}{1-s} = g'(1) = \mu^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n(s)}{c_{n-1}(s)} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1-g_n(s)}{1-g_{n-1}(s)} \;=\; \frac{1}{\mu} \tag{6.10}$$

für alle $s \in (q,1)$.

Als nächstes zeigen wir, daß $Y(s)$ für jedes $s \in (q,1)$ $\mathbb{P}$-f.s. endlich ist. Wir erhalten unter Benutzung von (6.10), der Markov-Eigenschaft für $(Z_n)_{n\ge 0}$ sowie Lemma 1.2 (mit seiner Notation $Z_n = Z_n^{(1)} + ... + Z_n^{(j)}$ unter $\mathbb{P}_j$)

$$\begin{aligned}
\rho_s \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathbb{P}(Y(s)<\infty) \;&=\; \sum_{j\ge 0} p_j \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} c_n(s) Z_n < \infty \Big| Z_1 = j\Big)\\
&=\; \sum_{j\ge 0} p_j \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} c_{n-1}(s) Z_n < \infty \Big| Z_1 = j\Big)\\
&=\; \sum_{j\ge 0} p_j \mathbb{P}_j\Big(\lim_{n\to\infty} c_{n-1}(s) Z_{n-1} < \infty\Big)\\
&=\; \sum_{j\ge 0} p_j \mathbb{P}_j\Big(\lim_{n\to\infty} c_{n-1}(s) Z_{n-1}^{(i)} < \infty \text{ für } 1 \le i \le j\Big)\\
&=\; \sum_{j\ge 0} p_j \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} c_{n-1}(s) Z_{n-1} < \infty\Big)^j\\
&=\; \sum_{j\ge 0} p_j \mathbb{P}(Y(s)<\infty)^j\\
&=\; f(\rho_s)
\end{aligned}$$

für $s \in (q,1)$. Eine analoge Rechnung für $\eta_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(Y(s)=0)$ zeigt $\eta_s = f(\eta_s)$ für alle $s \in (q,1)$, so daß $\rho_s, \eta_s$ beide Fixpunkte von $f$ bilden und folglich entweder mit $q$ oder 1 übereinstimmen. Da $Y(s)$ aber nicht f.s. konstant ist, folgt $\eta_s = q$, wohingegen

$$q \;<\; s \;=\; \mathbb{E}X_\infty(s) \;=\; \mathbb{E}(e^{-Y(s)}) \;\le\; \rho_s$$

$\rho_s = 1$ liefert.

Nach dem bisher Gezeigten können wir $(k_n)_{n\ge 0} = (c_n(s)^{-1})_{n\ge 0}$ für beliebiges $s \in (q,1)$ wählen und erhalten $k_{n+1}/k_n \to \mu$ (gemäß (6.10)) und die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz von $W_n^* = k_n^{-1} Z_n$ gegen den nicht-degenerierten Limes $W^* = Y(s)$, der $\mathbb{P}(W^*=0) = \eta_s = q$ erfüllt (dies folgt auch mit der Bemerkung nach Lemma 5.2).

Für die noch unbewiesene Behauptung (6.1) notieren wir zuerst, daß die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz von $W_n$ gegen eine endliche Zufallsgröße $\nu^{-n}Z_n \to 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für $\nu > \mu$ impliziert. Es bleibt deshalb nur der Fall "$\nu \in (0,\mu)$" zu untersuchen. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}/\nu^{n+1}}{k_n/\nu^n} \;=\; \frac{\mu}{\nu} \;>\; 1$$

folgt aber leicht $\nu^{-n}k_n \to \infty$ und damit auf $\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\} = \{\lim_{n\to\infty} k_n^{-1} Z_n > 0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\nu^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{k_n} \cdot \frac{k_n}{\nu^n} \;=\; \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Der Beweis von Satz 6.1 ist nunmehr vollständig. $\diamondsuit$

Der Beweis von Satz 6.2, genauer von "(6.2) $\Leftrightarrow$ $(ZlogZ)$", basiert im wesentlichen auf dem anschließenden Lemma, für das wir zuerst einige Vorüberlegungen anstellen: Eine Entwicklung 1. Ordnung von $f$ an der Stelle 1 ergibt

$$f(s) \;=\; 1 \;-\; \mu(1-s) \;+\; r(s)(1-s) \tag{6.11}$$

für $s \in (-1,1)$, wobei $r(s)$ durch

$$r(s) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mu - \frac{1-f(s)}{1-s}$$

gegeben ist und die Eigenschaften

$$\begin{aligned} r(q) \;&=\; \mu - 1 \quad (\text{da } q < 1), \\ r(1) \;&\stackrel{\text{def}}{=}\; \lim_{s\uparrow 1} r(s) \;=\; 0, \\ r'(s) \;&\le 0 \text{ für } s \in [0,1), \end{aligned} \tag{6.12}$$

besitzt, wie man leicht nachweist.

Ersetzen wir $s$ durch $g(s)$ in (6.11), so folgt nach einfacher Rechnung

$$\frac{1-g(s)}{1-s} \;=\; \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{r\circ g(s)}{\mu}\right)^{-1} \tag{6.13}$$

für $s \in (q,1)$. Nochmaliges Ersetzen von $s$ durch $g_{n-1}(s)$ für beliebiges $n \ge 1$ liefert dann

$$\frac{1-g_n(s)}{1-g_{n-1}(s)} \;=\; \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{r\circ g_n(s)}{\mu}\right)^{-1} \tag{6.14}$$

und damit

$$\frac{1-g_n(s)}{1-s} \;=\; \prod_{j=1}^{n} \frac{1-g_j(s)}{1-g_{j-1}(s)} \;=\; \frac{1}{\mu^n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{r\circ g_j(s)}{\mu}\right)\right)^{-1} \tag{6.15}$$

für $s \in (q,1)$ und $n \ge 1$.

**6.5. Lemma.** *Für jedes $\delta \in (0,1)$ bilden $\sum_{k\geq 1} r(1-\delta^k) < \infty$ und $(ZlogZ)$ äquivalente Bedingungen.*

Beweis: Sei $a_k = \mathbb{P}(Z_1 > k) = \sum_{j>k} p_j$ für $k \geq 0$. Wir erinnern daran, daß $\mu = \sum_{k\geq 0} a_k$. Es gilt

$$\begin{aligned} r(s) &= \mu - \sum_{k\geq 0}\left(1 - \sum_{j\geq 0} p_j s^j\right) s^k \\ &= \mu - \sum_{k\geq 0} s^k + \sum_{k\geq 0}\sum_{j\geq k} p_{j-k} s^j \\ &= \mu - \sum_{k\geq 0} s^k + \sum_{j\geq 0}(1-a_j) s^j \\ &= \mu - \sum_{j\geq 0} a_j s^j \end{aligned}$$

für $s \in (0,1)$. Setzt man $\alpha = -\log\delta$, folgt für $j \geq 2$

$$\begin{aligned} r(1-\delta) + \int_1^j r(1-e^{-\alpha x})\,dx &\geq \sum_{k=1}^{j} r(1-\delta^k) \\ &\geq \int_1^j r(1-e^{-\alpha x})\,dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_{1-\delta}^{1-\delta^j} \frac{r(s)}{1-s}\,ds. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{k\geq 1} r(1-\delta^k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \frac{r(s)}{1-s}\,ds < \infty.$$

Als nächstes erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^1 \frac{r(s)}{1-s}\,ds &= \int_0^1 \sum_{k\geq 0}\left(\mu - \sum_{j\geq 0} a_j s^j\right) s^k\,ds \\ &= \int_0^1 \sum_{j\geq 1} a_j \sum_{k\geq 0}(s^k - s^{j+k})\,ds \\ &= \int_0^1 \sum_{j\geq 1} a_j \sum_{k=0}^{j-1} s^k\,ds \\ &= \sum_{j\geq 1} a_j \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k} \\ &\asymp \sum_{j\geq 1} a_j \log j, \end{aligned} \tag{6.16}$$

wobei $\sum_{n\geq 1} x_n \asymp \sum_{n\geq 1} y_n$ bedeutet, daß die beiden Reihen entweder gemeinsam endlich oder gemeinsam unendlich sind. Um schließlich noch zu einzusehen, daß die letzte Summe in (6.16) genau dann konvergiert, wenn ($ZlogZ$) gültig ist, genügt der Hinweis, daß unter Benutzung einer wohlbekannten Integrationsformel (☞ Satz 19.13 in [1])

$$\mathbb{E}Z_1(\log Z_1 - 1) \;=\; \int_0^\infty \log t \; \mathbb{P}(Z_1 > t)\; dt \;\asymp\; \sum_{j\ge 1} a_j \,\log j$$

gilt. $\diamondsuit$

Beweis von Satz 6.2: Wie schon im Anschluß an den Satz bemerkt, können wir uns auf den Nachweis von "(6.2) $\Leftrightarrow$ ($ZlogZ$)" und "(6.2) $\Rightarrow$ (6.6)" beschränken. Was die erste der beiden Aussagen betrifft, zeigen wir zunächst die Äquivalenz von ($ZlogZ$) mit

$$\lim_{n\to\infty} \mu^n c_n(s) < \infty \tag{6.17}$$

für $s \in (q,1)$. Da $\mu^n c_n(s) \simeq \mu^n(1-g_n(s))$ für $n \to \infty$, ist (6.17) unter Hinweis auf (6.15) äquivalent zu

$$\prod_{n\ge 1}\left(1 - \frac{r\circ g_n(s)}{\mu}\right) \;>\; 0$$

für $s \in (q,1)$, und diese Aussage wiederum zu

$$\sum_{n\ge 1}\log\left(1 - \frac{r\circ g_n(s)}{\mu}\right) \;\asymp\; \sum_{n\ge 1} r\circ g_n(s) \;<\; \infty \tag{6.18}$$

für $s \in (q,1)$.

Sei nun ein beliebiges $s_0 \in (q,1)$ gewählt derart, daß $\mu_0 \stackrel{\text{def}}{=} g'(s_0)^{-1} > 1$. Aufgrund der Konkavität von $g$ folgt

$$\frac{1}{\mu} \;\le\; \frac{1-g(s)}{1-s} \;\le\; \frac{1}{\mu_0}$$

für alle $s \in [s_0,1)$. $g_n(s_0) > s_0$ und $g_n \uparrow$ implizieren ferner $g_n([s_0,1]) \subset [s_0,1]$ für alle $n$, so daß per Iteration und einfacher Algebra

$$1 - \mu_0^{-n}(1-s) \;\le\; g_n(s) \;\le\; 1 - \mu^{-n}(1-s) \tag{6.19}$$

für alle $s \in [s_0,1)$, $n \ge 0$. Für $s \in (q,s_0)$ kann man stets ein $k = k_s \ge 1$ wählen, so daß $g_n(s) \ge s_0$ für alle $n \ge k$. Folglich impliziert (6.19) für $s \in (q,s_0)$ and $n \ge k$

$$1 - \mu_0^{k-n}(1-g_k(s)) \;\le\; g_n(s) \;\le\; 1 - \mu^{k-n}(1-g_k(s)). \tag{6.20}$$

(6.19) und (6.20) zeigen offensichtlich, daß für jedes $s \in (q,1)$ Zahlen $a,b \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ (abhängig von $s$) existieren, so daß

$$1 - a^n \;\le\; g_n(s) \;\le\; 1 - b^n \tag{6.21}$$

für alle $n \ge k$. Unter Hinweis auf Lemma 6.5 folgt schließlich die Äquivalenz von ($ZlogZ$) und (6.18).

Zum Nachweis der Äquivalenz von (6.2) und (6.17) schreiben wir

$$W_n \;=\; \frac{c_n(s)Z_n}{\mu^n c_n(s)}$$

und notieren, daß der $\mathbb{P}$-f.s. Limes $W$ offensichtlich genau dann nicht-degeneriert ist, wenn (6.17) vorliegt.

Wenden wir uns nun dem Beweis von "(6.2) $\Rightarrow$ (6.6)" zu. $W_1^{(1)}, W_2^{(1)}, ...$ seien unabhängige Kopien von $W$. Wir notieren, daß (6.2) $\mathbb{E}W \in (0,\infty)$ impliziert, und erinnern daran, daß $W^{(j)}$ den $\mathbb{P}_j$-f.s. Limes von $W_n$ bezeichnet, d.h. $W = W^{(1)}$, und daß $\mathbb{P}_j(W^{(j)} \in \cdot) = \mathbb{P}(W_1^{(1)} + ... + W_j^{(1)} \in \cdot)$ für alle $j \geq 1$. Für beliebiges $a \in (0, \mathbb{E}W)$ existieren nach dem starken Gesetz der großen Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und $b > 0$, so daß

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{t\mu^n} W_i^{(1)} > at\mu^n\right) \;\geq\; b$$

für alle $t \geq 1$ und $n \geq m$. Es folgt für alle $t \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W > at) \;&\geq\; \mathbb{P}\Big(W > at, \sup_{n\geq m} W_n > t\Big) \\
&= \sum_{n\geq m} \mathbb{P}\Big(W > at, W_n > t, \max_{m\leq k<n} W_k \leq t\Big) \\
&= \sum_{n\geq m}\sum_{j>t\mu^n} \mathbb{P}\Big(\lim_{k\to\infty} \mu^{-(n+k)} Z_{n+k} > at \Big| Z_n = j\Big)\,\mathbb{P}\Big(Z_n = j, \max_{m\leq k<n} W_k \leq t\Big) \\
&= \sum_{n\geq m}\sum_{j>t\mu^n} \mathbb{P}_j\Big(\lim_{k\to\infty} \mu^{-k} Z_k > at\mu^n\Big)\,\mathbb{P}\Big(Z_n = j, \max_{m\leq k<n} W_k \leq t\Big) \\
&\geq \sum_{n\geq m}\sum_{j>t\mu^n} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{t\mu^n} W_i^{(1)} > at\mu^n\right)\mathbb{P}\Big(Z_n = j, \max_{m\leq k<n} W_k \leq t\Big) \\
&\geq b\,\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq m} W_n > t\Big),
\end{aligned}$$

und dies liefert weiter das gewünschte Ergebnis mittels

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{n\geq 0} W_n \;&\leq\; m \;+\; \mathbb{E}\sup_{n\geq m} W_n \\
&=\; m \;+\; \int_0^\infty \mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq m} W_n > t\Big)\,dt \\
&\leq\; (m+1) \;+\; \frac{1}{b}\int_1^\infty \mathbb{P}(W > at)\,dt \\
&\leq\; (m+1) \;+\; \frac{\mathbb{E}W}{ab} \;<\; \infty.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Es gibt einen, zumindest auf den ersten Blick, kuriosen Aspekt der beiden soeben bewiesenen Sätze. Wir haben gesehen, daß ein superkritischer GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Reproduktionsmittel $\mu$ auf $\{Z_n \to \infty\}$ wie $\mu^n$ wächst, sofern $(ZlogZ)$ vorliegt. Ist dies jedoch nicht der Fall, hat die Normalisierungsfolge $(k_n)_{n\geq 0}$ in Satz 6.1 die Eigenschaft $\lim_n \mu^{-n}k_n = 0$, d.h. $Z_n$ wächst *langsamer* als $\mu^n$ auf $\{Z_n \to \infty\}$. Andererseits impliziert die Verletzung von $(ZlogZ)$ ein langsameres Abfallen der Wahrscheinlichkeiten $p_j$ gegen 0 für $j \to \infty$, was wiederum eher für ein stärkes Wachstum als $\mu^n$ zu sprechen scheint. Das folgende Lemma, dessen Beweis Übung 6.1 bildet, dient zur Klärung des überraschenden Phänomens.

**6.6. Antipoden-Lemma.** *Es seien $(Z_n)_{n\geq 0}$ und $(\tilde{Z}_n)_{n\geq 0}$ zwei GWP mit demselben Reproduktionsmittel $\mu$, Reproduktionsvarianzen $\sigma^2$ bzw. $\tilde{\sigma}^2$ sowie Reproduktionsverteilungen $(p_j)_{j\geq 0}$ bzw. $(\tilde{p}_j)_{j\geq 0}$, für die*

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \;=\; \sum_{j\geq k} p_j \;\leq\; \sum_{j\geq k} \tilde{p}_j \;=\; \mathbb{P}(\tilde{Z}_1 \geq k) \tag{6.22}$$

*für alle $k \geq 2$ gelte bei strikter Ungleichung für mindestens ein $k$. Die zugehörigen e.F. seien mit $f, \tilde{f}$, die zugehörigen Aussterbewahrscheinlichkeiten mit $q, \tilde{q}$ bezeichnet. Dann folgt*

$$f(s) < \tilde{f}(s) \tag{6.23}$$

*für alle $s \in [0,1)$, insbesondere $p_0 < \tilde{p}_0$ sowie $q < \tilde{q}$, falls $\mu > 1$. Ferner gilt $p_1 > \tilde{p}_1$ sowie $\sigma^2 \leq \tilde{\sigma}^2$ mit strikter Ungleichung, falls $\sigma^2 < \infty$.*

Das Lemma zeigt, daß von zwei Populationen mit demselben Reproduktionsmittel in derjenigen, deren Mitglieder mit größerer Wahrscheinlichkeit 2 und mehr Kinder zeugen, auch mit größerer Wahrscheinlichkeit kinderlose Mitglieder vorkommen, und daß dies - im superkritischen Fall - auch eine höhere Aussterbenswahrscheinlichkeit nach sich zieht. Bedenkt man, daß jede Population den beiden antipodischen Kräften "Extinktion" und "Explosion" ausgesetzt ist, so läßt sich Lemma 6.6 weitergehend wie folgt interpretieren: Bei Festhalten des Reproduktionsmittels erzwingt ein Verstärken der einen Kraft stets ein Verstärken ihrer Antipode, wobei sich mit zunehmender Konkurrenz das Aussterben als stärkere Kraft erweist. In der Tat zeigt eine Kombination von Lemma 6.6 mit dem, was wir davor bemerkt haben, daß im Fall einer Verletzung der Bedingung $(ZlogZ)$ selbst im Fall der Explosion die Tendenz zum Aussterben sichtbar vorhanden bleibt, indem sich die Wachstumsrate von $\mu^n$ auf ein $k_n = o(\mu^n)$ verringert.

Obgleich die Verteilung von $W^*$ in Satz 6.1, d.h. von $W$ bei Vorliegen von $(ZlogZ)$, i.a. nicht explizit bestimmt werden kann (☞ Übung 6.3 für eine Ausnahme), lassen sich weitere Eigenschaften durch eine Analyse ihrer Laplace-Transformierten

$$\varphi(t) \;=\; \mathbb{E}(e^{-tW^*}), \quad t \geq 0$$

gewinnen. Ein wichtiges Resultat ist beispielsweise, daß $W^*$ auf $\{W^* > 0\}$ stets eine Lebesgue-Dichte besitzt - man spricht in diesem Fall von der Absolutstetigkeit von $W^*$ auf $\{W^* > 0\}$ - und daß diese Dichte bei Gültigkeit von $(ZlogZ)$ sogar auf ganz $(0,\infty)$ stetig und positiv ist. Der Beweis jedoch ist sehr lang und wird im nächsten Abschnitt gegeben. Er kann beim ersten

Lesen durchaus ausgelassen werdenund ist deshalb mit einem Stern versehen. An dieser Stelle beschränken wir uns auf die Herleitung einer funktionalen Beziehung zwischen $\varphi$ und $f$.

**6.7. Satz.** *Die Laplace-Transformierte $\varphi$ von $W^* = \lim_{n\to\infty} k_n^{-1} Z_n$ in Satz 6.1 erfüllt*

$$\varphi(\mu t) \;=\; f \circ \varphi(t) \tag{6.24}$$

*für alle $t \geq 0$. $\mathbb{E}W^* = |\varphi'(0)| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\downarrow 0} |\varphi'(t)|$ ist ferner genau dann endlich, wenn (ZlogZ) gilt, und $\varphi$ bildet in diesem Fall die eindeutige Lösung von (6.24) mit vorgegebener Ableitung an der Stelle 0.*

Beweis: Da $\lim_{n\to\infty} k_{n+1}/k_n = \mu$, folgt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\varphi(\mu t) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-\mu t Z_{n+1}/k_{n+1}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 0} p_j\, \mathbb{E}(e^{-\mu t Z_{n+1}/k_{n+1}} | Z_1 = j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 0} p_j\, \mathbb{E}_j(e^{-\mu t (k_n/k_{n+1})(Z_n/k_n)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 0} p_j\, \left(\mathbb{E}(e^{-\mu t (k_n/k_{n+1})(Z_n/k_n)})\right)^j \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-\mu t (k_n/k_{n+1})(Z_n/k_n)})\right)^{Z_1}\right) \\
&= \mathbb{E}(\varphi(t)^{Z_1}) \\
&= f \circ \varphi(t),
\end{aligned}$$

wobei der Satz von der majorisierten Konvergenz in der ersten und drittletzten Zeile verwendet wurde.

(6.24) kann zu $\varphi(t) = f \circ \varphi(\frac{t}{\mu})$ umgeschrieben werden, was $\varphi(\frac{t}{\mu}) = g \circ \varphi(t)$ für $t \geq 0$ impliziert unter Beachtung von $\varphi(t) \geq \varphi(\infty) = \mathbb{P}(W^* = 0) = q$. Wir erhalten nun durch Iteration

$$\varphi\left(\frac{t}{\mu^n}\right) \;=\; g_n \circ \varphi(t)$$

für alle $t \geq 0,\ n \geq 1$ und daher

$$1 - \varphi\left(\frac{t}{\mu^n}\right) \;=\; 1 - g_n \circ \varphi(t) \;\simeq\; c_n(\varphi(t)) \quad (n \to \infty).$$

Es folgt

$$|\varphi'(0)| \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \varphi(\mu^{-n} t)}{\mu^{-n} t} \;=\; t^{-1} \lim_{n\to\infty} \mu^n c_n(\varphi(t)),$$

und der letztere Limes ist genau dann endlich, wenn (ZlogZ) vorliegt (☞ (6.17) im Beweis von Satz 6.2).

Seien abschließend $\varphi$ and $\psi$ zwei Lösungen von (6.24) mit derselben Ableitung in 0. Die Konvexität von $f$ impliziert $\frac{f(s)-f(r)}{s-r} \leq f'(1) = \mu$ für alle $0 \leq r < s \leq 1$, und dies liefert in Kombination mit einer erneuten Iteration

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &= \left| f \circ \varphi\left(\frac{t}{\mu}\right) - f \circ \psi\left(\frac{t}{\mu}\right)\right| \\ &\leq \mu \left|\varphi\left(\frac{t}{\mu}\right) - \psi\left(\frac{t}{\mu}\right)\right| \\ &\vdots \\ &\leq \mu^n \left|\varphi\left(\frac{t}{\mu^n}\right) - \psi\left(\frac{t}{\mu^n}\right)\right| \\ &\to t\,|\varphi'(0) - \psi'(0)| = 0, \end{aligned}$$

falls $n \to \infty$, d.h. $\varphi = \psi$. $\diamondsuit$.

## Übungen zu Abschnitt 6

**Übung 6.1.** (a) Beweisen Sie Lemma 6.6 und darüber hinaus, daß dort $f_n(s) \leq \tilde{f}_n(s)$ für alle $n \geq 1$ und $s \in [0,1]$ sowie im superkritischen Fall $\varphi(t) \leq \tilde{\varphi}(t)$ für alle $t \geq 0$ gelten, wobei $\varphi$ und $\tilde{\varphi}$ die Laplace-Transformierten von $\lim_{n\to\infty} \mu^{-n} Z_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \mu^{-n} \tilde{Z}_n$ bezeichnen. [Hinweis: Zeigen Sie zuerst

$$f(s) = 1 - (1-s) \sum_{k \geq 1} a_k s^{k-1} \tag{6.25}$$

für alle $s \in [0,1]$, wobei $a_k = \sum_{j \geq k} p_j = \mathbb{P}(Z_1 \geq k)$ für alle $k \geq 0$.]

(b) Zeigen Sie in den Bezeichnungen des Antipoden-Lemmas 6.6: Gegeben zwei verschiedene Reproduktionsverteilungen $(p_j)_{j\geq 0}$, $(\tilde{p}_j)_{j \geq 0}$ mit demselben Erwartungswert $\mu$ und $p_m < \tilde{p}_m$ für $m \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{k \geq 0 : p_k \neq \tilde{p}_k\}$, gilt $f_n(s) \leq \tilde{f}_n(s)$ für alle $n \geq 1$ und $s \in [0,1]$ sowie im superkritischen Fall $q < \tilde{q}$ und $\varphi(t) \leq \tilde{\varphi}(t)$ für alle $t \geq 0$.

(c) Konstruieren Sie zu beliebig vorgegebenem $m \geq 0$ (möglichst einfache) Beispiele verschiedener Reproduktionsverteilungen mit identischem Erwartungswert.

**Übung 6.2.** In der Situation von Satz 6.1 sei $\{W_j^*, j \geq 1\}$ eine Familie u.i.v. Zufallsgrößen mit derselben Verteilung wie $W^*$ und unabhängig von $(Z_n)_{n \geq 0}$. Zeigen Sie, daß die *stochastische Fixpunktgleichung*

$$W^* \stackrel{d}{=} \frac{1}{\mu^n} \sum_{j=1}^{Z_n} W_j^* \tag{6.26}$$

für jedes $n \geq 0$ gilt.

