Dissertation

Matthias Meiners

27. Oktober 2008

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt ein allgemeines gewichtetes Verzweigungsmodell und einige seiner Anwendungen, wobei besonderes Gewicht auf der Analyse des pfadweisen asymptotischen Verhaltens gewisser stochastischer Prozesse, die sich als Funktionen von *Branching Random Walks (BRWs)* interpretieren lassen, und auf der Analyse einer stochastischen Fixpunktgleichung liegt.

Das allgemeine gewichtete Verzweigungsmodell wird zunächst ausgebreitet und es werden grundlegende Zusammenhänge zur Erneuerungstheorie aufgezeigt. Insbesondere wird ein Zusammenhang zwischen einer pfadweisen Gleichung für stochastische Prozesse, die mit PRE abgekürzt wird, und der klassischen Erneuerungsgleichung hergestellt. Die Lösungen der PRE werden unter geeigneten Integrabilitätsannahmen vollständig charakterisiert. Anschließend wird das asymptotische Verhalten dieser Lösungen sowohl in $\mathcal{L}^1$ als auch pfadweise diskutiert. Im letzteren Fall wird ein Konvergenzergebnis im Nerman'schen Stil erzielt.

Weiterhin wird die stochastische Fixpunktgleichung $X \sim \inf_{i\geq 1} X_i/T_i$ betrachtet, wobei $X, X_1, X_2, \ldots$ eine Folge u. i. v. nichtnegativer Zufallsgrößen und $(T_i)_{i\geq 1}$ eine davon unabhängige Folge nichtnegativer Zufallsgrößen ist. Die Analyse der Fixpunktgleichung hat zwei Ziele: einerseits die von Iksanov im Kontext der *Smoothing Transformation* aufgeworfene Frage nach einem äquivalenten Kriterium für die Existenz α-elementarer Lösungen dieser Gleichung zu beantworten und andererseits die Lösungsmenge der Gleichung unter möglichst allgemeinen Bedingungen zu bestimmen. Das erste Ziel wird durch die Angabe und den Beweis eines Kriteriums vollständig erreicht. Darüber hinaus wird die Menge der α-elementaren Lösungen vollständig bestimmt. Es wird gezeigt, dass die α-elementaren und die α-beschränkten Lösungen der Gleichung zusammenfallen, was die Vermutung nahelegt, dass es im Falle ihrer Existenz keine weiteren Lösungen der Gleichung gibt. Diese Vermutung wird unter einer Zusatzannahme an die zur Parametrisierung der Fixpunktgleichung verwendete Folge $(T_i)_{i\geq 1}$, nämlich der Endlichkeit der erwarteten Anzahl positiver Gewichte T_i, $i \geq 1$, bewiesen. Alle hier erzielten Ergebnisse lassen sich mühelos auf die Situation der Fixpunktgleichung der *Smoothing Transformation* übertragen.

Bei der Analyse der oben angebenen stochastischen Fixpunktgleichung ergibt sich die Frage, wann ein BRW transient ist. Hierzu ist ein hinreichendes Kriterium bereits bekannt. Konzentriert man sich auf BRWs mit u. i. v. Zuwächsen, die in dieser Arbeit *verzweigende Random-Walks* genannt werden, so lässt sich auf ein äquivalentes Kriterium zur Charakterisierung der Transienz hoffen. In der Tat wird wiederum unter Verwendung des allgemeinen gewichteten Verzweigungsmodells und unter einer Zusatzannahme (nämlich der Existenz des ersten Moments der Zuwachsverteilung) ein solches Kriterium angegeben und bewiesen.

Summary

The thesis at hand is concerned with the study of a general weighted branching model and several of its applications. Special emphasis is placed on the analysis of the pathwise asymptotic behaviour of certain stochastic processes which may be viewed as functions of branching random walks, and on the analysis of a stochastic fixed-point equation.

First, the general weighted branching model is explained and fundamental connections to renewal theory are established. In particular, the connection between a pathwise equation for stochastic processes, which is abbreviated to PRE, and the classical renewal equation is established. A full characterization of the set of solutions to the PRE under certain integrability conditions is presented. Moreover, the asymptotic behaviour of the solutions to this equation is discussed, where the discussion includes convergence in $\mathcal{L}^1$ as well as pathwise convergence. In the latter case a Nerman-type convergence result is shown.

The consideration of the stochastic fixed-point equation $X \sim \inf_{i\geq 1} X_i/T_i$ where $X, X_1, X_2, \ldots$ denotes a sequence of i.i.d. nonnegative random variables and $T = (T_i)_{i\geq 1}$ is a sequence of nonnegative random variables independent of $X, X_1, X_2, \ldots$ has two main goals. The first goal is to answer the question of when α-elementary solutions to the equation exist. This question was raised by Iksanov in the context of the smoothing transformation. The second goal ist to determine the set of solutions to the equation with the assumptions on T being as weak as possible. The first goal is achieved by the proof of a criterion which exactly characterizes the existence of α-elementary solutions. Furthermore, the set of α-elementary solutions is completely determined. Moreover, it is shown that the set of α-elementary solutions coincides with the set of α-bounded solutions to the equation. This suggests that any solution to the fixed-point equation is α-elementary. Indeed, this conjecture is proven in the case of finite expectation of the number of positive weights T_i, $i \geq 1$. All results concerning the fixed-point equation $X \sim \inf_{i\geq 1} X_i/T_i$ also apply to the fixed-point equation of the Smoothing Transformation.

In the analysis of the above-mentioned fixed-point equation the question of when a BRW is transient raises. A sufficient criterion is already well-known. By focussing on special BRWs, namely on BRWs with i.i.d. and integrable increments, an equivalent criterion for transience is proven.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In zahlreichen Arbeiten über allgemeine Verzweigungsprozesse, *Branching Random Walks (BRWs)* und die Fixpunktgleichung der *Smoothing Transformation* werden Zusammenhänge zwischen dem *BRW* (bzw. gewichteten Verzweigungsprozess) und einem sogenannten assoziierten Random-Walk aufgezeigt und bewiesen. Diese Zusammenhänge ermöglichen es, Ergebnisse aus der Erneuerungstheorie zur Analyse des BRWs (bzw. gewichteten Verzweigungsprozesses) zu verwenden; so lässt sich beispielsweise von der f. s. Endlichkeit von Leiterindizes für den assoziierten Random-Walk auf Eigenschaften von Leiterlinien des BRWs schließen. Kapitel 1 der vorliegenden Arbeit bietet nun einerseits eine Art Übersicht über die bekannten Zusammenhänge der oben beschriebenen Art. Dazu wird zunächst ein allgemeines gewichtetes Verzweigungsmodell angegeben, das zu allen drei oben genannten Prozesstypen (und weiteren) spezialisiert werden kann. In diesem Kontext werden die bekannten Ergebnisse zwischen dem Verzweigungsmodell und dem assoziierten Random-Walk formuliert und bewiesen. Andererseits werden weitere Zusammenhänge hergestellt und bewiesen, z. B. Zusammenhänge zu eingebetteten Random-Walks und zum Exzess des assoziierten Random-Walks. Kapitel 1 bildet die Basis für die weiterführenden Kapitel.

In Kapitel 2 wird eine pfadweise Gleichung für Prozesse, die sich als Funktionen des allgemeinen gewichteten Verzweigungsprozesses auffassen lassen, eingeführt. Diese Gleichung (im Folgenden mit PRE abgekürzt) korrespondiert auf dem Niveau des assoziierten Random-Walks zur klassischen Erneuerungsgleichung. Entsprechend dem Vorgehen in der klassischen Erneuerungstheorie wird die PRE in Kapitel 2 auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht, bevor danach das asymptotische Verhalten der Lösungen beleuchtet wird. Dabei liegt der Fokus zunächst auf $\mathcal{L}^1$-Konvergenz. Abschließend wird ein Satz zum pfadweisen asymptotischen Verhalten der Lösungen bewiesen. Dieser Satz kann als Erneuerungstheorem für Funktionen des gewichteten Verzweigungsprozesses (bzw. des BRWs) aufgefasst werden. In diesem Sinne steht der in dieser Arbeit bewiesene Satz zu einem Satz von Nerman über das asymptotische Verhalten superkritischer allgemeiner Verzweigungsprozesse wie das 2. Erneuerungstheorem für beliebige Random-Walks mit integrierbarer Zuwachsverteilung zum 2. Erneuerungstheorem für Erneuerungsprozesse (d. h. Random-Walks mit nichtnegativen Zuwächsen). Die Beweisführung greift einige Ideen aus Nermans Beweis auf und verwendet eine Art bedingtes starkes Gesetz der großen Zahlen.

Ein weites Feld für Anwendungen des allgemeinen gewichteten Verzweigungsmodells bieten stochastische Fixpunktgleichungen. Eine der am besten studierten stochastischen Fixpunktgleichungen stellt die Fixpunktgleichung der *Smoothing Transformation* dar:

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i \geq 1} T_i X_i,$$

wobei $X, X_1, X_2, \ldots$ eine Folge u. i. v. nichtnegativer Zufallsgrößen und $(T_i)_{i \geq 1}$ eine davon unabhängige Folge nichtnegativer Zufallsgrößen ist. Ein Durchbruch bei der Lösung dieser Gleichung gelang Durrett und Liggett, die zeigten (ohne es explizit so zu bezeichnen), dass die Lösungen der Fixpunktgleichung (unter geeigneten Annahmen an die T_i) Mischungen von stabilen Verteilungen sind. Die von Durrett und Liggett verwendete Beweismethode basiert auf einer Analyse der zugehörigen Funktionalgleichung der Laplacetransformierten der Lösungen und verwendet im entscheidenden Schritt den Satz von Krein-Milman. Die Methode ist stark an die Analyse von Laplacetransformierten angepasst und wurde von Liu ausgereizt; daher besteht kaum Hoffnung, mit dem Beweisansatz von Durrett und Liggett eine Ausdehnung der Ergebnisse auf die verwandte Fixpunktgleichung für Infima, $X \sim \inf_{i \geq 1} X_i / T_i$, oder eine über die von Liu erzielten Verbesserungen hinausgehende Abschwächung der Annahmen an die T_i, $i \geq 1$, zu erreichen. In Kapitel 3 der vorliegenden Arbeit, das sich mit der Analyse der beiden erwähnten stochastischen Fixpunktgleichungen befasst, wird daher ein anderer Weg beschritten. Die Fixpunktgleichungen, die auf dieselbe Funktionalgleichung für unterschiedliche Funktionenklassen – nämlich Laplacetransformierte bzw. Überlebensfunktionen – führen, werden anhand einer Disintegrationsmethode untersucht. Diese Methode, deren Grundlagen und erste Anwendungen auf Biggins und Kyprianou zurückgehen, basiert auf einer Transformation, die aus den Laplacetransformierten bzw. Überlebsfunktionen von Lösungen stochastische Prozesse konstruiert, die einerseits Funktionen des zugrunde liegenden gewichteten Verzweigungsprozesses sind und andererseits pfadweise einer Funktionalgleichung genügen. So lassen sich beide Fixpunktprobleme im Falle der Existenz sogenannter α-elementarer Fixpunkte auf die in Kapitel 2 behandelte PRE zurückführen. Dies ermöglicht in beiden Situationen den Beweis zweier Sätze, die jeweils einerseits genau klären, in welchen Situationen α-elementare Fixpunkte existieren, und andererseits zeigen, dass die α-elementaren Fixpunkte in der Klasse der α-beschränkten Fixpunkte die einzigen sind. Im letzten Teil des dritten Kapitels wird schließlich gezeigt, dass Lösungen der Fixpunktgleichungen, deren Laplacetransformierte bzw. Überlebensfunktionen f so beschaffen sind, dass $1 - f$ in 0 regulär variiert, stets Mischungen von stabilen bzw. Weibullverteilungen sind. Die Mischungsverteilung ist dabei die (bis auf Skalierung) eindeutige Verteilung des sogenannten endogenen Fixpunkts einer verwandten Fixpunktgleichung. Ferner wird gezeigt, dass unter der Bedingung, dass die erwartete Anzahl positiver

Gewichte T_i endlich ist, alle Lösungen regulär variierend sind, was also in der beschriebenen Situation eine vollständige Beschreibung der Lösungsmenge der Fixpunktgleichungen darstellt. Dies ist (nach meinem besten Wissen) für beide Fixpunktgleichungen eine Verbesserung der bisher bekannten (und veröffentlichten) Ergebnisse.

In Kapitel 4 wird schließlich ein spezieller BRW, der u. i. v. Zuwächse besitzt sind und der als verzweigender Random-Walk bezeichnet wird, auf Rekurrenz und Transienz untersucht. Die Hauptergebnisse sind hier eine Rekurrenz-Transienz-Dichotomie für verzweigende Random-Walks mit echt zweiseitigen Zuwächsen und ein äquivalentes Kriterium für die Transienz eines verzweigenden Random-Walks mit echt zweiseitiger, integrierbarer Zuwachsverteilung.

Für eine gute Zusammenarbeit und zahlreiche Anregungen und Diskussionen während der Entstehungsphase dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. Gerold Alsmeyer. Weiterhin gebührt mein Dank Dr. Wolfgang Thomsen, der mir mit zahlreichen Literaturhinweisen behilflich war, und Herrn Prof. Dr. Matthias Löwe, aus dessen Mitteln meine Stelle während der letzten zwei Jahre bezahlt wurde. Ferner danke ich Jens Ameskamp, der sich knapp drei Jahre lang ein Büro mit mir teilte und der mir des Öfteren mit hilfreichem Rat sowohl in mathematischen Dingen als auch am Rechner zur Seite stand. Schließlich danke ich Tobias Sechelmann, Silke Ahlers, Jasmin Grages und wieder Jens Ameskamp, die Teile der Arbeit korrekturlasen.

Notation und Schreibweise von Eigennamen

In diesem Abschnitt wird die Notation eingeführt, die in der vorliegenden Arbeit durchgehend Verwendung findet.

Mit $\mathbb{N}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet. Für $\mathbb{N} \cup \{0\}$ wird $\mathbb{N}_0$ geschrieben. Die Mengen der ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen werden mit $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ notiert. Sind $X \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ und $c \in \mathbb{R}$, so wird $X_{>c}$ für die Menge $\{x \in X : x > c\}$ geschrieben, z. B. also $\mathbb{R}_{>0}$ für $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Ferner sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

In allen Kapiteln dieser Arbeit liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ zugrunde. In Kapitel 1 wird er explizit erwähnt, in anderen Kapiteln nicht mehr. Es wird stets davon ausgegangen, dass der Raum so groß ist, dass alle vorkommenden Zufallsgrößen auf ihm definiert sind. Wird ferner ein Ereignis oder eine Funktion als messbar bezeichnet, ohne dass ein Bezug zu einer σ-Algebra hergestellt wird, so bezieht sich die Messbarkeit stets auf $\mathfrak{A}$. Hat die Zufallsgröße Werte in $\overline{\mathbb{R}}$, so wird $\overline{\mathbb{R}}$ implizit die σ-Algebra $\overline{\mathfrak{B}}$ der Borelschen Mengen auf $\overline{\mathbb{R}}$ zugrunde gelegt. Der Topologiebegriff auf $\overline{\mathbb{R}}$ wird dabei wie allgemein üblich verwendet (siehe z. B. Elstrodt [28, 2002, S. 104f.]). Für Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder Funktionen auf $\mathbb{R}$ wird der Messbarkeitsbegriff immer im Sinne der Borel-Messbarkeit verwendet. Der Raum der reellwertigen, integrierbaren Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ wird mit $\mathcal{L}^1$ bezeichnet. Mit u. i. v. wird „unabhängig, identisch verteilt" abgekürzt. Die Abkürzungen f. s. und $\mathbb{P}$-f. s. werden synonym verwendet und stehen für „fast sicher" bzw. „$\mathbb{P}$-fast sicher". Für das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ wird $\lambda\!\!\lambda$ geschrieben. Die Abkürzung $\lambda\!\!\lambda$-f. ü. steht für „Lebesgue-fast überall". Für eine Zufallsgröße X werden das essentielle Infimum und das essentielle Supremum von X mit $\operatorname{ess\,inf} X$ bzw. $\operatorname{ess\,sup} X$ bezeichnet, d. h., $\operatorname{ess\,inf} X = \sup\{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \geq c) = 1\}$ und $\operatorname{ess\,inf} X = \inf\{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq c) = 1\}$. Dabei wird wie üblich $\inf \emptyset = \infty$ und $\sup \emptyset = -\infty$ gesetzt. Die Symbole $\overset{d}{=}$ und $\sim$ werden synonym für Gleichheit der induzierten Verteilungen benutzt, d. h., für Zufallsgrößen X und Y bedeuten $X \overset{d}{=} Y$ und $X \sim Y$ jeweils $\mathbb{P}(X \in \cdot) = \mathbb{P}(Y \in \cdot)$.

Manchmal treten in dieser Arbeit unhandliche Terme auf (insbesondere im Zusammenhang mit bedingten Erwartungswerten). Um dabei eine möglichst gute Lesbarkeit zu erreichen, habe ich mich entschieden, die folgende Schreibweise zu verwenden. Ist $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, so wird die Verkettung $f \circ X$ für eine Zufallsgröße X auch mit $f(\cdot) \circ X$ bezeichnet. Beispielsweise schreibe ich für Zufallsgrößen X, Y und eine messbare Menge A $\mathbb{P}(\,\cdot + Y \in A) \circ X$ für die Zufallsgröße, die jedem $\omega \in \Omega$ mit $X(\omega) = x$ den Wert $\mathbb{P}(x + Y \in A)$ zuordnet. Diese Schreibweise wird auch auf Funktionen mit anderen Definitions- und Bildbereichen ausgedehnt.

Abschließend möchte ich erwähnen, dass ich mich der Bequemlichkeit halber bei der Schreibweise von Eigennamen aus Sprachen, die ein kyrillisches Alphabet verwenden, der von der *American Mathematical Society* benutzten bedient habe.

Kapitel 1

Gewichtete Verzweigung und Erneuerung

Dieses einleitende Kapitel stellt die Grundlagen und Hilfsmittel bereit, die nötig sind, um die pfadweise Erneuerungsgleichung in Kapitel 2, stochastische Fixpunktgleichungen in Kapitel 3 und die Rekurrenz und Transienz des verzweigenden Random-Walks in Kapitel 4 zu studieren.

1.1 Grundlagen

1.1.1 Der Ulam-Harris-Baum

Sei $\mathbb{V} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{N}^n$ der *unendliche Ulam-Harris-Baum*, wobei $\mathbb{N}^0$ die Menge sei, die nur das leere Tupel $\varnothing$ enthält, d. h., $\mathbb{N}^0 = \{\varnothing\}$.

Im Folgenden wird für einen Vektor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ die Kurzschreibweise $v_1 \ldots v_n$ verwendet. n heißt dabei die Länge von v, was wiederum mit $|v| = n$ abgekürzt wird. Ist $w = w_1 \ldots w_m \in \mathbb{V}$ ein weiterer Vektor, so sei vw der Vektor $v_1 \ldots v_n w_1 \ldots w_m$. Die Elemente von $\mathbb{V}$ werden nicht nur – wie bereits geschehen – als *Vektoren*, sondern auch als *Knoten* oder *Individuen* bezeichnet. Die Bezeichnung *Knoten* findet ihre Motivation darin, dass $\mathbb{V}$ in kanonischer Weise als Graph aufgefasst werden kann, wobei die Kantenmenge dann genau aus den Tupeln der Gestalt (v, vi) ($v \in \mathbb{V}$, $i \in \mathbb{N}$) besteht. Die Bezeichnung *Individuum* für ein $v \in \mathbb{V}$ findet ihren Ursprung darin, dass $\mathbb{V}$ als Menge (potentieller) Individuen einer Population aufgefasst werden kann. Jedes $v = v_1 \ldots v_n \in \mathbb{V}$ wird dabei als Kodierung seiner eigenen Ahnenlinie ($\varnothing \to v_1 \to v_1v_2 \to \ldots \to v_1 \ldots v_n = v$) bis zurück zum *Urahn* $\varnothing$ interpretiert. Daher wird für ein $v \in \mathbb{V}$ und ein $i \in \mathbb{N}$ das Individuum vi als *Kind von* v bezeichnet, während v umgekehrt *Mutter von* vi genannt wird. Allgemeiner heißt w Nachkomme/Nachfahre von u (in Zeichen: $u \preceq w$), falls ein $v \in \mathbb{V}$ mit $uv = w$ existiert; umgekehrt heißt u in dieser Situation Vorfahre von w. Weiter wird $u \prec w$ geschrieben, falls $u \preceq w$ und $u \neq w$ gilt. $\preceq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathbb{V}$. Im Zusammenhang mit der Interpretation von $\mathbb{V}$ als Population wird $\mathbb{N}^n$ auch als n-te Generation bezeichnet ($n \in \mathbb{N}$). Insgesamt gilt mit diesen Definitionen die folgende Äquivalenzkette:

$$|v| = n \Longleftrightarrow v \in \mathbb{N}^n \Longleftrightarrow v \text{ ist in der } n\text{-ten Generation.}$$

Für $v = v_1 \dots v_n \in \mathbb{N}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $v|k$ den Vorfahren von v in der k-ten Generation, das bedeutet formal die Einschränkung von v auf die ersten k Komponenten:

$$v|k = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } k = 0, \\ v_1 \dots v_k, & \text{falls } 1 \leq k \leq |v|, \\ v, & \text{falls } k > |v|. \end{cases} \tag{1.1}$$

Alternativ wird für $v|k$ auch die Schreibweise $v|_k$ verwendet, falls es der Lesbarkeit dient. Für $v \in \mathbb{V}$ sei $v\,\mathbb{V}$ der in v verwurzelte Teilbaum von $\mathbb{V}$, d. h., $v\,\mathbb{V} := \{vw : w \in \mathbb{V}\} = \{w \in \mathbb{V} : w|_{|v|} = v\}$.

$(\mathbb{V}, \circ)$ bildet eine nichtkommutative Halbgruppe mit neutralem Element $\varnothing$, wobei $v \circ w := vw$ sei ($v, w \in \mathbb{V}$). Die so definierte Halbgruppe $(\mathbb{V}, \circ)$ wird auch *freie Halbgruppe über* $\mathbb{N}$ genannt. Versehen mit der diskreten Topologie auf $\mathbb{V}$ bildet sie eine separierte topologische Halbgruppe

Den so genannten *Rand von* $\mathbb{V}$ bildet $\partial\mathbb{V} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. In Analogie zu den obigen Definitionen für Vektoren aus $\mathbb{V}$ seien nun für $x \in \partial\mathbb{V}$ der Betrag von x durch $|x| := \infty$ definiert sowie der Vorfahre von x in der k-ten Generation, $x|k$, durch $x_1 \dots x_k$, falls x die Darstellung $x = (x_i)_{i\geq 1}$ besitzt.

1.1.2 Modellierung

In diesem Abschnitt wir ein allgemeines *gewichtetes Verzweigungsmodell* vorgestellt. Für den Rest dieses Abschnitts bezeichne $(\mathbb{G}, +)$ eine separierte topologische Halbgruppe mit neutralem Element 0. Auch wenn $\mathbb{G}$ additiv notiert wird, wird die Kommutativität von $\mathbb{G}$ nicht vorausgesetzt. Die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{G}$ wird mit $\mathfrak{B}(\mathbb{G})$ notiert.

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine Familie $(T(v) \otimes X(v))_{v\in\mathbb{V}}$ von u. i. v. Zufallsvariablen

$$T(v) \otimes X(v) = ((T_i(v), X_i(v)))_{i\geq 1} : \Omega \longrightarrow ([0, \infty) \times \mathbb{G})^{\mathbb{N}}$$

definiert ist. $T \otimes X := ((T_i, X_i))_{i\geq 1}$ dient für den Rest dieses Kapitels als Kurzschreibweise für $(T(\varnothing) \otimes X(\varnothing))$. Fürderhin seien für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{A}_n := \sigma\left(T(v) \otimes X(v) : |v| < n\right) \tag{1.2}$$

die von allen $(T(v) \otimes X(v))$ mit $|v| < n$ erzeugte σ-Algebra und

$$\mathcal{A}_\infty := \sigma(\mathcal{A}_n : n \geq 0) = \sigma\left(T(v) \otimes X(v) : v \in \mathbb{V}\right) \tag{1.3}$$

die von den $\mathcal{A}_n$, $n \geq 0$, erzeugte σ-Algebra. Jedem Knoten $v \in \mathbb{V}$ wird ein zufälliges Gewicht $L(v)$ und eine zufällige Position $S(v) \in \mathbb{G}$ zugeordnet. Die Zuordnung erfolgt rekursiv:

$$L(\varnothing) := 1 \text{ und } L(vi) := L(v)\, T_i(v) \tag{1.4}$$
$$S(\varnothing) := 0 \text{ und } S(vi) := S(v) + X_i(v) \tag{1.5}$$

für $v \in \mathbb{V}$ und $i \in \mathbb{N}$. Mit diesen Gewichten wird der so genannte *gewichtete Verzweigungsprozess* $(W_n)_{n\geq 0}$ *basierend auf* $\mathbf{T} := (T(v))_{v\in\mathbb{V}}$ definiert:

$$W_n := \sum_{|v|=n} L(v). \tag{1.6}$$

In weiten Teilen dieser Arbeit wird die folgende Bedingung an $(W_n)_{n\geq 0}$ vorausgesetzt oder aber eine wichtige Rolle spielen:

$$\mathbb{E}\, W_1 = \mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i = \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\, T_i = 1. \tag{B1}$$

Unter dieser Bedingung bildet $(W_n)_{n\geq 0}$ ein nichtnegatives Martingal bezüglich $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ und konvergiert daher f. s. gegen eine f. s. endliche Zufallsgröße W. Um W auf ganz Ω zu definieren, sei

$$W := \liminf_{n\to\infty} W_n \tag{1.7}$$

gesetzt. Nach dem Lemma von Fatou gilt $\mathbb{E}\, W \leq 1$. In der Tat gilt sogar $\mathbb{E}\, W \in \{0, 1\}$. Im Falle $\mathbb{E}\, W = 0$ wird W als *degeneriert* und im Falle $\mathbb{E}\, W = 1$ als *nichtdegeneriert* bezeichnet. Weiter unten in diesem Abschnitt wird (unter Nebenbedingungen) eine hinreichende Bedingung für die Nichtdegeneriertheit von W angegeben. Angelehnt an die Interpretation von $\mathbb{V}$ als Menge potentieller Individuen einer Population wird ein $v \in \mathbb{V}$ *lebendig* oder *realisiert* genannt, falls $L(v) > 0$ ist.

$$N_n := \sum_{|v|=n} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}} \tag{1.8}$$

gibt dann für $n \geq 0$ die Anzahl der realisierten Individuen der n-ten Generation an. In dieser Situation heißt der Prozess $(N_n)_{n\geq 0}$ *zugrunde liegender Galton-Watson-Prozess*. Dabei ist zu beachten, dass der Fall $\mathbb{P}(N_1 = \infty) = \mathbb{P}(T_i > 0 \text{ für unendlich viele } i) > 0$ nicht ausgeschlossen ist und $(N_n)_{n\geq 0}$ damit nur einen Galton-Watson-Prozess in verallgemeinertem Sinne darstellt. Mit $N(v) := \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i(v)>0\}}$ $(v \in \mathbb{V})$ sei die Anzahl der positiven Gewichte $T_i(v)$ bezeichnet; anders formuliert gibt $N(v)$ die Anzahl der realisierten Kinder des Individuums v an, vorausgesetzt dass v selbst realisiert wird. Schließlich sei $N := N(\varnothing) = N_1$. Dann hat der Galton-Watson-Prozess $(N_n)_{n\geq 0}$ die Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(N \in \cdot)$. Eine Bedingung, die an einigen Stellen ins Spiel kommt, ist, dass die Basisfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ einen superkritischen zugrunde liegenden Galton-Watson-Prozess induziert:

$$\mathbb{E}\, N > 1. \tag{B2}$$

Der betrachtete gewichtete Verzweigungsprozess stimmt sogar mit seinem zugrunde liegenden Galton-Watson-Prozess überein, wenn die folgende Bedingung verletzt ist:

$$\mathbb{P}(T_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \geq 1) < 1. \tag{B3}$$

Nach der Formulierung der Eigenschaften (B2) und (B3) lässt sich nun wie angekündigt eine hinreichende Bedingung für die Nichtdegeneriertheit des Martingallimes W angeben. Unter den Bedingungen (B1)-(B3) gilt nämlich $\mathbb{E}\, W = 1$, wenn die folgende Bedingung (B4+) erfüllt ist:

$$\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i \log T_i \in (-\infty, 0) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\, W_1 \log^+ W_1 < \infty. \tag{B4+}$$

Tatsächlich ist es sogar möglich, die Eigenschaft $\mathbb{E}\, W = 1$ mit einer technischen Bedingung scharf zu charakterisieren. Dazu wird aber noch zusätzliche Terminologie benötigt. Aus diesem Grund wird die Formulierung der zu $\mathbb{E}\, W = 1$ (unter (B1)-(B3)) äquivalenten Bedingung (B4) zurückgestellt. Eine ausführliche Diskussion, wann $\mathbb{E}\, W = 1$ gilt, findet sich im Anhang A.1.

Mit $\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}$ sei die Familie $((L(v), S(v)))_{v\in\mathbb{V}}$ bezeichnet. In Analogie dazu seien $\mathbf{L} := (L(v))_{v\in\mathbb{V}}$, $\mathbf{S} := (S(v))_{v\in\mathbb{V}}$, $\mathbf{T} \otimes \mathbf{X} := (T(v) \otimes X(v))_{v\in\mathbb{V}}$, $\mathbf{T} := (T(v))_{v\in\mathbb{V}}$ und $\mathbf{X} := (X(v))_{v\in\mathbb{V}}$. Ist $v \in \mathbb{V}$, so seien

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}(v) := ((L(v|k), S(v|k)))_{0\leq k\leq |v|}$$

und entsprechend $\mathbf{L}(v) = (L(v|k))_{0\leq k\leq |v|}$ und $\mathbf{S}(v) = (S(v|k))_{0\leq k\leq |v|}$ die Projektionen auf die Gewichts- bzw. Positionskomponenten. Für $x \in \partial\,\mathbb{V}$ sei entsprechend

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}(x) := ((L(x|k), S(x|k)))_{k\geq 0};$$

$\mathbf{L}(x)$ und $\mathbf{S}(x)$ bezeichnen wiederum die Projektionen auf die Gewichts- bzw. Positionskomponenten.

Für $v, w \in \mathbb{V}$, $w = w_1 \dots w_k$ seien

$$L_v(w) := \prod_{j=1}^{k} T_{w_j}(vw_1 \dots w_{j-1}) \text{ und } S_v(w) := \sum_{j=1}^{k} S_{w_j}(vw_1 \dots w_{j-1}),$$

d. h., $L_v(w) = L(vw)/L(v)$ und $S_v(w) = -S(v) + S(vw)$, falls $L(v) > 0$ ist bzw. falls $S(v)$ ein Linksinverses in $\mathbb{G}$ besitzt. Ist nun ψ eine Funktion von $\big(([0,\infty) \times \mathbb{G})^{\mathbb{N}}\big)^{\mathbb{V}}$ in einen beliebigen messbaren Raum und $\Psi := \psi(\mathbf{T} \otimes \mathbf{X})$, so bezeichne $[\Psi]_v$ die Funktion $\psi((T(w) \otimes X(w))_{w\in v\,\mathbb{V}}) = \psi((T(vw) \otimes X(vw))_{w\in\mathbb{V}})$. Insbesondere gilt dann (mit $\psi = \mathrm{id}$) $[\mathbf{T} \otimes \mathbf{X}]_v = (T(vw) \otimes X(vw))_{w\in\mathbb{V}}$. Weiterhin gilt $[\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_v = (L_v(w) \otimes S_v(w))_{w\in\mathbb{V}}$, was wiederum nach Projektion auf die einzelnen Koordinaten $[T_i(w)]_v = T_i(vw)$, $[L(w)]_v = L_v(w)$, $[X_i(w)]_v = X_i(vw)$ und $[S(w)]_v = S_v(w)$ ergibt.

Mit dem so definierten Shiftoperator $[\cdot]_v$ lässt sich eine wichtige Eigenschaft des Martingallimes W formulieren. W erfüllt nämlich (siehe z. B. Biggins [13, 1977, S. 26] die folgende rekursive Gleichung.

$$W = \sum_{i\geq 1} T_i\,[W]_i \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{1.9}$$

In der Tat spielt der Martingallimes W für die Analyse stochastischer Fixpunktgleichungen in Kapitel 3 eine wichtige Rolle.

1.1.3 Beispiele

1.1.1 Beispiel (Crump-Mode-Jagers-Verzweigungsprozesse). Das folgende Beispiel ist an die Einführung allgemeiner Verzweigungsprozesse (engl. *general branching processes*) von Jagers [37, 1975] angelehnt.

Die Menge $\mathbb{V}$ wird als Menge (potentieller) Individuen einer Population betrachtet, wobei jedes $v \in \mathbb{V}$ wiederum als Kodierung seiner eigenen Ahnenlinie aufgefasst werden kann. $\varnothing$ ist dann der Urahn der Population. Für jedes $v \in \mathbb{V}$ sei $\lambda(v)$ eine $[0,\infty]$-wertige Zufallsvariable, nämlich die Lebensdauer von v. Ferner sei $\mathcal{Z}(v)$ ein Punktprozess auf $[0,\infty)$ (d. h. ein zufälliges lokal endliches Zählmaß auf $[0,\infty)$). Die von $\mathcal{Z}(v)$ generierten Punkte bestimmen den zeitlichen Abstand zwischen der Geburt von v und den Geburten der Kinder von v, d. h., wenn mit $0 \leq X_1(v) \leq X_2(v) \leq \ldots$ eine Abzählung der von $\mathcal{Z}(v)$ generierten Punkte bezeichnet wird, wobei $X_i(v) := \infty$ auf $\{\mathcal{Z}(v)([0,\infty)) < i\}$ sei ($i \geq 1$), so ist $X_i(v)$ der Abstand zwischen der Geburt von v und der Geburt von vi (dem $i$ten Kind von v). Es sei angemerkt, dass zunächst keine weitere Annahme hinsichtlich der gemeinsamen Verteilung von $(\lambda(v), \mathcal{Z}(v))$ gemacht wird außer der, dass ein Individuum nach seinem Tod keine Nachkommen mehr produzieren kann (d. h., $X_i(v) \leq \lambda(v)$ f. s. auf $\{X_i(v) < \infty\}$ ($i \geq 1$)). Die letzte Modellannahme ist schließlich, dass alle Individuen der Population unabhängig voneinander leben und Nachkommen generieren gemäß der Verteilung von $(\lambda, \mathcal{Z}) := (\lambda(\varnothing), \mathcal{Z}(\varnothing))$. Formal bedeutet dies, dass die Familie $((\lambda(v), \mathcal{Z}(v)))_{v\in\mathbb{V}}$ als Familie u. i. v. Zufallsvariablen angenommen wird.

Für jedes $v = v_1 \ldots v_n \in \mathbb{V}$ ist der Geburtszeitpunkt von v durch $S(v) := \sum_{i=1}^n X_{v_i}(v_1 \ldots v_{i-1})$ gegeben, wobei $S(v) = \infty$ bedeutet, dass das Individuum v niemals geboren wurde. Ein Individuum v wird also genau dann realisiert, wenn $S(v) < \infty$ ist. v lebt genau im Zeitintervall $[S(v), S(v)+\lambda(v))$. Ist $t \in [S(v), S(v)+\lambda(v))$, so hat das Individuum v zum Zeitpunkt t das Alter $t - S(v)$. Sind nun $t, a \geq 0$, so sei $\tilde{\phi}_a(t) := \mathbb{1}_{[0,\lambda\wedge a)}(t)$. Wird dann der oben eingeführte Shiftoperator

$[\cdot]_v$ in kanonischer Weise auf die Lebensdauern $(\lambda(v))_{v\in\mathbb{V}}$ ausgedehnt, so ist

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_a(t) &:= \sum_{v\in\mathbb{V}} [\tilde{\phi}_a]_v(t - S(v)) \\ &= \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{[0,[\lambda]_v\wedge a)}(t - S(v)) \\ &= \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{S(v)\le t< S(v)+(\lambda(v)\wedge a)\}}\end{aligned}$$

die Anzahl der zum Zeitpunkt t lebenden Individuen, die jünger als a sind. Der stochastische Prozess $(\widetilde{\Phi}_a(t))_{t,a\geq 0}$ heißt *allgemeiner Verzweigungsprozess* oder *Crump-Mode-Jagers-Verzweigungsprozess (C-M-J-Verzweigungsprozess)*.