**Übung 6.3.** Zeigen Sie: Ist $\mathbb{P}(W \in \cdot | W > 0)$ eine Exponentialverteilung (mit Mittelwert $1-q$ wegen $\mathbb{P}(W=0) = q$ und $\mathbb{E}W = 1$), so besitzt $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine Reproduktionsverteilung vom gebrochen-rationalen Typ (4.1). [Hinweis: Benutzen Sie (6.24).]

**Übung 6.4.** Die folgenden Übungsteile ermöglichen einen alternativen Beweis des Satzes von Kesten, Stigum: Gegeben die zu Beginn des Abschnitts gemachten Voraussetzungen, seien

$$W'_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k} \mathbf{1}_{\{X_{n+1,k} \le \mu^n\}} \quad \text{und} \quad R_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(W_n - W'_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

für $n \ge 0$. Zeigen Sie:

(a) $W_{n+1} - W_n = \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{k=1}^{Z_n} (X_{n+1,k} - \mu)$ für alle $n \ge 0$.

(b) $R_n = \mathbb{E}(W_{n+1} - W'_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{W_n}{\mu} \mathbb{E} Z_1 \mathbf{1}_{\{Z_1 > \mu^n\}}$ f.s. für alle $n \ge 0$.

(c) $(W'_{n+1} - W_n + R_n)_{n \ge 0}$ bildet eine $\mathfrak{L}_2$-beschränkte Martingaldifferenzfolge.

(d) $\sum_{n \ge 1} \mathbb{P}(W'_n \ne W_n) < \infty$, folglich $\mathbb{P}(W'_n = W_n$ für fast alle $n \ge 1) = 1$ (Lemma von Borel-Cantelli), und $\sum_{n \ge 0} \mathbb{E}(W'_{n+1} - W_n + R_n)^2 < \infty$.

(e) $\sum_{n \ge 0} (W'_{n+1} - W_n)$ und $\sum_{n \ge 0} R_n$ existieren f.s.

(f) $\sum_{n \ge 0} (W'_{n+1} - W_n + R_n)$ existiert f.s. und in $\mathfrak{L}_1$.

(g) $\sum_{n \ge 0} ER_n < \infty$ und $(ZlogZ)$ sind äquivalente Bedingungen.

(h) Nachweis von "$(ZlogZ) \Rightarrow (6.3)$": Gegeben $(ZlogZ)$ existieren sowohl $\sum_{n \ge 0} R_n$ als auch $\sum_{n \ge 0} (W'_{n+1} - W_n)$ in $\mathfrak{L}_1$ und

$$\mathbb{E}W \;\ge\; 1 \;+\; \mathbb{E}\left( \sum_{n \ge m} (W'_{n+1} - W_n) \right)$$

für alle $m \ge 1$. Dies impliziert $\mathbb{E}W = 1$ (warum?).

(i) Nachweis von "$(6.2) \Rightarrow (ZlogZ)$": Sei $W' \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{n \ge 0} W_n$. Aus (6.2) folgt $\mathbb{P}(W' > 0) = \mathbb{P}(W > 0) > 0$ sowie

$$\frac{W'}{\mu} \sum_{n \ge 0} \mathbb{E} Z_1 \mathbf{1}_{\{Z_1 > \mu^n\}} \;\le\; \sum_{n \ge 0} R_n \;<\; \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und damit auch $(ZlogZ)$ (warum?).

## 7.* Die Absolutstetigkeit von W*

Gegeben sei weiterhin die Situation des vorigen Abschnitts einschließlich der dortigen Bezeichnungen. Insbesondere bezeichne $W^*$ den f.s. Limes der normalisierten Folge $(k_n^{-1} Z_n)_{n \ge 0}$ im Satz von Heyde, Seneta. Ferner sei $\lambda\!\!\lambda$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $\phi(t) = Ee^{itW^*}$ die F.T. von $W^*$, so daß $\phi(t) = \varphi(-it)$. Wir zeigen im folgenden

**7.1. Satz.** *Es sei $\mu > 1$ und $\sigma^2 = Var\, Z_1 \in (0, \infty]$. Dann besitzt $W^* = \lim_{n \to \infty} k_n^{-1} Z_n$ auf $(0, \infty)$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte, die außerdem stetig, überall positiv und auf jedem $[t, \infty)$, $t > 0$, beschränkt ist, falls $(ZlogZ)$ vorliegt.*

Wir haben den Beweis aufgrund seiner Länge in eine Reihe von Sätzen und Lemmata zerlegt, wobei wir weitestgehend dem Vorgehen in [4] folgen werden (☞ dort I.10, I.12 und

II.5). Wir zeigen zunächst die Absolutstetigkeit von $W^*$ auf $(0,\infty)$ unter der einschränkenden

$$\boxed{\textit{Voraussetzung: } q \;=\; \mathbb{P}(W^* = 0) \;=\; 0.}$$

In einem weiteren Schritt wird diese Einschränkung später aufgehoben.

Wir beginnen mit der Analyse der F.T. $\phi$ von $W^*$ auf der Grundlage der funktionalen Beziehung (6.24), die auch für $\phi$ anstelle der L.T. $\varphi$ gilt (Übung 7.1). Als Vorbereitung notieren wir eine einfache Ergänzung von Korollar 3.2, deren Beweis Übung 7.2 bildet.

**7.2. Lemma.** *Sei $f$ eine e.F. mit $n$-ter Iteration $f_n$ und kleinstem Fixpunkt $q \in [0,1]$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = q$ für alle $z \in \{y \in \mathbb{C} : |y| < 1\}$, und die Konvergenz ist kompakt gleichmäßig.*

Als zweite Vorbereitung benötigen wir

**7.3. Lemma.** *Aus $\sigma^2 > 0$ folgt, daß $W^*$ nicht $\mathbb{P}$-f.s. konstant ist.*

Beweis: Aus $W^* = c$ $\mathbb{P}$-f.s. folgt $\varphi(t) = e^{-ct}$ und dann vermöge (6.24)

$$e^{-ct} \;=\; f(e^{-ct/\mu})$$

für alle $t \geq 0$. Setzt man also $s = e^{-ct/\mu}$, gilt $f(s) = s^\mu$ für alle $s \in [0,1]$, was $\mu \in \mathbb{N}$ (Übung 7.3) und dann $p_\mu = 1$ sowie insbesondere $\sigma^2 = 0$ impliziert. ♢

**7.4. Lemma.** *Aus $\sigma^2 > 0$ folgt $|\phi(t)| < 1$ für alle $t \neq 0$.*

Beweis: Gemäß vorhergehendem Lemma ist $W^*$ nicht $\mathbb{P}$-f.s. konstant, woraus die Existenz eines $\delta > 0$ folgt, so daß $|\phi(t)| < 1$ für alle $0 < |t| < \delta$ (☞ Korollar 41.16 in [1]). Unter Benutzung von (6.24) für $\phi$ folgt nun weiter

$$|\phi(t)| \;=\; \left| f \circ \phi\left(\frac{t}{\mu}\right)\right| \;\leq\; f\left(\left|\phi\left(\frac{t}{\mu}\right)\right|\right) \;<\; 1$$

für alle $0 < |t| < \delta\mu$ und nach $n$-maliger Durchführung dieses Schlusses $|\phi(t)| < 1$ für alle $0 < |t| < \delta\mu^n$. Wegen $\mu^n \to \infty$ ist das Lemma bewiesen. ♢

Das nächste Lemma bildet einen wichtigen Schritt in unserem Beweis.

**7.5. Lemma.** *Gegeben $\mu > 1, \sigma^2 > 0$ und $\delta = -\frac{\log f'(q)}{\log \mu}$, gilt für alle $0 < \eta < \delta$*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi(t) - q|\,|t|^\eta < \infty, \tag{7.1}$$

$$(ZlogZ) \quad\Rightarrow\quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi'(t)|\,|t|^{1+\eta} < \infty. \tag{7.2}$$

Beweis: Aus (6.24) für $\phi$ folgt mittels Iteration

$$\phi(\mu^n t) \;=\; f_n(\phi(t)) \tag{7.3}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Da $\phi$ stetig ist, liefert Lemma 7.4

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{1 \le |t| \le \mu} |\phi(t)| \;<\; 1 \tag{7.4}$$

und dann Lemma 7.2

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1 \le |t| \le \mu} |f_n(\phi(t)) - q| \;=\; 0. \tag{7.5}$$

Seien nun $\eta \in (0,\delta)$, $\gamma = \mu^{-\eta}$ und $\varepsilon > 0$ so klein, daß $f'(q+\varepsilon) < \gamma$. Solch ein $\varepsilon$ existiert, denn $f'$ ist stetig und

$$\log\left(\frac{\mu^{-\eta}}{f'(q)}\right) \;>\; \log\left(\frac{\mu^{-\delta}}{f'(q)}\right) \;=\; 0,$$

d.h. $f'(q) < \gamma$. Wegen (7.5) existiert außerdem ein $k \ge 1$, so daß

$$\sup_{1 \le |t| \le \mu} |f_{n+k}(\phi(t)) - q| \;<\; \varepsilon \tag{7.6}$$

für alle $n \ge 0$. Schließlich liefern der Mittelwertsatz und die Monotonie von $f'$

$$|f(s) - q| \;\le\; f'(q+\varepsilon)|s-q| \;\le\; \gamma|s-q|$$

falls $|s-q| \le \varepsilon$, was zusammen mit (7.3) und (7.6) und mittels Iteration

$$\sup_{1 \le |t| \le \mu} |\phi(\mu^{n+k}t) - q| \;\le\; \varepsilon\gamma^k \tag{7.7}$$

impliziert. Aus (7.7) ergibt sich aber weiter

$$\sup_{1 \le |t| \le \mu} |\phi(\mu^{n+k}t) - q|\, |\mu^{n+k}t|^\eta \;\le\; \varepsilon\gamma^n \mu^{(n+k+1)\eta} \;=\; \varepsilon\gamma^{-(k+1)}$$

für alle $n \ge 0$, folglich

$$\sup_{\mu^{n+k} \le |t| \le \mu^{n+k+1}} |\phi(t) - q|\, |t|^\eta \;<\; \infty$$

für alle $n \ge 0$, was (7.1) beweist.

Zum Nachweis von (7.2) sei ($ZlogZ$) vorausgesetzt. Dies garantiert $\mathbb{E}W^* < \infty$ gemäß Satz 6.6 und damit die Differenzierbarkeit von $\phi$ gemäß Satz 41.3 in [1]. Ersetzt man in (7.3) $n$ durch $n+k$ und differenziert anschließend auf beiden Seiten, so erhält man

$$\mu^{n+k}\phi'(\mu^{n+k}t) \;=\; \phi'(t)\, f'_{n+k}(\phi(t)) \;=\; \phi'(t)\, f'_k(\phi(t)) \prod_{j=1}^{n} f' \circ f_{k+j-1}(\phi(t)) \tag{7.8}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$. Aus (7.6) und der Wahl von $\varepsilon$ folgt weiter

$$\sup_{1 \leq |t| \leq \mu} |f' \circ f_n(\phi(t))| \;\leq\; \sup_{1 \leq |t| \leq \mu} f'(|f_n(\phi(t))|) \;\leq\; f'(q+\varepsilon) \;<\; \gamma$$

für alle $n \geq k$ und deshalb ($|\phi'(t)| \leq |\phi'(0)| < \infty$)

$$\sup_{1 \leq |t| \leq \mu} \left| \phi'(t)\, f_k'(\phi(t)) \prod_{j=1}^{n} f' \circ f_{k+j-1}(\phi(t)) \right| \;\leq\; |\phi'(0)|\, f_k'(\beta)\, \gamma^n.$$

Kombiniert man dies mit (7.8), ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq |t| \leq \mu} |\phi'(\mu^{n+k}t)|\, |\mu^{n+k}t|^{1+\eta} \;&\leq\; |\phi'(0)|\, f_k'(\beta)\, \gamma^n \mu^{1+(n+k+1)\eta} \\ &=\; \mu\, |\phi'(0)|\, f_k'(\beta)\, \gamma^{-(k+1)} \;<\; \infty \end{aligned}$$

und folglich analog zum ersten Beweisteil

$$\sup_{\mu^{n+k} \leq |t| \leq \mu^{n+k+1}} |\phi'(t)|\, |t|^{1+\eta} \;<\; \infty$$

für alle $n \geq 0$, was (7.2) beweist. $\diamondsuit$

Wir kommen damit zum

Beweis von Satz 7.1 (Teil 1): Wir können nun wie angekündigt zeigen, daß $W^*$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte besitzt, sofern $q = 0$. Dazu reicht es unter Hinweis auf den Satz von Radon-Nikodym,

$$B \in \mathfrak{B},\ \lambda\!\!\lambda(B) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(W^* \in B) = 0$$

zu zeigen. Sei $\{V_n, n \geq 1\}$ eine Familie unabhängiger Kopien von $W^*$, die außerdem unabhängig von $(Z_n)_{n \geq 0}$ ist. Dann hat $V_1 + ... + V_n$ die F.T. $\phi^n$ für alle $n \geq 1$, und weil diese gemäß Lemma 7.5 (mit $\delta$ wie dort definiert) für alle $n > \frac{1}{\delta}$ $\lambda\!\!\lambda$-integrierbar ist, besitzt $V_1 + ... + V_n$ für diese $n$ gemäß Satz 41.7(b) in [1] eine stetige $\lambda\!\!\lambda$-Dichte. Sei nun $B$ eine beliebige $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge. Für $n > \frac{1}{\delta}$ und beliebige $c > 0$ gilt dann $\mathbb{P}(V_1 + ... + V_n \in cB) = 0$, und unter Benutzung von (6.26) aus Übung 6.2 erhalten wir für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W^* \in B) \;&=\; \mathbb{P}\left( \sum_{j=1}^{Z_n} V_j \in \mu^n B \right) \\ &=\; \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(Z_n = k)\, \mathbb{P}\left( \sum_{j=1}^{k} V_j \in \mu^n B \right) \\ &=\; \sum_{1 \leq k \leq 1/\delta} \mathbb{P}(Z_n = k)\, \mathbb{P}\left( \sum_{j=1}^{k} V_j \in \mu^n B \right) \\ &\leq\; \mathbb{P}\left( Z_n \leq \frac{1}{\delta} \right). \end{aligned}$$

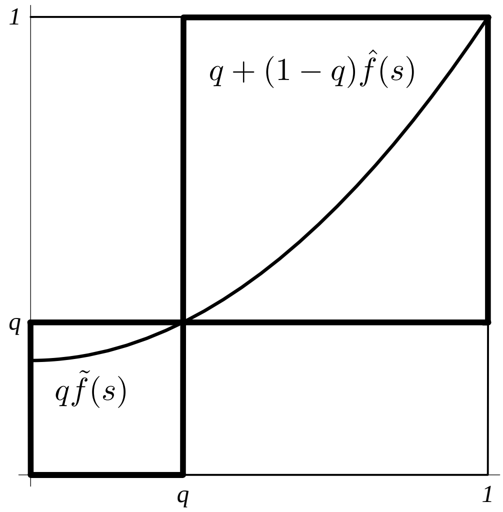


Bild 7.1. Zerlegung der e.F. $f$ in $q\tilde{f}(s)$ und $q+(1-q)\hat{f}(s)$.

Es folgt $\mathbb{P}(W^* \in B) = 0$, weil $\mathbb{P}(Z_n \leq \frac{1}{\delta}) \to q = 0$ für $n \to \infty$ (☞ Satz 3.3). $\diamondsuit$

Um die Absolutstetigkeit von $W^*$ auf $(0, \infty)$ auch ohne die Einschränkung "$q = 0$" zu zeigen, benutzen wir eine Zerlegung von $(Z_n)_{n\geq 0}$, die auch für sich genommen von Interesse ist. Wir nehmen im folgenden $q > 0$ an und betrachten zunächst den Graphen

$$\{(s, f(s)) : s \in [0,1]\} \ \subset \ [0,1]^2$$

von $f$, der in die Teilgraphen $\{(s, f(s)) : s \in [0,q]\} \subset [0,q]^2$ und $\{(s, f(s)) : s \in [q,1]\} \subset [q,1]^2$ zerlegt wird (☞ Bild 7.1). Durch Aufblähen und Verschieben lassen sich diese in die Graphen der zwei neuen e.F. $\tilde{f}, \hat{f}$ überführen, die durch

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \frac{f(sq)}{q} &&= \sum_{j\geq 0} p_j q^{j-1} s^j \quad \text{und} \\ \hat{f}(s) &= \frac{f(q+(1-q)s)-q}{1-q} &&= \sum_{j\geq 1} \frac{f^{(j)}(q)}{j!}(1-q)^{j-1} s^j \end{aligned} \tag{7.9}$$

gegeben sind, wie man sich leicht überzeugt. Ferner gelten $\tilde{f}'(1) = f'(q) < 1$ sowie $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}'(1) = f'(1) = \mu > 1$. Während also $\tilde{f}$ die e.F. einer subkritischen Reproduktionsverteilung bildet, ist die zu $\hat{f}$ gehörende superkritisch. Der entscheidende Punkt hinsichtlich des Sinns dieses Vorgehens besteht nun darin, daß wir $(Z_n)_{n\geq 0}$ zu zwei neuen GWP in Beziehung setzen können, deren Reproduktionsverteilungen die e.F. $\tilde{f}$ bzw. $\hat{f}$ besitzen, und daß uns dies bei unserem eigentlichen Anliegen weiterhilft, weil der zu $\hat{f}$ gehörende Prozeß im wesentlichen das Verhalten von $(Z_n)_{n\geq 0}$ bedingt unter dem Ereignis des Überlebens beschreibt und zugleich Aussterbewahrscheinlichkeit 0 besitzt.

Für alles Weitere definieren wir $(Z_n)_{n\geq 0}$ aus Zweckmäßigkeitsgründen wieder in einem erweiterten Modell der am Ende von Abschnitt 1 beschriebenen Form: Es sei $\mathbb{V} = \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{N}^n$ der unendliche Ulam-Harris-Baum, $\{X_v : v \in \mathbb{V}\}$ eine Familie unabhängiger, jeweils nach $(p_j)_{j\geq 0}$

verteilter Zufallsgrößen, $\boldsymbol{GW}$ der Teilbaum von $\mathbb{V}$ mit der Knotenmenge

$$\{\varnothing\} \cup \{1,...,X_{v_1}\} \cup \{v_1v_2 : 1 \le v_2 \le X_{v_1}, 1 \le v_1 \le X_\emptyset\} \cup ...$$

und dann $Z_n = |\boldsymbol{GW}_n|$ mit $\boldsymbol{GW}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \boldsymbol{GW} : |v| = n\}$ für $n \ge 0$. Mit $(Z_n(v))_{n\ge0}$ bezeichnen wir den GWP der von $v$ abstammenden Teilpopulation (also $Z_n = Z_n(\varnothing)$) und mit $\boldsymbol{GW}(v)$ den assoziierten in $v$ verwurzelten GWB. Schließlich sei $Z_\infty(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} Z_n(v)$.

Wir zerlegen nun die Population in jene Mitglieder mit unendlichem Familienstammbaum und solche, deren Familien zu irgendeinem späteren Zeitpunkt aussterben. Um dies formal zu präzisieren, definieren wir für $n \ge 0$

$$\widehat{\boldsymbol{GW}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \boldsymbol{GW}_n : Z_\infty(v) = \infty\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{GW}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{GW}_n \backslash \widehat{\boldsymbol{GW}}_n$$

und

$$\hat{Z}_n \stackrel{\text{def}}{=} |\widehat{\boldsymbol{GW}}_n| \quad \text{sowie} \quad \tilde{Z}_n \stackrel{\text{def}}{=} |\widetilde{\boldsymbol{GW}}_n| \ = \ Z_n - \hat{Z}_n. \tag{7.10}$$

Offensichtlich gilt dann für alle $n \ge 1$

$$\widehat{\boldsymbol{GW}}_n \ = \ \{vi \in \boldsymbol{GW}_n : v \in \widehat{\boldsymbol{GW}}_{n-1}, \, Z_\infty(vi) = \infty\}$$

und

$$\{\hat{Z}_0 = 1\} \ = \ \{\widehat{\boldsymbol{GW}}_0 \ne \emptyset\} \ = \ \{\widehat{\boldsymbol{GW}}_1 \ne \emptyset\} \ = ... = \ \{Z_\infty = \infty\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

d.h. $\{\hat{Z}_0 = 0\} = \{\widehat{\boldsymbol{GW}}_0 = \widehat{\boldsymbol{GW}}_1 = ... = \emptyset\} = \{Z_\infty = 0\}$ $\mathbb{P}$-f.s. und somit

$$\widetilde{\boldsymbol{GW}}_n = \boldsymbol{GW}_n \quad \text{und} \quad \tilde{Z}_n = Z_n \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{Z_\infty = 0\}$$

für alle $n \ge 0$. Ebenso leicht folgt

$$\hat{Z}_n \ = \sum_{v \in \widehat{\boldsymbol{GW}}_{n-1}} \hat{X}_v, \quad \hat{X}_v \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{X_v} \mathbf{1}_{\{Z_\infty(vj)=\infty\}}, \tag{7.11}$$

für alle $n \ge 1$. Die wesentliche Vorarbeit zum Beweis von Satz 7.7 weiter unten leistet das folgende Lemma.

**7.6. Lemma.** *Für $n \ge 0$ sei*

$$\mathcal{G}_n \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\{X_v : |v| \le n-1\}, \{Z_\infty(v) : |v| \le n\}).$$

*Dann gilt (unter $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$):*

*(a) Für alle $n \ge 0$ ist*

$$\mathcal{G}_n \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\{X_v : |v| \le n-1\}, \{Z_\infty(v) : |v| = n\}),$$

*(b) $\widehat{\boldsymbol{GW}}_n, \widetilde{\boldsymbol{GW}}_n, Z_\infty, Z_n$ und $\hat{Z}_n$ sind $\mathcal{G}_n$-meßbar für alle $n \ge 0$.*

*(c) Für alle $n \ge 0$ sind $\hat{X}_v$, $v \in \widehat{\boldsymbol{GW}}_n$, bedingt unter $\mathcal{G}_n$ und $Z_\infty = \infty$ u.i.v. mit e.F. $\hat{f}$.*

*(d) Für alle $n \ge 0$ sind $X_v$, $v \in \boldsymbol{GW}_n$, bedingt unter $\mathcal{G}_n$ und $Z_\infty = 0$ u.i.v. mit e.F. $\tilde{f}$.*

Beweis: Die einfachen Teile (a) und (b) soll der Leser in Übung 7.4(a) beweisen, so daß wir sofort zum Nachweis von (c) schreiten können. Setzen wir

$$L(v) \stackrel{\text{def}}{=} \big(X_v, Z_\infty(v1), ..., Z_\infty(vX_v)\big)\mathbf{1}_{\{Z_\infty(v)=\infty\}},$$

so sind für jedes $n \ge 0$ die $L(v)$, $|v| = n$, aufgrund der Modellannahmen bedingt unter $\mathcal{G}_n$ u.i.v., was unter Hinweis auf (7.11) schon dasselbe für $\hat{X}_v$, $|v| = n$, impliziert. Es verbleibt die Bestimmung ihrer bedingten Verteilung. Zu diesem Zweck fixieren wir ein beliebiges $v$ der Länge $n$ und notieren, daß $\mathbb{P}(L(v) \in \cdot|\mathcal{G}_n) = \mathbb{P}(L(v) \in \cdot|Z_\infty(v))$ f.s., folglich

$$\mathbb{P}(L(v) \in \cdot|\mathcal{G}_n) \;=\; \mathbb{P}(L(v) \in \cdot|Z_\infty(v) = \infty) \quad \text{f.s. auf } \{Z_\infty(v) = \infty\}.$$

Ferner sind die Indikatoren $\mathbf{1}_{\{Z_\infty(vi)=\infty\}}$, $i \ge 1$, von $\mathcal{G}_n$, $X_v$ unabhängig und jeweils $B(1, 1-q)$-verteilt. Es folgt auf $\{Z_\infty(v) = \infty\}$ für alle $i \ge 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\hat{X}_v = i|\mathcal{G}_n) &= \mathbb{P}(\hat{X}_v = i|Z_\infty(v) = \infty)\\
&= \frac{1}{1-q}\sum_{j\ge i}\mathbb{P}(\hat{X}_v = i, X_v = j) \quad \Big[\text{da } \{\hat{X}_v = i\} \subset \{Z_\infty(v) = \infty\}\Big]\\
&= \frac{1}{1-q}\sum_{j\ge i}\mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{j}\mathbf{1}_{\{Z_\infty(vk)=\infty\}} = i\,\middle|\,X_v = j\right)\mathbb{P}(X_v = j)\\
&= \frac{1}{1-q}\sum_{j\ge i}\binom{j}{i}(1-q)^i q^{j-i} p_j\\
&= \frac{f^{(i)}(q)}{i!}(1-q)^{i-1}
\end{aligned}$$

für alle $i \ge 1$ und daraus durch Koeffizientenvergleich, daß $\hat{f}$ in (7.9) wie behauptet die bedingte e.F. von $\hat{X}_v$ gegeben $\mathcal{G}_n$ und $Z_\infty = \infty$ bildet.