Das hier beschriebene Verzweigungsmodell lässt sich (abgesehen von den Lebensdauern) bequem in das allgemeine gewichtete Verzweigungsmodell einbetten. Die Notation ist hier bereits so gewählt, dass sowohl die $X_i(v)$ als auch die $S(v)$ $(v \in \mathbb{V}, i \geq 1)$ bereits definiert sind. Der Zustandsraum für die Positionen ist dann offenbar $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, das in offensichtlicher Weise als Halbgruppe aufgefasst werden kann. Für festes $\alpha > 0$ können die Gewichte $T_i(v)$ durch $T_i(v) = \exp(-\alpha X_i(v))$ $(v \in \mathbb{V},\ i \geq 1)$ definiert werden, wobei $\exp(-\infty)$ als 0 definiert sei. Ist α dabei ein *Malthusischer Parameter*, d. h., gilt

$$\mathbb{E}\int e^{-\alpha t}\mathcal{Z}(dt) = \sum_{i\geq 1}\mathbb{E}\, e^{-\alpha X_i} = 1, \tag{1.10}$$

so erfüllt der gewichtete Verzweigungsprozess basierend auf $\mathbf{T}$ die Bedingung (B1).

1.1.2 Beispiel (Der Branching Random Walk). Das folgende Beispiel orientiert sich an der Einleitung in Biggins [13, 1977].

Ein *Branching Random Walk (BRW)* auf $\mathbb{R}$ kann wie folgt beschrieben werden: Ein Urahn, der im Folgenden mit $\varnothing$ bezeichnet wird, generiert Nachkommen, deren Positionen auf $\mathbb{R}$ gemäß eines Punktprozesses $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\varnothing)$ verteilt sind. Ein Individuum v der n-ten Generation erzeugt wiederum Nachkommen. Die Verschiebungen der Positionen der Nachkommen von v gegenüber der Position von v seien wiederum gemäß eines Punktprozesses $\mathcal{Z}(v)$ modelliert, wobei die $\mathcal{Z}(v)$, $|v| = n$, untereinander unabhängig und unabhängig von allen Punktprozessen der Generationen $0, \ldots, n-1$ seien. Weiterhin wird angenommen, dass alle $\mathcal{Z}(v)$, $v \in \mathbb{V}$, identisch verteilt sind.

Der so definierte BRW stellt einerseits eine Verallgemeinerung des in Beispiel 1.1.1 eingeführten Verzweigungsmodells dar, weil die betrachteten Punktprozesse nun auch Punkte auf der negativen Halbachse erzeugen dürfen, und ist andererseits weniger allgemein, denn im BRW-Modell gibt es keine Lebensdauern, d. h., es gilt $\lambda(v) := \infty$ für alle $v \in \mathbb{V}$. Die ursprüngliche Motivation für die Betrachtung des BRW ist seine Interpretation als Modell für eine Populationsentwicklung in stetiger Zeit. Ist der Punktprozess $\mathcal{Z}$ nämlich auf $[0,\infty)$ konzentriert, so sind alle Positionen von Individuen nichtnegativ und können wieder wie im Falle des allgemeinen Verzweigungsprozesses als Geburtszeitpunkte interpretiert werden (siehe z. B. Kingman [41, 1975]).

Das hier definierte BRW-Modell lässt sich analog zum Crump-Mode-Jagers-Verzweigungsmodell in das gewichtete Verzweigungsmodell einbetten, indem zunächst für $v \in \mathbb{V}$ die vom Prozess $\mathcal{Z}(v)$ generierten Punkte durch $(X_i(v))_{i\geq 1}$ abgezählt werden, wobei $X_i(v)$ auf $\{\mathcal{Z}(\mathbb{R}) < i\}$ als ∞ definiert wird. Wie zuvor sei $S(v)$ dann gemäß (1.5) gegeben. Schließlich seien $T_i(v) := \exp(-\alpha X_i(v))$ für ein festes $\alpha > 0$ $(i \geq 1)$ und $L(v)$ dann gemäß (1.4) definiert. Der durch (1.8) definierte zugrunde liegende Galton-Watson-Prozess $(N_n)_{n\geq 0}$ hat dann die Zuwachsverteilung $\mathbb{P}(N_1 \in \cdot) = \mathbb{P}(\mathcal{Z}(\mathbb{R}) \in \cdot)$.

Ein häufig verwendetes Hilfsmittel in der Analyse des BRW stellt die Laplace-Transformierte m des Intensitätsmaßes $\overline{\mathcal{Z}} := \mathbb{E}\,\mathcal{Z}$ von $\mathcal{Z}$ dar. m ist durch

$$m : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty], \quad \theta \longmapsto \int e^{-\theta t}\overline{\mathcal{Z}}(dt) = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} e^{-\theta X_i} \tag{1.11}$$

gegeben. In vielen Arbeiten (siehe z. B. Biggins [13], Kingman [41], Biggins und Kyprianou [14, 16]) wird (zumindest teilweise) angenommen, dass m in einem nichtleeren, offenen Intervall oder zumindest einem einzelnen Punkt endlich ist. Ist dies der Fall und ist $\vartheta \in \{m < \infty\}$, so kann die Gewichtsfolge auch alternativ durch $T_i(v) := m(\vartheta)^{-1}\exp(-\vartheta X_i(v))$ $(v \in \mathbb{V},\ i \geq 1)$ definiert werden, was zur Folge hat, dass die so definierte Gewichtsfolge die Bedingung (B1) erfüllt.

1.1.3 Beispiel ($\mathbb{V} \times \mathbb{R}^d$-wertige Positionen). Eine weitere Möglichkeit, die das oben vorgestellte allgemeine gewichtete Verzweigungsmodell bietet, ist die folgende. Ist nämlich eine Basisfamilie $\mathbf{T} \otimes \mathbf{X} = (T(v) \otimes X(v))_{v\in\mathbb{V}}$ gegeben, wobei die $X(v)$ z. B. $\mathbb{R}^d$-wertig ($d \in \mathbb{N}$) seien, so ergibt sich in kanonischer Weise ein Verzweigungsmodell mit $\mathbb{V} \times \mathbb{R}^d$-wertigen Positionen ($\mathbb{V} \times \mathbb{R}^d$ bildet eine separierte topologische Halbgruppe mit $(\varnothing, 0)$ als neutralem Element), indem $X_i(v)$ durch $(i, X_i(v))$ ersetzt wird. Die $S(v)$ werden dann entsprechend durch die Vektoren $(v, S(v))$ ersetzt, so dass die neuen Positionen mit den alten Positionen auch diejenige Information beinhalten, welches Individuum die Position einnimmt. Dies ist z. B. bei der Analyse des BRWs mittels (markierter) Bäume mit Rückgrat (engl. *labelled spinal trees*) nützlich (siehe Lyons [46, 1997]).

1.1.4 Die zufällig gewichteten Punktmaße

1.1.4 Definition. In der Situation von Abschnitt 1.1.2 seien für $n \geq 0$ die *zufällig gewichteten Punktmaße* durch

$$\Sigma_{0:n} := \sum_{|v|=n} L(v)\delta_{\mathbf{S}(v)} \text{ und } \Sigma_n := \sum_{|v|=n} L(v)\delta_{S(v)} \tag{1.12}$$

gegeben. Die $\Sigma_{0:n}$ und die Σ_n, $n \geq 0$, bilden zufällige Maße auf $\bigcup_{k\geq 0} \mathbb{G}^k$ bzw. auf $\mathbb{G}$. Mit $\overline{\Sigma}_{0:n}$ und $\overline{\Sigma}_n$ seien ihre Erwartungswerte bezeichnet, d. h., für $n \in \mathbb{N}_0$ und Mengen A aus den geeigneten σ-Algebren seien

$$\overline{\Sigma}_{0:n}(A) = \mathbb{E}\,\Sigma_{0:n}(A) \text{ und } \overline{\Sigma}_n(A) = \mathbb{E}\,\Sigma_n(A).$$

1.1.5 Definition. Das *zufällig gewichtete Erneuerungsmaß* $\mathcal{U}_\Sigma$ sei durch

$$\mathcal{U}_\Sigma := \sum_{n\geq 0} \Sigma_n = \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\delta_{S(v)} \tag{1.13}$$

definiert. Analog zu Definition 1.1.4 bezeichne $\overline{\mathcal{U}}_\Sigma$ die Erwartung von $\mathcal{U}_\Sigma$, d. h.,

$$\overline{\mathcal{U}}_\Sigma(A) = \mathbb{E}\,\mathcal{U}_\Sigma(A)$$

für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{G})$.

Das folgende einfache Lemma bildet die Grundlage zahlreicher Berechnungen:

1.1.6 Lemma. *Für jedes $n \geq 0$ und jede nichtnegative oder $\overline{\Sigma}_{0:n}$-integrierbare messbare Funktion $f : \mathbb{G}^{n+1} \to \mathbb{R}$ gilt:*

$$\int f(x)\,\overline{\Sigma}_{0:n}(dx) = \mathbb{E} \sum_{|v|=n} L(v) f(\mathbf{S}(v)). \tag{1.14}$$

Insbesondere gelten

$$\int f(x)\,\overline{\Sigma}_n(dx) = \mathbb{E} \sum_{|v|=n} L(v) f(S(v)) \tag{1.15}$$

und

$$\int f(x)\,\overline{\mathcal{U}}_\Sigma(dx) = \mathbb{E} \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v) f(S(v)) \tag{1.16}$$

für jede nichtnegative Funktion $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$.

Beweis. (1.15) ist ein Spezialfall von (1.14). (1.13) ergibt sich durch Summation aus Gleichung (1.15). Daher beschränkt sich der folgende Beweis auf den Nachweis von Gleichung (1.14). Sei also $n \geq 0$. Ist nun $f = \mathbb{1}_A$ für ein $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{G}^{n+1})$, so gilt (1.14) nach Definition von $\Sigma_{0:n}$. Für allgemeines f ergibt sich die Behauptung durch ein Approximationsargument. □

Wenn (B1) gilt, bildet $\overline{\Sigma}_1$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{G}$. In diesem Fall sei der *assoziierte Random-Walk* $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ ein Standard-Random-Walk auf $\mathbb{G}$ mit Zuwachsverteilung $\overline{\Sigma}_1$. Der assoziierte Random-Walk ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Analyse des gewichteten Verzweigungsmodells. Dies hat seine Ursache im folgenden Lemma, das in geringerer Allgemeinheit schon von Biggins und Kyprianou [14, 1997, Lemma 4.1] und ??? [16, 2005, Proposition 11], Bingham und Doney [17, 1975, Lemma 1] und Durrett und Liggett [27, 1983, S. 289] bewiesen wurde:

1.1.7 Lemma. *Unter der Bedingung* (B1) *gilt für jedes* $n \geq 0$*:*

$$\overline{\Sigma}_{0:n} = \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}_n \in \cdot) \textit{ und damit insbesondere } \overline{\Sigma}_n = \mathbb{P}(\overline{S}_n \in \cdot) = \overline{\Sigma}_1^{*(n)}, \qquad (1.17)$$

wobei $\overline{\mathbf{S}}_n := (\overline{S}_0, \ldots, \overline{S}_n)$ *sei.*

Beweis. Wie weiter oben bereits festgestellt wurde, ist $\overline{\Sigma}_1$ nach Bedingung (B1) ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Verteilung von $\overline{\mathbf{S}}$ ist daher wohldefiniert. Es genügt, die erste der beiden behaupteten Gleichungen zu beweisen; die zweite ist eine einfache Konsequenz der ersten.

Der Nachweis der ersten Gleichung erfolgt durch Induktion nach n. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Behauptung offenbar richtig. Sei nun die Behauptung für festes $n \geq 1$ wahr und seien $f : \mathbb{G}^{n+2} \to \mathbb{R}$ messbar und nichtnegativ und $v \in \mathbb{N}^n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 1} T_i(v) f(\mathbf{S}(vi)) \;\middle|\; \mathcal{A}_n\right) \\
&\qquad = \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\left(T_i(v) f((\mathbf{S}(v), S(vi))) \mid \mathcal{A}_n\right) \\
&\qquad = \sum_{i\geq 1} \int t f((\mathbf{S}(v), S(v)+x))\ \mathbb{P}^{(T_i(v), X_i(v))}(dt, dx) \\
&\qquad = \int f((\mathbf{S}(v), S(v)+x))\, \overline{\Sigma}_1(dx) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus (1.15) folgt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int f\, d\overline{\Sigma}_{0:n+1} &= \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} \sum_{i\geq 1} L(v) T_i(v) f(\mathbf{S}(vi))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} L(v)\, \mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 1} T_i(v) f(\mathbf{S}(vi)) \;\middle|\; \mathcal{A}_n\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} L(v) \int f((\mathbf{S}(v), S(v)+x))\, \overline{\Sigma}_1(dx)\right] \\
&\underset{\text{IV}}{=} \mathbb{E}\left[\int f((\overline{\mathbf{S}}_n, \overline{S}_n + x))\, \overline{\Sigma}_1(dx)\right] \\
&= \mathbb{E}\, f(\overline{\mathbf{S}}_{n+1}).
\end{aligned}$$

$\square$

1.1.8 Bemerkung. Seien $n \geq 0$ und $f : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, so dass $f(\overline{S}_n)$ quasi-integrierbar ist. Dann liefern die Lemmata 1.1.6 und 1.1.7

$$\mathbb{E}\, f(\overline{S}_n) = \mathbb{E} \sum_{|v|=n} L(v) f(S(v)). \tag{1.18}$$

Insbesondere ergibt sich für $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, $f = \mathrm{id}$ und $n = 1$

$$\mathbb{E}\, \overline{S}_1 = \mathbb{E} \sum_{i \geq 1} T_i S(i) = \mathbb{E} \sum_{i \geq 1} T_i X_i, \tag{1.19}$$

falls $\overline{S}_1$ quasi-integrierbar ist.

Schließlich ergibt sich aus Lemma 1.1.7 noch das folgende Korollar für das Erneuerungsmaß $\overline{U}$ des Random-Walks $\overline{\mathbf{S}}$:

1.1.9 Korollar. *Unter der Bedingung* (B1) *gilt:*

$$\overline{\mathcal{U}}_\Sigma = \overline{U}. \tag{1.20}$$

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{G})$. Dann gilt:

$$\overline{\mathcal{U}}_\Sigma(A) = \mathbb{E} \sum_{n \geq 0} \Sigma_n(A) = \sum_{n \geq 0} \overline{\Sigma}_n(A) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\overline{S}_n \in A) = \overline{U}(A),$$

wobei für das vorletzte Gleichheitszeichen die zweite Gleichung in (1.17) verwendet wurde. □

1.2 Stopplinien

Ziel dieses Abschnitts ist die Definition von Stopplinien und die Diskussion einiger ihrer grundlegenden Eigenschaften (siehe Abschnitt 1.2.2). Des Weiteren werden (in Abschnitt 1.2.3) homogene Stopplinien eingeführt. Homogene Stopplinien sind spezielle Stopplinien, die in besonderer Weise mit dem gewichteten Verzweigungsmodell harmonieren. Den Beginn dieses Abschnitts markiert allerdings die Einführung $\mathbb{V}$-wertiger Stoppzeiten, die immer wieder ins Spiel kommen, z. B. bei der Abzählung der Knoten auf einer Stopplinie.

1.2.1 $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeiten

1.2.1 Definition. Eine Zufallsvariable $\nu : \Omega \to \mathbb{V} \cup \{\infty\}$ heißt $\mathbb{V}$*-wertige Stoppzeit (bzgl.* $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$*)*, falls $\{\nu = v\} \in \mathcal{A}_{|v|}$ für jedes $v \in \mathbb{V} \cup \{\infty\}$ ist. ν heißt dabei *f. s. endlich*, falls $\mathbb{P}(\nu \in \mathbb{V}) = 1$ gilt. Für die Menge $\{\nu \in \mathbb{V}\}$ wird in Analogie zur Schreibweise im Falle gewöhnlicher Stoppzeiten auch $\{\nu < \infty\}$ geschrieben.

Um $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeiten zu verketten, wird eine mit der Generationenstruktur auf $\mathbb{V}$ verträgliche Wohlordnung auf $\mathbb{V}$ benötigt, d. h. eine Wohlordnung $\prec_{\mathbb{V}}$ von $\mathbb{V}$, für die stets $v \prec_{\mathbb{V}} w$ gilt, falls $|v| < |w|$ ist. Es sei also

$$\begin{aligned} v \prec_{\mathbb{V}} w \quad :\Longleftrightarrow \quad & |v| < |w| \text{ oder } |v| = |w| \text{ und es gibt ein } k < |v|, \\ & \text{so dass } v_i = w_i \text{ für } i = 1, \dots, k \text{ und } v_{k+1} < w_{k+1} \text{ ist.} \end{aligned}$$

$\prec_{\mathbb{V}}$ ordnet die Individuen von $\mathbb{V}$ also zunächst nach der Generation. Für eine feste Generation n ist die Einschränkung von $\prec_{\mathbb{V}}$ auf $\mathbb{N}^n$ die lexikographische Ordnung. Da $(\mathbb{N}, <)$ und die $\mathbb{N}^n$ mit der lexiokographischen Ordnung $(n \geq 2)$ Wohlordnungen bilden, folgt unmittelbar, dass $\prec_{\mathbb{V}}$ eine Wohlordnung von $\mathbb{V}$ bildet.

1.2.2 Lemma. *Die folgenden Aussagen sind gültig:*

(a) Ist ν eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit, so ist $|\nu|$ eine Stoppzeit (bzgl. $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$).

(b) Ist ν eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit, so gilt $\{\nu \prec_{\mathbb{V}} v\} \in \mathcal{A}_{|v|}$ für jedes $v \in \mathbb{V}$. Ferner ist ν $\mathcal{A}_{|\nu|}$-messbar.

(c) Ist $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{V}$ eine zufällige Teilmenge von $\mathbb{V}$, so dass $\{v \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{A}_{|v|}$ für jedes $v \in \mathbb{V}$ gilt, so ist $\nu := \inf_{\prec_{\mathbb{V}}} \mathcal{V}$ eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit. Für jedes $k \geq 1$ ist ferner die durch $\tau^k := \inf_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathcal{V} : |v| \geq |\nu|+k\}$ definierte Zufallsvariable ebenfalls eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit.

(d) Mit ν ist auch νv für jedes $v \in \mathbb{V}$ eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit.

Beweis. (a) Für jedes $k \geq 0$ ist

$$\{|\nu| = k\} = \bigcup_{v \in \mathbb{N}^k} \{\nu = v\} \in \mathcal{A}_k\,.$$

(b) Da ν eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit ist, gilt für jedes $v \in \mathbb{V}$:

$$\{\nu \prec_{\mathbb{V}} v\} = \bigcup_{u \prec_{\mathbb{V}} v} \{\nu = u\} \in \mathcal{A}_{|v|}\,.$$

Zum Nachweis der $\mathcal{A}_{|\nu|}$-Messbarkeit von ν wird zunächst die Definition von $\mathcal{A}_{|\nu|}$ rekapituliert:

$$\mathcal{A}_{|\nu|} := \{A \in \mathcal{A}_\infty : A \cap \{|\nu| \leq n\} \in \mathcal{A}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar, dass $\{\nu = v\} \in \mathcal{A}_{|\nu|}$ für jedes $v \in \mathbb{V}$ gilt, denn für $n < |v|$ ist $\{\nu = v\} \cap \{|\nu| \leq n\} = \emptyset \in \mathcal{A}_n$ und für $n \geq |v|$ ist $\{\nu = v\} \cap \{|\nu| \leq n\} = \{\nu = v\} \in \mathcal{A}_n$, da ν eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit ist.

(c) Seien $\mathcal{V}$ und ν wie im Lemma und $v \in \mathbb{V}$. Dann gilt

$$\{\nu = v\} = \{v \in \mathcal{V}\} \cap \bigcap_{w \prec_{\mathbb{V}} v} \{w \notin \mathcal{V}\} \in \mathcal{A}_{|v|}\,.$$

Also ist ν eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit. Dasselbe gilt für τ^k bei festem $k \geq 1$, denn ist $w \in \mathbb{V}$, so gilt $\{\tau^k = w\} = \emptyset$, wenn $|w| < k$ ist, und

$$\{\tau^k = w\} = \{w \in \mathcal{V}\} \cap \bigcup_{|u| \leq |w|-k} \left(\{\nu = u\} \cap \bigcap_{u \prec_{\mathbb{V}} v \prec_{\mathbb{V}} w} \{|v| < |u| + k\} \cup \{v \notin \mathcal{V}\} \right),$$

falls $|w| \geq k$ ist. In beiden Fällen gilt also $\{\tau^k = w\} \in \mathcal{A}_{|w|}$.
(d) Ist $w \in \mathbb{V}$, so gilt $\{\nu v = w\} = \emptyset$, wenn w nicht von der Gestalt $w = uv$ für ein $u \in \mathbb{V}$ ist. Ist w jedoch von dieser Gestalt, so ist

$$\{\nu v = w\} = \{\nu = u\} \in \mathcal{A}_{|u|} \subseteq \mathcal{A}_{|w|}\,.$$

□

1.2.2 Stopplinien

In der Literatur werden in verschiedenen Arbeiten Stopplinienkonzepte verwendet. Stopplinien (engl. *optional lines*) werden u. a. von Jagers [38, 1989] und Biggins und Kyprianou [14, 1997], [15, 2004] und [16, 2005] in etwas allgemeinerer Form als der hier verwendeten und von Chauvin [22, 1991] und Kyprianou [44, 2000] untersucht bzw. verwendet. Die folgende Definition einer Linie in $\mathbb{V}$, der deterministischen Entsprechung einer Stopplinie, folgt der Definition in [44, S. 408].

1.2.3 Definition. Eine Teilmenge $l \subseteq \mathbb{V}$ heißt *Linie (in* $\mathbb{V}$*)*, falls für zwei Knoten $v, w \in l$ aus $v \preceq w$ stets $v = w$ folgt.

Offenbar ist eine Teilmenge $l \subseteq \mathbb{V}$ genau dann eine Linie in $\mathbb{V}$, wenn $l \cap v\,\mathbb{V} = \{v\}$ für jedes $v \in l$ gilt. Eine Linie enthält also mit keinem Individuum v einen echten Vor- oder Nachfahren von v.

1.2.4 Definition (Definition 1 in [44]). Eine zufällige Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{V}$ (d. h. eine Abbildung $\mathcal{T} : \Omega \to \mathfrak{P}(\mathbb{V})$) heißt *Stopplinie*, falls

(i) $\mathcal{T}(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ eine Linie in $\mathbb{V}$ ist und

(ii) $\{v \in \mathcal{T}\} \in \sigma((L(v|k), S(v|k)) : k \leq |v|)$ für jedes $v \in \mathbb{V}$ ist.

Die obige Definition einer Stopplinie entspricht dem, was Biggins und Kyprianou [15, Abschnitt 6] *very simple line* nennen.

An dieser Stelle sollen nun die Schreibweisen $v \preceq W$, $v \prec W$, $V \preceq W$ und $V \prec W$ für $v \in \mathbb{V}$ und $V, W \subseteq \mathbb{V}$ erklärt werden. Im Folgenden wird $v \preceq W$ geschrieben, wenn für alle $w \in W$ $w \not\prec v$ gilt. Analog wird $v \prec W$ geschrieben, wenn dieselbe Aussage mit $\not\preceq$ anstelle von $\not\prec$ gilt. Also ist $v \preceq W$, falls W keinen strikten Vorfahren von v enthält, während $v \prec W$ ist, wenn W *keinen* Vorfahren von v enthält (einschließlich v selbst). Ferner wird $V \preceq W$ geschrieben, wenn

(i) $v \preceq W$ für jedes $v \in V$ gilt und

(ii) für jedes $w \in W$ ein $v \in V$ mit $v \preceq w$ existiert.

Entsprechend wird $V \prec W$ geschrieben, wenn (i) und (ii) mit $\prec$ anstelle von $\preceq$ gelten. (Für Linien stimmt die Definition $V \preceq W$ mit der in [38, S. 186] gegebenen überein.) Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Schreibweisen $v \preceq W$ und $\{v\} \preceq W$ nicht dasselbe bedeuten. $\{v\} \preceq W$ ist nämlich äquivalent zur Aussage $W \subseteq v\mathbb{V}$, wohingegen $v \preceq W$ wahr ist, wenn $W \cap \{\varnothing, v|1, \ldots, v||v|-1\} = \emptyset$. Des Weiteren gilt $V \preceq W$ genau dann, wenn $\{v \prec V\} \subseteq \{v \prec W\}$ gilt. Dabei ist $\{v \prec V\}$ wie üblich die Kurzschreibweise für die Menge $\{v \in \mathbb{V} : v \prec V\}$. Nun kann die natürliche Entsprechung der σ-Algebren $\mathcal{A}_n$, $n \geq 0$, für Linien l und Stopplinien $\mathcal{T}$ eingeführt werden:

1.2.5 Definition (siehe S. 408 in [44]). Sei $l \subseteq \mathbb{V}$ eine Linie in $\mathbb{V}$. Dann sei

$$\mathcal{A}_l := \sigma(T(v) \otimes X(v) : v \prec l). \tag{1.21}$$

Ist $\mathcal{T}$ eine Stopplinie in $\mathbb{V}$, so sei entsprechend $\mathcal{A}_\mathcal{T} := \sigma((T(v) \otimes X(v)) : v \prec \mathcal{T})$ die σ-Algebra der $\mathcal{T}$-Vergangenheit. Die präzise Definition von $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ ist die folgende:

$$\mathcal{A}_\mathcal{T} := \sigma\left(\{T(v) \otimes X(v) \in A\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\} : v \in \mathbb{V}, A \in \mathfrak{B}([0,\infty) \times \mathbb{G})^{\mathbb{N}}\right). \tag{1.22}$$

1.2.6 Bemerkung. (a) Ist in der Situation von Definition 1.2.5 $l = \{|v| = n\} = \{v \in \mathbb{V} : |v| = n\}$, so gilt $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{\{|v|=n\}} = \mathcal{A}_n$, denn $v \prec \{|v| = n\}$ gilt genau dann, wenn $|v| < n$ ist.
(b) In der Definition (1.22) ist zu beachten, dass die Mengen $\{v \prec \mathcal{T}\}$ für alle $v \in \mathbb{V}$ und Stopplinien $\mathcal{T}$ $\mathfrak{A}$-messbar sind, denn mit $n := |v|$ gilt:

$$\{v \prec \mathcal{T}\} = \bigcap_{k=0}^{n} \{v|k \notin \mathcal{T}\} \in \mathcal{A}_n\,.$$

(c) Die Definition von $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ für Stopplinien $\mathcal{T}$ bildet eine Verallgemeinerung der vorher gegeben Definition der σ-Algebren $\mathcal{A}_l$ für Linien l. Ist nämlich $\mathcal{T} = l$ für eine feste Linie $l \subseteq \mathbb{V}$, so stimmen die Definitionen (1.21) und (1.22) überein, da dann für festes $v \in \mathbb{V}$ stets $\{v \prec \mathcal{T}\} \in \{\emptyset, \Omega\}$ gilt.

1.2.7 Lemma. *Sei $\mathcal{T}$ eine Stopplinie. Dann sind $\{v \prec \mathcal{T}\}$, $\{v \in \mathcal{T}\}$, $\{v \preceq \mathcal{T}\}$ für alle $v \in \mathbb{V}$ $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Ereignisse.*

Beweis. Sei $v \in \mathbb{V}$. Wählt man $A = ([0,\infty) \times \mathbb{G})^{\mathbb{N}}$ in (1.22), so erhält man die $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-Messbarkeit von $\{v \prec \mathcal{T}\}$. Weiter ist

$$\{v \in \mathcal{T}\} = \{v|_{|v|-1} \prec \mathcal{T}\} \cap \{v \not\prec \mathcal{T}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}\,.$$

Schließlich folgt $\{v \preceq \mathcal{T}\} = \{v \prec \mathcal{T}\} \cup \{v \in \mathcal{T}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. □

Das folgende Resultat liefert eine Charakterisierung der σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ für eine Stopplinie $\mathcal{T}$.

1.2.8 Lemma. *Für jede Stopplinie $\mathcal{T}$ gilt*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}} = \sigma\Big((T(v) \otimes X(v))\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}}, \{v \prec \mathcal{T}\} : v \in \mathbb{V}\Big) =: \mathcal{A}'_{\mathcal{T}}\,.$$

Beweis. Für $v \in \mathbb{V}$ und $A \in \mathfrak{B}\left([0,\infty) \times \mathbb{G}\right)^{\mathbb{N}}$ gilt

$$\{T(v) \otimes X(v) \in A\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\} = \{T(v) \otimes X(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} \in A\} \in \mathcal{A}'_{\mathcal{T}},$$

falls $((0,0),(0,0),\ldots) \notin A$ ist. Andererseits ist $\{v \prec \mathcal{T}\}$ offenbar $\mathcal{A}'_{\mathcal{T}}$-messbar, also

$$\begin{aligned}&\{T(v) \otimes X(v) = 0\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\}\\ &\qquad = \{T(v) \otimes X(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} = 0\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\} \in \mathcal{A}'_{\mathcal{T}}\,.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{A}'_{\mathcal{T}}$. Umgekehrt gilt

$$\{T(v) \otimes X(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} \in B\} \quad = \quad \{T(v) \otimes X(v) \in B\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}},$$

falls $((0,0),(0,0),\ldots) \notin B$ gilt, und

$$\begin{aligned}&\{T(v) \otimes X(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} = 0\}\\ &\qquad = \{T(v) \otimes X(v) = 0\} \cup \{v \prec \mathcal{T}\}^c\\ &\qquad = \Big(\big\{T(v) \otimes X(v) \in ([0,\infty) \times \mathbb{G})^{\mathbb{N}} \setminus \{0\}\big\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\}\Big)^c \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}},\end{aligned}$$

d. h., $\mathcal{A}'_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. □

Die soeben bewiesene Charakterisierung von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ erlaubt einige direkte Folgerungen:

1.2.9 Folgerung. *$\mathcal{T}$ sei eine Stopplinie. Dann sind $L(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}}$, $L(v)\,\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T}\}}$, $S(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}}$ und $S(v)\,\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T}\}}$ für jedes $v \in \mathbb{V}$ $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbar.*

Beweis. Sei $v \in \mathbb{V}$, $v = v_1 \dots v_n$. Dann gilt

$$L(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} = \mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} \prod_{j=0}^{n-1} T_{v_{j+1}}(v|j)\,\mathbb{1}_{\{v|j \prec \mathcal{T}\}}$$

und das ist nach Lemma 1.2.8 $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbar. Analog ist auch

$$L(v)\,\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T}\}} = \mathbb{1}_{\{v \not\prec \mathcal{T}\}} \prod_{j=0}^{n-1} T_{v_{j+1}}(v|j)\,\mathbb{1}_{\{v|j \prec \mathcal{T}\}}$$

$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbar. Genauso kann man für

$$S(v)\,\mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} = \mathbb{1}_{\{v \prec \mathcal{T}\}} \sum_{j=0}^{n-1} X_{v_{j+1}}(v|j)\,\mathbb{1}_{\{v|j \prec \mathcal{T}\}}$$

und

$$S(v)\,\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T}\}} = \mathbb{1}_{\{v \not\prec \mathcal{T}\}} \sum_{j=0}^{n-1} X_{v_{j+1}}(v|j)\,\mathbb{1}_{\{v|j \prec \mathcal{T}\}}$$

schließen. □

Die nächste Frage, die sich im Bezug auf die σ-Algebren der Stopplinienvergangenheit stellt, ist die Frage nach der Monotonie. Sind $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ Stopplinien, folgt dann aus $\mathcal{S} \preceq \mathcal{T}$ stets $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$? Im Fall von Linien l, l' ist das offensichtlich richtig. Das folgende Lemma gibt die positive Antwort im allgemeinen Fall:

1.2.10 Lemma. *Seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ Stopplinien. Dann folgt $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ aus $\mathcal{S} \preceq \mathcal{T}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{S} \preceq \mathcal{T}$. Es gilt

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}} := \sigma\left(\{T(v) \otimes X(v) \in A\} \cap \{v \prec \mathcal{S}\} : v \in \mathbb{V},\ A \in \mathfrak{B}([0,\infty) \times \mathbb{G})^{\mathbb{N}}\right)$$

und Entsprechendes für $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. Seien also $v \in \mathbb{V}$ und $A \in \mathfrak{B}([0,\infty) \times \mathbb{G})^{\mathbb{N}}$. Es ist nun zu zeigen, dass $\{T(v) \otimes X(v) \in A\} \cap \{v \prec \mathcal{S}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ gilt. Wegen $\mathcal{S} \preceq \mathcal{T}$ gilt $\{v \prec \mathcal{S}\} \subseteq \{v \prec \mathcal{T}\}$ und daher

$$\{T(v) \otimes X(v) \in A\} \cap \{v \prec \mathcal{S}\} = \{T(v) \otimes X(v) \in A\} \cap \{v \prec \mathcal{S}\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\}.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $\{v \prec \mathcal{S}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ gilt. Nach Definition von $\mathcal{S}$ gilt $\{u \in \mathcal{S}\} \in \sigma((L(u|k), S(u|k)) : k \le |u|)$ für jedes $u \in \mathbb{V}$, etwa $\{u \in \mathcal{S}\} = \{(\mathbf{L} \otimes \mathbf{S})(u) \in B_u\}$ für eine Menge $B_u \in \mathfrak{B}([0,\infty) \times \mathbb{G})^{|u|+1}$. Dann gilt mit $n := |v|$ nach Folgerung 1.2.9:

$$\begin{aligned}
\{v \prec \mathcal{S}\} &= \{v \prec \mathcal{S}\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\} \\
&= \bigcap_{k=0}^{n} \{(\mathbf{L} \otimes \mathbf{S})(v|k) \notin B_{v|k}\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\} \\
&= \bigcap_{k=0}^{n} \{(L(v|j)\,\mathbb{1}_{\{v|j \prec \mathcal{T}\}}, S(v|j)\,\mathbb{1}_{\{v|j \prec \mathcal{T}\}})_{0 \le j \le k} \notin B_{v|k}\} \cap \{v \prec \mathcal{T}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}\,.
\end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma zeigt, dass die Stopplinien für das angegebene gewichtete Verzweigungsmodell die Entsprechung von Stoppzeiten in der gewöhnlichen Erneuerungstheorie haben. Das Lemma ist von grundlegender Wichtigkeit, was in Bemerkung 1.2.12 angedeutet wird.

1.2.11 Lemma. *Gegeben sei eine Stopplinie $\mathcal{T}$. Dann sind die $[\mathbf{L}\otimes\mathbf{S}]_v$, $v\in\mathcal{T}$, gegeben $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ unabhängig und genauso verteilt wie $\mathbf{L}\otimes\mathbf{S}$, d. h., es gelten*

$$\mathbb{P}^{[\mathbf{T}\otimes\mathbf{X}]_v|\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \mathbb{P}^{\mathbf{T}\otimes\mathbf{X}} \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s.\ auf\ \{v\in\mathcal{T}\} \tag{1.23}$$

sowie für jede Familie $(A_v)_{v\in\mathbb{V}}$ von Mengen $A_v\in\mathfrak{B}([0,\infty)\times\mathbb{G})^{\mathbb{V}}$:

$$\mathbb{P}\left[[\mathbf{T}\otimes\mathbf{X}]_v\in A_v, v\in\mathcal{T}\,\middle|\,\mathcal{A}_{\mathcal{T}}\right] = \prod_{v\in\mathcal{T}}\mathbb{P}(\mathbf{T}\otimes\mathbf{X}\in A_v) \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s. \tag{1.24}$$

Beweis. Das Lemma folgt aus Satz 4.14 in [38]. □

1.2.12 Bemerkung. Dieses einfache Lemma ist im Zusammenspiel mit Folgerung 1.2.9 von grundlegender Bedeutung für die vorliegende Arbeit. Denn ist $\psi : ([0,\infty)\times\mathbb{G})^{\mathbb{V}}\times\mathbb{G}\to[0,\infty]$ eine produktmessbare Abbildung und $\Psi(t) := \psi(\mathbf{T}\otimes\mathbf{X},t)$ $(t\in\mathbb{G})$, so liefern die beiden Aussagen zusammen

$$\mathbb{E}\left[\sum_{v\in\mathcal{T}}L(v)\,[\Psi]_v(S(v))\,\middle|\,\mathcal{A}_{\mathcal{T}}\right] = \sum_{v\in\mathcal{T}}L(v)\overline{\Psi}(S(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f.\,s.},$$

wobei $\overline{\Psi}(t) := \mathbb{E}\,\Psi(t)$ sei.