Der Nachweis von (d) verläuft sehr ähnlich und ist wiederum Teil der Übung 7.4(a). $\diamondsuit$

**7.7. Satz.** *Neben den obigen Bezeichnungen und Annahmen seien* $\widehat{\mathbb{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\cdot\,|Z_n \to \infty)$ *und* $\widetilde{\mathbb{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\cdot\,|Z_n \to 0)$. *Dann bildet* $(\hat{Z}_n)_{n\ge 0}$ *unter* $\widehat{\mathbb{P}}$ *und* $(Z_n)_{n\ge 0}$ *unter* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *jeweils einen GWP mit einem Urahnen und mit durch* $\hat{f}$ *bzw.* $\tilde{f}$ *in (7.9) determinierter Reproduktionsverteilung.*

Beweis: Es bezeichne $\widehat{\mathbb{E}}$ die Erwartungswertbildung unter $\widehat{\mathbb{P}}$. Wir zeigen als erstes, daß

$$\widehat{\mathbb{E}}(f(\hat{Z}_n)|\mathcal{G}_{n-1}) \;=\; \mathbb{E}(f(\hat{Z}_n)|\mathcal{G}_{n-1}) \quad \widehat{\mathbb{P}}\text{-f.s. auf } \{Z_\infty = \infty\}$$

für alle beschränkten $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ und $n \ge 1$. Wegen $\{Z_\infty = \infty\} \in \mathcal{G}_0$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}
&\int_{A\cap\{Z_\infty=\infty\}}\widehat{\mathbb{E}}(f(\hat{Z}_n)|\mathcal{G}_{n-1})\, d\widehat{\mathbb{P}}\\
&\qquad = \int_{A\cap\{Z_\infty=\infty\}} f(\hat{Z}_n)\, d\widehat{\mathbb{P}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(Z_\infty = \infty)} \int_{A\cap\{Z_\infty=\infty\}} \mathbb{E}(f(\hat{Z}_n)|\mathcal{G}_{n-1})\ d\mathbb{P}$$
$$= \int_{A\cap\{Z_\infty=\infty\}} \mathbb{E}(f(\hat{Z}_n)|\mathcal{G}_{n-1})\ d\widehat{\mathbb{P}}$$

für alle $A \in \mathcal{G}_{n-1}$. Kombiniert man dies mit Lemma 7.6 und (7.11) erhält man

$$\widehat{\mathbb{E}}(s^{\hat{Z}_n}|\mathcal{G}_{n-1}) \ = \ \mathbb{E}(s^{\hat{Z}_n}|\mathcal{G}_{n-1}) \ = \ \hat{f}(s)^{\hat{Z}_{n-1}} \ = \ \mathbb{E}(s^{\hat{Z}_n}|\hat{Z}_{n-1}) \quad \widehat{\mathbb{P}}\text{-f.s.},$$

und dies impliziert offensichtlich die Behauptung für $(\hat{Z}_n)_{n\ge0}$ unter $\widehat{\mathbb{P}}$. Die Aussage für $(Z_n)_{n\ge0}$ unter $\widetilde{\mathbb{P}}$ zeigt man analog (☞ Übung 7.4(c)). ♢

Der nächste Satz gibt das Verhalten von $\frac{\hat{Z}_n}{Z_n}$ für $n \to \infty$ auf $\{Z_\infty = \infty\}$ an.

**7.8. Satz.** *In den bisherigen Bezeichnungen gilt $\frac{\hat{Z}_n}{Z_n} \to 1-q$ $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s., d.h. $\mathbb{P}$-f.s. auf dem Ereignis $\{Z_\infty = \infty\}$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst $\frac{\hat{Z}_n}{Z_n} \xrightarrow{\widehat{\mathbb{P}}} 1-q$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mathbb{P}}\big(|\frac{\hat{Z}_n}{Z_n} - (1-q)| > \varepsilon\big) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \ge 0$ ist $\hat{Z}_n$ bedingt unter $Z_n = j$ offensichtlich $B(j, 1-q)$-verteilt, denn $\hat{Z}_n$ gibt gerade die Anzahl der überlebenden von den somit $j$ zum Zeitpunkt $n$ gestarteten und unabhängigen GWP an. Bezeichnen $Y_1, Y_2, ...$ u.i.v. $B(1, 1-q)$-verteilte Zufallsgrößen und $U_n$ deren $n$-te Partialsumme, gilt deshalb $\mathbb{P}(\frac{\hat{Z}_n}{Z_n} \in \cdot|Z_n = j) = \mathbb{P}(\frac{U_j}{j} \in \cdot)$ für $j \ge 1$. Es folgt

$$\widehat{\mathbb{P}}\left(\left|\frac{\hat{Z}_n}{Z_n} - (1-q)\right| > \varepsilon\right) \ \le \ \widehat{\mathbb{P}}(Z_n \le k) \ + \ \frac{1}{1-q}\sum_{j>k} \mathbb{P}(Z_n = j)\,\mathbb{P}\left(\left|\frac{U_j}{j} - (1-q)\right| > \varepsilon\right)$$

für alle $\varepsilon > 0$ und $k \ge 1$ und daraus das Gewünschte mit dem schwachen Gesetz der großen Zahlen und wegen $Z_n \to \infty$ $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s.

Da $(\hat{Z}_n)_{n\ge0}$ gemäß Satz 7.7 unter $\widehat{\mathbb{P}}$ einen superkritischen GWP (mit einem Urahnen und Aussterbewahrscheinlichkeit $\hat{q} = 0$) bildet, existieren nach Satz 6.1 von Heyde, Seneta Konstanten $\hat{k}_n, n \ge 0$, und eine auf $\{Z_\infty = \infty\}$ positive Zufallsgröße $\hat{W}^*$, so daß $\hat{k}_n^{-1}\hat{Z}_n \to \hat{W}^*$ $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s. Wir erinnern daran, daß $k_n^{-1}Z_n$ $\mathbb{P}$-f.s. und damit natürlich auch $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s. gegen $W^*$ konvergiert. Eine Kombination von $\frac{\hat{k}_n^{-1}\hat{Z}_n}{k_n^{-1}Z_n} \to \frac{\hat{W}^*}{W^*}$ $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s. mit

$$\frac{\hat{Z}_n}{Z_n} \ = \ \frac{\hat{k}_n^{-1}\hat{Z}_n}{k_n^{-1}Z_n} \cdot \frac{\hat{k}_n}{k_n} \ \xrightarrow{\widehat{\mathbb{P}}} \ (1-q)$$

liefert nun aber $\frac{\hat{k}_n}{k_n} \to c$ für eine Konstante $c \ne 0$ und anschließend

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{Z}_n}{Z_n} \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{k}_n^{-1}\hat{Z}_n}{k_n^{-1}Z_n} \cdot \frac{\hat{k}_n}{k_n} \ = \ \frac{c\hat{W}^*}{W^*} \quad \widehat{\mathbb{P}}\text{-f.s.}$$

also die $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s. Konvergenz von $\frac{\hat{Z}_n}{Z_n}$ sowie $\hat{W}^* = \frac{1-q}{c}W^*$ $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s. vermöge der Eindeutigkeit des Limes. ♢

Beweis von Satz 7.1 (Teil 2): Satz 7.8 impliziert $k_n^{-1}\hat{Z}_n \to (1-q)W^*$ $\widehat{\mathbb{P}}$-f.s. und damit auch $\mathbb{P}$-f.s., denn $\hat{Z}_n = 0$ für alle $n \geq 0$ auf $\{Z_\infty = 0\} = \{W^* = 0\}$. Da $(\hat{Z}_n)_{n\geq 0}$ unter $\widehat{\mathbb{P}}$ einen GWP mit Aussterbewahrscheinlichkeit 0 bildet, folgt aus dem in Teil 1 Bewiesenen, daß die Verteilung von $W^* = \lim_{n\to\infty} \hat{k}_n^{-1}\hat{Z}_n$ unter $\widehat{\mathbb{P}}$, also unter $\mathbb{P}$ auf $(0,\infty)$, eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte besitzt.

Als nächstes zeigen wir, daß die $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von $W^*$ bei Vorliegen von $(ZlogZ)$ auf $(0,\infty)$ stetige und auf jedem $[t,\infty), t > 0$, beschränkt ist. Wir definieren dazu die Verteilung $Q$ auf $(0,\infty)$ durch

$$Q(t) \;=\; \mathbb{E}(W^*\mathbf{1}_{\{W^*\leq t\}}|W^* > 0) \;=\; \frac{1}{1-q}\int_{(0,t]} W^*\, d\mathbb{P}, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei an die Konvention $Q(t) = Q(-\infty, t]$ erinnert sei. Dann hat $Q$ die F.T.

$$\phi_Q(t) \;=\; \frac{\mathbb{E}W^* e^{itW^*}}{1-q} \;=\; \frac{\phi'(t)}{1-q}.$$

$\phi'$ ist aber gemäß Lemma 7.5 $\lambda\!\!\lambda$-integrierbar, so daß $Q$ gemäß Satz 41.7(b) in [1] eine stetige und beschränkte $\lambda\!\!\lambda$-Dichte $h$ besitzt. Wegen

$$\mathbb{P}(W^* \in B) \;=\; (1-q)\mathbb{P}(W^* \in B|W^* > 0) \;=\; \int_B \frac{1}{x}\, Q(dx) \;=\; \int_B \frac{h(x)}{x}\, dx$$

für alle $(0,\infty) \supset B \in \mathfrak{B}$ ist $\frac{h(x)}{x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ dann eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte für $W^*$ auf $(0,\infty)$ und hat die behaupteten Eigenschaften.

Am Ende bleibt noch zu zeigen, daß die Dichte von $W^*$ bei Vorliegen von $(ZlogZ)$ auf $(0,\infty)$ überall positiv ist. Diese Aussage bildet Inhalt des anschließenden Satzes. ♢

**7.9. Satz.** *In der Situation von Satz 7.1 bezeichne $w$ die $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von $W^*$ auf $(0,\infty)$. Dann gilt: Ist $w$ stetig auf $(0,\infty)$, folgt $w(t) > 0$ für alle $t > 0$.*

Beweis: Nach den vorherigen Ausführungen können wir wieder o.B.d.A. $q = 0$ voraussetzen. Wir schreiben im folgenden "$F \succeq G$" für zwei Funktionen $F, G \geq 0$, falls eine Konstante $\beta > 0$ existiert, so daß $F \geq \beta G$. Beachte, daß dies $\{G > 0\} \subset \{F > 0\}$ impliziert. Zu zeigen ist nun offensichtlich $w \succeq \mathbf{1}_{(0,\infty)}$. Wir notieren, daß für jede Faltung $u * v$ zweier Dichten $u, v$ gilt:

$$u \succeq \mathbf{1}_I \text{ und } v \succeq \mathbf{1}_J \quad \Rightarrow \quad v * w \succeq \mathbf{1}_{I+J}, \tag{7.12}$$

und als Konsequenz daraus

$$u \succeq \mathbf{1}_I \quad \Rightarrow \quad u^{*(k)} \succeq \mathbf{1}_{kI} \tag{7.13}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $u^{*(k)}$ natürlich die $k$-fache Faltung von $u$ bedeutet.

Setzen wir wie in Definition 1.1 $p_{ij} = \mathbb{P}(Z_{n+1} = j|Z_n = i)$ für $i, j \geq 1$, so folgt aus (6.26) der Übung 6.2

$$w^{*(i)}(t) \;=\; \mu \sum_{j\geq 1} p_{ij}\, w^{*(j)}(\mu t) \tag{7.14}$$

für alle $i \geq 1$. Da $w$ stetig und $w(t)$ für mindestens ein $t > 0$ positiv ist, muß bereits $w \succeq \mathbf{1}_I$ für ein $I = (a,b) \subset (0,\infty)$ gelten. Dies bildet den Ausgangspunkt der anschließenden Überlegungen. Wegen $\mathit{Var}\, Z_1 > 0$ und $\mu > 1$ existieren $1 \leq k_1 < \mu < k_2 < \infty$, so daß $p_{1k_1} \wedge p_{1k_2} > 0$ und folglich auch $p_{i,ik_1} \wedge p_{i,ik_2} > 0$ für alle $i \geq 1$. Zusammen mit (7.13) und (7.14) liefert dies

$$\begin{aligned} w^{*(i)} \;&\succeq\; w^{*(ik_1)}(\mu\,\bullet) \;\succeq\; \mathbf{1}_I\left(\frac{\mu}{k_1}\,\bullet\right) \quad \text{und} \\ w^{*(i)} \;&\succeq\; w^{*(ik_2)}(\mu\,\bullet) \;\succeq\; \mathbf{1}_{iI}\left(\frac{\mu}{k_2}\,\bullet\right) \end{aligned} \tag{7.15}$$

für alle $i \geq 1$. Bei wiederholter Anwendung von (7.15) ergibt sich nun offensichtlich

$$w^{*(i)} \;\succeq\; w^{*(ik_1^m k_2^n)}(\mu^{m+n}\bullet) \;\succeq\; \mathbf{1}_{iI}\left(\left(\frac{\mu}{k_1}\right)^m \left(\frac{\mu}{k_2}\right)^n \bullet\right) \tag{7.16}$$

für alle $i \geq 1$ und $m,n \geq 0$. Wegen $\frac{k_1}{\mu} < 1$ existieren also Intervalle $I_n = (a_n, b_n)$ mit $a_n, b_n \to 0$ sowie $w \succeq \mathbf{1}_{I_n}$ für alle $n \geq 1$. Sei $n_0$ so groß, daß $I + I_{n_0} = (a, b + b_{n_0})$, d.h. $a_{n_0} < b$. Unter Hinweis auf (7.12) folgt dann weiter $w^{*(2)} \succeq \mathbf{1}_{(a,b+b_{n_0})}$ und sukzessiv

$$w^{*(k)} \;\succeq\; \mathbf{1}_{(a,b+(k-1)b_{n_0})}$$

für alle $k \geq 1$. Zu beliebig vorgegebenem $c > a$ existiert also ein $k_0 \geq 1$, so daß

$$w^{*(k)} \;\succeq\; \mathbf{1}_{(a,c)}$$

für alle $k \geq k_0$. Wählt man nun $c > 0$ so groß, daß $\frac{k_2}{\mu}a < c$, folgt $\cup_{n\geq 0}(\frac{k_2}{\mu})^n(a,c) = (a,\infty)$ und deshalb unter Anwendung von (7.16) mit $i \geq k_0, m = 0$ und $I$ ersetzt durch $(a,c)$, daß $w^{*(i)} \succeq \mathbf{1}_{(a,\infty)}$ für alle $i \geq k_0$. Durch nochmalige Anwendung, nun aber mit $n = 0$ und $(a,\infty)$ anstelle von $I$ ergibt sich wegen $\frac{k_1}{\mu} < 1$

$$w^{*(i)} \;\succeq\; \mathbf{1}_{(0,\infty)}$$

für alle $i \geq k_0$. Wählt man schließlich $i = k_2^n \geq k_0$ und benutzt die zweite Ungleichung in (7.15), so folgt die Behauptung des Satzes vermöge

$$w \;\succeq\; w^{k_2}(\mu\,\bullet) \;\succeq \ldots \succeq\; w^{*(k_2^n)}(\mu^n\,\bullet) \;\succeq\; \mathbf{1}_{(0,\infty)}. \qquad \diamondsuit$$

**7.10. Bemerkung.** Wir notieren, daß die in Lemma 7.5 definierte Zahl $\delta = \frac{-\log f'(q)}{\log \mu}$ durchaus $> 1$ sein kann und daß dann mit (7.1) die $\lambda\!\!\lambda$-Integrierbarkeit von $\phi$ folgt, sofern $q = 0$. Vermöge Satz 41.7 in [1] erhalten wir in diesem Fall also direkt, daß $W^*$ eine stetige und beschränkte $\lambda\!\!\lambda$-Dichte besitzt. Betrachten wir als Beispiel die Familie Poissonscher Reproduktionsverteilungen mit Mittelwert $\mu > 1$. Es gilt dann $f(s) = e^{\mu(s-1)}$, also $f'(s) = \mu f(s)$ sowie insbesondere $f'(q) = \mu f(q) = \mu q$. Gemäß Übung 3.2 gilt außerdem $\frac{1}{q} \;\geq\; e^{\mu} - 1 - \mu$, so daß $\delta > 1$ für alle $\mu$ mit $e^{\mu} > \mu^2 + \mu + 1$ folgt, wie man leicht nachprüft.

## Übungen zu Abschnitt 7

**Übung 7.1.** Gegeben die Situation von Satz 6.7, bezeichne $\phi$ die F.T. von $W^*$. Zeigen Sie, daß (6.24) auch mit $\phi$ anstelle von $\varphi$ gilt.

**Übung 7.2.** Beweisen Sie Lemma 7.2.

**Übung 7.3.** Sei $g(s) = s^\mu$ für $s \in [0,1]$ und $\mu > 0$. Zeigen Sie, daß $g$ genau dann eine e.F. bildet, wenn $\mu \in \mathbb{N}$ gilt.

**Übung 7.4.** (a) Beweisen Sie die Teile (a),(b) und (d) von Lemma 7.6.

(b) In der Situation desselben Lemmas sei $\tilde{X}_v = X_v - \hat{X}_v$ für $v \in \boldsymbol{GW}_n$ und $n \geq 0$. Zeigen Sie, daß die $\tilde{X}_v, v \in \hat{I}_n$, bedingt unter $\mathcal{G}_n$ und $\{Z_\infty = \infty\}$ u.i.v. sind mit e.F. $\frac{f(1-q+sq)-f(sq)}{1-q}$ und Erwartungswert $\frac{q(\mu-f'(q))}{1-q}$.

(c) Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 7.7, indem Sie noch zeigen, daß $(Z_n)_{n\geq 0}$ unter $\widetilde{\mathbb{P}}$ einen GWP bildet, dessen Reproduktionsverteilung die e.F. $\tilde{f}$ aus (7.9) besitzt.

**Übung 7.5.** Für $n \geq 1$ seien $\tilde{f}_n$ und $\hat{f}_n$ die $n$-ten Iterationen der in (7.9) definierten e.F. $\tilde{f}$ bzw. $\hat{f}$. Ferner seien $\tilde{g}_n$ bzw. $\hat{g}_n$ die zugehörigen Inversen. Zeigen Sie, daß

$$\tilde{f}_n(s) \;=\; \frac{f_n(sq)}{q} \quad \text{und} \quad \hat{f}_n(s) \;=\; \frac{f_n(q+(1-q)s)-q}{1-q}$$

für alle $n \geq 1$, und bestimmen Sie entsprechend $\tilde{g}_n$ und $\hat{g}_n$ in Abhängigkeit von $g_n$, der Inversen von $f_n$.

**Übung 7.6.** Zeigen Sie, daß in der Situation von Satz 7.7 $(ZlogZ)$ und $(\hat{Z}log\hat{Z})$, d.h. "$\widehat{\mathbb{E}}\hat{Z}_1 \log \hat{Z}_1 < \infty$", äquivalente Bedingungen bilden. [Hinweis: Benutzen Sie Lemma 6.5.]

**Übung 7.7.** Bestimmen Sie $\tilde{f}$ und $\hat{f}$ gemäß (7.9) für einen superkritischen GWP mit

(a) Poissonscher Reproduktionsverteilung,
(b) gebrochen-rationaler Reproduktionsverteilung,
(c) auf $\{0,1,2\}$ konzentrierter Reproduktionsverteilung (Zellteilungsfall).

**Übung 7.8.** Die folgenden Übungsteile ergeben zusammen einen von Grey [8] stammenden, alternativen Beweis des Satzes 6.1 von Heyde, Seneta, der gänzlich auf die Verwendung e.F. verzichtet (☞ auch [3], S. 43ff). Aufgrund der zuvor gezeigten Zerlegung eines superkritischen GWP's und wegen Satz 7.8 dürfen Sie o.B.d.A. $q = 0$ voraussetzen.

$(Z_n)_{n\geq 0}$ und $(Z_n^*)_{n\geq 0}$ seien zwei stochastisch unabhängige und identisch verteilte superkritische GWP mit einem Urahnen, endlichem Reproduktionsmittel $\mu$, positiver Reproduktionsvarianz $\sigma^2$ und Aussterbewahrscheinlichkeit $q = 0$. Ferner seien $\mathcal{F}_n^k = \sigma((Z_j, Z_{j+k}^*)_{0\leq j\leq n})$ und $Y_n^k = \frac{Z_n}{Z_n + Z_{n+k}^*}$ für $k, n \geq 0$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $k \geq 1$ gilt $\frac{Z_{n+k}}{Z_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu^k$, falls $n \to \infty$.

(b) Für jedes $k \geq 0$ bildet $(Y_n^k)_{n\geq 0}$ ein $(0,1)$-wertiges Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n^k)_{n\geq 0}$ und konvergiert $\mathbb{P}$-f.s. gegen einen Limes $Y^k \in [0,1]$ mit $EY^k = \mathbb{E}\big(\frac{1}{1+Z_k}\big) \geq \frac{1}{1+\mu^k}$ und $Var\, Y^k > 0$.

(c) $\{Y^0 = 1\} = \{Y^1 = 1\} = ...$ $\mathbb{P}$-f.s. und $\mathbb{P}(Y^0 = 1) = 0$.

(d) $Y^0 - \frac{1}{2}$ besitzt eine symmetrische Verteilung. Insbesondere gilt $\mathbb{P}(Y^0 = 0) = \mathbb{P}(Y^0 = 1)$.

(e) $\frac{Z_n}{Z_n^*}$ konvergiert $\mathbb{P}$-f.s. gegen einen Limes $Z$ mit $\mathbb{P}(0 < Z < \infty) = 1$. Schließen Sie daraus, daß auch $\frac{Z_{n+k}}{Z_n}$ für jedes $k \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert (nämlich gegen $\mu^k$ gemäß (a)).

(f) Für $\Omega^* \stackrel{\text{def}}{=} \big\{\omega^* \in \Omega : \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : \lim_n \frac{Z_n(\omega)}{Z_n^*(\omega^*)} \text{ existiert in } (0,\infty)\}\big) = 1\big\}$ gilt $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$. [Hinweis: Satz von Fubini]

(g) Setzt man $k_n = Z_n^*(\omega^*)$ für ein $\omega^* \in \Omega^*$ und alle $n \geq 0$, so konvergiert $k_n^{-1} Z_n$ $\mathbb{P}$-f.s. gegen einen endlichen, positiven Limes, und es gelten ferner $k_{n+1}/k_n \to \mu$ sowie $\nu^{-n} k_n \to 0$ für $\nu > \mu$ und $n \to \infty$.

## 8. Der subkritische Fall: Zwei Sätze von Kolmogorov und Yaglom

Unter Beibehaltung der bisherigen Notation sei in diesem Abschnitt $\mu < 1$ und folglich insbesondere $q = 1$ vorausgesetzt. Die beiden im Anschluß bewiesenen Sätze geben Auskunft darüber, wie schnell der betrachtete GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ ausstirbt (Satz 8.1) und wie sich $Z_n$ auf $\{Z_n > 0\}$ verhält, falls $n \to \infty$ (Satz 8.2). Für den *Aussterbezeitpunkt*

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{n \geq 1 :\ Z_n = 0\}, \tag{8.1}$$

geben wir außerdem in Satz 8.3 Auskunft über dessen Erwartungswert unter $\mathbb{P}_k$ für $k \to \infty$.

**8.1. Satz (Kolmogorov).** *Für einen subkritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ gilt:*

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu^{-n}\mathbb{P}(Z_n > 0) \ = \ \begin{cases} > 0, & \textit{falls } (ZlogZ) \textit{ und } p_0 < 1 \textit{ gilt,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{8.2}$$

Bezogen auf den Aussterbezeitpunkt $T$ sagt uns Satz 8.1, daß

$$\mathbb{P}(T > n) \ \simeq \ c\mu^n \quad (n \to \infty) \tag{8.3}$$

sofern $(ZlogZ)$ gilt und $p_0 < 1$. $T$ hat also exponentiell fallende Flanken (engl. “tails”). Eine analytische Definition von $c$ in diesem Fall wird sich aus dem Beweis des Satzes ergeben.

**8.2. Satz (Yaglom).** *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein subkritischer GWP mit $p_0 < 1$ and $c$ gemäß (8.2) gegeben. Dann existiert*

$$b_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = k | Z_n > 0) \tag{8.4}$$

*für jedes $k \geq 1$ und definiert eine Verteilung auf $\mathbb{N}$, d.h. $\sum_{k\geq 1} b_k = 1$, mit Erwartungswert*

$$\sum_{k\geq 1} kb_k \;=\; \frac{1}{c} \qquad \Big[ \stackrel{\text{def}}{=} \infty, \textit{ falls } c = 0 \Big]. \tag{8.5}$$

*Ihre e.F. $h(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\geq 1} b_k s^k$ genügt der Funktionalgleichung*

$$h \circ f(s) \;=\; \mu h(s) \;+\; (1-\mu) \tag{8.6}$$

*für alle $s \in [0,1]$.*

Eine Kombination beider Sätze liefert

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \;=\; 1 - c\mu^n \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Z_n = k) \;\simeq\; cb_k\mu^n \quad (n \to \infty) \tag{8.7}$$

für $k \geq 1$, sofern $(ZlogZ)$ und $p_0 < 1$ gelten.

Das dritte Resultat dieses Abschnitts gibt Auskunft über das Verhalten des mittleren Aussterbezeitpunkts $\mathbb{E}_k T$ bei gegen unendlich strebender Anfangspopulationsgröße $k$ und Vorliegen der $(ZlogZ)$-Bedingung.