1.2.13 Definition (vgl. Definition 2 in [44]). Eine Linie l in $\mathbb{V}$ heißt beschränkt (engl. *dissecting*), wenn $\{v\prec l\}\subseteq\{|v|<n\}$ für ein $n\geq 1$ ist oder falls äquivalenterweise $l\preceq\{|v|=n\}$ für ein $n\geq 1$ gilt. Eine Stopplinie $\mathcal{T}$ heißt f. s. beschränkt, falls fast alle Realisationen $\mathcal{T}(\omega)$ beschränkte Linien sind.

Nach Definition 1.2.13 ist eine Linie l genau dann beschränkt, wenn es ein $n\geq 1$ gibt, so dass für jedes $v\in\mathbb{V}$, $|v|=n$, ein $u\in l$ mit $u\preceq v$ existiert.

Ist nun $\mathcal{T}$ eine Stopplinie, so sei $\mathcal{Z}_{\mathcal{T}}$ durch

$$Z_{\mathcal{T}} := \sum_{v\in\mathcal{T}}L(v) \tag{1.25}$$

definiert (siehe auch Abschnitt 3 in [44]). Das folgende Lemma zeigt, dass unter der Bedingung (B1) $\mathbb{E}\,Z_{\mathcal{T}}=1$ gilt, falls $\mathcal{T}$ f. s. gegen eine feste Niveaulinie $\{|v|=n\}$ beschränkt ist. Diese wichtige Eigenschaft findet in Kapitel 3 an wichtiger Stelle Verwendung.

1.2.14 Lemma. *Es gelte die Bedingung* (B1). *Weiterhing sei $\mathcal{T}$ eine Stopplinie mit $\mathcal{T}\preceq\{|v|=n\}$ f. s. für ein festes $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{E}\,Z_{\mathcal{T}}=1$.*

Beweis. Die Aussage des Lemmas kann einfach nachgerechnet werden, folgt aber auch direkt aus [44, Theorem 6], wobei zu beachten ist, dass jede Stopplinie $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T} \preceq \{|v| = n\}$ f. s. für ein festes $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{L}^1$-*dissecting* im Sinne von [44, Definition 3] ist. Aus ökonomischen Gründen wird daher auf einen elementaren Beweis verzichtet. □

1.2.15 Korollar. *Sei $\mathcal{T}$ eine Stopplinie. Dann gilt $\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}} \leq 1$.*

1.2.16 Bemerkung. Das Korollar kann auch direkt aus Theorem 6 in Kyprianou [44] gefolgert werden. Dort wird sogar genau charakterisiert, wann $\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}} = 1$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die zugrunde liegende Stopplinie $\mathcal{L}^1$-*dissecting* (siehe Definition 3 in [44]) ist. Dieser Begriff und auch diese Charakterisierung werden in der vorliegenden Arbeit nicht mehr benötigt, weil hier der Fokus auf homogenen Stopplinien liegt, für die die Charakterisierung einfacher ist (siehe Gleichung (1.29) in Satz 1.2.21).

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 1.2.14 sei

$$\mathcal{T}_k := \{v \in \mathbb{V} : v \in \mathcal{T} \text{ und } |v| \leq k \text{ oder } v \prec \mathcal{T} \text{ und } |v| = k\}$$

für $k \geq 0$. $\mathcal{T}_k$ ist dann f. s. gegen die Linie $\{|v| = k\}$ beschränkt und Lemma 1.2.14 liefert daher $\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}_k} = 1$. Die Behauptung ergibt sich nun als Anwendung des Lemmas von Fatou

$$\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}} = \mathbb{E} \lim_{k\to\infty} \sum_{v\in\mathcal{T}:|v|\leq k} L(v) \leq \mathbb{E} \liminf_{k\to\infty} Z_{\mathcal{T}_k} \leq \liminf_{k\to\infty} \mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}_k} = 1.$$

□

1.2.17 Bemerkung. Die Umkehrung von Lemma 1.2.14 ist natürlich i. A. nicht richtig, d. h., in manchen gewichteten Verzweigungsmodellen gibt es Stopplinien $\mathcal{T}$, so dass zwar $\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}} = 1$ gilt, $\mathcal{T}$ aber nicht f. s. beschränkt ist (vgl. Beispiel 1.2.22).

1.2.3 Homogene Stopplinien

Dieser Abschnitt dient der Einführung *homogener Stopplinien*, die in besonderer Weise mit dem assoziierten Random-Walk harmonieren.

Vorgelegt seien Mengen $B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{G}^{n+1})$, $n \geq 0$. Die Folge $(B_n)_{n\geq 0}$ induziert dann die formale Stoppregel $\sigma : \mathbb{G}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$:

$$\sigma(\mathbf{s}) := \inf\{n \geq 0 : \mathbf{s}_n \in B_n\},$$

wobei für $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots) \in \mathbb{G}^{\mathbb{N}_0}$ $\mathbf{s}_n := (s_0, \ldots, s_n)$ sei. Im Folgenden wird auch gelegentlich σ für $\sigma(\overline{\mathbf{S}})$ geschrieben, wenn dies unmissverständlich ist. Dies ist insbesondere immer dann der Fall, wenn σ in einer Wahrscheinlichkeit der Gestalt

$\mathbb{P}(\sigma \in A)$ auftritt. $\mathbb{P}(\sigma < \infty)$ steht also stets für $\mathbb{P}(\sigma(\overline{\mathbf{S}}) < \infty)$. Für jedes $x \in \partial\mathbb{V}$ wird nun eine Stoppzeit $\tau_\sigma(x) : \Omega \to \mathbb{N}_0$ durch

$$\tau_\sigma(x) := \sigma(\mathbf{S}(x))$$

definiert. Sei nun $\mathcal{T}^\sigma := \{v \in \mathbb{V} : v = x|\tau_\sigma(x) \text{ für ein } x \in \partial\mathbb{V}\}$. $\mathcal{T}^\sigma$ heißt dann *homogene Stopplinie (HSL)* bzgl. σ und $\mathbf{S}$.

1.2.18 Lemma. *Jede HSL ist auch eine Stopplinie im Sinne von Definition 1.2.4.*

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ die homogene Stopplinie bzgl. der formalen Stoppregel σ. Dann ist zunächst zu zeigen, dass jede Realisation von $\mathcal{T}$ eine Linie in $\mathbb{V}$ ist. Dies ist aber klar, denn wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein $\omega \in \Omega$ und ein $x \in \partial\mathbb{V}$, so dass $x|j \in \mathcal{T}(\omega)$ und $x|k \in \mathcal{T}(\omega)$ für $j < k$ gilt. Dies ist aber nach Definition von $\tau_\sigma(x)$ nicht möglich. Also muss $\mathcal{T}(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ eine Linie in $\mathbb{V}$ sein. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\{v \in \mathcal{T}\} &= \{\mathbf{S}(v) \in B_n\} \cap \bigcap_{k<n} \{\mathbf{S}(v|k) \notin B_k\} \\ &\in \sigma(S(v|k) : k \leq n) \subseteq \sigma((L(v|k), S(v|k)) : k \leq n)\end{aligned}$$

für festes $v \in \mathbb{V}$ mit $|v| = n$. □

Sind σ und τ formale Stoppregeln, so bezeichne $\mathcal{T}^\sigma \wedge \mathcal{T}^\tau$ die zu $\sigma \wedge \tau$ korrespondierende Stopplinie $\mathcal{T}^{\sigma\wedge\tau}$. Analog bezeichne $\mathcal{T}^\sigma \vee \mathcal{T}^\tau$ die zu $\sigma \vee \tau$ korrespondierende Stopplinie $\mathcal{T}^{\sigma\vee\tau}$. Ist τ dabei konstant, etwa $\tau = n$, so wird $\mathcal{T}^\sigma \wedge n$ für $\mathcal{T}^{\sigma\wedge n}$ geschrieben.

In Erweiterung zur Definition 1.1.4 können nun die gestoppten Varianten der zufälligen gewichteten Punktmaße eingeführt werden.

1.2.19 Definition. Für eine HSL $\mathcal{T}$ seien

$$\Sigma_{0:\mathcal{T}} := \sum_{v\in\mathcal{T}} L(v)\delta_{\mathbf{S}(v)} \quad \text{und} \quad \Sigma_{\mathcal{T}} := \sum_{v\in\mathcal{T}} L(v)\delta_{S(v)} \tag{1.26}$$

die *gestoppten zufälligen gewichteten Punktmaße*. $\Sigma_{0:\mathcal{T}}$ und $\Sigma_{\mathcal{T}}$ bilden zufällige Maße auf $\bigcup_{k\geq 0} \mathbb{G}^{k+1}$ bzw. auf $\mathbb{G}$. Analog zur Definition der zufällig gewichteten Punktmaße seien $\overline{\Sigma}_{0:\mathcal{T}} := \mathbb{E}\,\Sigma_{0:\mathcal{T}}$ und $\overline{\Sigma}_{\mathcal{T}} := \mathbb{E}\,\Sigma_{\mathcal{T}}$.

Es ist zu beachten, dass $\overline{\Sigma}_{0:\mathcal{T}}$ und $\overline{\Sigma}_{\mathcal{T}}$ auch unter Bedingung (B1) i. A. keine Wahrscheinlichkeitsmaße mehr sind.

1.2.20 Definition. In der Situation von Definition 1.2.19 sei das *Prä-$\mathcal{T}$-Okkupationsmaße* $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}$ durch

$$\mathcal{V}_{\mathcal{T}} := \sum_{v\prec\mathcal{T}} L(v)\delta_{S(v)}$$

definiert. $\overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{T}}$ bezeichne den Erwartungswert von $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}$.

1.2.21 Lemma. *Es gelte die Voraussetzung* (B1). σ *sei eine formale Stoppregel,* $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ *die zugehörige HSL. Dann gelten*

$$\overline{\Sigma}_{0:\mathcal{T}} = \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}_\sigma \in \cdot, \sigma < \infty) \quad \textit{und} \quad \overline{\Sigma}_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}(\overline{S}_\sigma \in \cdot, \sigma < \infty), \tag{1.27}$$

also insbesondere

$$\mathbb{E}\, f(\overline{S}_\sigma)\, \mathbb{1}_{\{\sigma<\infty\}} = \mathbb{E} \sum_{v\in\mathcal{T}} L(v) f(\overline{S}(v))$$

für jede messbare Funktion $f \geq 0$*. Darüber hinaus gilt*

$$\overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{T}} = \overline{V}^\sigma \tag{1.28}$$

für das Prä-σ*-Okkupationsmaß* $\overline{V}^\sigma = \mathbb{E} \sum_{j=0}^{\sigma-1} \delta_{\overline{S}_j}$ *des assoziierten Random-Walks* $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{S}_n)_{n\geq 0}$*. Schließlich gilt für jedes* $n \geq 0$

$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{E}\left(\sum_{v\in\mathcal{T},|v|=n} L(v)\right) \quad \textit{sowie folglich} \quad \mathbb{P}(\sigma < \infty) = \mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}}. \tag{1.29}$$

Beweis. Sei $\sigma(\mathbf{s}) := \inf\{n \geq 0 : \mathbf{s}_n \in B_n\}$ für Mengen $B_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{G}^{n+1})$, $n \geq 0$. $\overline{\mathbf{S}}_\sigma$ nimmt auf $\{\sigma < \infty\}$ Werte in $\dot{\bigcup}_{n\geq 0} \mathbb{G}^{n+1}$ an. Sei $\mathfrak{G}$ die Borelsche σ-Algebra auf dieser Menge. Weiter seien $A \in \mathfrak{G}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $v \in \mathbb{V}$ mit $|v| = n$. Dann gilt

$$\{\mathbf{S}(v) \in A, v \in \mathcal{T}\} = \{\mathbf{S}(v) \in A_n\},$$

wobei $A_n := A \cap \pi_{0:n}(\{\sigma = n\})$ sei. Hierbei bezeichne $\pi_{0:n} : \mathbb{G}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{G}^{n+1}$ die Projektion auf die ersten $n+1$ Koordinaten. Damit folgt unter Verwendung von Gleichung (1.17):

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}_{0:\mathcal{T}}(A) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\sum_{v\in\mathcal{T},|v|=n} L(v)\, \mathbb{1}_A(\mathbf{S}(v))\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} L(v)\, \mathbb{1}_{A_n}(\mathbf{S}(v))\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \overline{\Sigma}_{0:n}(A_n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}_n \in A_n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}_n \in A, \sigma = n) \\
&= \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}_\sigma \in A, \sigma < \infty),
\end{aligned}$$

was Gleichung (1.27) beweist. Sei nun $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{G})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{T}}(B) &= \mathbb{E}\left(\sum_{v \prec \mathcal{T}} L(v)\delta_{S(v)}(B)\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n, v\prec\mathcal{T}} L(v)\delta_{S(v)}(B)\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\int h_n d\Sigma_{0:n}\right),
\end{aligned}$$

wobei $h_n(\mathbf{s}_n) := \mathbb{1}_B(s_n) \cdot \mathbb{1}_{\pi_{0:n}(\{\sigma>n\})}(\mathbf{s}_n)$ für $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots)$ sei. Nun gilt für jedes $n \geq 0$ wiederum nach Gleichung (1.17):

$$\mathbb{E}\left(\int h_n d\Sigma_{0:n}\right) = \int h_n d\overline{\Sigma}_{0:n} = \mathbb{E}\, h_n(\overline{\mathbf{S}}_n) = \mathbb{P}(\overline{S}_n \in B, \sigma > n),$$

also

$$\overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{T}}(B) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\overline{S}_n \in B, \sigma > n) = \overline{V}^{\sigma}(B).$$

Schließlich gilt

$$\mathbb{P}(\sigma = n) = \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}_\sigma \in \mathbb{G}^{n+1}, \sigma < \infty) = \overline{\Sigma}_{0:\mathcal{T}}(\mathbb{G}^{n+1}) = \mathbb{E}\left(\sum_{v\in\mathcal{T}, |v|=n} L(v)\right).$$

Die übrig gebliebene Gleichung ist eine einfache Konsequenz aus dem bereits Bewiesenen. □

Wie in Bemerkung 1.2.17 angekündigt wird nun ein Beispiel präsentiert, das zeigt, dass eine HSL $\mathcal{T}$ mit $\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}} = 1$ nicht f. s. beschränkt sein muss.

1.2.22 Beispiel. Seien $T_i = 2^{-i}$ $(i \geq 1)$ und sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger, $1/2(\delta_{-1}+\delta_1)$-verteilter Zufallsgrößen. Der auf der Gewichtsfolge $T \otimes X$ basierende gewichtete Verzweigungsprozess erfüllt dann Bedingung (B1). Für den assoziierten Random-Walk $\mathbf{S}$ gilt nach Gleichung (1.19) $\mathbb{E}\, \overline{S}_1 = 0$. Da $\overline{S}_1$ nicht degeneriert ist, folgt $\limsup_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ nach dem Satz von Chung und Fuchs und folglich $\mathbb{P}(\sigma^> < \infty) = 1$, wobei $\sigma^> := \inf\{n \geq 0 : \overline{S}_n > 0\}$ sei. Nach Gleichung (1.29) folgt dann $\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{S}^>} = 1$ für die HSL $\mathcal{S}^> := \mathcal{T}^{\sigma^>}$. Andererseits folgt aus dem Lemma von Borel-Cantelli, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S(v) = -n \text{ für unendliche viele } |v| = n) \\
&\qquad \geq \mathbb{P}(S(\underbrace{i \ldots i}_{n\text{-mal}}) = -n \text{ für unendliche viele } i \geq 1) = 1
\end{aligned}$$

gilt. Insbesondere ist mit Wahrscheinlichkeit 1 jede Realisation von $\mathcal{S}^>$ unbeschränkt.

Dieser Abschnitt wird von einer Betrachtung der kumulierten Anwendung von HSL auf den gewichteten Verzweigungsprozess beschlossen. So wie in der Erneuerungstheorie eine Stoppzeit σ auf den Post-σ-Prozess angewandt werden kann, kann auch in der Situation der gewichteten Verzweigungsprozesse eine Stoppregel σ auf den Post-$\mathcal{T}^\sigma$-Prozess angewandt werden. Ist die Stoppregel σ nämlich durch $\sigma(\mathbf{s}) := \inf\{n \geq 0 : \mathbf{s}_n \in B_n\}$ mit geeigneten messbaren Mengen B_n, $n \geq 0$, gegeben, so gilt $\mathcal{T}^\sigma = \psi(\mathbf{S})$ für eine geeignete Funktion $\psi : \mathbb{G}^{\mathbb{V}} \to \mathfrak{P}(\mathbb{V})$. Für $v \in \mathbb{V}$ gilt dann $[\mathcal{T}^\sigma]_v = \psi([\mathbf{S}]_v)$. Nun sei $\mathcal{T}^\sigma(v) := v[\mathcal{T}^\sigma]_v$. Mit $\mathcal{T}_0^\sigma := \{\varnothing\}$ wird $\mathcal{T}_n^\sigma$ für $n > 0$ wie folgt rekursiv definiert:

$$\mathcal{T}_n^\sigma := \bigcup_{v \in \mathcal{T}_{n-1}^\sigma} \mathcal{T}^\sigma(v).$$

$\mathbb{V}^\sigma$ sei die Vereinigung aller $\mathcal{T}_n^\sigma$, d. h., $\mathbb{V}^\sigma = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n^\sigma$. Die $\mathcal{T}_n^\sigma$ können alternativ auch konstruiert werden, indem man $\mathcal{T}_n^\sigma := \mathcal{T}^{\sigma_n}$ setzt, wobei $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ die Folge der *kumulierten Kopien von* σ (auch: *Kopiensummenfolge*, siehe etwa Definition 1.4.2 in Alsmeyer [3, 1991]) sei. Dies hat den Vorteil, dass damit durch die Definition bereits gezeigt ist, dass $\mathcal{T}_n^\sigma$ für jedes $n \geq 0$ eine HSL ist.

Die Menge $\mathbb{V}^\sigma$ ist eine zufällige Teilmenge von $\mathbb{V}$, die selber wieder eine Baumstruktur trägt, indem für Individuen $v, w \in \mathbb{V}^\sigma$ w als direkter Nachfahre/Nachkomme von v aufgefasst wird, wenn $w \in \mathcal{T}^\sigma(v)$ gilt. Im Unterschied zur Struktur von $\mathbb{V}$ muss nicht notwendigerweise jedes Individuum von $\mathbb{V}^\sigma$ unendlich viele direkte Nachkommen in $\mathbb{V}^\sigma$ besitzen. Nichtsdestoweniger können die zufälligen gewichteten Punktmaße für den gewichteten Verzweigungsprozess basierend auf $(L(v))_{v\in\mathbb{V}^\sigma}$ definiert werden:

1.2.23 Definition. Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien

$$\Sigma_{0:n}^\sigma := \sum_{v \in \mathcal{T}_n^\sigma} L(v)\delta_{\mathbf{S}^\sigma(v)} \text{ und } \Sigma_n^\sigma := \sum_{v \in \mathcal{T}_n^\sigma} L(v)\delta_{S(v)},$$

wobei $\mathbf{S}^\sigma(v) = (S(w))_{w \preceq v, w\in\mathbb{V}^\sigma}$ der Vektor der Positionen derjenigen Vorfahren von v sei, die in $\mathbb{V}^\sigma$ liegen. Im Einklang mit der bisherigen Notation werden die Erwartungswerte von $\Sigma_{0:n}^\sigma$ und Σ_n^σ mit $\overline{\Sigma}_{0:n}^\sigma$ bzw. $\overline{\Sigma}_n^\sigma$ bezeichnet. Im Falle $\sigma = \sigma^>$ (mit $\sigma^>(\mathbf{s}) = \inf\{n \geq 0 : s_n > 0\}$) seien $\mathcal{S}_n^> := \mathcal{T}_n^{\sigma^>}$, $\mathbb{V}^> := \mathbb{V}^{\sigma^>}$ und $\Sigma_{0:n}^> := \Sigma_{0:n}^{\sigma^>}$ sowie $\Sigma_n^> := \Sigma_n^{\sigma^>}$.

1.2.24 Definition. Das zufällig gewichtete Erneuerungsmaß $\mathcal{U}_\Sigma^\sigma$ sei durch

$$\mathcal{U}_\Sigma^\sigma := \sum_{n\geq 0} \Sigma_n^\sigma = \sum_{v\in\mathbb{V}^\sigma} L(v)\delta_{S(v)} \tag{1.30}$$

definiert. $\overline{\mathcal{U}}_\Sigma^\sigma$ bezeichne die Erwartung von $\mathcal{U}_\Sigma^\sigma$.

1.2.25 Lemma. *Es gelte die Bedingung* (B1). *σ sei eine Stoppregel und $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ bezeichne die Folge der kumulierten Kopien von σ. Weiterhin sei $\overline{\mathbf{S}}^\sigma = (\overline{S}_n^\sigma)_{n\geq 0} = (\overline{S}_{\sigma_n})_{n\geq 0}$. Dann gelten die folgenden Ausagen:*

$$\overline{\Sigma}_{0:n}^\sigma = \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}_n^\sigma \in \cdot, \sigma_n < \infty), \tag{1.31}$$

$$\overline{\Sigma}_n^\sigma = \mathbb{P}(\overline{S}_n^\sigma \in \cdot, \sigma_n < \infty) = (\overline{\Sigma}_1^\sigma)^{*(n)}, \tag{1.32}$$

$$\overline{\Sigma}_n^\sigma(\mathbb{G}) = \mathbb{P}(\sigma_n < \infty) = \mathbb{P}(\sigma_1 < \infty)^n = \overline{\Sigma}_1^\sigma(\mathbb{G})^n. \tag{1.33}$$

Gilt zusätzlich $\mathbb{P}(\sigma < \infty) = 1$ und bezeichnet $\overline{V}^\sigma$ das Prä-σ-Okkupationsmaß von $\mathbf{S}$, so gilt für die Erneuerungsmaße $\overline{U}$ und $\overline{U}^\sigma$ von $\overline{\mathbf{S}}$ bzw. $\overline{\mathbf{S}}^\sigma$, dass

$$\overline{\mathcal{U}}_\Sigma = \overline{U} \text{ und } \overline{\mathcal{U}}_\Sigma^\sigma = \overline{U}^\sigma$$

ist; insbesondere gilt daher

$$\overline{\mathcal{U}}_\Sigma = \overline{U} = \overline{U}^\sigma * \overline{V}^\sigma = \overline{\mathcal{U}}_\Sigma^\sigma * \overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{T}_1^\sigma} = \mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 0}\sum_{v\in\mathcal{T}_n^\sigma} L(v)\delta_{S(v)} * [\mathcal{V}_{\mathcal{T}^\sigma}]_v\right).$$

Beweis. Der Beweis von Gleichung (1.31) erfolgt durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Behauptung trivial, für $n = 1$ folgt sie leicht aus Lemma 1.2.21. Sei nun die Behauptung für $n \geq 1$ wahr und $A \in \mathbb{G}^{n+2}$, $A = A_0 \times \cdots \times A_{n+1}$ und o. B. d. A. gelte $0 \in A_0$. Durch Bedingen unter $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_n^\sigma}$ und eine Anwendung von Folgerung 1.2.9 erhält man

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}_{0:n+1}^\sigma(A) &= \mathbb{E}\sum_{v\in\mathcal{T}_{n+1}^\sigma} L(v)\delta_{\mathbf{S}^\sigma(v)}(A) \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{v\in\mathcal{T}_n^\sigma} L(v)\delta_{\mathbf{S}^\sigma(v)}(A_0 \times \ldots \times A_n) \\
&\qquad \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{w\in[\mathcal{T}_1^\sigma]_v} L_v(w)\delta_{S(vw)}(A_{n+1}) \;\middle|\; \mathcal{A}_{\mathcal{T}_n^\sigma}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

Hier liefert Lemma 1.2.21 im Zusammenspiel mit Lemma 1.2.11:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{w\in[\mathcal{T}_1^\sigma]_v} L_v(w)\delta_{S(vw)}(A_{n+1}) \;\middle|\; \mathcal{A}_{\mathcal{T}_n^\sigma}\right) \\
&= \int \mathbb{P}\left(S(v) + x \in A_{n+1}\right) \mathbb{P}(\overline{S}_1^\sigma \in dx, \sigma_1 < \infty) \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{v \in \mathcal{T}_n^\sigma\}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Sigma}^{\sigma}_{0:n+1}(A) \\
&\quad = \mathbb{E}\Bigg[\sum_{v\in\mathcal{T}^{\sigma}_{n}} L(v)\delta_{\mathbf{S}^{\sigma}(v)}(A_0\times\ldots\times A_n) \\
&\qquad\qquad \cdot\,\mathbb{P}(\,\cdot+\overline{S}^{\sigma}_{1}\in A_{n+1},\sigma_1<\infty)\circ S(v)\Bigg] \\
&\quad = \int_{A_0\times\cdots\times A_n} \mathbb{P}(s_n+\overline{S}^{\sigma}_{1}\in A_{n+1},\sigma_1<\infty)\,\overline{\Sigma}^{\sigma}_{0:n}(ds_0,\ldots,ds_n) \\
&\quad \underset{IV}{=} \int_{A_0\times\cdots\times A_n\cap\{\sigma_n<\infty\}} \mathbb{P}(s_n+\overline{S}^{\sigma}_{1}\in A_{n+1},\sigma_1<\infty)\;\mathbb{P}^{\overline{\mathbf{S}}^{\sigma}_{n}}(ds_0,\ldots,ds_n) \\
&\quad = \mathbb{P}(\overline{\mathbf{S}}^{\sigma}_{n+1}\in A,\sigma_{n+1}<\infty),
\end{aligned}
$$

was Gleichung (1.31) beweist. Die beiden folgenden Gleichungen (1.32) und (1.33) sind Spezialfälle von Gleichung (1.31). Die Identitäten $\overline{\mathcal{U}}_{\Sigma}=\overline{U}$ und $\overline{\mathcal{U}}^{\sigma}_{\Sigma}=\overline{U}^{\sigma}$ folgen nun nach Korollar 1.1.9 bzw. durch Summation über alle $n\geq 0$. Schließlich folgt die letzte Gleichungskette des Lemmas aus der Rechnung

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sum_{n\geq 0}\sum_{v\in\mathcal{T}^{\sigma}_{n}} L(v)\delta_{S(v)} * [\mathcal{V}_{\mathcal{T}^{\sigma}}]_v &= \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{v\in\mathbb{V}^{\sigma}\}}\,L(v)\delta_{S(v)} * [\mathcal{V}_{\mathcal{T}^{\sigma}}]_v \\
&= \overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{T}^{\sigma}_{1}} * \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{v\in\mathbb{V}^{\sigma}\}}\,L(v)\delta_{S(v)} \\
&= \overline{\mathcal{U}}^{\sigma}_{\Sigma} * \overline{\mathcal{V}}_{\mathcal{T}^{\sigma}_{1}},
\end{aligned}
$$

wobei der zweite Schritt durch Bedingen unter $\mathcal{A}_{\{v\}}$ und Ausnutzen der $\mathcal{A}_{\{v\}}$-Messbarkeit von $\mathbb{1}_{\{v\in\mathbb{V}^{\sigma}\}}\,L(v)$ und $S(v)$ gerechtfertigt wird. □

1.2.4 Der Exzess im Fall reellwertiger Positionen

Für diesen kurzen Abschnitt gelte $\mathbb{G}=\mathbb{R}$, d. h., dass die Positionen $S(v)$ reellwertig sind. In dieser Situation ergibt sich aus Lemma 1.2.21 ein einfaches Korollar den *empirischen Exzess* $\mathcal{R}_t$ betreffend. Dabei ist der empirische Exzess durch

$$
\mathcal{R}_t := \sum_{v\in\mathcal{S}^t} L(v)\delta_{S(v)-t}, \quad t\geq 0, \tag{1.34}
$$

definiert, wobei $\mathcal{S}^t$ die homogene Erstaustrittslinie zum Niveau t bezeichne, d. h., $\mathcal{S}^t := \{v\in\mathbb{V} : S(v|k)\leq t \text{ f. a. } k<|v| \text{ und } S(v)>t\}$. Der empirische Exzess ist ebenfalls ein zufälliges gewichtetes Punktmaß. Analog zur Definition im Falle der anderen zufälligen gewichteten Punktmaße wird der Erwartungswert von $\mathcal{R}_t$ mit $\overline{\mathcal{R}}_t := \mathbb{E}\,\mathcal{R}_t$ notiert.

1.2.26 Korollar. *Es gelte die Bedingung* (B1). $\sigma(t)$ *sei die Erstaustrittszeit zum Niveau* $t \geq 0$. $\overline{R}_t$ *bezeichne den Exzess des Prozesses* $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$, *d. h.,* $\overline{R}_t := \overline{S}_{\sigma(t)} - t$. *Dann gilt für alle* $a \geq 0$*:*

$$\overline{\mathcal{R}}_t([0,a]) = \mathbb{P}(\overline{R}_t \leq a, \sigma(t) < \infty).$$

Beweis. Für $a, t \geq 0$ gilt nach Lemma 1.2.21:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}}_t([0,a]) &= \mathbb{E}\sum_{v\in\mathcal{S}^t} L(v)\delta_{S(v)-t}([0,a]) = \overline{\Sigma}_{\mathcal{S}^t}([t,t+a]) \\ &= \mathbb{P}(\overline{S}_{\sigma(t)} \in [t,t+a], \sigma(t) < \infty) = \mathbb{P}(\overline{R}_t \leq a, \sigma(t) < \infty).\end{aligned}$$

□

1.3 Der BRW-Fall

Für diesen gesamten Abschnitt wird die Relation $X_i(v) = -\log T_i(v)$ ($v \in \mathbb{V}$, $i \geq 1$) für die Positionsverschiebungen und die Gewichte angenommen. Dies wird im Folgenden als *BRW-Fall* bezeichnet; siehe dazu auch Beispiel 1.1.2. Für diesen speziellen Fall werden im folgenden Abschnitt 1.3.1 einige Formeln und Zusammenhänge hergeleitet, auf die immer wieder in späteren Abschnitten zurückgegriffen wird. In Abschnitt 1.3.2 werden *Leiterlinienprozesse* konstruiert. Diese sind wiederum gewichtete Verzweigungsprozesse, die auf Gewichtsfolgen der Gestalt $(L(v))_{v\in\mathcal{T}}$ für HSL $\mathcal{T}$ bzgl. Erstaustrittszeiten $\sigma(t)$ basieren. Dabei sei $\sigma(t)(\mathbf{s}) := \inf\{n \geq 0 : s_n > t\}$ für $\mathbf{s} = (s_n)_{n\geq 0}$. Solche HSL heißen auch *homogene Erstaustrittslinien*.

Der wesentliche Grund für die Beschränkung der Betrachtungen in diesem Abschnitt auf den BRW-Fall ist, dass die Identitäten der Lemmata 1.1.7, 1.2.21 und 1.2.25, die eine Brücke von der Erneuerungstheorie zum gewichteten Verzweigungsmodell schlagen, es im BRW-Fall ermöglichen, das Verhalten der Gewichte selbst mit erneuerungstheoretischen Methoden zu analysieren. Darüber hinaus liegt in vielen Anwendungen der vorliegenden Arbeit (z. B. in den Kapiteln 2 und 3) der BRW-Fall vor.

Es sei schließlich angemerkt, dass Σ_n in diesem Abschnitt die Gestalt $\Sigma_n = \sum_{|v|=n} L(v)\delta_{S(v)}$ hat. Wenn (B1) gilt, bezeichnet $\overline{\mathbf{S}}$ wie zuvor einen Standard-Random-Walk mit Zuwachsverteilung $\overline{\Sigma}_1$.

1.3.1 Grundlegende Formeln und Ergebnisse im BRW-Fall

Den Einstieg in diesen Abschnitt bildet die Spezialisierung des Ergebnissses in Bemerkung 1.1.8 auf den BRW-Fall sowie die Übertragung auf Stopplinien in diesem Fall:

1.3.1 Folgerung. *Es gelte Bedingung* (B1)*. Weiter seien $n \geq 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, so dass $f(\overline{S}_n)$ integrierbar ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\, f(\overline{S}_n) = \mathbb{E} \sum_{|v|=n} L(v) f(-\log L(v)). \tag{1.35}$$

Ist σ eine Stoppzeit und $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ die zugehörige HSL, so gilt ferner

$$\mathbb{E}\, f(\overline{S}_\sigma)\, \mathbb{1}_{\{\sigma<\infty\}} = \mathbb{E} \sum_{v \in \mathcal{T}} L(v) f(-\log L(v)). \tag{1.36}$$

Gleichung (1.35) ermöglicht die Berechnung wichtiger Kenngrößen des gewichteten Verzweigungsmodells (unter Vorbehalt ihrer Existenz):

$$\mathbb{E}\, \overline{S}_1 = -\, \mathbb{E} \sum_{i \geq 1} T_i \, \log T_i, \tag{1.37}$$

$$\mathbb{E}\, |\overline{S}_1|^p = \mathbb{E} \sum_{i \geq 1} T_i \, |\log T_i|^p, \tag{1.38}$$

$$\mathbb{E}\, e^{\overline{S}_1} = \mathbb{E}\, N, \tag{1.39}$$

$$\mathbb{E}\, e^{\overline{S}_1^>}\, \mathbb{1}_{\{\sigma^> < \infty\}} = \mathbb{E}\, N_1^>, \tag{1.40}$$

wobei $\overline{\mathbf{S}}^>$ den Leiterhöhenprozess von $\overline{\mathbf{S}}$ und $N_1^>$ die Mächtigkeit der ersten Leiterlinie $\mathcal{S}_1^>$ bezeichne.

Die Formeln (1.37), (1.38) und (1.39) folgen aus (1.35) mit $n = 1$ und $f = \mathrm{id}$, $f = |\cdot|^p$ bzw. $f = \exp$. (1.40) folgt aus (1.36) mit $f = \exp$ und $\sigma = \sigma^>$.

1.3.2 Definition. Für $n \geq 0$ sei

$$L_n^* := \sup_{|v|=n} L(v). \tag{1.41}$$

1.3.3 Lemma. *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B3)*. Dann gilt $L_n^* \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ f. s.*

Beweis. Zunächst gelte $W_n \to 0$ f. s. für $n \to \infty$. Dann ist wegen $L_n^* \leq W_n \to 0$ f. s. $(n \to \infty)$ alles klar. Sei also $\mathbb{P}(W > 0) > 0$. In diesem Fall konvergiert der assoziierte Random-Walk $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ für $n \to \infty$ nach Satz A.1.1 f. s. gegen ∞, ist also insbesondere transient. Es ist eine wohlbekannte Tatsache in der Erneuerungstheorie (siehe Korollar 2.2.5 in Alsmeyer [3, 1991] oder Abschnitt VI.10 in Feller [30, 1971]), dass dies $\overline{U}(I) < \infty$ für alle kompakten Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ impliziert, wobei $\overline{U}$ wie gehabt das Erneuerungsmaß von $\overline{\mathbf{S}}$ bezeichne. Wegen $\overline{\mathcal{U}}_\Sigma = \overline{U}$ (siehe Korollar 1.1.9) muss dann insbesondere $\mathcal{U}_\Sigma(I) < \infty$ f. s. für alle kompakten Intervalle I gelten. Dies impliziert

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} L_n^* \in \{0, \infty\}) = 1.$$

Wegen $L_n^* \leq W_n \to W < \infty$ f. s. $(n \to \infty)$ liefert dies $\limsup_{n\to\infty} L_n^* = 0$ f. s. wie behauptet. □

1.3.2 Die Konstruktion des Leiterlinienprozesses

In diesem Abschnitt wird der Leiterlinienprozess zu einem vorgegebenen gewichteten Verzweigungsprozess basierend auf einer vorgelegten Gewichtsfolge T konstruiert. Der Leiterlinienprozess (für den BRW) wurde bereits in älteren Arbeiten verwendet, u. a. von Biggins und Kyprianou [14, 1997, Abschnitt 8] und [16, 2005, S. 618]. Die folgende Konstruktion findet ihre Berechtigung einerseits in der Anpassung der Schreibweise an das gewichtete Verzweigungsmodell und andererseits in einer weitaus größeren Genauigkeit der Argumentation.