**8.3. Satz.** *Gegeben einen subkritischen GWP mit $p_0 < 1$, gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}_k T}{\log_{1/\mu} k} \;=\; 1, \tag{8.8}$$

*sofern die $(ZlogZ)$-Bedingung erfüllt ist.*

Beweis von Satz 8.1: Wir erinnern an die in (6.12) gegebene Beziehung $\mu - r(s) = \frac{1-f(s)}{1-s}$ für $s \in [0,1)$. Durch Ersetzen von $s$ durch $f_k(s), k \geq 1$, ergibt sich

$$\frac{1 - f_{k+1}(s)}{1 - f_k(s)} \;=\; \mu - r \circ f_k(s)$$

für $s \in [0,1)$ und daraus weiter

$$\frac{1 - f_n(s)}{1-s} \;=\; \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - f_{k+1}(s)}{1 - f_k(s)} \;=\; \mu^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{r \circ f_k(s)}{\mu}\right) \tag{8.9}$$

für $s \in [0,1)$ und $n \geq 1$. Wegen $0 \leq \frac{r(s)}{\mu} < 1$ für $s \in [0,1)$ konvergiert $\mu^{-n}\frac{1-f_n(s)}{1-s}$ also monoton fallend gegen einen Limes $\psi(s) \geq 0$ für $n \to \infty$, wobei insbesondere

$$c \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu^{-n}\mathbb{P}(Z_n > 0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu^{-n}(1 - f_n(0)) \;=\; \psi(0) \tag{8.10}$$

sowie

$$\psi(0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{r \circ f_k(0)}{\mu}\right) \;>\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k\geq 0} r \circ f_k(0) < \infty \tag{8.11}$$

folgen. Aufgrund der Konvexität von $f$ gilt weiter

$$1-f(s) \;\le\; \mu(1-s)$$

für $s\in[0,1]$ und

$$1-f(s) \;\ge\; f'(p_0)(1-s)$$

für $s\in[p_0,1]$. Dies liefert zusammen mit $f(s)\ge f(0)=p_0$ für alle $s\in[0,1]$ und einer Iteration

$$f'(p_0)^{k-1}(1-f(s)) \;\le\; 1-f_k(s) \;\le\; \mu^k(1-s)$$

für alle $s\in[0,1]$ und $k\ge 1$ sowie speziell

$$1-\mu^k \;\le\; f_k(0) \;\le\; 1-a^k \tag{8.12}$$

für alle $k\ge 1$, wobei $a\overset{\text{def}}{=}f'(p_0)\wedge(1-p_0)$. Unter Hinweis darauf, daß $a$ genau dann positiv ist, wenn $p_0<1$, erhalten wir schließlich mittels Lemma 6.5, daß die Aussagen in (8.11) genau dann gelten, wenn $p_0<1$ und $(ZlogZ)$ vorliegen. $\diamondsuit$

Beweis von Satz 8.2. Sei $h_n(s)=\mathbb{E}(s^{Z_n}|Z_n>0)$ für $n\ge 1$, d.h.

$$\begin{aligned}
h_n(s) \;&=\; \frac{1}{\mathbb{P}(Z_n>0)}\int_{\{Z_n>0\}} s^{Z_n}\, d\mathbb{P}\\
&=\; \frac{f_n(s)-f_n(0)}{1-f_n(0)}\\
&=\; 1-\frac{1-f_n(s)}{1-f_n(0)}\\
&=\; 1-(1-s)\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-r\circ f_k(s)/\mu}{1-r\circ f_k(0)/\mu}\right)
\end{aligned}\tag{8.13}$$

für alle $s\in[0,1]$ und $n\ge 1$, wobei (8.9) in der letzten Gleichung benutzt wurde. Da $f_k(s)\ge f_k(0)$ für alle $s\in[0,1], k\ge 1$ und $r$ auf $[0,1]$ monoton fällt (☞ (6.12)), sind alle Faktoren des obigen Produkts $\ge 1$. Folglich konvergiert $h_n$ monoton fallend gegen einen Limes $h$, falls $n\to\infty$, und zwar gegen

$$h(s) \;=\; 1-(1-s)\prod_{k\ge 0}\left(\frac{1-r\circ f_k(s)/\mu}{1-r\circ f_k(0)/\mu}\right) \;\in\; [0,1] \tag{8.14}$$

für alle $s\in[0,1]$. Offensichtlich gilt

$$h(0)=0,\quad h(1)=1\quad\text{und}\quad h(s)=\sum_{k\ge 1} b_k s^k$$

für geeignete $b_k\ge 0$ und $s\in[0,1)$. Dagegen muß die (linksseitige) Stetigkeit von $h$ in 1 noch gezeigt werden. In der Tat sichert diese vermöge $\lim_{s\uparrow 1} h(s)=\sum_{k\ge 1} b_k=1$, daß $(b_k)_{k\ge 0}$ eine

W-Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ definiert. Aus $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = q = 1$ folgt aber

$$h \circ f_k(0) \;=\; \lim_{n\to\infty} h_n \circ f_k(0) \;=\; \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1 - f_k \circ f_n(0)}{1 - f_n(0)} \;=\; 1 - \mu^k, \tag{8.15}$$

für alle $k \geq 1$ und somit bei Grenzübergang $k \to \infty$

$$\sum_{k\geq 1} b_k \;=\; \lim_{k\to\infty} h \circ f_k(0) \;=\; \lim_{k\to\infty} (1 - \mu^k) \;=\; 1.$$

Für den Nachweis von (8.5) erinnern wir daran, daß $c = \lim_{k\to\infty} \mu^{-k}(1 - f_k(0))$, und folgern aus (8.15)

$$\sum_{k\geq 1} kb_k \;=\; h'(1) \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{1 - h \circ f_k(0)}{1 - f_k(0)} \;=\; \lim_{k\to\infty} \frac{\mu^k}{1 - f_k(0)} \;=\; \frac{1}{c}.$$

Gemäß Satz 8.1 ist $\frac{1}{c}$ genau dann endlich, wenn $(ZlogZ)$ vorliegt.

Abschließend notieren wir, daß für alle $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
h \circ f(s) \;&=\; \lim_{n\to\infty} h_n \circ f(s) \\
&=\; 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - f_{n+1}(s)}{1 - f_{n+1}(0)}\right)\left(\frac{1 - f \circ f_n(0)}{1 - f_n(0)}\right) \\
&=\; 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - h_{n+1}(s)) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - f \circ f_n(0)}{1 - f_n(0)} \\
&=\; 1 - (1 - h(s))\mu,
\end{aligned}$$

was (8.6) beweist. $\diamondsuit$

Beweis von Satz 8.3. Unter Hinweis auf (8.10) und (8.11) gilt $f_n(0) = 1 - c_n\mu^n$ für positive Konstanten $c_n \in [0,1]$ mit positivem Limes $c$. Beachte, daß hier die Gültigkeit von $(ZlogZ)$ eingeht (☞ Schlußsatz des Beweises von Satz 8.1). Da $\mathbb{P}_k(T > n) = \mathbb{P}_k(Z_n > 0) = 1 - f_n(0)^k$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}_k T}{\log_{1/\mu} k} \;&=\; \frac{1}{\log_{1/\mu} k} \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_k(T > n) \\
&=\; \frac{1}{\log_{1/\mu} k} \sum_{n\geq 0} \Big(1 - f_n(0)^k\Big) \;=\; \frac{1}{\log_{1/\mu} k} \sum_{n\geq 0} \Big(1 - (1 - c_n\mu^n)^k\Big).
\end{aligned}$$

Zu einem fest gewählten $\varepsilon \in (0,1)$ setzen wir $n_* = n_*(\varepsilon, k) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\varepsilon)\log_{1/\mu} k$, $n^* = n^*(\varepsilon, k) \stackrel{\text{def}}{=} (1+\varepsilon)\log_{1/\mu} k$, spalten die letzte Summe der obigen Rechnung in drei Teile $S_1(k), S_2(k), S_3(k)$ mit Summationsbereichen $0, ..., n_* - 1$, $n_*, ..., n^* - 1$ bzw. $n^*, n^* + 1, ...$ und schätzen jede dieser Summen getrennt ab.

Sei $m \geq 1$ so gewählt, daß $\inf_{n\geq m} c_n \geq c/2$. Wegen $\log(1-x) \leq -x$ und $\mu^{n_*} = k^{\varepsilon - 1}$ folgt

$$1 - (1 - c\mu^{n_*}/2)^k \;\geq\; 1 - \exp(-ck^\varepsilon/2).$$

Für $S_1(k)$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\Big(1-\varepsilon-\frac{m}{\log_{1/\mu} k}\Big)&\Big(1-\exp(-ck^{\varepsilon}/2)\Big)\\
&\le\ \Big(1-\varepsilon-\frac{m}{\log_{1/\mu} k}\Big)\Big(1-(1-c\mu^{n_*}/2)^k\Big)\\
&\le\ \frac{1}{\log_{1/\mu} k}\sum_{n=m}^{n_*-1}\Big(1-(1-c\mu^n/2)^k\Big)\\
&\le\ S_1(k)\\
&\le\ \frac{1}{\log_{1/\mu} k}\sum_{n=0}^{n_*-1}\Big(1-(1-\mu^n)^k\Big)\\
&\le\ 1-\varepsilon
\end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} S_1(k)\ =\ 1-\varepsilon.$$

Betreffend $S_2(k)$ genügt der Hinweis, daß $0\le S_2(k)\le 2\varepsilon$. Schließlich ergibt sich für $S_3(k)$, falls $k$ hinreichend groß:

$$\begin{aligned}
0\ \le\ S_3(k)\ &\le\ \frac{1}{\log_{1/\mu} k}\sum_{n\ge 0}\Big(1-(1-\mu^{n^*+n})^k\Big)\\
&=\ \frac{1}{\log_{1/\mu} k}\sum_{n\ge 0}\Big(1-(1-k^{-(1+\varepsilon)}\mu^n)^k\Big)\\
&\le\ \frac{1}{\log_{1/\mu} k}\sum_{n\ge 0}\Big(1-\exp(-2k^{-\varepsilon}\mu^n)\Big)\\
&\le\ \frac{2}{k^{\varepsilon}\log_{1/\mu} k}\sum_{n\ge 0}\mu^n
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung unter Benutzung von $1-e^{-x}\le x$ für alle $x$ gilt. Wir erhalten somit

$$\lim_{k\to\infty} S_3(k)\ =\ 0.$$

Eine Zusammenfassung der drei Abschätzungen liefert nun leicht die Behauptung des Satzes, weil $\varepsilon\in(0,1)$ beliebig vorgegeben war. ♢

## Übungen zu Abschnitt 8

**Übung 8.1.** Sei $(Z_n)_{n\ge 0}$ ein subkritischer GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_k)_{k\ge 0}$. Zeigen Sie:

(a) $(b_k)_{k\ge 0}$ ist genau dann degeneriert, wenn $p_0+p_1=1$ gilt. [Hinweis: Benutzen Sie (8.6).]

(b) Im nicht-degenerierten Fall gilt $b_k>0$ für unendlich viele $k\ge 1$.

(c) Ist $(p_k)_{k\ge 0}$ aperiodisch, gilt dasselbe für $(b_k)_{k\ge 0}$.

(d) Gegeben unabhängige Zufallsgrößen $U, Y, X_1, X_2, ...$ mit $Y \stackrel{d}{=} (b_k)_{k\ge1}, U \stackrel{d}{=} B(1,\mu)$ und $X_j \stackrel{d}{=} (p_j)_{j\ge0}$, gilt $UY \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{Y} X_j$.

**Übung 8.2.** In der Situation von Satz 8.2 gelte $h(s) = \frac{(1-\alpha)s}{1-\alpha s}$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie, daß dann die Reproduktionsverteilung vom gebrochen-rationalen Typ (4.1) ist, und bestimmen Sie deren Parameter in Abhängigkeit von $\alpha$ und $\mu$. [Hinweis: Benutzen Sie (8.6).]

**Übung 8.3.** In der Situation von Satz 8.2 gelte $(ZlogZ)$. Zeigen Sie, daß $(b_k)_{k\ge0}$ gemäß (8.4) die Varianz $\frac{1}{c}\big(\frac{f''(1)}{\mu(1-\mu)} - 1\big)$ besitzt und daß diese genau dann endlich ist, wenn die Reproduktionsvarianz endlich ist.

**Übung 8.4.** Zeigen Sie, daß in der Situation von Satz 8.1 für den Aussterbezeitpunkt $T$ gilt: $E\exp(\theta T) < \infty$ für alle $\theta < \log(\frac{1}{\mu})$.

**Übung 8.5.** Gegeben einen beliebigen Galton-Watson-Prozeß $(Z_n)_{n\ge0}$ mit einem Urahnen und Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\ge0}$, erfüllt der Aussterbezeitpunkt $T$ gemäß (8.1) die stochastische Fixpunktgleichung

$$T \stackrel{d}{=} 1 + \max\{T_1, ..., T_N\}, \tag{8.16}$$

wobei $N, T_1, T_2, ...$ stochastisch unabhängig sind mit $N \stackrel{d}{=} (p_j)_{j\ge0}$ und $T_n \stackrel{d}{=} T$ für alle $n \ge 1$.

**Übung 8.6.** Gegeben die Situation von Satz 8.3 und $m \in \mathbb{N}$, sei

$$T(m) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{n \ge 0 : Z_n \le m\}.$$

Zeigen Sie, daß (8.8) auch mit $\mathbb{E}_k T(m)$ anstelle von $\mathbb{E}_k T$ gilt, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}_k T(m)}{\log_{1/\mu} k} = 1, \tag{8.17}$$

## 9. Der kritische Fall: Ein exponentieller Grenzwertsatz und das erwartete Maximum

Wir kommen nun zum noch offenen kritischen Fall und nehmen somit $\mu = 1$ an. Darüberhinaus setzen wir voraus, daß die Reproduktionsvarianz $\sigma^2 = f''(1) + f'(1)(1 - f'(1)) = f''(1)$ (☞ (2.6)) positiv und endlich ist ($\Rightarrow p_1 < 1$). Wir wissen bereits aus früheren Abschnitten, daß

$$\begin{aligned} q &= \mathbb{P}(Z_n \to 0) = 1; \\ \mathbb{E}Z_n &= 1 \quad \text{für alle } n \ge 0; \\ \mathrm{Var}Z_n &= n\sigma^2 \to \infty, \quad \text{falls } n \to \infty, \end{aligned} \tag{9.1}$$

wobei wie bisher $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$, $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1$ und $Var = Var_1$. Diese Eigenschaften vermitteln einen ersten Eindruck über die Instabilitäten kritischer GWP. Eine genauere Beschreibung ihres Verhaltens gibt Satz 9.1, dessen Beweis im Vergleich zu denen entsprechender Resultate für nicht-kritische Prozesse wesentlich einfacher ist. Seine Hauptaussage bildet ein exponentieller Grenzwertsatz für $n^{-1}Z_n$, falls $n \to \infty$. Ein zweites, deutlich schwierigeres Resultat, das wir im Anschluß beweisen wollen, beschreibt das asymptotische Verhalten des Maximums $M_n \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0\le j\le n} Z_j$, genauer von $\mathbb{E}_i M_n$ für $n \to \infty$. Die bisherige Notation behalten wir natürlich bei.

**9.1. Satz (Kolmogorov, Yaglom).** *Für einen kritischen GWP $(Z_n)_{n\ge 0}$ mit Reproduktionsvarianz $\sigma^2 \in (0,\infty)$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ und $t \ge 0$*

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}_i(Z_n > 0) \;=\; \frac{2i}{\sigma^2}, \tag{9.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_i\left(\frac{Z_n}{n}\middle|Z_n > 0\right) \;=\; \frac{\sigma^2}{2}, \tag{9.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i\left(\frac{Z_n}{n} \le t\middle|Z_n > 0\right) \;=\; 1 - e^{-2t/\sigma^2}, \tag{9.4}$$

*d.h. $n^{-1}Z_n$ ist asymptotisch exponentialverteilt mit Parameter $\frac{2}{\sigma^2}$, gegeben $Z_n > 0$.*

**9.2. Satz (Athreya, Pakes).** *Für einen kritischen GWP $(Z_n)_{n\ge 0}$ mit Reproduktionsvarianz $\sigma^2 \in (0,\infty)$ und $M_n \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0\le j\le n} Z_j$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_i M_n}{\log n} \;=\; i \tag{9.5}$$

*für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Grundlage für den Beweis des ersten Satzes ist das folgende Lemma.

**9.3. Lemma.** *Unter den Annahmen von Satz 9.1 gilt gleichmäßig in $s \in [0,1)$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right) \;=\; \frac{\sigma^2}{2}. \tag{9.6}$$

Beweis: Für $s \in [0,1)$ notieren wir zuerst die folgende Taylor-Entwicklung von $f$ in 1:

$$f(s) \;=\; 1 + (s-1) + \frac{\sigma^2}{2}(s-1)^2 + r_2(s)(s-1)^2 \;=\; s + \frac{\sigma^2}{2}(s-1)^2 + r_2(s)(s-1)^2$$

für eine Funktion $r_2$ mit $\lim_{s\uparrow 1} r_2(s) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-f(s)} - \frac{1}{1-s} \;&=\; \frac{f(s)-s}{(1-f(s))(1-s)} \\
&=\; \frac{(\sigma^2/2)(1-s)^2 + r_2(s)(1-s)^2}{(1-f(s))(1-s)} \\
&=\; \frac{1-s}{1-f(s)}\left(\frac{\sigma^2}{2} + r_2(s)\right) \\
&=\; \frac{\sigma^2}{2} + \rho(s)
\end{aligned} \tag{9.7}$$

für $s \in [0,1)$ und ein $\rho$, das ebenfalls $\lim_{s\uparrow 1}\rho(s) = 0$ erfüllt. Iteration von (9.7) sowie Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ liefert

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(s)} - \frac{1}{1-s}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1-f\circ f_j(s)} - \frac{1}{1-f_j(s)}\right) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\rho\circ f_j(s).$$

Gemäß Korollar 3.2 gilt $f_n(s)\uparrow 1$ für $n\to\infty$ gleichmäßig in $s\in[0,1]$. Zusammen mit $\rho(s)\to 0$ für $s\uparrow 1$ impliziert dies offensichtlich das Gewünschte. $\diamondsuit$

Zu einem alternativen Beweis von Lemma 9.3 mittels eines Vergleichsarguments wird der Leser in Übung 9.1 geführt.

Beweis von Satz 9.1: Wir betrachten lediglich den Fall "$i = 1$" und überlassen die einfache Verallgemeinerung für beliebige $i\in\mathbb{N}$ dem Leser (☞ Übung 9.2). Zum Nachweis von (9.2) schreiben wir

$$n\mathbb{P}(Z_n>0) = n(1-f_n(0)) = \left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(0)} - 1\right) + \frac{1}{n}\right)^{-1}$$

und stellen fest, daß der letzte Ausdruck gemäß Lemma 9.3 gegen $2/\sigma^2$ für $n\to\infty$ konvergiert. Es ergibt sich nun weiter für (9.3)

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\middle| Z_n>0\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(Z_n>0)}\mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{1}{n\mathbb{P}(Z_n>0)} \to \frac{\sigma^2}{2} \quad (n\to\infty).$$

Wenden wir uns abschließend dem Nachweis von (9.4) zu und wählen ein beliebiges $t>0$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(e^{-tZ_n/n}|Z_n>0)\\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(Z_n>0)}\Big(\mathbb{E}(e^{-tZ_n/n}) - \mathbb{P}(Z_n=0)\Big)\\
&= \frac{1}{1-f_n(0)}\Big(f_n(e^{-t/n}) - f_n(0)\Big)\\
&= 1 - \frac{1-f_n(e^{-t/n})}{1-f_n(0)}\\
&= 1 - \frac{1}{n(1-f_n(0))}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(e^{-t/n})} - \frac{1}{1-e^{-t/n}}\right) + \frac{1}{n(1-e^{-t/n})}\right)^{-1}\\
&\to 1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{t}\right)^{-1} \quad (n\to\infty)\\
&= \frac{1}{1+t\sigma^2/2}
\end{aligned}$$

wobei Lemma 9.3 für die Gültigkeit von

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(e^{-t/n})} - \frac{1}{1-e^{-t/n}}\right) = \frac{\sigma^2}{2}$$

verwendet wurde. Beachte, daß für diesen Schluß die gleichmäßige Konvergenz in (9.6) wesentlich ist. Die Behauptung (9.4) folgt nun mit dem Stetigkeitssatz für L.T. (☞ [1], Satz 45.7 oder [7], Theorem 2 auf S. 431) und der Tatsache, daß $\frac{1}{1+t\sigma^2/2}$ die L.T. der $\mathrm{Exp}(2/\sigma^2)$-Verteilung bildet. $\diamondsuit$

Wir kommen nun zum Beweis des zweiten Satzes, der wesentlich schwieriger und deshalb in eine Reihe von Lemmata untergliedert ist. Da $M_n \uparrow M_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j\geq 0} Z_j$ für $n\to\infty$, wollen wir zunächst zeigen, daß ungeachtet der Endlichkeit von $\sigma^2$ stets $\mathbb{E}_i M_\infty = \infty$ für alle $i\in\mathbb{N}$ gilt.

**9.4. Lemma.** *Für einen kritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $p_1\neq 1$ gilt $\mathbb{E}_i M_\infty = \infty$ für alle $i\in\mathbb{N}$.*

Beweis: Offensichtlich gilt $Z_n \leq M_n \leq M_\infty$ für alle $n\geq 0$. Wäre $\mathbb{E}_i M_\infty < \infty$, folgte deshalb $\mathbb{E}_i Z_n \to 0$ wegen $\mathbb{P}_i(Z_n>0)\to 0$. $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist aber ein Martingal unter jedem $\mathbb{P}_i$, d.h. $\mathbb{E}_i Z_n = \mathbb{E}_i Z_0 = i$ für alle $n\geq 0$. $\diamondsuit$

**9.5. Lemma.** *Sei $\psi(x) = x\log x$. Für einen kritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $p_1\neq 1$ gilt $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_i\psi(Z_n) = \infty$ für alle $i\in\mathbb{N}$ und im Fall $\sigma^2<\infty$ genauer*

$$\lim_{n\to\infty}\big(\mathbb{E}_i\psi(Z_n) - i\log n\big) \;=\; i\alpha, \quad \alpha \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \frac{4}{\sigma^4}\int_0^\infty (x\log x)\, e^{-2x/\sigma^2}\, dx. \tag{9.8}$$

Beweis: Unter Hinweis auf Lemma 1.2 gilt offensichtlich $\mathbb{E}_i Z_n\log Z_n \geq \mathbb{E} Z_n\log Z_n$ für alle $i,n\geq 1$, so daß es für die erste Behauptung reicht, den Fall $i=1$ zu betrachten. Wir setzen $a_n = \frac{1}{\mathbb{P}(Z_n>0)}$ und erhalten

$$E\psi(Z_n) \;=\; \mathbb{E}(\psi(Z_n)|Z_n>0)\,\mathbb{P}(Z_n>0) \;=\; \mathbb{E}(\psi(a_n^{-1}Z_n)|Z_n>0) + \log a_n.$$

Daraus folgt weiter unter Benutzung von $c \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{0<x<1}|\psi(x)| < \infty$

$$E\psi(Z_n) - \log a_n \;\geq\; \mathbb{E}(\psi(a_n^{-1}Z_n)\mathbf{1}_{\{0<Z_n<a_n\}}|Z_n>0) \;\geq\; -c,$$

und somit

$$\liminf_{n\to\infty}\big(E\psi(Z_n) - \log a_n\big) \;\geq\; -c.$$

Dies impliziert wegen $a_n\to\infty$ das Gewünschte.

Sei nun außerdem $\sigma^2<\infty$. Da $\mathbb{E}_i Z_n^2 = \mathrm{Var}_i Z_n + (\mathbb{E}_i Z_n)^2 = i(n\sigma^2+i)$ für alle $n\geq 0$ gemäß Lemma 2.2, folgt unter Benutzung von (9.2)

$$\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}_i(n^{-2}Z_n|Z_n>0) \;=\; \sup_{n\geq 0}\frac{\mathbb{E}_i Z_n^2\mathbf{1}_{\{Z_n>0\}}}{n^2\mathbb{P}_i(Z_n>0)} \;=\; \sup_{n\geq 0}\frac{i\sigma^2+i^2/n}{n\mathbb{P}_i(Z_n>0)} \;<\; \infty,$$

d.h. die $\mathfrak{L}_2$-Beschränktheit von $n^{-1}Z_n|Z_n > 0,\ n \geq 0$ [1)] unter jedem $\mathbb{P}_i$. Die $\psi(n^{-1}Z_n)|Z_n > 0$, $n \geq 0$ sind somit g.i. unter jedem $\mathbb{P}_i$, und unter Benutzung von $\mathbb{E}_i Z_n = i$, (9.4) sowie Korollar 50.6 in [1] erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i\psi(Z_n) - i\log n &= \mathbb{E}_i(\psi(Z_n) - Z_n \log n) \\ &= \mathbb{E}_i(\psi(n^{-1}Z_n)|Z_n > 0)\, n\mathbb{P}_i(Z_n > 0) \ \to \ i\alpha, \end{aligned}$$

falls $n \to \infty$. $\diamondsuit$

**9.6. Lemma.** *In der Situation von Satz 9.2 gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_i M_n}{\mathbb{E}_i\psi(Z_n)} \ \leq \ 1 \tag{9.9}$$

*für alle* $i \in \mathbb{N}$.

Beweis: Da $(Z_n)_{n\geq 0}$ unter jedem $\mathbb{P}_i$ ein Martingal bildet, liefert die Doobsche Ungleichung (☞ 22.4 in [2])

$$\mathbb{P}_i(M_n > t) \ \leq \ \frac{1}{t}\int_{\{M_n > t\}} Z_n \ d\mathbb{P}_i$$

für alle $t > 0$, so daß weiter folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i M_n &= \int_0^\infty \mathbb{P}_i(M_n > t)\ dt \\ &\leq i \ + \int_i^\infty \frac{1}{t}\int_\Omega \mathbf{1}_{\{M_n > t\}} Z_n \ d\mathbb{P}_i \ dt \\ &= i \ + \int_\Omega Z_n \int_i^{M_n} \frac{dt}{t}\ d\mathbb{P}_i \\ &= i\,(1 - \log i) \ + \ \mathbb{E}_i Z_n \log M_n. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Eine einfache Untersuchung (☞ Übung 9.3) zeigt, daß

$$a \log b \ \leq \ \psi(a) \ + \ \frac{b}{c}\,\mathbf{1}_{[0,b/c]}(a) \ + \ \frac{b}{e}\,\mathbf{1}_{[b/c,b]}(a)$$

für alle $0 \leq a \leq b,\ b > 0$ und $e < c < \infty$. Wendet man diese Ungleichung in (9.10) auf $\mathbb{E}_i Z_n \log M_n$ mit $a = Z_n, b = M_n$ und beliebigem $c > e$ an, so folgt weiter

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i M_n &\leq i\,(1 - \log i) \ + \ \mathbb{E}_i\psi(Z_n) \ + \ \frac{\log c}{c}\int_{\{Z_n \leq M_n/c\}} M_n \ d\mathbb{P}_i \\ &\quad + \ \frac{1}{e}\int_{\{M_n/c \leq Z_n \leq M_n\}} M_n \ d\mathbb{P}_i \\ &\leq i\left(1 - \log i + \frac{c}{e}\right) \ + \ \mathbb{E}_i\psi(Z_n) \ + \ \frac{\log c}{c}\mathbb{E}_i M_n. \end{aligned}$$

[1)] "$X_n|X_n \in B_n,\ n \geq 0$ besitzt die Eigenschaft $A$" soll natürlich bedeuten, daß jede Familie $Y_n, n \geq 0$ derart, daß $X_n$ bedingt unter $X_n \in B_n$ und $Y_n$ verteilungsgleich sind, diese Eigenschaft $A$ besitzt.

Bringt man nun den letzten Term auf die linke Seite und dividiert anschließend durch $\mathbb{E}_i\psi(Z_n)$, so folgt unter Beachtung von $\mathbb{E}_i\psi(Z_n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gemäß Lemma 9.5

$$\left(1 - \frac{\log c}{c}\right) \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_i M_n}{\mathbb{E}_i\psi(Z_n)} \;\le\; 1$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und daraus schließlich (9.9), indem man noch $c$ gegen $\infty$ streben läßt. ♢

**9.7. Bemerkung.** Ein Blick auf den obigen Beweis zeigt, daß (9.9) sogar für jedes nichtnegative Submartingal $(Z_n)_{n\ge0}$ mit $Z_0 = i$ $\mathbb{P}_i$-f.s., $\mathbb{E}_i\psi(Z_n) < \infty$ für alle $n \ge 0$ und $\mathbb{E}_i\psi(Z_n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gültig ist.

Beweis von Satz 9.2 (Teil 1): Kombiniert man (9.9) aus dem vorhergehenden Lemma mit (9.8) aus Lemma 9.5, so folgt offensichtlich

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_i M_n}{\log n} \;\le\; i$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Zu zeigen bleibt damit die umgekehrte Ungleichung

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_i M_n}{\log n} \;\ge\; i \tag{9.11}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$, der wir uns als nächstes zuwenden wollen.

Wie in [2] bezeichnen wir eine Partialsummenfolge $(S_n)_{n\ge0}$ mit u.i.v. Zuwächsen und Anfangspunkt $S_0 = 0$ als *Standard-Random Walk (SRW)*.

**9.8. Lemma.** *Sei $(S_n)_{n\ge0}$ ein SRW mit $ES_1 = 1$ und $ES_1^2 < \infty$. Dann gilt*

$$\sum_{n\ge1} \frac{1}{n} ES_n \mathbf{1}_{\{S_n>\rho n\}} \;<\; \infty \tag{9.12}$$

*für alle $\rho > 1$.*

Beweis: Sei $\rho > 1$ beliebig und dann $U = \sum_{n\ge0} \mathbb{P}(\rho n - S_n \in \cdot)$ das sogenannte *Erneuerungsmaß* des SRW's $(\rho n - S_n)_{n\ge0}$, dessen Zuwächse $\rho - X_1, \rho - X_2, \ldots$ offensichtlich positiven Erwartungswert und endliches zweites Moment besitzen. Ohne Beweis verwenden wir (☞ Satz 33.5 in [2]), daß unter diesen Voraussetzungen

$$C \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \sup_{t\in\mathbb{R}} (t \vee 1)^{-1} U(t) \;<\; \infty, \quad U(t) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; U(-\infty, t].$$

Da $n^{-1}S_n = \mathbb{E}(X_1|S_n)$ $\mathbb{P}$-f.s., erhalten wir nun

$$\sum_{n\ge1} \frac{1}{n} \mathbb{E}S_n \mathbf{1}_{\{S_n>\rho n\}} \;=\; \sum_{n\ge1} \mathbb{E}X_1 \mathbf{1}_{\{S_n>\rho n\}}$$

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{n\ge 1} \int_{\mathbb{R}} |x|\, \mathbb{P}(S_{n-1} \ge \rho n - x)\ \mathbb{P}(X_1 \in dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |x|\, U(x-\rho)\ \mathbb{P}(X_1 \in dx) \\
&\le \int_{\mathbb{R}} (|x| \vee 1)\, U(x)\ \mathbb{P}(X_1 \in dx) \\
&\le C\, \mathbb{E}(X_1^2 \vee 1) \ < \ \infty.
\end{aligned}$$ ♢

Als letztes Hilfsresultat für den Nachweis von (9.11) benötigen wir noch

**9.9. Lemma.** *Sei $(Z_n)_{n\ge 0}$ ein nichtnegatives Martingal und*

$$\tau \ = \ \tau_{n,k} \ = \ \inf\{j \ge 1 : Z_j = 0 \textit{ oder } Z_j \ge k\} \wedge n \tag{9.13}$$

*für $n \ge 1,\ k \ge 2$. Dann gilt $\mathbb{E}Z_\tau \mathbf{1}_{\{Z_\tau \ge k\}} \ge \mathbb{E}Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n \ge k\}}$.*

Beweis: Da $\tau$ eine beschränkte Stopzeit bildet, folgt $\mathbb{E}Z_\tau = \mathbb{E}Z_n$ aus dem Optional-Sampling-Theorem (☞ 20.2 in [2]). Ferner liefert $\{0 < Z_\tau < k\} = \{\tau = n, 0 < Z_n < k\}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z_\tau \mathbf{1}_{\{Z_\tau < k\}} &= \mathbb{E}Z_\tau \mathbf{1}_{\{0<Z_\tau < k\}} \\
&= \mathbb{E}Z_n \mathbf{1}_{\{\tau=n, 0<Z_n < k\}} \\
&\le \mathbb{E}Z_n \mathbf{1}_{\{0<Z_n < k\}} \\
&= \mathbb{E}Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n < k\}}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt offenkundig die Behauptung. ♢

Beweis von Satz 9.2 (Teil 2): Seien $i,k,n \in \mathbb{N}$ und $\rho > 1$ beliebig. Da $(Z_n)_{n\ge 0}$ unter $\mathbb{P}_i$ ein nichtnegatives Martingal bildet, können wir Lemma 9.9 anwenden und erhalten mit $\tau = \tau_{n,k}$ gemäß (9.13) sowie $a_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_i Z_\tau \mathbf{1}_{\{Z_\tau > \rho k\}}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n \ge k\}} &\le \mathbb{E}_i Z_\tau \mathbf{1}_{\{Z_\tau \ge k\}} \\
&= \mathbb{E}_i Z_\tau \mathbf{1}_{\{k \le Z_\tau \le \rho k\}} \ + \ \mathbb{E}_i Z_\tau \mathbf{1}_{\{Z_\tau > \rho k\}} \\
&\le \rho k\, \mathbb{P}_i(M_n \ge k) \ + \ a_{n,k}.
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Bezeichnet $(S_n)_{n\ge 0}$ einen beliebigen SRW mit Zuwachsverteilung $(p_j)_{j\ge 0}$ unter $\mathbb{P}_i$, und setzen wir $\phi(j,k) = \mathbb{E}_i S_k \mathbf{1}_{\{S_j > \rho k\}}$, so folgt weiter unter Benutzung der Markov-Eigenschaft für $(Z_n)_{n\ge 0}$ sowie $0 = \phi(0,k) \le ... \le \phi(k,k)$

$$\begin{aligned}
a_{n,k} &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}_i Z_\tau \mathbf{1}_{\{Z_\tau > \rho k, \tau = j+1\}} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}_i Z_{j+1} \mathbf{1}_{\{Z_{j+1} > \rho k, M_j < k\}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\{M_j<k\}} \mathbb{E}_i \left( \mathbf{1}_{\left\{ \sum_{m=1}^{Z_j} X_{j,m})>\rho k \right\}} \sum_{m=1}^{Z_j} X_{j,m} \middle| Z_j \right) d\mathbb{P}_i \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}_i \phi(Z_j,k) \mathbf{1}_{\{M_j<k\}} \\
&\le \phi(k,k) \sum_{j=1}^{n} b_{j,k}, \qquad (9.15)
\end{aligned}$$

wobei $b_{j,k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_i(0 < Z_j < k)$. Wir zeigen als nächstes, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k\ge 1} \frac{a_{n,k}}{k} \;=\; 0. \qquad (9.16)$$

Zu diesem Zweck benutzen wir die Ergebnisse von Satz 9.1 und insbesondere die folgende Verschärfung von (9.4):

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t>0} \left| \mathbb{P}_i\left( \frac{Z_n}{n} \le t \middle| Z_n > 0 \right) - G(t) \right| \;=\; 0, \qquad (9.17)$$

wobei $G(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - e^{-2t/\sigma^2}$. Diese gilt bekanntlich stets bei stetigem Verteilungslimes.

Aus $b_{n,k} \le b_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_i(Z_n > 0)$, (9.2) sowie $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \simeq \log n$ folgt leicht

$$\sup_{k,n\ge 1} \frac{1}{\log(n+1)} \sum_{j=0}^{n} b_{j,k} \;<\; \infty. \qquad (9.18)$$

Weiter gilt für alle $N \ge 1$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j,k} \;\le\; kN \;+\; \sum_{j=kN}^{n-1} b_j \left| \mathbb{P}_i(Z_j < k | Z_j > 0) - G\left(\frac{k}{j}\right) \right| \;+\; \varphi\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{j=kN}^{n-1} b_j.$$

Aus (9.17), (9.18) sowie der Tatsache, daß $\lim_{t\downarrow 0} G(t) = 0$, folgt deshalb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,k} \;=\; 0, \qquad (9.19)$$

indem man zuerst $N$ geeignet wählt und dann $n$ gegen $\infty$ streben läßt.

Da $\sum_{k\ge 1} \frac{\phi(k,k)}{k} < \infty$ gemäß Lemma 9.8, implizieren nun (9.15), (9.18), (9.19) und der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k\ge 1} \frac{a_{n,k}}{k} \;\le\; \sum_{k\ge 1} \frac{\phi(k,k)}{k} \left( \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{j=0}^{n-1} b_{j,k} \right) \;=\; 0,$$

d.h. (9.16).

Kehren wir zurück zu (9.14). Division auf beiden Seiten der Ungleichung durch $k$ und anschließende Summation über $k$ liefert

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\,\mathbb{E}_i Z_n \mathbf{1}_{\{Z_n\geq k\}} \;\leq\; \rho\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}_i(M_n\geq k) \;+\; \sum_{k\geq 1}\frac{a_{n,k}}{k}$$

für alle $n\geq 1$ und folglich weiter

$$\frac{1}{\log n}\mathbb{E}_i\left(Z_n\sum_{k=1}^{Z_n}\frac{1}{k}\right) \;\leq\; \frac{\rho}{\log n}\,\mathbb{E}_i M_n \;+\; \frac{1}{\log n}\sum_{k\geq 1}\frac{a_{n,k}}{k}. \tag{9.20}$$

Wegen $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j}\simeq \log n$ für $n\to\infty$ und unter Benutzung von Lemma 9.5 folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\mathbb{E}_i\left(Z_n\sum_{k=1}^{Z_n}\frac{1}{k}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\mathbb{E}_i\psi(Z_n) \;=\; i,$$

was in (9.20) zusammen mit (9.16)

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\rho}{\log n}\mathbb{E}_i M_n \;\geq\; i$$

liefert. Der Beweis von (9.12) ist damit vollständig, weil $\rho>1$ beliebig vorgegeben war. $\diamondsuit$

## Übungen zu Abschnitt 9

**Übung 9.1.** Es seien $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ e.F. von zwei kritischen Reproduktionsverteilungen mit Varianzen $\sigma_1^2<\sigma_2^2\leq\infty$.

(a) ***(Vergleichslemma)*** Zeigen Sie, daß $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ existieren, derart daß

$$f^{(1)}_{n+n_1}(s) \;\leq\; f^{(2)}_{n+n_2}(s)$$

für alle $s\in[0,1]$ und $n\in\mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, daß im Fall einer kritischen gebrochen-rationalen Reproduktionsverteilung gemäß (4.1) ($b=(1-p)^2$) die asymptotische Beziehung (9.6) in Lemma 9.3 exakt erfüllt ist, d.h.

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-f_n(s)}-\frac{1}{1-s}\right) \;=\; \frac{\sigma^2}{2}$$

für alle $s\in[0,1]$ und $n\in\mathbb{N}_0$.

(c) Geben Sie einen alternativen Beweis von Lemma 9.3 unter Benutzung des obigen Vergleichslemmas sowie Teil (b).

**Übung 9.2.** Zeigen Sie Satz 9.1 für beliebige $i\in\mathbb{N}$.

**Übung 9.3.** Zeigen Sie, daß

$$a\,\log b \;\leq\; \psi(a) \;+\; \frac{b}{c}\,\mathbf{1}_{[0,b/c]}(a) \;+\; \frac{b}{e}\,\mathbf{1}_{[b/c,b]}(a)$$

für alle $0 \le a \le b,\ b > 0$ und $e < c < \infty$ gilt.

**Übung 9.4.** Gegeben sei die Situation von Satz 9.1.

(a) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n^2(f_{n+1}(s) - f_n(s)) \;=\; \frac{2}{\sigma^2} \tag{9.21}$$

für alle $s \in [0,1)$. [Hinweis: Benutzen Sie die vor (9.7) gegebene Taylor-Entwicklung von $f$ sowie (9.2).]

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), daß

$$\lim_{n\to\infty} n^2\, \mathbb{P}_i(Z_n > 0, Z_{n+1} = 0) \;=\; \frac{2i}{\sigma^2} \tag{9.22}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

**Übung 9.5.** Gegeben sei die Situation von Satz 9.1. Zeigen Sie, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,\infty)$ gilt:

$$\mathbb{P}_i\left(\frac{Z_n}{n} \le t \,\middle|\, Z_{n+k} > 0\right) \;\to\; \mathrm{Exp}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right) * \mathrm{Exp}\left(\frac{2(1+\alpha)}{\alpha\sigma^2}\right)([0,t]) \tag{9.23}$$

für alle $t > 0$, falls $n, k \to \infty$, derart daß $\frac{k}{n} \to \alpha$.

**Übung 9.6.** Gegeben sei die Situation von Satz 9.1, wobei zusätzlich $p_1 > 0$ angenommen wird. Zeigen Sie:

(a) Bezeichnet $f_n^{(j)}$ die $j$-te Ableitung von $f_n$, so gilt

$$f_n^{(j)}(s) \;=\; a_{n,j}(s) + f'(f_{n-1}(s))f_{n-1}^{(j)}(s)$$

für alle $j, n \in \mathbb{N}$, wobei $a_{n,j}(s)$ eine Potenzreihe mit nichtnegativen Koeffizienten bildet.

(b) Für alle $j \ge 1$ gilt

$$\frac{\mathbb{P}(Z_1 = j)}{\mathbb{P}(Z_1 = 1)} \;\le\; \frac{\mathbb{P}(Z_2 = j)}{\mathbb{P}(Z_2 = 1)} \;\le\; \frac{\mathbb{P}(Z_3 = j)}{\mathbb{P}(Z_3 = 1)} \;\le \ldots \tag{9.24}$$

[Hinweis: Benutzen Sie (a).]

(c) Bezeichnet $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Z_n=j)}{\mathbb{P}(Z_n=1)}$ und $\Pi(s) = \sum_{j\ge 1} \pi_j s^j$, so gilt

$$\Pi(s) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(s) - f_n(0)}{f_n'(0)} \;\le\; \lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(s)}{f_n'(0)} \;<\; \infty \tag{9.25}$$

für alle $s \in [0,1)$. [Hinweis: Um zu zeigen, daß der letzte Limes in (9.25) existiert und endlich ist, überlegen Sie sich zunächst, daß $f_n'(s) = \prod_{j=0}^{n-1} f'(f_j(s)) \le \prod_{j=0}^{n-1} f'(f_{j+k}(0))$ für $s \in (0,1)$, ein geeignetes $k = k(s) \ge 0$ und alle $n \ge 1$ gilt. Zeigen Sie dann, daß

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{f'(f_{j+k}(0))}{f'(f_j(0))} \;\le\; \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\sigma^2}{p_1}\big(f_{j+k}(0) - f_j(0)\big)\right)$$

für alle $n \geq 1$ und verwenden Sie abschließend Übung 9.4 zum Nachweis dafür, daß das Produkt auf der rechten Seite gegen einen endlichen Limes konvergiert.]

(d) (Seneta) Für alle $j \geq 1$ gilt

$$\theta_j \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j | Z_n > 0, Z_{n+1} = 0) = \frac{\pi_j p_0^j}{\Pi(p_0)}, \tag{9.26}$$

wobei $\sum_{j\geq 1} \theta_j = 1$ und $\Theta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\geq 1} \theta_j s^j = \frac{\Pi(p_0 s)}{\Pi(p_0)}$.

**Übung 9.7.** (Fortsetzung) Zeigen Sie, daß die $\pi_j, j \geq 1$ aus der vorhergehenden Übung die Invarianzgleichungen

$$\pi_j = \sum_{i\geq 1} \pi_i \mathbb{P}_i(Z_1 = j) \quad \left( = \sum_{i\geq 1} \pi_i p_{ij} \right), \quad j \geq 1, \tag{9.27}$$

erfüllen und daß für die zugehörige e.F. $\Pi(s)$

$$\Pi(f(s)) = \Pi(s) + \Pi(p_0) \tag{9.28}$$

für alle $s \in [0, 1]$ sowie $\Pi(1) = \sum_{j\geq 1} \pi_j = \infty$ gilt.

**Übung 9.8.** (Fortsetzung) Berechnen Sie unter Benutzung von (9.25) und (9.26) die $\pi_j$ und $\theta_j$, $j \geq 1$, explizit für den Fall einer kritischen, gebrochen-rationalen Reproduktionsverteilung.

## 10. Die Gesamtpopulationsgröße

Gegeben sei wieder ein GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ in einem kanonischen Modell mit endlichem Reproduktionsmittel $\mu$ und Reproduktionsvarianz $\sigma^2 \in (0, \infty]$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$Y_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n} Z_j \tag{10.1}$$

mit e.F. $h_n$. $Y_n$ gibt die Anzahl aller Populationsmitglieder an, die bis zum Zeitpunkt $n$ gelebt haben, und strebt für $n \to \infty$ gegen die *Gesamtpopulationsgröße*

$$Y_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\geq 0} Z_j, \tag{10.2}$$

deren e.F. wir mit $h_\infty$ bezeichnen. Offensichtlich gilt

$$\mathbb{P}(Y_\infty < \infty) = q. \tag{10.3}$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, erstens die Verteilung von $Y_\infty$ auf $\{Y_\infty < \infty\}$ anzugeben und zweitens das Verhalten von $Y_n$ in Abhängigkeit von $Z_n$ für $n \to \infty$ zu beschreiben. Wir erinnern daran, daß $p_{ij} = \mathbb{P}_i(Z_1 = j)$ (☞ (1.1))

**10.1. Satz (Dwass)** *Gegeben die obigen Annahmen sowie $p_0 > 0$, gilt*

$$\mathbb{P}_i(Y_\infty = j) \;=\; \frac{i}{j}\, p_{j,j-i} \tag{10.4}$$

*für alle $i \in \mathbb{N}$ und $j \geq i$, d.h. speziell*

$$\mathbb{P}(Y_\infty = j) \;=\; \frac{1}{j}\, p_{j,j-1} \tag{10.5}$$

*für alle $j \in \mathbb{N}$.*

Für den zweiten Satz beschränken wir uns auf den Fall eines Urahnen und überlassen dem Leser die Angabe der entsprechenden Ergebnisse im Fall mehrerer Urahnen (Übung 10.5). Dazu beachte man, daß aus Lemma 1.2 sofort

$$\mathbb{P}_i((Z_n, Y_n)_{n\geq 0} \in \cdot) \;=\; \mathbb{P}((Z_n, Y_n)_{n\geq 0} \in \cdot)^{*(i)} \tag{10.6}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt.

**10.2. Satz (Pakes)** *Unter den obigen Annahmen gelten folgende Aussagen:*

*(a) (Superkritischer Fall) Mit $k_n, W^*$ und $W$ wie in Abschnitt 6 folgt für $n \to \infty$*

$$\frac{Y_n}{k_n} \;\to\; \frac{\mu W^*}{\mu - 1} \quad \textit{und} \quad \frac{Y_n}{\mu^n} \;\to\; \frac{\mu W}{\mu - 1} \quad \mathbb{P}\textit{-f.s.} \tag{10.7}$$

*(b) (Subkritischer Fall) Ist $\mu < 1$, $\sigma^2 < \infty$ und $\theta \overset{\text{def}}{=} \frac{\sigma^2}{\mu(1-\mu)}$, folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - \theta\right| > \varepsilon \,\middle|\, Z_n > 0\right) \;=\; 0 \tag{10.8}$$

*für alle $\varepsilon > 0$.*

*(c) (Kritischer Fall) Ist $\mu = 1$ und $\sigma^2 < \infty$, folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n^2} \leq t \,\middle|\, Z_n > 0\right) \;=\; F(t) \tag{10.9}$$

*für alle $t \geq 0$, wobei die Verteilung $F$ durch ihre L.T.*

$$\varphi(t) \;=\; \int_{[0,\infty)} e^{-yt}\; F(dy) \;=\; \frac{u(t)\, e^{-u(t)}}{1 - e^{-u(t)}}, \quad t > 0, \tag{10.10}$$

*mit $u(t) = \sigma\sqrt{2t}$ gegeben ist.*

Bevor wir zum Beweis des ersten Satzes schreiten, bedarf es des folgenden einfachen Lemmas über die e.F. $h_n, n \geq 0$.

**10.3. Lemma.** *In den zuvor eingeführten Bezeichnungen gilt*

$$h_{n+1}(s) \;=\; s\, f \circ h_n(s) \tag{10.11}$$

*für alle* $n \ge 0,\ s \in [0,1]$ *sowie*

$$h_\infty(s) \;=\; s\, f \circ h_\infty(s) \tag{10.12}$$

*für alle* $s \in [0,1]$. *Sofern* $q > 0$, *ist* $h_\infty$ *gegeben durch*

$$h_\infty(s) \;=\; q\tilde{h}^{-1}(s)\ \big(s \in [0,1)\big), \quad \tilde{h}(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{sq}{f(sq)}, \tag{10.13}$$

*und bildet die einzige auf [0,1) analytische Lösung der Gleichung (10.12). Es gilt außerdem*

$$\mathbb{E}Y_n \;=\; \begin{cases} \dfrac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu}, & \textit{falls } \mu \neq 1 \\[2ex] n+1, & \textit{falls } \mu \neq 1 \end{cases}, \tag{10.14}$$

$$Var Y_n \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{(1-\mu)^2}\left(\dfrac{1-\mu^{2n+1}}{1-\mu} - (2n+1)\mu^n\right), & \textit{falls } \mu \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sigma^2, & \textit{falls } \mu = 1 \end{cases} \tag{10.15}$$

*für alle* $n \ge 0$.

Beweis: Für (10.11) notieren wir

$$h_{n+1}(s) \;=\; s\,\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(s^{Z_1+\ldots+Z_{n+1}}|Z_1)\big) \;=\; s\,\mathbb{E}\big(h_n(s)^{Z_1}\big) \;=\; s\, f \circ h_n(s).$$

Läßt man dann $n$ gegen $\infty$ streben und beachtet die Stetigkeit von $f$, so folgt auch (10.12). Bezeichnet $g$ eine weitere analytische Lösung der Gleichung (10.12), ergibt sich unter Benutzung der Konvexität von $f$

$$|h_\infty(s) - g(s)| \;\le\; s\mu\, |h_\infty(s) - g(s)|$$

für alle $s \in [0,1]$, $n \ge 1$ und somit $h_\infty(s) = g(s)$ für alle $s \in [0, \mu^{-1})$. Als analytische Funktionen müssen $h_\infty$ und $g$ dann aber schon auf ganz $[0,1)$ identisch sein.