Für festes $t \geq 0$ sei $\sigma(t)$ die durch $\sigma(t)(\mathbf{s}) := \inf\{n \geq 1 : s_n > t\}$ ($\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots)$) definierte Stoppregel. $\mathcal{S}_1^t := \mathcal{S}^t$ sei die zugehörige homogene Erstaustrittslinie. Wie gehabt dient $\mathcal{S}_1^>$ als Abkürzung für $\mathcal{S}_1^0$. Die *n-te Leiterlinie* sei analog zur Definition auf Seite 21 durch

$$\mathcal{S}_n^t := \bigcup_{v \in \mathcal{S}_{n-1}^t} v[\mathcal{S}_1^t]_v$$

gegeben. Wie bereits in Abschnitt 1.2.3 bemerkt wurde, gilt dann

$$\mathcal{S}_n^t = \mathcal{T}^{\sigma_n(t)}$$

für jedes $n \geq 1$, wobei $\sigma_n(t)$ die kumulierte n-te Kopie von $\sigma(t)$ bezeichne. Sei nun $\mathbb{V}^{(t)} := \mathbb{V}^{\sigma(t)} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n^t$. Dann hat $\mathbb{V}^{(t)}$ gemäß den Erläuterungen auf Seite 21 wieder eine Baumstruktur, indem für $v \in \mathbb{V}^{(t)}$ die Elemente aus $v[\mathcal{S}_1^t]_v$ als direkte Nachkommen von v aufgefasst werden. Allerdings ist $\mathbb{V}^{(t)}$ im Gegensatz zu $\mathbb{V}$ eine zufällige Indexmenge. Es ist nicht klar, dass jedes Element von $\mathbb{V}^{(t)}$ unendlich viele direkte Nachkommen hat, so wie das bei $\mathbb{V}$ der Fall ist. Ferner gibt es keine kanonische Ordnung der Nachkommen wie im Falle von $\mathbb{V}$. Die nun verfolgte Strategie sieht vor, die Nachfolger eines Knotens in $\mathbb{V}^{(t)}$ der Größe der korrespondierenden Gewichte nach fallend zu ordnen und bei gleichen Gewichten in lexikographischer Ordnung (d. h. gemäß $\prec_{\mathbb{V}}$) zu nummerieren. Es wird gezeigt, dass die so abgezählten neuen Gewichte $T_i^{(t)}$, $i \geq 1$, messbar sind. Nebenbei entsteht der Effekt, dass die Folge der so konstruierten Knoten monoton fallend ist, was in manchen Anwendungen (z. B. in der Analyse stochastischer Fixpunktgleichungen) durchaus nützlich ist.

1.3.4 Definition. Für eine vorgelegte Stopplinie $\mathcal{T}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\nu^{(n)} := \inf\nolimits_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(n-1)} : L(v) = \sup\nolimits_{w \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(n-1)}} L(w)\}$$

mit $\mathcal{V}^{(0)} := \emptyset$ und $\mathcal{V}^{(n)} := \{\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)}\}$ für $n \geq 1$. Dabei wird das Infimum der leeren Menge wie üblich als ∞ aufgefasst.

Für jede Stopplinie $\mathcal{T}$ gilt $\mathbb{E}\, Z_{\mathcal{T}} \leq 1$ nach Lemma 1.2.15, wenn Bedingung (B1) erfüllt ist. Insbesondere ist $(L(v))_{v \in \mathcal{T}}$ dann f. s. eine Nullfolge oder eine

Folge endlicher Länge. Daher schöpfen die in Definition 1.3.4 definierten $\nu^{(n)}$, $n \geq 1$, die Linie $\mathcal{T}$ f. s. aus, d. h.,

$$\mathcal{T} \subseteq \{\nu^{(n)} : n \geq 1\} \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

Enthält $\mathcal{T}$ nur endlich viele Knoten, so ist ∞ ein Element der Menge auf der rechten Seite dieser Gleichung und die Inklusion echt. Enthält $\mathcal{T}$ dagegen unendlich viele Elemente, so stimmen die Mengen überein, was gemäß dem folgenden Lemma im Fall $\mathcal{T} = \mathcal{S}^t$ unter der Bedingung (B1) f. s. der Fall ist:

1.3.5 Lemma. *Wenn* (B1) *gilt, ist* $|[\mathcal{S}_1^t]_v| = \infty$ *f. s. für jedes* $v \in \mathbb{V}$.

Beweis. Nach (B1) gilt $\mathbb{E} \sum_{i \geq 1} T_i = 1$, insbesondere $\mathbb{E}\, T_i \in [0, 1]$ für alle $i \geq 1$. Damit folgt aus der Jensenschen Ungleichung $\mathbb{E} - \log T_i \geq -\log \mathbb{E}\, T_i > 0$ für alle bis auf höchstens ein i. Für jedes $v \in \mathbb{V}$ und diese i konvergiert der $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$-wertige Random-Walk

$$(S_v(\underbrace{i \ldots i}_{n\text{-mal}}))_{n \geq 0}$$

mit den Zuwächsen $-\log T_i(vi \ldots i)$ f. s. gegen ∞. Insbesondere gilt $|[\mathcal{S}_1^t]_v| = \infty$ f. s. □

Es folgt nun ein technisches Lemma über die $\nu^{(n)}$, das wieder in der Situation einer allgemeinen Stopplinie $\mathcal{T}$ formuliert ist:

1.3.6 Lemma. *Ist* $\mathcal{T}$ *eine Stopplinie und sind die* $\nu^{(n)}$, $n \geq 1$, *gemäß Definition 1.3.4 gegeben, so gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *ist* $\sup_{v \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(n-1)}} L(v)$ $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$*-messbar (wobei das Supremum über die leere Menge als* 0 *definiert sei) und für jedes* $v \in \mathbb{V}$ *ist* $\{v \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(n-1)}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$.

(ii) Für jedes $n \geq 1$ *ist* $\nu^{(n)} : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{V} \cup \{\infty\}, \mathfrak{B}(\mathbb{V} \cup \{\infty\}))$ $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$*-messbar.*

(iii) $L(\nu^{(n)})$ *ist* $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$*-messbar, wobei* $L(\nu^{(n)}) = 0$ *auf* $\{\nu^{(n)} = \infty\}$ *sei* $(n \geq 1)$.

Beweis. (iii) folgt vermöge der Gleichung $L(\nu^{(n)}) = \sum_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{\nu^{(n)} = v\}} \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T}\}} L(v)$ aus (ii). Es genügt also (i) und (ii) zu beweisen, was durch Simultaninduktion nach n erledigt wird.

Zunächst gilt $\{v \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(0)}\} = \{v \in \mathcal{T}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ nach Lemma 1.2.7. Weiter ist $\sup_{v \in \mathcal{T}} L(v) = \sup_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T}\}} L(v)$ nach Definition von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ (siehe (1.22)) $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbar. Weiter folgt

$$\begin{aligned} \{\nu^{(1)} = v\} \quad &= \quad \{v \in \mathcal{T}\} \cap \{\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T}\}} L(v) = \sup_{w \in \mathcal{T}} L(w)\} \\ &\qquad \cap \bigcap_{u \prec_{\mathbb{V}} v} \{u \notin \mathcal{T}\} \cup \{\mathbb{1}_{\{u \in \mathcal{T}\}} L(u) \neq \sup_{w \in \mathcal{T}} L(w)\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \,. \end{aligned}$$

Für $n > 1$ gilt $\{v \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(n-1)}\} = \{v \in \mathcal{T},\, \nu^{(1)} \neq v, \ldots, \nu^{(n-1)} \neq v\}$, was nach Induktionsvoraussetzung messbar ist. Damit ist auch $\sup_{v \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(n-1)}} L(v) = \sup_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{V}^{(n-1)}\}} L(v)$ messbar. Der Rest folgt analog zum Fall $n = 1$. $\square$

Mithilfe der $\nu^{(i)}$, $i \geq 1$, kann unter der Bedingung (B1), die für den Rest des Abschnitts als erfüllt angenommen wird, die Basisfolge $(T_i^{(t)})_{i \geq 1}$ definiert werden, indem die Familie $(L(v))_{v \in \mathcal{S}^t}$ entlang der Folge $(\nu^{(i)})_{i \geq 1}$ abgezählt wird, d. h.,

$$T_i^{(t)} := L(\nu^{(i)})\, \mathbb{1}_{\{\nu^{(i)} < \infty\}}, \quad i \geq 1.$$

Diese Ordnung soll nun auf den gesamten Baum $\mathbb{V}^{(t)}$ übertragen werden. Diese Übertragung ist aufwändig in der Notation, benötigt jedoch keine grundlegend neuen Ideen. Seien also $\nu^{(\varnothing)} := \varnothing$ und für $v \in \mathbb{V}$ und $i \geq 1$ in Analogie zur Definition 1.3.4

$$\begin{aligned} \nu^{(vi)} &:= \inf\nolimits_{\prec_{\mathbb{V}}} \left\{ w \in \mathcal{S}_1^t(\nu^{(v)}) \setminus \mathcal{V}_v^{(i-1)} : L(w) = \sup_{u \in \mathcal{S}_1^t(\nu^{(v)}) \setminus \mathcal{V}_v^{(i-1)}} L_{\nu^{(v)}}(u) \right\} \\ &= \nu^{(v)}[\nu^{(i)}]_{\nu^{(v)}}, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{V}_v^{(0)} := \emptyset$ und $\mathcal{V}_v^{(n)} := \{\nu^{(v1)}, \ldots, \nu^{(v(n-1))}\}$ für $n \geq 1$ sei. Weiterhin sei $T^{(t)}(v) := (T_i^{(t)}(v))_{i \geq 1} := (L_{\nu^{(v)}}(\nu^{(vi)}))_{i \geq 1}$, $v \in \mathbb{V}$. Schließlich sei $\mathbf{T}^{(t)} := (T^{(t)}(v))_{v \in \mathbb{V}}$. $\mathbf{T}^{>}$ wird als Abkürzung für $\mathbf{T}^{(0)}$ und $T^{>}(v)$ als Abkürzung für $T^{(0)}(v)$ verwendet. Mit $T^{(t)}$ und $T^{>}$ seien $T^{(t)}(\varnothing)$ bzw. $T^{>}(\varnothing)$ bezeichnet. $\mathbf{T}^{(t)}$ ist der Leiterlinienprozess. Um zu zeigen, dass der Leiterlinienprozess ein gewichtetes Verzweigungsmodell gemäß Abschnitt 1.1.2 definiert, muss gezeigt werden, dass die Familie $(T^{(t)}(v))_{v \in \mathbb{V}}$ eine Familie von u. i. v. Zufallsvariablen bildet. Bevor dies allerdings in Angriff genommen wird, sind noch einige technische Hilfsaussagen zu beweisen:

1.3.7 Lemma. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Für jedes $v \in \mathbb{V}$ und $i \geq 1$ sind $\sup_{u \in \mathcal{S}_1^t(\nu^{(v)}) \setminus \mathcal{V}_v^{(i-1)}} L_{\nu^{(v)}}(u)$ $\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t_{|v|+1}}$-messbar und $\{w \in \mathcal{S}_1^t(\nu^{(v)}) \setminus \mathcal{V}_v^{(i-1)}\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}^t_{|v|+1}}$.

(ii) Für jedes $v \in \mathbb{V}$ und jedes $i \geq 1$ ist $\nu^{(vi)} : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{V} \cup \{\infty\}, \mathfrak{B}(\mathbb{V} \cup \{\infty\}))$ $\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t_{|v|+1}}$-messbar und f. s. $\mathbb{V}$-wertig.

(iii) Für jedes $v \in \mathbb{V}$ und $i \geq 1$ ist $T_i^{(t)}(v)$ $\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t_{|v|+1}}$-messbar, wobei $T_i^{(t)}(v) = 0$ auf $\{\nu^{(v)} = \infty\}$ sei.

Beweis. (i) und (ii) werden durch Simultaninduktion nach $|v|$ bewiesen, die Messbarkeitsaussage in (iii) folgt einfach aus (i) und (ii). Für $|v| = 0$ liefert Lemma 1.3.6 die Behauptung. Im Induktionsschritt kann man nun genauso wie im Beweis von Lemma 1.3.6 schließen, indem man von v auf vi, $i \geq 1$, schließt und dabei (i) und (ii) durch Simultaninduktion nach i unter Verwendung von Lemma 1.2.10 beweist. □

1.3.8 Lemma. *Es gelte* (B1). *Die* $\nu^{(v)}$, $v \in \mathbb{V}$, *seien die Abzählung des Baumes* $\mathbb{V}^{(t)}$ *für ein* $t \geq 0$. *Dann sind die* $[\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{\nu^{(v)}}$, $|v| = n$, *stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit derselben Verteilung wie* $\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}$ *und unabhängig von* $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_n^t}$.

Beweis. Seien $k, m \in \mathbb{N}$, $v^1, \ldots, v^k \in \mathbb{N}^n$, $A_1, \ldots A_k \in \mathfrak{B}([0,\infty) \times \mathbb{R})^{\mathbb{V}}$ und $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{B}([0,\infty))^{\mathbb{N}}$. Dann gilt für jede beliebige Auswahl von Knoten $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{V}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{\nu^{(v^i)} = v_i,\, [\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{\nu^{(v^i)}} \in A_i\} \cap \bigcap_{j=1}^{m}\{T(w_j) \in B_j,\, w_j \prec \mathcal{S}_n^t\}\right) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{\nu^{(v^i)} = v_i\} \cap \bigcap_{j=1}^{m}\{T(w_j) \in B_j,\, w_j \prec \mathcal{S}_n^t\}\right) \\
&\quad\quad \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{[\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{v_i} \in A_i\}\right),
\end{aligned}$$

denn gilt $v_i \preceq w_j$ für ein Paar (i,j), so folgt $\mathbb{P}(\nu^{(v^i)} = v_i,\, w_j \prec \mathcal{S}_n^t) = 0$. Beide Seiten der Gleichung verschwinden dann. Gibt es kein Paar (i,j) mit $v_i \preceq w_j$, so ist die Familie der $T(w_j)$ und $\mathbb{1}_{\{w_j \prec \mathcal{S}_n^t\}}$, $1 \leq j \leq m$, stochastisch unabhängig von der Familie der $[\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{v_i}$, $1 \leq i \leq k$, und die Behauptung folgt ebenfalls. Liegen die v_i auf einer Linie in $\mathbb{V}$, so sind die $\{[\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{v_i} \in A_i\}$, $1 \leq i \leq k$, unabhängig und es folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{[\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{v_i} \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{v_i} \in A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left(\mathbf{L} \otimes \mathbf{S} \in A_i\right).$$

Durch Summation über alle möglichen Wahlen von $v_1, \ldots, v_k$, die auf einer homogenen Linie liegen, erhält man:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{\nu^{(v_i)}} \in A_i,\, 1 \leq i \leq k,\, T(w_j) \in B_j,\, w_j \prec \mathcal{S}_n^t, 1 \leq j \leq m) \\
&= \sum_{v_1, \ldots, v_k} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{k}\{\nu^{(v_i)} = v_i,\, [\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{v_i} \in A_i\} \cap \bigcap_{j=1}^{m}\{T(w_j) \in B_j,\, w_j \prec \mathcal{S}_n^t\}\right] \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{T(w_j) \in B_j,\, w_j \prec \mathcal{S}_n^t\}\right) \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{S} \in A_i),
\end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass alle $\nu^{(v)}$ f. s. endlich sind. Insgesamt ist die Behauptung damit gezeigt. □

1.3.9 Satz. $(T^{(t)}(v))_{v \in \mathbb{V}}$ *ist eine Familie u. i. v. Zufallsvariablen.*

Beweis. Es wird im Folgenden durch Induktion gezeigt, dass für jedes $n \geq 0$ $(T^{(t)}(v))_{|v| \leq n}$ eine Familie von u. i. v. Zufallsvariablen ist. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen; sei also $n > 0$. Seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{V}$ mit $|v_i| \leq n$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Dabei darf o. B. d. A. angenommen werden, dass es ein $m_1 \leq m$ gibt, so dass $|v_i| = n$ für $i = 1, \ldots, m_1$ und $|v_i| < n$ für $m_1 < i \leq m$ gilt. Dann sind die $T^{(t)}(v_i)$, $1 \leq i \leq m_1$, Funktionen von $([\mathbf{L} \otimes \mathbf{S}]_{\nu(v_i)})_{1 \leq i \leq m_i}$, also nach Lemma 1.3.8 unabhängig von $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_n^t}$. Eine Kombination der Lemmata 1.2.10 und 1.3.7 liefert, dass die $T^{(t)}(v_i)$, $m_1 < i \leq m$, $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_n^t}$-messbar und damit unabhängig von $(T^{(t)}(v_i))_{1 \leq i \leq m_1}$ sind. Schließlich sind die $T^{(t)}(v_i)$, $m_1 < i \leq m$, nach Induktionsvoraussetzung und die $T^{(t)}(v_i)$, $1 \leq i \leq m_1$, nach Lemma 1.3.8 stochastisch unabhängig. □

1.3.3 Vererbung von Eigenschaften auf den Leiterlinienprozess

1.3.10 Lemma. *Unter* (B1) *gilt für jede HSL* $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\sigma$ *mit* $\mathbb{P}(\sigma < \infty) = 1$*:*

$$W = \sum_{v \in \mathcal{T}} L(v)\,[W]_v \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s. \tag{1.42}$$

Ist $\mathbb{E}\,W = 1$*, so gilt überdies*

$$Z_{\mathcal{T}} = \sum_{v \in \mathcal{T}} L(v) = \mathbb{E}(W \mid \mathcal{A}_{\mathcal{T}}) \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s. \tag{1.43}$$

Beweis. Der Beweis des Lemmas ergibt fast direkt aus Lemma 4.2 in Alsmeyer und Kuhlbusch [6, 2005]. Dabei ist zu beachten, dass in der angegebenen Quelle implizit $\mathbb{E}\,W = 1$ vorausgesetzt wird. Die Gültigkeit von (1.42) im Fall $\mathbb{E}\,W = 0$ ist allerdings evident. □

1.3.11 Lemma. *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B3)*. Ferner sei* $\mathbb{E}\,W = 1$.

(a) Ist $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 0}$ *eine Folge HSL bzgl. Stoppzeiten* σ_n *mit* $\mathbb{P}(\sigma_n < \infty) = 1$, $n \geq 0$, *so dass für jedes* $k \geq 1$ $\{|v| = k\} \preceq \mathcal{T}_n$ *für alle hinreichend großen* n *gilt, so bildet* $(Z_{\mathcal{T}_n})_{n \geq 0} = (\sum_{v \in \mathcal{T}_n} L(v))_{n \geq 0}$ *ein nichtnegatives, gleichgradig integrierbares Martingal bzgl.* $(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_n})_{n \geq 0}$*, das* $\mathbb{P}$*-f. s. und in* $\mathcal{L}^1$ *gegen* W *konvergiert.*