Zum Nachweis von (10.13) sei zuerst $\mu \le 1$ und somit $q = 1$. Ersetzt man dann in (10.12) $s$ durch $h_\infty^{-1}(s)$, ergibt sich $s = h_\infty^{-1}(s) f(s)$, also $h_\infty^{-1}(s) = s/f(s)$. Falls $\mu > 1$ und $q > 0$, betrachte die in (7.9) definierte subkritische e.F. $\tilde{f}(s) = f(sq)/q$. Sei $\tilde{h}_\infty$ die eindeutige Lösung von $\tilde{h}_\infty(s) = s\,\tilde{f} \circ \tilde{h}_\infty(s)$. Nach dem eben Bewiesenen gilt $\tilde{h}_\infty^{-1}(s) = s/\tilde{f}(s) = \tilde{h}(s)$. (10.12) für $\tilde{f}$ und $\tilde{h}_\infty$ kann aber zu $q\tilde{h}_\infty(s) = sf(q\tilde{h}_\infty(s))$ umgeschrieben werden, was aufgrund der Eindeutigkeit $h_\infty(s) = q\tilde{h}_\infty(s)$ und damit die Behauptung impliziert.

Der Nachweis von (10.14) und (10.15) unter Benutzung von Satz 2.2 bleibt dem Leser überlassen und bildet Übung 10.1. ♢

Beweis von Satz 10.1: Die nachfolgende Argumentation schließt eine interessante Anwendung des sogenannten *Auszählungssatzes* (☞ 22.13 in [2]) mit ein.

Für jedes $s \in [0,1]$ seien $X(s), X_1(s), X_2(s), \ldots$ unter $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1$ u.i.v. mit

$$\mathbb{P}(X(s) = k) \;=\; \frac{p_k s^k}{f(s)}$$

für alle $k \geq 0$ (beachte $f(s) \geq f(0) = p_0 > 0$ für alle $s \in [0,1]$) und zugehörigem SRW

$$S_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad \text{und} \quad S_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} X_1(s) + ... + X_n(s) \quad \text{für } n \geq 1.$$

Dann gilt offensichtlich $\mathbb{P}(S_j(1) = j - i) = \mathbb{P}_j(Z_1 = j - i) = p_{j,j-i}$ für alle $j \geq i \geq 1$, und unter Hinweis auf (10.6) reicht es deshalb,

$$h_\infty(s)^i \;=\; \sum_{j \geq i} \frac{i}{j}\, \mathbb{P}(S_j(1) = j - i)\, s^j \tag{10.16}$$

für alle $i \geq 1$ und $s \in [0,1]$ zu zeigen.

Nehmen wir zunächst $\mu \leq 1$ an, und sei $i \geq 1$ im folgenden fest vorgegeben. Dann folgt

$$\mathbb{E}X(s) = \frac{sf'(s)}{f(s)} < 1 \text{ für } s \in [0,1) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}X(1) = \mu \leq 1.$$

Der erwähnte Auszählungssatz liefert

$$\mathbb{P}(S_n(s) < n \text{ für alle } n \geq 1) \;=\; 1 - \mathbb{E}X(s) \;=\; 1 - \frac{sf'(s)}{f(s)}$$

für alle $s \in [0,1]$. Aus $\frac{S_n(s)}{n} \to \frac{sf'(s)}{f(s)} < 1$ $\mathbb{P}$-f.s. folgt ferner $\mathbb{P}(S_n(s) \geq n - i \text{ u.o.}) = 0$ für $s \in [0,1)$. Wir erhalten deshalb vermöge $S_{\rho(s)}(s) = \rho(s) - i$ für $\rho(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{n \geq 0 : S_n(s) \geq n - i\}$ sowie $\mathbb{P}(S_n(s) = j) = \mathbb{P}(S_n(1) = j) s^j / f(s)^n$ (☞ Übung 10.3)

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; \sum_{n \geq i} \mathbb{P}(S_n(s) = n - i, S_{n+j}(s) < n + j - i \text{ für alle } j \geq 1) \\ &=\; \mathbb{P}(S_j(s) < j \text{ für alle } j \geq 1) \sum_{n \geq i} \mathbb{P}(S_n(s) = n - i) \\ &=\; \left(1 - \frac{sf'(s)}{f(s)}\right) \sum_{n \geq i} \mathbb{P}(S_n(1) = n - i)\, \frac{s^{n-i}}{f(s)^n} \end{aligned} \tag{10.17}$$

für alle $i \geq 1$. Setzen wir nun $u \stackrel{\text{def}}{=} h_\infty^{-1}(s) = \frac{s}{f(s)}$, so gilt

$$\frac{sf'(s)}{f(s)} \;=\; \frac{h_\infty(u) f' \circ h_\infty(u)}{f \circ h_\infty(u)} \;=\; u\, f' \circ h_\infty(u).$$

Differentiation von (10.12) in $u$ liefert dann weiter

$$h_\infty'(u) \;=\; f \circ h_\infty(u) + u f' \circ h_\infty(u) h_\infty'(u) \;=\; f(s) + \frac{sf'(s)}{f(s)} h_\infty'(u),$$

woraus sich unter nochmaliger Verwendung von (10.12)

$$1 - \frac{sf'(s)}{f(s)} \;=\; \frac{f(s)}{h_\infty'(u)} \;=\; \frac{f \circ h_\infty(u)}{h_\infty'(u)} \;=\; \frac{h_\infty(u)}{u h_\infty'(u)}$$

ergibt. Setzen wir dies zusammen mit $u = \frac{s}{f(s)}$ und $s = h_\infty(u)$ in (10.17) ein, so folgt schließlich

$$1 \;=\; \frac{h_\infty(u)}{uh'_\infty(u)} \sum_{n\geq i} \mathbb{P}(S_n(1) = n-i)\, \frac{u^n}{h_\infty(u)^i},$$

also

$$i\, h_\infty(u)^{i-1} h'_\infty(u) \;=\; \sum_{n\geq i} \mathbb{P}(S_n(1) = n-i)\, i\, u^{n-1}.$$

Eine Integration von 0 bis $s$ bezüglich $u$ unter Beachtung von $h_\infty(0) = 0$ liefert schließlich (10.16).

Seien nun $\mu > 1$ und $q > 0$ bei weiterhin festem $i \geq 1$ angenommen. Wir betrachten dann wieder die subkritische e.F. $\tilde{f}(s) = \frac{f(sq)}{q}$ mit Lösung $\tilde{h}_\infty(s)$ der Gleichung (10.12). Wir hatten im Beweis von Lemma 10.3 gezeigt, daß $h_\infty(s) = q\tilde{h}_\infty(s)$ gilt. Bezeichnen $\tilde{p}_{jk}, k \geq 0$, die Koeffizienten der Potenzreihe von $\tilde{f}(s)^j$ in 0, d.h. $\tilde{f}(s)^j = \sum_{k\geq 0} \tilde{p}_{j,k} s^k$, so impliziert die Beziehung

$$\tilde{f}(s)^j \;=\; \frac{f(sq)^j}{q^j} \;=\; \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}_j(Z_1 = k)\, q^{k-j} s^k \;=\; \sum_{k\geq 0} p_{jk} q^{k-j} s^k$$

offensichtlich $\tilde{p}_{jk} = p_{jk} q^{k-j}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$, und es folgt unter Benutzung von (10.16) für $\tilde{h}_\infty$ (mit $\tilde{p}_{j,j-i}$ anstelle von $p_{j,j-i} = \mathbb{P}(S_j(1) = j-i)$)

$$h_\infty(s)^i \;=\; q^i \tilde{h}_\infty(s)^i \;=\; q^i \sum_{n\geq i} \frac{i}{n}\, \tilde{p}_{n,n-i} s^n \;=\; \sum_{n\geq i} \frac{i}{n}\, p_{n,n-i} s^n,$$

d.h. (10.16) für $h_\infty$. ◊

Beweis von Satz 10.2: *(a) Superkritischer Fall:* Wie in Abschnitt 6 sei $g_n$ wieder die Inverse von $f_n$ auf $[q, 1]$. Als Normierungsfolge wählen wir $k_n = \big(1 - g_n(s)\big)^{-1}, n \geq 0$, für ein $s \in (q, 1)$. Der Beweis von Satz 6.1 hatte gezeigt, daß diese Wahl zu einem nicht-degenerierten Limes $W^*$ von $W_n^* = Z_n/k_n$ führt, für den nun (10.7) zu zeigen ist. Zu diesem Zweck erinnern wir an die Ungleichung (6.20), die in umgeschriebener Form

$$\mu_0^{n-j} \;\leq\; \frac{1 - g_j(s)}{1 - g_n(s)} \;=\; \frac{k_n}{k_j} \;\leq\; \mu^{n-j}$$

lautet und für alle $\mu_0 \in (1, \mu)$ sowie für alle $n \geq j \geq J(s, \mu_0)$ mit geeignetem $J(s, \mu_0) \in \mathbb{N}_0$ gilt. Zu beliebigem $\varepsilon \in (0, \mu - 1)$ seien nun $J = J(s, \mu - \varepsilon)$ und $\nu = \sup\{n : W_n^* \geq (1+\varepsilon)W^*\} \vee J$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{Y_n}{k_n} \;&=\; \frac{Y_\nu}{k_n} + \sum_{j=\nu+1}^{n} \frac{Z_j}{k_j} \cdot \frac{k_j}{k_n} \\
&\leq\; \frac{Y_\nu}{k_n} + (1+\varepsilon)W^* \sum_{j=\nu+1}^{n} (\mu-\varepsilon)^{j-n} \\
&\leq\; \frac{(1+\varepsilon)(\mu-\varepsilon)W^*}{\mu - \varepsilon - 1}
\end{aligned}$$

für alle $n \geq \nu$ und deshalb

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{k_n} \;\leq\; \frac{\mu W^*}{\mu-1} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Umgekehrt gilt aber wegen $k_n/k_{n-j} \to \mu^j$ $(n \to \infty)$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Y_n}{k_n} \;\geq\; \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{Z_{n-j}}{k_{n-j}} \cdot \frac{k_{n-j}}{k_n} \;=\; W^* \sum_{j=0}^{m} \mu^{-j} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $m \geq 0$, so daß wegen $\sum_{j\geq 0} \mu^{-j} = \frac{\mu}{\mu-1}$ insgesamt die erste Hälfte von (10.7) folgt. Für die zweite ist aber nichts mehr zu zeigen; tatsächlich vereinfachen sich bei analogem Vorgehen die Beweisschritte, da die Normierungsfolge dieses Mal explizit bekannt ist.

*(b) Subkritischer Fall:* Es genügt offensichtlich zu zeigen, daß für ein $s \in (0,1)$

$$\mathbb{E}(s^{Y_n/n}|Z_n > 0) \;=\; \frac{h_n(s^{1/n}) - h_n^0(s^{1/n})}{1 - f_n(0)} \;\to\; s^\theta \quad (n \to \infty), \tag{10.18}$$

wobei $h_n^0(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(s^{Y_n}\mathbf{1}_{\{Z_n=0\}})$ für $n \geq 0$. Wie man leicht nachweist (☞ Übung 10.6), gelten

$$h_0^0 \equiv 0, \quad h_{n+1}^0(s) = sf \circ h_n^0(s), \quad h_{n+1}^0 \geq h_n^0 \quad \text{und} \quad h_n^0 \uparrow h_\infty.$$

Insbesondere erfüllen also die $h_n^0$ dieselbe Rekursion wie die $h_n$ (☞ (10.11)) und konvergieren gegen denselben Limes, wobei allerdings $h_n \downarrow h_\infty$ gilt, folglich $h_n^0 \leq h_\infty \leq h_n$ für alle $n \geq 0$. Setzen wir nun $\gamma(s) = sf' \circ h_\infty(s), \varphi_n = \gamma^{-n}(h_n - h_\infty)$ und $\psi_n = \gamma^{-n}(h_\infty - h_n^0)$, so folgt

$$\frac{h_n(s) - h_n^0(s)}{1 - f_n(0)} \;=\; \frac{\gamma(s)^n(\varphi_n(s) + \psi_n(s))}{1 - f_n(0)} \tag{10.19}$$

für $s \in [0,1]$ und $n \geq 0$. Unter Benutzung von (10.11), (10.12) und Beachtung von $h_0(s) = s$ erhalten wir für alle $s \in (0,1]$ und $n \geq 0$

$$\begin{aligned}\varphi_n(s) \;&=\; \frac{s - h_\infty(s)}{\gamma(s)^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{h_j(s) - h_\infty(s)}{h_{j-1}(s) - h_\infty(s)}\right) \\ &=\; \frac{s - h_\infty(s)}{f' \circ h_\infty(s)^n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{f \circ h_{j-1}(s) - f \circ h_\infty(s)}{h_{j-1}(s) - h_\infty(s)}\right),\end{aligned}$$

und damit nach $n$-maliger Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\varphi_n(s) \;=\; (s - h_\infty(s)) \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{f' \circ \eta_j(s)}{f' \circ h_\infty(s)}\right) \tag{10.20}$$

für geeignete $\eta_j$ mit $h_\infty \leq \eta_j \leq h_j$. Aufgrund der einfachen Abschätzungen

$$\begin{gathered}0 \;\leq\; h_j - h_\infty \;\leq\; f \circ h_{j-1} - f \circ h_\infty \leq\; \mu(h_{j-1} - h_\infty) \;\leq \ldots \leq\; \mu^j, \\ f' \circ \eta_j - f' \circ h_\infty \;\leq\; f' \circ h_j - f' \circ h_\infty \;\leq\; f''(1)\mu^j\end{gathered}$$

konvergiert die Reihe $\sum_{j\ge 1}(f'\circ\eta_j - f'\circ h_\infty)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ und damit auch das Produkt in (10.20) auf jeder kompakten Teilmenge von $(0,1]$, d.h. $\varphi_n$ konvergiert auf $(0,1]$ monoton wachsend gegen eine stetige Funktion $\varphi_\infty$, und nach dem Satz von Dini (☞ [10], (13.40) auf S. 205) ist die Konvergenz ebenfalls kompakt gleichmäßig. Letzteres impliziert weiter

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(s^{1/n}) \;=\; \varphi_\infty(1) \;=\; \lim_{n\to\infty}\varphi_n(1) \;=\; 0. \tag{10.21}$$

Dasselbe Vorgehen zeigt, daß $\psi_n$ monoton fallend und kompakt gleichmäßig auf $(0,1]$ gegen eine stetige Funktion $\psi_\infty$ konvergiert (Übung 10.6), so daß

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(s^{1/n}) \;=\; \psi_\infty(1) \;=\; \lim_{n\to\infty}\mu^{-n}(1-f_n(0)) \;=\; c, \tag{10.22}$$

wobei $c$ den nach Satz 8.1 existierenden, wegen $\sigma^2\in(0,\infty)$ positiven Limes von $\mathbb{P}(Z_n>0)/\mu^n$ bezeichnet.

Mit Blick auf (10.18),(10.19) bedarf es zum Beweis der Behauptung noch der Untersuchung von $\gamma(s^{1/n})^n/(1-f_n(0))$ für $n\to\infty$. Aus $h_\infty'(1)=\frac{1}{1-\mu}$, wie man mit (10.12) oder auch (10.14) erhält, folgt

$$(f'\circ h_\infty)'(1) \;=\; f''\circ h_\infty(1)h_\infty'(1) \;=\; \frac{f''(1)}{1-\mu} \;=\; \frac{\sigma^2-\mu(1-\mu)}{1-\mu} \;=\; \mu(\theta-1)$$

und somit für geeignetes $\rho(s)$ mit $\lim_{s\uparrow 1}\rho(s)=0$

$$f'\circ h_\infty(s) \;=\; \mu\Big(1-\big(\theta-1-\rho(s)\big)(1-s)\Big).$$

Beachtet man noch $\lim_{n\to\infty}n(1-s^{1/n})=\log s$, so folgt

$$\gamma(s^{1/n})^n \;=\; s\mu^n\Big(1-\big(\theta-1-\rho(s^{1/n})\big)(1-s^{1/n})\Big)^n \;\simeq\; s\mu^n e^{(\theta-1)\log s} \;=\; \mu^n s^\theta,$$

also $\lim_{n\to\infty}\gamma(s^{1/n})^n/(1-f_n(0))=s^\theta/c$. (10.18) ergibt sich nun bei Kombination dieses Resultats mit (10.19), (10.21) und (10.22).

*(c) Kritischer Fall:* Zu zeigen ist hier für alle $t>0$ und $n\to\infty$ (vgl. (10.18))

$$\mathbb{E}(e^{-tY_n/n^2}|Z_n>0) \;=\; \frac{h_n(e^{-t/n^2})-h_n^0(e^{-t/n^2})}{1-f_n(0)} \;\to\; \frac{\sigma\sqrt{2t}\,e^{-\sigma\sqrt{2t}}}{1-e^{-\sigma\sqrt{2t}}}. \tag{10.23}$$

Trotz mancher Ähnlichkeit zum Vorgehen im subkritischen Fall erfordert der Beweis von (10.23) einen technischen Mehraufwand, der uns im Rahmen dieses Textes unangemessen erscheint. Der interessierte Leser sei an die Originalarbeit [14] verwiesen. ♢

## Übungen zu Abschnitt 10

**Übung 10.1.** Beweisen Sie (10.14) und (10.15) in Lemma 10.3.

**Übung 10.2.** Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWP mit positiver Aussterbewahrscheinlichkeit $q$ und $\tilde{f}$ zu $f$ wie in (7.9) definiert, d.h. $\tilde{f}(s) = f(sq)/q$. Bezeichnen $h_\infty$ und $\tilde{h}_\infty$ die eindeutigen analytischen Lösungen von (10.12) mit $f$ bzw. $\tilde{f}$, so gilt $h_\infty(s) = q\tilde{h}_\infty(s)$, wie im Beweis von Lemma 10.3 gezeigt wurde. Geben Sie eine probabilistische Begründung für diese Tatsache unter Benutzung der Ausführungen im Anschluß an (7.9).

**Übung 10.3.** Gegeben sei die Situation des Beweises von Satz 10.1 einschließlich der dortigen Bezeichnungen. Zeigen Sie, daß

$$\mathbb{P}(S_n(s) = j) \;=\; \mathbb{P}(S_n(1) = j)\,\frac{s^j}{f(s)^n}$$

für alle $s \in [0,1]$ und $j, n \in \mathbb{N}_0$. [Hinweis: Bestimmen Sie die e.F. von $S_n(s)$.]

**Übung 10.4.** Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y_\infty = n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im "Zellteilungs-Fall", wenn $p_0 = 1 - p_2$ gilt.

**Übung 10.5.** Formulieren Sie die Ergebnisse von Satz 10.2 im Fall von $i \geq 2$ Urahnen und begründen Sie diese.

**Übung 10.6.** Zeigen Sie, daß im Beweis von Satz 10.2(b)

(a) (☞ im Anschluß an (10.18)) die dort definierten Funktionen $h_n^0, n \geq 0$ die Rekursion (10.11) erfüllen und eine monoton wachsende Folge mit Limes $h_\infty$ bilden.

(b) (☞ im Anschluß an (10.21)) die dort definierten Funktionen $\psi_n$ monoton fallend und kompakt gleichmäßig auf $(0,1]$ gegen eine stetige Funktion $\psi_\infty$ konvergieren, falls $n \to \infty$.

**Übung 10.7.** Für $s,t \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei $H_n(s,t) = \mathbb{E}(s^{Y_n} t^{Z_n})$ die *zweidimensionale e.F.* von $(Y_n, Z_n)$. Zeigen Sie:

(a) Es gelten $H_0(s,t) = st$ und

$$H_{n+1}(s,t) \;=\; s\,f \circ H_n(s,t) \tag{10.24}$$

für alle $s,t \in [0,1]$ und $n \geq 0$.

(b) Ist $\sigma^2$ endlich, und bezeichnen $\kappa_n$ und $\rho_n$ die Kovarianz bzw. den Korrelationskoeffizienten von $Y_n$ und $Z_n$, so gelten

$$\kappa_n \;=\; \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{1-\mu}\left(n\mu^{n-1} - \mu^n\left(\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu}\right)\right), & \text{falls } \mu \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}n(n+1)\sigma^2, & \text{falls } \mu = 1 \end{cases} \qquad (n \geq 1), \tag{10.25}$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu < 1 \\[1ex] \dfrac{\sqrt{3}}{2}, & \text{falls } \mu = 1 \\[1ex] 1, & \text{falls } \mu > 1 \end{cases} \cdot \tag{10.26}$$

## 11. Das Verhalten bei wachsender Anfangspopulation

Unsere bisherigen Analysen eines GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ basierten stets auf der Annahme einer festen Zahl von Urahnen $Z_0$, zumeist $Z_0 = 1$. In einem kanonischen Modell bedeutete dies, daß a priori eines der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_i, i \in \mathbb{N}$, festgelegt wurde. Wie aber verhält sich die Verteilung von $Z_n$ unter $\mathbb{P}_i$, falls $n$ *und* $i$ gegen $\infty$ streben? So lautet die Frage, der wir uns in diesem Abschnitt kurz widmen wollen. Satz 11.1 weiter unten gibt eine nahezu vollständige Antwort.

Zuvor stellen wir jedoch kurz zwei Verteilungstypen vor, die dort auftreten: Seien $T$ und $X_1, X_2, ...$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0$, $T$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda$ sowie $X_1, X_2, ...$ identisch verteilt mit e.F. $g$ und zugehörigem SRW $S_0 = 0$ und $S_n = X_1 + ... + X_n$ für $n \geq 1$. Dann hat $S_T$ die e.F.

$$\mathbb{E}(s^{S_T}) \;=\; \sum_{n\geq 0} g(s)^n \mathbb{P}(T = n) \;=\; e^{\lambda(g(s)-1)}, \tag{11.1}$$

und man nennt eine derartige Verteilung *bewertete Poisson-Verteilung* (☞ auch 48.3 in [1]). Diese Bezeichnung gilt natürlich auch, wenn $X_1, X_2, ...$ eine beliebige Verteilung auf $\mathbb{R}$ besitzen.

Ist $Y_0, Y_1, ...$ eine weitere, von $T$ unabhängige Folge von Zufallsgrößen, und bezeichnet $Q_n$ die Verteilung von $Y_n$, so hat $Y_T$ die Verteilung $\sum_{n\geq 0} e^{-\lambda}\lambda^n Q_n/n!$, und man spricht in diesem Fall von einer *Poisson-Mischung der* $Q_n, n \geq 0$. Stammen die $Q_n$ alle aus derselben Verteilungsfamilie, so spricht man auch von einer Poisson-Mischung dieser Verteilungsfamilie, in Satz 11.1 unten z.B. von einer Poisson-Mischung von Gamma-Verteilungen. Im dortigen Spezialfall gilt sogar $Y_n = S_n$ mit unabhängigen, identisch $\Gamma(1,\nu)$-, d.h. $\mathrm{Exp}(\nu)$-verteilten $X_1, X_2, ....$ Bezeichnet dann $\varphi(t) = \frac{1}{1+t/\nu}$ deren L.T., so hat $Y_T = S_T$ offensichtlich die L.T.

$$\mathbb{E}(e^{-tY_T}) \;=\; \sum_{n\geq 0} \varphi(t)^n \mathbb{P}(T = n) \;=\; e^{\lambda(\varphi(t)-1)} \;=\; e^{-\lambda\nu t/(\nu+t)}. \tag{11.2}$$

Bewertete Poisson-Verteilungen bilden im übrigen nichts anderes als spezielle Poisson-Mischungen, nämlich von Faltungen $Q_n = Q^{*(n)}$ einer Verteilung $Q$ auf $\mathbb{R}$.

**11.1. Satz (Lamperti).** *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP in einem kanonischen Modell mit Reproduktionsmittel $\mu \in (0,\infty)$ und Reproduktionsvarianz $\sigma^2 \in (0,\infty]$.*

*(a) (Superkritischer Fall) Ist $\sigma^2 < \infty$ und $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung, so gilt für jede Folge $i_n \to \infty$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{i_n}\Big(\frac{Z_n - i_n\mu^n}{\beta_n} \leq t\Big) \;=\; \Phi(t) \tag{11.3}$$

*für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $\beta_n \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\mu^n(\frac{i_n}{\mu(\mu-1)})^{1/2}$.*

(b) *(Subkritischer Fall) Gilt $(ZlogZ)$, $p_0 < 1$ und $i_n \simeq \lambda\mu^{-n}$ für $n \to \infty$ und ein $\lambda \in (0,\infty)$, so besitzt $Z_n$ unter $\mathbb{P}_{i_n}$ asymptotisch eine bewertete Poisson-Verteilung, und zwar folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{i_n}(s^{Z_n}) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(s)^{i_n} \;=\; e^{c\lambda(h(s)-1)} \tag{11.4}$$

*für $s \in [0,1]$, wobei $c$ und $h$ wie in Satz 8.1 bzw. 8.2 definiert sind. Gilt stattdessen $i_n\mu^n \to \infty$ für $n \to \infty$, und ist $\sigma^2 < \infty$, so folgt (11.3) mit $\beta_n = \sigma\mu^{n/2}(\frac{i_n}{\mu(1-\mu)})^{1/2}$. Weitere Grenzverteilungen sind bis auf triviale Änderungen in der Normierung und degenerierte Verteilungen nicht möglich, sofern $\sigma^2 < \infty$.*

(c) *(Kritischer Fall) Sei $\sigma^2 < \infty$. Falls $i_n \simeq \lambda n$ für $n \to \infty$ und ein $\lambda \in (0,\infty)$, so ist die asymptotische Verteilung von $Z_n/n$ unter $\mathbb{P}_{i_n}$ eine Poisson-Mischung von Gamma-Verteilungen mit L.T.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{i_n}(e^{-tZ_n/n}) \;=\; e^{-2\lambda t/(2+t\sigma^2)}, \quad t \geq 0. \tag{11.5}$$

*Im Fall $i_n/n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt dagegen erneut (11.3), jedoch mit $\beta_n = \sigma(ni_n)^{1/2}$. Weitere Grenzverteilungen sind wiederum bis auf triviale Änderungen in der Normierung und degenerierte Verteilungen nicht möglich.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden *zentralen Grenzwertsatz (von Lindeberg) für Dreiecksschemata* unabhängiger Zufallsgrößen (☞ 37.8 in [1]), den wir ohne Beweis notieren:

**11.2. Satz (von Lindeberg für Dreiecksschemata).** *Sei $(k_n)_{n\geq 1}$ eine gegen $\infty$ strebende Folge natürlicher Zahlen und*

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,k_1} & & & & & \\
X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,k_1} & \dots & X_{2,k_2} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & & \\
X_{n,1} & X_{n,2} & \dots & X_{n,k_1} & \dots & X_{n,k_2} & \dots & X_{n,k_n} & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \ddots
\end{array}$$

*ein Dreiecksschema zentrierter Zufallsgrößen mit endlichen, positiven Varianzen $(\sigma^2_{n,k})^{1\leq k\leq k_n}_{n\geq 1}$ und innerhalb einer Zeile unabhängigen Elementen, d.h. $X_{n,1},...,X_{n,k_n}$ sind unabhängig für jedes $n \geq 1$. Sei ferner $S_n = \sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k}$ und $s_n^2 = VarS_n = \sum_{k=1}^{k_n} \sigma^2_{n,k}$. Dann sind äquivalent:*

(a) *Das Dreiecksschema erfüllt die Lindeberg-Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{\{|X_{n,k}|>\varepsilon s_n\}} X^2_{n,k}\; d\mathbb{P} \;=\; 0$$

*für alle $\varepsilon > 0$.*

(b) *Es gilt der zentrale Grenzwertsatz für* $(S_n)_{n\ge1}$, *also* $s_n^{-1}S_n \xrightarrow{d} N(0,1)$, *und das Dreiecksschema genügt der Feller-Bedingung*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le k_n}\frac{\sigma_{n,k}^2}{s_n^2} \;=\; 0.$$

Beweis von Satz 11.1: Im folgenden seien $(Z_n^{(j)})_{n\ge0}$, $j\ge1$, unter $P=\mathbb{P}_1$ stochastisch unabhängige Kopien von $(Z_n)_{n\ge0}$, also $\mathbb{P}_i((Z_n)_{n\ge0}\in\cdot)=\mathbb{P}((\sum_{j=1}^i Z_n^{(j)})_{n\ge0}\in\cdot)$ für alle $i\in\mathbb{N}$. Ferner seien wieder $W_n \overset{\text{def}}{=} \mu^{-n}Z_n$ für $n\ge0$ und $W \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}W_n$ definiert.

*(a) Superkritischer Fall:* Es gilt nun offensichtlich

$$\mathbb{P}_{i_n}\left(\frac{Z_n-i_n\mu^n}{\beta_n}\in\cdot\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{i_n}\frac{Z_n^{(j)}-\mu^n}{\beta_n}\in\cdot\right)$$

für alle $n\ge1$, wobei $\mathbb{E}(Z_n-\mu^n)=0$ und (☞ Satz 2.2)

$$\sigma_n^2 \;\overset{\text{def}}{=}\; \operatorname{Var}Z_n \;=\; \frac{\sigma^2\mu^{n-1}(\mu^n-1)}{\mu-1} \;\simeq\; \frac{\beta_n^2}{i_n} \quad (n\to\infty).$$

Die Behauptung ergibt sich deshalb mit Satz 11.2, wenn wir noch die Lindeberg-Bedingung

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{|Z_n-\mu^n|>\varepsilon\sigma_n i_n^{1/2}\}}\left(\frac{Z_n-\mu^n}{\sigma_n}\right)^2 d\mathbb{P} \;=\; 0 \tag{11.6}$$

für alle $\varepsilon>0$ nachweisen. Eine einfache Umformung unter Beachtung von $\sigma_n^2\simeq\text{const.}\,\mu^{2n}$ zeigt, daß (11.6) äquivalent ist zu

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{|W_n-1|>\varepsilon i_n^{1/2}\}}(W_n-1)^2\,d\mathbb{P} \;=\; 0 \tag{11.7}$$

für alle $\varepsilon>0$. Wegen $\sigma^2<\infty$ liefert Satz 5.4, daß $W$ quadratisch integrierbar ist, $W_n$ sowohl f.s. als auch in $\mathfrak{L}_2$ gegen $W$ konvergiert und daher

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|W_n-1|>\varepsilon i_n^{1/2}\}}(W_n-1)^2\,d\mathbb{P} \;\le\; \int_{\{|W-1|>\varepsilon i_k^{1/2}\}}(W-1)^2\,d\mathbb{P}$$

für alle $k\in\mathbb{N}$. Da $i_n\to\infty$, strebt das rechte Integral für $k\to\infty$ gegen 0, und es folgt (11.7).

*(b) Subkritischer Fall:* Sei $Y_{nj}\overset{\text{def}}{=}Z_n^{(j)}\wedge1$. Nach Satz 8.1 konvergiert $\mu^{-n}\mathbb{P}(Z_n>0)$ für $n\to\infty$ gegen eine Konstante $c$, die positiv ist, sofern $(ZlogZ)$ und $p_0<1$ gelten. Falls $i_n\simeq\lambda\mu^{-n}$, folgt deshalb

$$i_n\mathbb{P}(Y_{nj}=1) \;\simeq\; \lambda\mu^{-n}\mathbb{P}(Z_n>0) \;\to\; \lambda c \quad (n\to\infty)$$

und daraus weiter nach dem Poissonschen Grenzwertsatz ($B(i_n,p_n)(\{k\})\to Poi(\nu)(\{k\})$, falls $i_n\to\infty$ und $i_np_n\to\nu$, ☞ 29.4 in [1])

$$Y_n \;\overset{\text{def}}{=}\; \sum_{j=1}^{i_n}Y_{nj} \;\xrightarrow{d}\; Poi(\lambda c), \quad \text{d.h. } \mathbb{E}(s^{Y_n}) \;\to\; e^{\lambda c(s-1)} \quad (n\to\infty).$$

Setzen wir noch $h_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}|Z_n > 0)$ und erinnern daran, daß $h_n \to h$ für $n \to \infty$ gemäß Satz 8.2, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f_n(s)^{i_n} &= \mathbb{E}_{i_n}(s^{Z_n}) = \mathbb{E}\Big(s^{\sum_{j=1}^{i_n} Z_n^{(j)}}\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{i_n} \mathbb{P}(Y_n = k) g_n(s)^k \to e^{\lambda c(g(s)-1)} \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

für alle $s \in [0,1]$, d.h. (11.4).

Die asymptotische Normalität im Fall $\mu^n i_n \to \infty$ und $\sigma^2 < \infty$ zeigt man wie im superkritischen Fall mit Hilfe von Satz 11.2. Es gilt erneut $\sigma_n^2 \simeq \frac{\beta_n^2}{i_n}$, aber anders als in Teil (a) $\sigma_n^2 \simeq \text{const.}\, \mu^n$. Gemäß Satz 8.1 konvergiert $\sigma_n^{-2}\mathbb{P}(Z_n > 0)$ daher gegen einen positiven Limes, und die nachzuweisende Lindeberg-Bedingung (11.6) ergibt sich nach Bedingen unter $Z_n > 0$ als äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big((Z_n - \mu^n)^2 \mathbf{1}_{\{|Z_n-\mu^n|>\varepsilon\sigma_n i_n^{1/2}\}} \Big| Z_n > 0\Big) = 0 \tag{11.8}$$

für alle $\varepsilon > 0$. Nun konvergiert aber $Z_n - \mu^n$ bedingt unter $Z_n > 0$ nach Satz 8.2 gegen eine Verteilung $Q$ mit Erwartungswert $\frac{1}{c}$ und endlichem zweiten Moment $\frac{\sigma^2}{c\mu(1-\mu)}$ (Übung 8.2). Ferner rechnet man leicht nach, daß $\mathbb{E}((Z_n - \mu^n)^2|Z_n > 0)$ gegen diesen Wert konvergiert. Bezeichnet also $(Z_n^*)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}$ eine Folge derart, daß $Z_n^*$ und $Z_n - \mu^n|Z_n > 0$ dieselbe Verteilung besitzen für $n \in \mathbb{N}_0$, $Z_\infty^*$ nach $Q$ verteilt ist und außerdem $Z_n^* \to Z_\infty^*$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt (eine solche Folge kann man immer konstruieren), so impliziert $EZ_n^{*2} \to EZ_\infty^{*\,2}$ gemäß Korollar 50.6 in [1] die gleichgradige Integrierbarkeit der $Z_n^{*2}, n \geq 0$ und damit der $(Z_n - \mu^n)^2|Z_n > 0$ für $n \geq 0$. Es folgt (11.9) wegen $\lim_{n\to\infty} \sigma_n i_n^{1/2} = \infty$.

Für die Eindeutigkeitsaussage bleibt nur noch zu erwähnen, daß im noch offenen Fall $i_n\mu^n \to 0$ für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_{i_n}(Z_n > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-1}\mathbb{E}_{i_n} Z_n = \varepsilon^{-1} i_n \mu^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

gilt, also $Z_n \overset{\mathbb{P}_{i_n}}{\to} 0$.

*(c) Kritischer Fall:* Hier beschränken wir uns auf den Nachweis von (11.5), denn die weiteren Behauptungen ergeben sich analog zu den beiden vorhergehenden Fällen. Gelte also $i_n \simeq \lambda n$ für $\lambda \in (0,\infty)$ und weiterhin $\sigma^2 < \infty$. Für die $Y_{nj}$ aus Teil (b) folgt dann unter Benutzung von Satz 9.1

$$i_n\mathbb{P}(Y_{nj} = 1) \simeq \lambda n\, \mathbb{P}(Z_n > 0) \to \frac{2\lambda}{\sigma^2} \quad (n \to \infty)$$

und daher wiederum mit dem Poissonschen Grenzwertsatz

$$Y_n = \sum_{j=1}^{i_n} Y_{nj} \overset{d}{\to} Poi\Big(\frac{2\lambda}{\sigma^2}\Big) \quad (n \to \infty).$$

Die Behauptung ergibt sich nun mittels des exponentiellen Grenzwertsatzes (9.4) in Satz 9.1, da für alle $t \geq 0$ und für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i_n}(e^{-tZ_n/n}) &= \sum_{k=0}^{i_n} \mathbb{P}(Y_n = k)\big(\mathbb{E}(e^{-tZ_n/n}|Z_n > 0)\big)^k \\ &\to e^{-2\lambda/\sigma^2} \sum_{k \geq 0} \frac{(2\lambda/\sigma^2)^k}{k!} \left(\frac{1}{1 + t\sigma^2/2}\right)^k = e^{-2\lambda t/(2+t\sigma^2)}. \end{aligned}$$

◊

# 12.* Zwei kritische Phänomene: Perkolation und superbinäres Wachstum

Die drastische qualitative Verhaltensänderung eines physikalischen Systems bei einer infinitesimalen Veränderung eines Parameters (z.B. Temperatur) nennt man gewöhnlich ein *kritisches Phänomen.* Zu den besonders eingehend untersuchten mathematischen Modellen, in denen ein solches Phänomen auftritt, gehört *Perkolation*, worunter man Sickerprozesse von Flüssigkeiten durch poröse Medien, die aus vielen kleinen Kanälen bestehen, versteht. Das qualitative Phänomen von zentralem Interesse besteht hier darin, ob die Flüssigkeit das Medium makroskopisch passiert, wenn es jeden kleinen Kanal mit einer Wahrscheinlichkeit $p$ (der Prozeßparameter) passiert. Typischerweise ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Phänomens (Perkolationswahrscheinlichkeit) 0 für alle $p$ kleiner einer kritischen Wahrscheinlichkeit $p_c$ und positiv für alle $p > p_c$. Die exakte Berechnung von $p_c$ ist für die allermeisten Perkolationsmodelle extrem schwierig, und noch schwieriger ist es, das Verhalten der Perkolationswahrscheinlichkeit für $p$ in einer Umgebung von $p_c$ zu beschreiben. Die Probleme werden im wesentlichen durch die Zusammenhangstruktur der kleinen Kanäle innerhalb des Mediums verursacht.

In diesem Abschnitt betrachten wir das Modell des GWP's aus einer veränderten Perspektive, die die Verbindung zu Perkolationsmodellen herstellt (die Zusammenhangsstruktur ist hier die eines Baumes), und dann zwei kritische Phänomene, für welche die obigen Wahrscheinlichkeiten in Spezialfällen explizit berechenbar sind.

***1. Perkolation.*** Wir betrachten den *homogenen Baum* $\mathbb{V}_{n,\infty}$ *der Ordnung* $n \geq 2$ *und Höhe* $\infty$, der dadurch charakterisiert ist, daß jeder seiner Knoten genau $n$ Nachfolger besitzt. Gegeben einen GWP mit einem Urahnen, dessen Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j \geq 0}$ die Eigenschaft $p_0 + ... + p_n = 1$ besitzt, können wir offenbar dessen Stammbaum, der sich durch Markierung der Individuen ergibt und in Abschnitt 1 beschrieben wurde (☞ Bild 1.2), als (zufälligen) Teilbaum von $\mathbb{V}_{n,\infty}$ auffassen, wobei der Urahne mit der Wurzel von $\mathbb{V}_{n,\infty}$ identifiziert wird. $\mathbb{V}_{n,\infty}$ selbst entspricht dem Stammbaum eines deterministischen GWP's mit Reproduktionverteilung $\delta_n$, d.h. $p_n = 1$ und $p_j = 0$ sonst.

Stellen wir uns nun vor, jede Kante des Baums $\mathbb{V}_{n,\infty}$ entspricht einem Kanal, der unabhängig von allen anderen Kanälen mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ geöffnet ist. Dann lautet die fundamentale Frage in diesem klassischen Perkolationsmodell für $\mathbb{V}_{n,\infty}$, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\pi(n,p)$ ein in der Wurzel beginnender Pfad geöffneter Kanäle unendlicher Länge existiert. Mit anderen Worten, mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Flüssigkeit, die von der Wurzel in den Baum eindringt, jedes Niveau des Baums erreichen?

Während die Beantwortung dieser Frage für viele Graphen, selbst solche mit einer sehr einfachen und regulären Struktur wie etwa $\mathbb{Z}^d$, extrem schwierig ist, läßt sich die Lösung in der gegebenen Situation relativ einfach ermitteln. Sei $\mathcal{G}_{n,p}$ der eindeutig bestimmte zufällige Baum mit derselben Wurzel wie $\mathbb{V}_{n,\infty}$, der aus den geöffneten Kanälen sowie deren Anfangs- und Endknoten besteht, und sei $|\mathcal{G}_{n,p}|$ dessen Höhe.

**12.1. Lemma.** *$\mathcal{G}_{n,p}$ ist der zufällige Stammbaum eines GWP's mit Reproduktionsverteilung $B(n,p)$, also $p_j = \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}$ für $j = 0,...,n$. Ferner gilt $\pi(n,p) = \mathbb{P}(|\mathcal{G}_{n,p}| = \infty)$.*

Beweis: Fassen wir die Endknoten geöffneter Kanäle zu einem beliebigen Anfangsknoten als dessen Nachkommen auf und beachten, daß deren Zahl eine $B(n,p)$-Verteilung besitzt, weil jeder Kanal unabhängig von allen anderen mit Wahrscheinlichkeit $p$ geöffnet ist, so ergibt sich die erste Behauptung. Die zweite Aussage ist offensichtlich. $\diamondsuit$

Die Perkolationswahrscheinlichkeit entspricht also der Explosionswahrscheinlichkeit eines GWP's mit $B(n,p)$-verteilter Reproduktion und Reproduktionsmittel $np$. Unter Rückgriff auf die Ergebnisse in Abschnitt 3 erhalten wir deshalb ohne weitere Arbeit:

**12.2. Satz.** *Für die Perkolationswahrscheinlichkeit $\pi(n,p)$ gilt*

$$\pi(n,p) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } np \leq 1 \\ > 0, & \text{falls } np > 1 \end{cases} \tag{12.1}$$

*sowie speziell im Fall $n = 2$*

$$\pi(2,p) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } 2p \leq 1 \\ 1 - \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2, & \text{falls } 2p > 1 \end{cases}. \tag{12.2}$$

*$\pi(n,p)$ ist ferner stetig und monoton wachsend in $p$ sowie monoton wachsend in $n$.*

Ohne darauf näher einzugehen, erwähnen wir, daß sich offenbar der Stammbaum eines jeden GWP's mit auf $\{0,...,n\}$ konzentrierter Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ mit einem Perkolationsmodell auf $\mathbb{V}_{n,\infty}$ assoziieren läßt. Die Grundannahme besteht dann darin, daß zu jedem Knoten die Anzahl der von ihm ausgehenden geöffneten Kanäle unabhängig von allen anderen Knoten gemäß $(p_j)_{j\geq 0}$ verteilt ist. Verzichtet man auf die Restriktion $p_j = 0$ für $j \geq n$, erhält man entsprechend ein Perkolationsmodell auf $\mathbb{V}_{\infty,\infty}$, dem homogenen Baum unendlicher Höhe, dessen Knoten abzählbar unendlich viele Nachfolger haben.

***2. Superbinäres Wachstum.*** Basierend auf einer gut lesbaren Note von Dekking [5] und einer weiteren Arbeit von Dekking und Pakes [6], stellen wir uns als nächstes die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Stammbaum eines GWP's den homogenen binären Baum $\mathbb{V}_{2,\infty}$ mit derselben Wurzel enthält. Wir bezeichnen das Auftreten dieses Phänomens der Kürze halber als *superbinäres Wachstum* und zeigen:

**12.3. Satz (Dekking).** *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ und e.F. $f(s) = \sum_{j\geq 0} p_j s^j$. Es bezeichne $\pi$ die Wahrscheinlichkeit für superbinäres Wachstum von $(Z_n)_{n\geq 0}$. Dann ist $1-\pi$ der kleinste Fixpunkt der Funktion*

$$h(s) \stackrel{\text{def}}{=} f(s) + (1-s)f'(s) \tag{12.3}$$

*in $[0,1]$. Ferner gilt $\pi = 1$ genau dann, wenn $p_0 + p_1 = 0$.*

Beweis: Sei $\pi_n$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der zu $(Z_j)_{j\geq 0}$ gehörende Stammbaum einen homogenen binären Teilbaum der Höhe $n$ und derselben Wurzel enthält, und sei weiter $\bar{\pi}_n \stackrel{\text{def}}{=} 1-\pi_n$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $\bar{\pi} \stackrel{\text{def}}{=} 1-\pi$. Gegeben $Z_1 = k$, erzeugt der Prozeß keinen homogenen binären Teilbaum der Höhe $n+1$, falls $k = 0$ oder 1 oder falls $k \geq 2$ und entweder keiner oder genau einer der $k$ Nachfolger Wurzel eines homogenen binären Teilbaums der Höhe $n$ bildet. Unter Beachtung der stochastisch unabhängigen Evolution der von den Individuen der ersten Generation erzeugten Teilpopulationen bzw. Teilbäume folgt

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{n+1} &= p_0 + p_1 + \sum_{k\geq 2} (\bar{\pi}_n^k + k\bar{\pi}_n^{k-1}\pi_n) p_k \\ &= p_0 + p_1 + f(\bar{\pi}_n) - p_0 - \bar{\pi}_n p_1 + \pi_n(f'(\bar{\pi}_n) - p_1) \end{aligned}$$

und damit

$$\bar{\pi}_{n+1} = h(\bar{\pi}_n). \tag{12.4}$$

für alle $n \geq 1$. Die Stetigkeit von $h$ zusammen mit $\lim_{n\to\infty} \bar{\pi}_n = \bar{\pi}$ ergibt $\bar{\pi} = h(\bar{\pi})$. Setzen wir $\bar{\pi}_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$, so bleibt (12.4) auch für $n = 0$ richtig, und es gilt $\bar{\pi}_{n+1} = h_{n+1}(0)$ für alle $n \geq 0$, wobei wie üblich $h_n \stackrel{\text{def}}{=} h \circ ... \circ h$ ($n$-mal). Da $h$ wegen $h'(s) = (1-s)f''(s) \geq 0$ ferner monoton wachsend ist, folgt schließlich, daß $\bar{\pi} = \lim_{n\to\infty} h_n(0)$ den kleinsten Fixpunkt von $h$ in $[0,1]$ bildet. Den sehr einfachen Beweis der letzten Behauptung des Satzes überlassen wir dem Leser (Übung 12.1). ♢

Bevor wir das Ergebnis anhand von Beispielen weiter diskutieren, notieren wir als Folgerung eine Darstellung von $h$, die insbesondere zeigt, daß $\pi$ von $p_0$ und $p_1$ der Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ nur über deren Summe $p_0 + p_1$ abhängt. Dies reflektiert die intuitiv offensichtliche Tatsache, daß nur Individuen mit mindestens zwei Kindern zum superbinären Wachstum beitragen.

**12.4. Korollar.** *In der Situation des vorhergehenden Satzes gilt*

$$h(s) \;=\; p_0 \;+\; p_1 \;+\; \sum_{n\geq 1}((n+1)p_{n+1} - (n-1)p_n)s^n \tag{12.5}$$

*für alle* $s \in [0,1]$.

BEWEIS: Die Behauptung ergibt sich direkt durch Nachrechnen. ◊

**12.5. Beispiel.** Im folgenden sei stets $p_0 + p_1 > 0$ vorausgesetzt. Wie man leicht einsieht, impliziert dann $p_n = 0$ für alle $n \geq 3$ stets $\pi = 0$ (☞ Übung 12.1). Die einfachste Situation, in der $\pi > 0$ überhaupt möglich ist, liegt daher vor, wenn $p_3 > 0$ und $p_n = 0$ für alle $n \geq 4$. In [5] wird der Spezialfall $p_3 = 1 - p_1$ diskutiert. Hier wollen wir ganz allgemein Reproduktionsverteilungen mit $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$ betrachten. Vermöge Korollar 12.4 dürfen wir o.B.d.A. $p_1 = 0$ annehmen und erhalten vermöge (12.5)

$$h(s) \;=\; p_0 \;+\; 2p_2 s \;+\; (3p_3 - p_2)s^2 \;-\; 2p_3 s^3.$$

Unter Beachtung von

$$1 - h(s) \;=\; (1-s)(p_2 + p_3 + (p_3 - p_2)s - 2p_3 s^2)$$

läßt sich die Fixpunktgleichung $h(s) = s$ auf $[0,1)$ leicht in die quadratische Gleichung

$$2p_3 s^2 \;-\; (p_3 - p_2)s \;+\; (1 - p_2 - p_3) \;=\; 0$$

überführen, deren Lösungen

$$s_{1,2} \;=\; \left(\frac{p_3 - p_2}{4p_3}\right) \;\pm\; \left(\left(\frac{p_3 - p_2}{4p_3}\right)^2 - \frac{1 - p_2 - p_3}{2p_3}\right)^{1/2} \tag{12.6}$$

lauten, sofern die Bedingungen

$$p_3 \;>\; p_2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{p_3 - p_2}{4p_3}\right)^2 \;\geq\; \frac{1 - p_2 - p_3}{2p_3} \tag{12.7}$$

erfüllt sind. Setzen wir $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_2/p_3$, ergibt sich in (12.6)

$$s_{1,2} \;=\; \frac{1-\alpha}{4} \;\pm\; \frac{1}{4}\left((\alpha+3)^2 - \frac{8}{p_3}\right)^{1/2}$$

und damit unter Beachtung von $(\alpha+1)p_3 = p_2 + p_3 < 1$ die Äquivalenz von (12.7) zu

$$\alpha \;\in\; [0,1) \quad \text{und} \quad \frac{8}{(\alpha+3)^2} \;\leq\; p_3 \;<\; \frac{1}{\alpha+1}.$$

Vermöge Satz 12.3 lautet demnach das Ergebnis für $\pi$ als Funktion von $p_3$ und $\alpha$:

$$\pi(p_3,\alpha) \;=\; \begin{cases} 0, \quad \text{falls } \alpha \ge 1 \text{ oder } p_3 < \dfrac{8}{(\alpha+3)^2}, \\ \dfrac{\alpha+3}{4} + \dfrac{1}{4}\left((\alpha+3)^2 - \dfrac{8}{p_3}\right)^{1/2}, \\ \qquad \text{falls } \alpha \in [0,1) \text{ und } p_3 \in \left[\dfrac{8}{(\alpha+3)^2}, \dfrac{1}{\alpha+1}\right), \end{cases} \tag{12.8}$$

wobei an $p_0 + p_1 > 0$ erinnert sei. Gilt speziell $\alpha = 0$, d.h. $p_2 = 0$, so erhalten wir wie in [5] (☞ Theorem 2)

$$\pi(p_3) \;=\; \begin{cases} 0, \quad \text{falls } p_3 < \dfrac{8}{9} \\ \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}\left(1 - \dfrac{8}{9p_3}\right)^{1/2}, \quad \text{falls } p_3 \ge \dfrac{8}{9} \end{cases}. \tag{12.9}$$

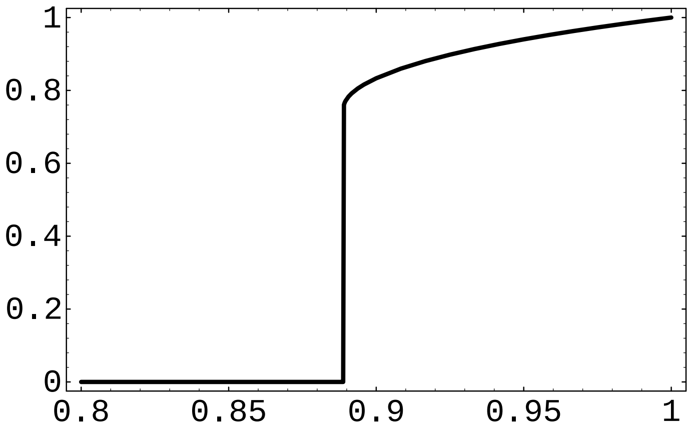


BILD 12.1. Die Wahrscheinlichkeit $\pi(p_3)$ im Fall $0 < p_0 + p_1 = 1 - p_3$.

**12.6. Beispiel.** Betrachten wir als nächstes den Fall eines GWP's mit gebrochen-rationaler Reproduktionsverteilung, deren e.F. durch $f(s) = 1 - \frac{b}{1-p} + \frac{bs}{1-ps}$ für $(b,p) \in (0,1)^2$, $b \le 1-p$ gegeben ist (☞ (4.2)). Weiter gilt $\mu = \frac{b}{(1-p)^2}$ sowie

$$f'(s) \;=\; \frac{b}{(1-ps)^2}.$$

Damit ergibt sich leicht

$$1 - h(s) \;=\; \frac{bp(1-s)^2}{(1-p)(1-ps)^2}.$$

Die Fixpunktgleichung $1-h(s) = 1-s$ für $s \in [0,1)$ führt nach Division durch $1-s$ und kurzer Rechnung auf die quadratische Gleichung

$$\left(s + \frac{b}{2p(1-p)} - \frac{1}{p}\right)^2 \;=\; \frac{b^2}{4p^2(1-p)^2} \;-\; \frac{b}{p^2} \;=\; \frac{b(\mu-4)}{4p^2}$$

mit den Lösungen

$$s_{1,2} \;=\; \frac{1}{2p}\left(2 \;-\; \frac{b}{1-p} \;\pm\; \bigl(b(\mu-4)\bigr)^{1/2}\right),$$

sofern $\mu \geq 4$, d.h.

$$b^{1/2} \;\geq\; 2(1-p). \tag{12.10}$$

Beachte, daß diese Bedingung zusammen mit $b \leq 1-p$ nur für $b \leq \frac{1}{4}$ erfüllt ist. (12.10) impliziert vermöge der Abschätzung

$$4 \;\leq\; \frac{b}{(1-p)^2} \;\leq\; \frac{1}{1-p}$$

außerdem $p \geq \frac{3}{4}$, also $\frac{1}{2p} > 1$, und somit

$$s_1 \;>\; \frac{1}{2p}\left(1 + \;\bigl(b(\mu-4)\bigr)^{1/2}\right) \;>\; 1.$$

Die relevante Lösung $s_2$ liefert demnach den Wert von $\bar{\pi}$, sofern $s_2 = s_2(b,p) \in [0,1]$. Wie man leicht sieht, ist dies unter den bereits festgestellten Parameterrestriktionen $b \leq \frac{1}{4}$, $b \leq 1-p$ und $b^{1/2} \geq 2(1-p)$ stets der Fall (es ist $s_2 \geq 0$ genau dann, wenn $p \leq \frac{1}{b+1}$, und $1-b < \frac{1}{1+b}$). Damit erhalten wir $\pi(b,p) = 0$, falls $b \geq \frac{1}{4}$, und im Fall $b < \frac{1}{4}$

$$\pi(b,p) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{falls } p < 1 - \dfrac{b^{1/2}}{2} \text{ oder } p > 1-b \\ 1 - \dfrac{1}{p} + \dfrac{b}{2p(1-p)} + \dfrac{(b(\mu-4))^{1/2}}{2p}, & \text{falls } 1 - \dfrac{b^{1/2}}{2} \leq p \leq 1-b \end{cases}. \tag{12.11}$$

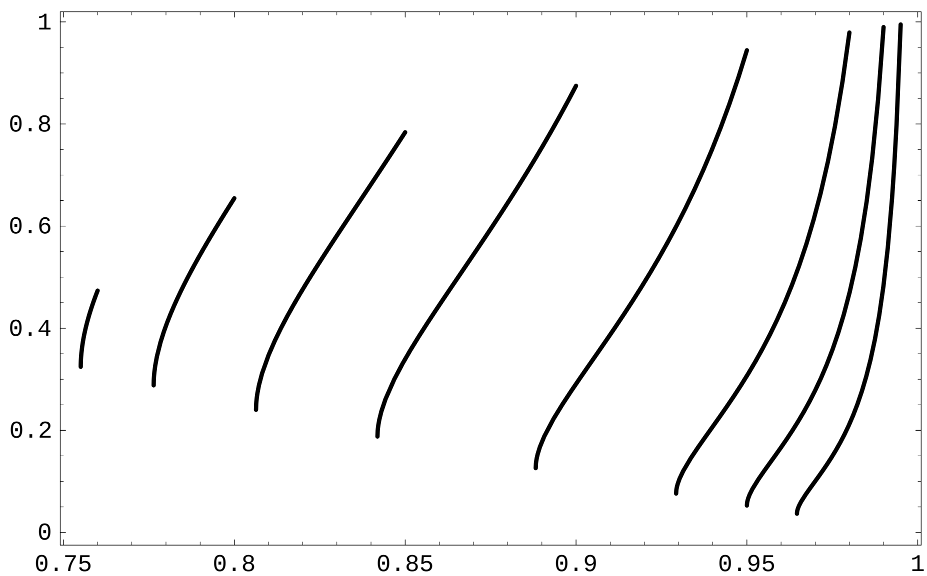


Bild 12.2. Die Graphen von $\pi(b,p)$ als Funktion von $p$ für die Werte $b =$ 0.24, 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005 (von links nach rechts)

Falls $b = p(1-p)$ und folglich $f(s) = \frac{1-p}{1-ps}$, liegt eine geometrische Verteilung mit Parameter $p$ und Mittelwert $\mu = \frac{p}{1-p}$ vor. In diesem Fall vereinfacht sich das Ergebnis (12.11) zu

$$\pi(p) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p < \frac{4}{5} \\ \frac{1}{2p}\left(3p-2+\left(p(5p-4)\right)^{1/2}\right), & \text{falls } p \geq \frac{4}{5} \end{cases} \tag{12.12}$$

bzw. bei Parametrisierung durch $\mu$ zu

$$\pi(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu < 4 \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{\mu}+\left(1-\frac{4}{\mu}\right)^{1/2}\right), & \text{falls } \mu \geq 4 \end{cases}. \tag{12.13}$$

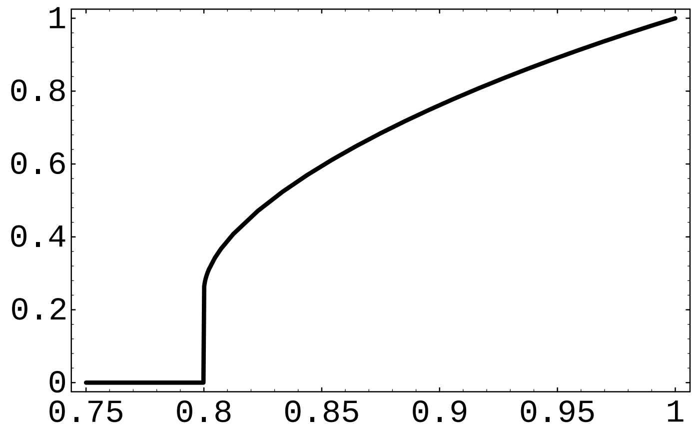


Bild 12.3. Die Wahrscheinlichkeit $\pi(p)$ im geometrischen Fall $b = p(1-p)$.

Die Beispiele zeigen, daß es kein einheitliches Kriterium für das Auftreten superbinären Wachstums gibt. Damit bleibt nur, jede gegebene parametrische Familie von Reproduktionsverteilungen hinsichtlich dieses Phänomens individuell zu untersuchen. Als Verallgemeinerung superbinären Wachstums kann man nun natürlich für $n \geq 3$ auch die Frage behandeln, mit welcher Wahrscheinlichkeit $\pi[n]$ der Stammbaum eines GWP's den homogenen Baum $\mathbb{V}_{n,\infty}$ mit derselben Wurzel enthält. Es zeigt sich, daß die Komplementärwahrscheinlichkeit $1-\pi[n]$ wiederum als kleinster Fixpunkt einer Funktion in $[0,1]$ gegeben ist (☞ [6] und Übung 12.2). Wir wollen darauf jedoch nicht weiter eingehen.

## Übungen zu Abschnitt 12

Im folgenden seien die Bezeichnungen aus Unterabschnitt 12.2 gegeben.

**Übung 12.1.** Gegeben die Situation von Satz 12.3, sei ferner $\pi^*$ die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein Individuum der von $(Z_n)_{n\geq 0}$ beschriebenen Population Wurzel eines homogenen binären Teilbaums bildet. Zeigen Sie:

(a) Es gilt die letzte Behauptung von Satz 12.3, d.h. $\pi = 1$ genau dann, wenn $p_0 + p_1 = 0$.

(b) Aus $p_0 + p_1 > 0$ und $p_n = 0$ für alle $n \geq 3$ folgt $\pi = 0$.

(c) $1 - \pi^*$ ist Fixpunkt von $f$ in $[0,1]$ ($\Rightarrow \pi^* \in \{0, 1-q\}$), und es gilt $\pi^* = 1 - q > 0$ genau dann, wenn $q < 1$ und $\pi > 0$.

**Übung 12.2.** Für $n \geq 1$ sei $\pi[n]$ wie am Ende des Abschnitts eingeführt. Zeigen Sie, daß $1 - \pi[n]$ der kleinste Fixpunkt der Funktion

$$h_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(s)}{k!}(1-s)^k$$

in $[0,1]$ ist. Für $n = 1$ gilt offenbar $h_1 = f$ und damit $1 - \pi[1] = q$. Erklären Sie, warum.

## Anhang: Erzeugende Funktionen

Wie in der Einführung bemerkt, setzen wir den Inhalt des Skriptums [1] über W-Theorie als Grundwissen voraus. Sowohl die *analytische Transformierte* eines endlichen Maßes $Q$ als auch die *Fourier-Transformierte (F.T.)* und die *Laplace-Transformierte (L.T.)* als Restriktionen dieser Funktion auf spezielle Teilmengen des Definitionsbereichs werden dort in den Abschnitten 40–42 eingehend behandelt. Die Definition der *erzeugenden Funktion (e.F.)* eines W-Maßes auf $\mathbb{N}_0$ sowie einige grundlegende Eigenschaften findet der Leser am Ende des Abschnitts 42. Aufgrund der großen Bedeutung e.F. in diesem Text haben wir uns jedoch entschieden, hier eine erweiterte Darstellung im Rahmen des vorliegenden Anhangs bereitzustellen.

Ist $Q$ eine Verteilung auf $\overline{\mathbb{N}}_0$, so bildet ihre L.T. $\varphi(t) = \int e^{-tx} Q(dx)$ offensichtlich eine Potenzreihe in $e^{-t}$ für $t > t_Q \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{s \leq 0 : \int e^{-sx}\, Q(dx) < \infty\}$. Dabei setzen wir natürlich $e^{-\infty} \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Der Leser beachte, daß aus $Q(\{\infty\}) > 0$ stets $t_Q = 0$ folgt.

**A.1. Definition.** Sei $Q = (p_j)_{j \geq 0}$ eine Verteilung auf $\overline{\mathbb{N}}_0$ mit L.T. $\varphi$. Dann heißt

$$f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} p_n s^n, \quad |s| \ < \ R_Q \ \stackrel{\text{def}}{=} \ e^{-t_Q}, \tag{A.1}$$

*erzeugende Funktion (e.F) von* $Q$, und es gilt

$$\varphi(t) \ = \ f(e^{-t}) \tag{A.2}$$

für alle $t > t_Q$. Ist $X$ eine Zufallsgröße mit Werten in $\overline{\mathbb{N}}_0$ und Verteilung $Q$, folgt $f(s) = Es^X$, und $f$ heißt auch *e.F. von* $X$.

Wir weisen darauf hin, daß $R_Q \geq 1$ gilt und der Definitionsbereich $\mathfrak{D}(f)$ von $f$ immer sowohl die offene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_Q\}$ als auch die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ enthält. Falls $R_Q > 1$, so ist $\mathfrak{D}(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R_Q\}$ genau dann, wenn $\int R_Q^x\, Q(dx) < \infty$.

Beziehung (A.2) zeigt, daß die e.F. lediglich eine variablensubstituierte L.T. bildet und daß daher manche Ergebnisse für L.T. durch geeignete Umformulierung leicht auf e.F. übertragen werden können. Dies gilt etwa für den Eindeutigkeitssatz (☞ 42.4 in [1]) sowie den Multiplikationssatz (☞ 40.7 in [1]). Der erste ergibt sich aber auch sofort aus dem Identitätssatz für Potenzreihen.

**A.2. Eindeutigkeitssatz.** *Zwei e.F. stimmen genau dann überein, wenn die zu ihnen gehörenden Verteilungen auf* $\overline{\mathbb{N}}_0$ *gleich sind.*

**A.3. Multiplikationssatz.** *Gegeben Verteilungen* $Q_1, Q_2$ *auf auf* $\overline{\mathbb{N}}_0$ *bzw. stochastisch unabhängige* $\overline{\mathbb{N}}_0$*-wertige Zufallsgrößen* $X, Y$ *mit e.F.* $f_1, f_2$*, besitzt* $Q_1 * Q_2$ *bzw.* $X+Y$ *die e.F.* $f_1 f_2$.

Die wichtigsten analytischen Eigenschaften faßt das nächste Lemma zusammen.

**A.4. Lemma.** *Sei* $X$ *eine Zufallsgröße mit Werten in* $\overline{\mathbb{N}}_0$*, Verteilung* $(p_j)_{j\ge 0}$ *und e.F.* $f(s) = \mathbb{E}(s^X)$*. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

*(a)* $f$ *ist auf jedem* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\} \subset \mathfrak{D}(f)$ *gleichmäßig stetig mit* $|f(z)| \le f(R)$.

*(b)* $f$ *ist auf jedem* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset \mathfrak{D}(f)$ *unendlich oft differenzierbar (also holomorph) mit* $n$*-ter Ableitung*

$$f^{(n)}(z) \;=\; n! \sum_{j \ge n} \binom{j}{n} p_j z^{j-n} \;=\; n!\, \mathbb{E}\left(\binom{X}{n} z^{X-n}\right),$$

*wobei* $z^\infty \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

*(c)* $f^{(n)}(1) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s\uparrow 1} f^{(n)}(s)$ *existiert für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *und ist durch*

$$f^{(n)}(1) \;=\; \mathbb{E}\Big(X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-n+1)\Big) \;=\; n!\, E\binom{X}{n}$$

*gegeben, wobei* $f^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} f$ *und* $\binom{j}{n} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ *für* $j < n$*. Insbesondere gelten* $\mathbb{E}X = f'(1)$, $\mathbb{E}X^2 = f''(1) + f'(1)$ *und* $VarX = f''(1) + f'(1)(1 - f'(1))$.

*(d) Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist* $f^{(n)}$ *monoton wachsend und konvex auf* $[0,1]$ *mit strenger Monotonie genau dann, wenn* $\mathbb{P}(X > n) > 0$*, und strikter Konvexität genau dann, wenn* $\mathbb{P}(X > n+1) > 0$.

Eine Umkehrformel für e.F. brauchen wir nicht anzugeben, bilden doch die Koeffizienten der Potenzreihe die Elementarwahrscheinlichkeiten der zugehörigen Verteilung auf $\overline{\mathbb{N}}_0$ und determinieren diese vollständig.

Schließlich wollen wir noch einen Stetigkeitssatz für e.F. angeben, der den Zusammenhang zwischen der vagen ($\stackrel{v}{\to}$) bzw. schwachen ($\stackrel{w}{\to}$) Konvergenz von W-Maßen auf $\mathbb{N}_0$ (☞ Abschnitt 43 in [1]) und der punktweisen Konvergenz ihrer e.F. herstellt. Unter Hinweis auf die nachfolgenden Bemerkungen sollte der Leser den Beweis mühelos selbst führen können. Wir bezeichnen nach Feller ein W-Maß $Q$ auf $\mathbb{N}_0$ als *defekt*, falls $Q(\mathbb{N}_0) < 1$, und nehmen in diesem Fall an, daß die fehlende Masse $1 - Q(\mathbb{N}_0)$ in $\infty$ konzentriert ist, identifizieren also $Q$ in kanonischer Weise mit einem W-Maß auf $\overline{\mathbb{N}}_0$.

**A.5. Stetigkeitssatz.** *$Q_0, Q_1, \ldots$ seien Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$ mit e.F. $f_1, f_2, \ldots$.*

*(a) Aus $Q_n \stackrel{v}{\to} Q$ für eine möglicherweise defekte Verteilung $Q$ auf $\mathbb{N}_0$ mit e.F. $f$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ für alle $s \in [0,1)$.*

*(b) Aus $Q_n \stackrel{w}{\to} Q$ für eine Verteilung $Q$ auf $\mathbb{N}_0$ mit e.F. $f$ folgt $\lim_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ für alle $s \in [0,1]$, und die Konvergenz ist gleichmäßig.*

*(c) Existiert umgekehrt $f(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und eine in 1 (linksseitig) stetige Funktion $f$, so ist $f$ e.F. einer Verteilung $Q$ auf $\mathbb{N}_0$, und es gilt $Q_n \stackrel{w}{\to} Q$.*

**A.6. Bemerkungen.** (a) Eine äquivalente Bedingung für die vage Konvergenz von Verteilungen $Q_n$ auf $\mathbb{N}_0$ gegen einen möglicherweise defekten Limes $Q$ bildet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 0} f(j) Q_n(\{j\}) \;=\; \sum_{j\geq 0} f(j)\; Q(\{j\})$$

für jede komplexwertige Nullfolge $(f(j))_{j\geq 0}$. Da $f(j) = z^j$ für jedes $z \in \{y \in \mathbb{C} : |y| < 1\}$ diese Eigenschaft besitzt, gilt in Teil (a) des obigen Satzes allgemeiner

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) \;=\; f(z)$$

für alle $z \in \{y \in \mathbb{C} : |y| < 1\}$.

(b) Ist der Limes $Q$ in Teil (a) des obigen Satzes defekt, so beachte, daß $f_n(1)$ als konstante Folge (mit Wert 1) zwar konvergiert, aber eben nicht gegen den Wert $f(1) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s\uparrow 1} f(t) = Q(\mathbb{N}_0)$.

Die untere Tafel zeigt für einige bekannte Verteilungen die F.T. $\phi$, die L.T. $\varphi$ oder die e.F. $f$. Dabei bezeichnet

— $B(n,p)$ die Binomial-Verteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

— $NB(n,p)$ die negative Binomial-Verteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$.

— $Poisson(\mu)$ die Poisson-Verteilung mit Mittelwert $\mu$.

— $Exp(\mu)$ die Exponential-Verteilung mit Parameter $\mu \in (0,\infty)$.

— $\Gamma(\lambda,\mu)$ die Gamma-Verteilung mit Parametern $\lambda, \mu \in (0,\infty)$ [$\Rightarrow Exp(\mu) = \Gamma(1,\mu)$].

— $N(\mu,\sigma^2)$ die Normal-Verteilung mit Mittelwert $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in (0,\infty)$.

| Verteilung | (Zähl-)dichte | Träger | F.T., L.T. oder e.F. |
|---|---|---|---|
| degeneriert | 1 | $\{a\}$ | $\phi(t) = e^{iat}$ |
| Laplace | $\frac{1}{n+1}$ | $\{0, ..., n\}$ | $f(s) = \frac{1-s^{n+1}}{(n+1)(1-s)}$ |
| $B(n, p)$ | $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ | $k \in \{0, ..., n\}$ | $f(s) = (ps + 1 - p)^n$ |
| $NB(n, p)$ | $\binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k$ | $k \in \mathbb{N}_0$ | $f(s) = \left(\frac{s}{1-(1-p)s}\right)^n$ |
| $Poi(\mu)$ | $e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$ | $k \in \mathbb{N}_0$ | $f(s) = e^{\mu(s-1)}$ |
| gebr.-rational | $p_0 = \frac{1-b-p}{1-p}$<br>$p_k = bp^{k-1}, \ k \geq 1$ | $\mathbb{N}_0$ | $f(s) = \frac{1-b-p}{1-p} + \frac{bs}{1-ps}$ |
| $Exp(\mu)$ | $\mu e^{-\mu x}$ | $x \in (0, \infty)$ | $\varphi(t) = \frac{\mu}{t+\mu}$ |
| $\Gamma(\lambda, \mu)$ | $\frac{\mu^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\mu x}$ | $x \in (0, \infty)$ | $\varphi(t) = \left(\frac{\mu}{t+\mu}\right)^\lambda$ |
| $N(\mu, \sigma^2)$ | $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} e^{(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ | $x \in \mathbb{R}$ | $\phi(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$ |

# Literatur


[1] ALSMEYER, G. *Wahrscheinlichkeitstheorie (5. Auflage).* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, Universität Münster (2007).

[2] ALSMEYER, G. *Stochastische Prozesse, Teil I (3. Auflage).* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 33, Universität Münster (2005).

[3] ASMUSSEN, S. und HERING, H. *Branching Processes.* Birkhäuser, Boston (1983).

ATHREYA, K.B. On the maximum sequence in a critical branching process. *Ann. Probab.* **16**, 502-507 (1988).

[4] ATHREYA, K.B. und NEY, P. *Branching Processes.* Springer, New York (1972).

[5] DEKKING, F.M. Branching processes that grow faster than binary splitting. *Amer. Math. Monthly* **98**, 728-731 (1991).

[6] DEKKING, F.M. und PAKES, A.G. On family trees and subtrees of simple branching processes. *J. Theoret. Probab.* **4**, 353-369 (1991).

DWASS, M. The total progeny in a branching process and a related random walk. *J. Appl. Probab.* **6**, 682-686 (1969).

[7] FELLER, W. *Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume II (2. Auflage).* Wiley, New York (1971).

[8] GREY, D.R. A new look at convergence of branching processes. *Ann. Probab.* **8**, 377-380 (1980).

[9] HARRIS, T.E. *The Theory of Branching Processes.* Springer, Heidelberg (1963).

HEATHCOTE, C.R., SENETA, E. und VERE-JONES, D. A refinement of two theorems in the theory of branching processes. *Theory Probab. Appl.* **12**, 297-301 (1967).

[10] HEWITT, E. und STROMBERG, K. *Real and Abstract Analysis.* Springer, New York (1965).

HEYDE, C.C. Extension of a result of Seneta for the supercritical Galton-Watson process. *Ann. Math. Stat.* **41**, 739-742 (1970).

JAGERS, P. *Branching Processes with Biological Applications.* Wiley, London (1975).

JOFFE, A. On the Galton-Watson branching processes with mean less than one. *Ann. Math. Statist.* **38**, 264-266 (1967).

KESTEN, H. und STIGUM, B. A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes. *Ann. Math. Stat.* **37**, 1211-1223 (1966).

KESTEN, H., NEY, P. und SPITZER, F. The Galton-Watson process with mean one and finite variance. *Theory Probab. Appl.* **11**, 513-540 (1966).

LAMPERTI, J. Limiting distributions for branching processes. *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab.*, 225-241, Univ. California Press (1967).

[11] LOTKA, A.J. The extinction of families—I. *J. Wash. Acad. Sci.* **21**, 377-380 (1931a).

[12] LOTKA, A.J. The extinction of families—II. *J. Wash. Acad. Sci.* **21**, 453-459 (1931b).

[13] LOTKA, A.J. Théorie analytique des associations biologiques, deuxieme partie. *Actualités Scientifiques et Industrielles* **780**. Hermann, Paris (1939).

[14] PAKES, A.G. Some limit theorems for the total progeny of a branching process. *Adv. Appl. Probab.* **3**, 176-192 (1971).

PAKES, A.G. Remarks on the maxima of a martingale sequence with application to the simple critical branching process. *J. Appl. Probab.* **24**, 768-772 (1987).

SENETA, E. On recent theorems concerning the supercritical Galton-Watson process. *Ann. Math. Stat.* **39**, 2098-2102 (1968).

YAGLOM, A.M. Certain limit theorems of the theory of branching processes. *Dokl. Acad. Nauk. SSSR* **56**, 795-798 (1947).