(b) Bezeichnet $\mathcal{S}^t$ *wie gehabt die homogene Erstaustrittslinie zum Niveau* t *(*$t \geq 0$*), so bildet* $(Z_{\mathcal{S}^t})_{t \geq 0} = (\sum_{v \in \mathcal{S}^t} L(v))_{t \geq 0}$ *ein nichtnegatives, gleichgradig integrierbares und f. s. rechtsseitig stetiges Martingal bzgl.* $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t})_{t \geq 0}$*, das f. s. und in* $\mathcal{L}^1$ *gegen* W *konvergiert.*

Beweis. Der folgende Beweis beschränkt sich auf Teil (b), da der Beweis von Teil (a) ähnlich aber einfacher ist. Darüber hinaus folgt Teil (a) auch direkt aus Proposition 5.1 in [6].
In der Situation von Teil (b) liefert Lemma 1.2.10, dass $(\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t})_{t\geq 0}$ eine Filtration ist, und Folgerung 1.2.9, dass $(Z_{\mathcal{S}^t})_{t\geq 0}$ daran adaptiert ist. Die Integrierbarkeit von $\sum_{v\in\mathcal{S}^t} L(v)$ folgt aus Lemma 1.2.21. Als sukzessive Prognose ist $(Z_{\mathcal{S}^t})_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, das folglich entlang jeder Folge $t_n \uparrow \infty$ $(n\to\infty)$ f. s. und in $\mathcal{L}^1$ gegen $\mathbb{E}(W\,|\,\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t} : t \geq 0))$ konvergiert. Als Nächstes wird gezeigt, dass W $\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t} : t\geq 0)$-messbar ist. Dazu wiederum genügt es zu zeigen, dass jedes $L(v)$ $\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t} : t\geq 0)$-messbar ist. Nun lässt sich $L(v)$ in der Form $L(v) = \lim_{t\to\infty} L(v)\,\mathbb{1}_{\{v\prec\mathcal{S}^t\}}$ darstellen, denn auf $\{L(v)>0\}$ gilt schließlich $v \prec \mathcal{S}^t$, während auf $\{L(v)=0\}$ stets $\mathbb{1}_{\{v\prec\mathcal{S}^t\}} = 0$ ist. Also konvergiert $(Z_{\mathcal{S}^{t_n}})_{n\geq 0}$ f. s. gegen W. Es bleibt zu zeigen, dass diese Konvergenz außerhalb einer Nullmenge für jede beliebige Folge $t \uparrow \infty$ stattfindet. Dies folgt nach Chung und Walsh [24, 2005, S. 27, Corollary 2], wenn gezeigt wird, dass der Prozess $(Z_{\mathcal{S}^t})_{t\geq 0}$ f. s. rechtsseitig stetige Pfade besitzt. Um dies nachzuweisen, seien $\mathcal{U}^> := \sum_{n\geq 0}\Sigma_n^>$ das zufällig gewichtete Erneuerungsmaß des Leiterlinienprozesses und

$$A := \{\mathcal{U}^>([n,n+1]) < \infty \text{ f. a. } n\in\mathbb{Z} \text{ und } Z_{\mathcal{S}^n} < \infty \text{ f. a. } n \in\mathbb{N}_0\}$$

Wegen $\mathbb{E}\,W = 1$ folgt aus Satz A.1.1, dass T die Bedingung (B4) erfüllt, insbesondere also, dass $\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n = \infty$ f. s. gilt. Dies stellt einerseits nach Gleichung (1.29) $\mathbb{E}\,Z_{\mathcal{S}^n} = 1$ für alle $n\geq 0$ und andererseits die lokale Endlichkeit des Erneuerungsmaßes $\overline{U}$ von $\overline{\mathbf{S}}$ sicher, die wiederum nach (1.20) die f. s. lokale Endlichkeit von $\mathcal{U}$ und damit auch von $\mathcal{U}^>$ impliziert. Insgesamt folgt also $\mathbb{P}(A) = 1$. Die folgende Argumentation gilt pfadweise auf A. Für $s<t$ ist

$$\begin{aligned}
&|Z_{\mathcal{S}^s} - Z_{\mathcal{S}^t}| \\
&\quad = \left|\sum_{v\in\mathcal{S}^s} L(v) - \left(\sum_{v\in\mathcal{S}^s : S(v)>t} L(v) + \sum_{v\in\mathcal{S}^s:S(v)\leq t} L(v)[Z_{\mathcal{S}^\cdot}]_v(t-S(v))\right)\right| \\
&\quad \leq \sum_{v\in\mathcal{S}^s:S(v)\leq t} L(v) + \sum_{v\in\mathcal{S}^s:S(v)\leq t} L(v)\,[Z_{\mathcal{S}^\cdot}]_v(t-S(v))).
\end{aligned}$$

Fällt hier $t\downarrow s$, so konvergiert die erste Summe in der letzten Zeile offenbar gegen 0. Es genügt also, die zweite Summe der letzten Zeile für $t\downarrow s$ abzuschätzen. Die Indexmenge $\{v\in\mathcal{S}^s : S(v)\leq t\}$ fällt für $t\downarrow s$ gegen die leere Menge. Folglich konvergiert die letzte Summe gegen 0, wenn sie gleichmäßig in t gegen eine konvergente Reihe abgeschätzt werden kann. Dazu sei $n := \inf\{k\in\mathbb{Z} : s+1\leq k\}$. Dann gilt für jedes $t\in(s,s+1]$:

$$\sum_{v\in\mathcal{S}^s:S(v)\leq t} L(v)\,[Z_{\mathcal{S}^\cdot}]_v(t-S(v)) \leq \mathcal{U}^>((s,n]) + Z_{\mathcal{S}^n} < \infty.$$

□

1.3.12 Bemerkung. Einige Aussagen des obigen Lemmas gelten nicht nur im BRW-Fall, sondern auch allgemein für $\mathbb{R}$-wertige $X_i(v)$ ($v \in \mathbb{V}$, $i \geq 1$). Erfüllt in der allgemeineren Situation die Gewichtsfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ nämlich ebenfalls die Bedingungen (B1)-(B3) und ist $\mathbb{E}\, W = 1$, so folgt (1.42) unter der Voraussetzung $\mathbb{P}(\sigma^> < \infty) = 1$ wie oben. Auch gilt $Z_{\mathcal{S}^t} \to W$ f. s. für $t \to \infty$, was ebenfalls mit dem Beweis von Lemma 1.3.11 folgt, wobei beim Nachweis der $\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{S}^t} : t \geq 0))$-Messbarkeit von W sogar auf die Fallunterscheidung nach $L(v) > 0$ und $L(v) = 0$ verzichtet werden kann, da jedes $S(v)$ wegen $S(v) \in \mathbb{R}$ schließlich unterhalb einer Niveaulinie $\mathcal{S}^t$ liegt.

Für den folgenden Satz ist es notwendig, die Bedingung (B4) einzuführen, die unter den Annahmen (B1)-(B3) eine scharfe Charakterisierung der Nichtdegeneriertheit des Martingallimes W darstellt:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty \text{ f. s. und } \int_{(1,\infty)} \left[\frac{u \log u}{\mathbb{E}(\overline{S}_1^+ \wedge \log u)} \right] \mathbb{P}(W_1 \in du) < \infty. \tag{B4}$$

Es sei noch daran erinnert, dass dieser Abschnitt im Kontext des BRW-Falls geschrieben ist. Der assoziierte Random-Walk $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ hat in diesem Fall die Zuwachsverteilung $\overline{\Sigma}_1 = \mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i \delta_{-\log T_i}$. Ferner sei angemerkt, dass sich die Aussagen des Satzes 1.3.13 zum Teil auch aus Biggins und Kyprianou [16, 2005, Theorem 10] ergeben.

1.3.13 Satz. *T erfülle die Bedingungen* (B1)-(B3)*. Weiter sei* $\limsup_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ *f. s. Dann erfüllen auch alle $T^{(t)}$, $t \geq 0$, die Bedingungen* (B1)-(B3)*. Erfüllt T ferner die Bedingung* (B4)*, so gilt dasselbe für $T^{(t)}$.*

Beweis. Um einzusehen, dass sich die Bedingungen (B1)-(B3) auf $T^{(t)}$ ($t \geq 0$) übertragen, kann der Beweis von Proposition 5.1 in [6] übernommen werden (man beachte, dass die dort vorausgesetzte Bedingungen (B4+) nur verwendet wird, um $\limsup_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ zu zeigen, was hier nach Voraussetzung erfüllt ist). Erfüllt T nun zusätzlich (B4), so wähle man in Lemma 1.3.11 $\mathcal{T}_n := \mathcal{S}_n^t$, die HSL basierend auf $\sigma_n(t)$, wobei $\sigma_n(t)$ die n-te kumulierte Kopie der Erstaustrittszeit $\sigma(t)$ sei. Dann konvergiert $Z_{\mathcal{S}_n^>}$ für $n \to \infty$ nach Lemma 1.3.11(a) $\mathbb{P}$-f. s. und in $\mathcal{L}^1$ gegen W. Wegen $\mathbb{E}\, W = 1$ folgt dann aus Satz A.1.1, dass $(L(v))_{v\in\mathcal{S}_1^>} = (T_i^{(t)})_{i\geq 1}$ Bedingung (B4) erfüllt. □

1.3.14 Lemma. *T erfülle die Bedingungen* (B1)-(B3)*. Dann gelten für jedes $t \geq 0$ die folgenden Aussagen:*

(a) Erfüllt T die Bedingung (B4+)*, so gilt dasselbe für $T^{(t)}$.*

(b) *Gilt* $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ *f. s. und ist* $\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i\,\varphi(-\log T_i) < \infty$ *für eine monoton wachsende Funktion* $\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$*, so ist auch*

$$\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i^{(t)}\varphi(-\log T_i^{(t)}) < \infty.$$

(c) *Gilt* $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ *f. s. und ist* $\mathbb{E}\,N < \infty$*, so gilt auch* $\mathbb{E}\,N^{(t)} < \infty$*.*

Beweis. Zum Nachweis von (a) folgt zunächst unter Benutzung von Lemma 1.2.21 und der Waldschen Gleichung:

$$\sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\,T_i^{(t)} S_i^{(t)} = \mathbb{E}\sum_{v\in\mathcal{S}_1^t} L(v)S(v) = \mathbb{E}\,\overline{S}_{\sigma(t)} = \mathbb{E}\,\sigma(t)\ \mathbb{E}\,\overline{S}_1 \in (0,\infty),$$

denn $\mathbb{E}\,\overline{S}_1 = -\,\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i \log T_i \in (0,\infty)$, da T nach Voraussetzung Bedingung (B4+) erfüllt, und $\mathbb{E}\,\sigma(t) < \infty$ nach Satz 27.7 in Alsmeyer [4, 2002]. Nach Lemma 1.3.11 gilt $Z_n^{(t)} := Z_{\mathcal{S}_n^t} = \mathbb{E}(W|\,\mathcal{A}_{\mathcal{S}_n^t})$ f. s. für alle $n \geq 0$, was die gleichgradige Integrierbarkeit des gewichteten Verzweigungsprozesses $(Z_n^{(t)})_{n\geq 0}$ liefert. Satz 2.7 in Kuhlbusch [42, 2004] liefert dann $\mathbb{E}\,Z_1^{(t)}\log^+ Z_1^{(t)} < \infty$.

Zum Nachweis von (b) seien $\varphi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ monoton wachsend und

$$\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i\,\varphi(-\log T_i) < \infty.$$

Für festes $t \geq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i^{(t)}\varphi(-\log T_i^{(t)}) &= \mathbb{E}\,\varphi(\overline{S}_{\sigma(t)}) \leq \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\sigma(t)} \varphi(\overline{X}_j)\\ &= \mathbb{E}\,\sigma(t)\ \mathbb{E}\,\varphi(\overline{S}_1) = \mathbb{E}\,\sigma(t)\ \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i\cdot\varphi(-\log T_i) < \infty.\end{aligned}$$

(c) schließlich folgt mit $\varphi = \exp$ aus (b). $\square$

Kapitel 2

Die pfadweise Erneuerungsgleichung (PRE)

Gegenstand dieses Kapitels ist die *pfadweise Erneuerungsgleichung (PRE)*. Die PRE ist eine Gleichung für stochastische Prozesse, die sich als Funktionen vom in Kapitel 1 eingeführten gewichteten Baum $\mathbf{T} \otimes \mathbf{X}$ schreiben lassen. Nach einer allgemeinen Einführung werden motivierend für die Betrachtung der PRE in Abschnitt 2.1.2 Beispiele aus der Theorie der stochastischen Fixpunktgleichungen und der Theorie der Verzweigungsprozesse angeführt. In Abschnitt 2.2 wird die PRE auf Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht. Das Hauptresultat besteht dabei in einer Charakterisierung der Lösungen unter bestimmten Integrabilitätsbedingungen. Schließlich werden in Abschnitt 2.3 das asymptotische Verhalten der Lösungen untersucht und Konvergenzresultate wie in Nerman [53, 1981] hergeleitet.

2.1 Einleitung

2.1.1 Einführung der PRE

Gegeben sei das allgemeine gewichtete Verzweigungsmodell aus Kapitel 1. Ferner wird die Gültigkeit von Bedingung (B1) angenommen. $\phi = (\phi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sei ein vorgelegter produktmessbarer Prozess, d. h., $\phi : \mathbb{R} \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sei eine $\mathfrak{B} \otimes \mathcal{A}_\infty$-messbare Funktion. Dann heißt ein produktmessbarer Prozess $\Psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ Lösung der *pfadweisen Erneuerungsgleichung (PRE) (bzgl. ϕ)*, wenn

$$\Psi(t) = \phi(t) + \sum_{i\geq 1} T_i\,[\Psi]_i(t - X_i) \quad \text{f. s. für alle } t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

gilt. (Die Abkürzung *PRE* leitet sich dabei von der englischen Bezeichnung *pathwise renewal equation* ab.) ϕ heißt in dieser Situation Parameterprozess der

Gleichung. Es folgt eine kurze Motivation des Begriffs *pfadweise Erneuerungsgleichung*. Gleichung (2.1) stellt nämlich keine pfadweise Erneuerungsgleichung in dem Sinne dar, dass jeder Pfad des Prozesses Ψ eine Erneuerungsgleichung bzgl. eines (zufälligen) Maßes löst. Eine Umformulierung von Gleichung (2.1) ist nämlich

$$\Psi(t) = \phi(t) + \sum_{i \geq 1} T_i \int [\Psi]_i(t-x)\, \delta_{X_i}(dx) \quad \text{f. s.},$$

was sich durch einen zusätzlichen Shift um i im Integral von der Gleichung

$$\Psi(t) = \phi(t) + \int \Psi(t-x)\, \Sigma_1(dx) \quad \text{f. s.}$$

mit dem in Gleichung (1.12) eingeführten zufällig gewichteten Punktmaßes Σ_1 entspricht. Einerseits macht der zusätzliche Shift die Analyse der PRE komplizierter. Andererseits wird die PRE (unter geeigneten Annahmen an ϕ, Ψ und Σ_1, siehe Lemma 2.2.9) nach $\mathbb{P}$ integriert zu einer gewöhnlichen Erneuerungsgleichung:

$$\overline{\Psi}(t) = \overline{\phi}(t) + \int \overline{\Psi}(t-x)\, \overline{\Sigma}_1(dx), \tag{2.2}$$

wobei $\overline{\phi}(t) := \mathbb{E}\, \phi(t)$ und $\overline{\Psi}(t) := \mathbb{E}\, \Psi(t)$ seien ($t \in \mathbb{R}$).

Eine wichtige Rolle bei der Analyse der PRE spielt die von Σ_1 erzeugte abgeschlossene Gruppe $\subseteq \mathbb{R}$:

2.1.1 Definition. (a) Im Folgenden bezeichne $\mathbb{G}(Q)$ für ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ die kleinste abgeschlossene Untergruppe H von $(\mathbb{R}, +)$, so dass $\mu(H^c) = 0$ gilt.

(b) $\mathbb{G}(\Sigma_1)$ bezeichne die kleinste abgeschlossene Untergruppe H von $(\mathbb{R}, +)$, so dass f. s. $\Sigma_1(H^c) = 0$ gilt.

Es ist klar ersichtlich, dass $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{G}(\overline{\Sigma}_1)$ gilt (siehe Lemma 4.1 in Liu [45, 1998]). Es gibt drei mögliche Gestalten von $\mathbb{G}(\Sigma_1)$:

(1) $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R}$ (der *nichtarithmetische Fall*),

(2) $\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z}$ für ein $d > 1$ (der *d-arithmetische Fall*) und

(3) $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \{0\}$ (der *triviale Fall*).

Im trivialen Fall $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \{0\}$ reduziert sich (2.1) zu einer Familie unabhängiger Gleichungen:

$$\Psi(t) = \phi(t) + \sum_{i \geq 1} T_i\, [\Psi]_i(t) \quad \text{f. s.} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Bei festem t lässt sich das Problem dann darauf zurückführen, die endogenen Fixpunkte der stochastischen Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i \geq 1} T_i X_i \tag{3.2}$$

zu bestimmen (siehe Abschnitt 3.2.8 in Kapitel 3). Daher wird der triviale Fall im Folgenden ausgeschlossen.

2.1.2 Zwei Beispiele zur PRE

2.1.2 Beispiel (Stochastische Fixpunktgleichungen). Dieses Beispiel stellt eine Verbindung zu stochastischen Fixpunktgleichungen her. Da diese in Kapitel 3 ausführlich behandelt werden, wird hier nur eine ganz knappe Einführung gegeben.

Gegeben sei eine zufällige Folge $T = (T_i)_{i \geq 1}$ mit $\sum_{i \geq 1} \mathbb{E}\, T_i^\alpha = 1$ für ein $\alpha > 0$. Betrachtet werden dann die Fixpunktgleichungen

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i \geq 1} T_i X_i \tag{3.2}$$

und

$$X \stackrel{d}{=} \inf_{i \geq 1 : T_i > 0} \frac{X_i}{T_i}, \tag{3.1}$$

wobei $X, X_1, X_2, \ldots$ u. i. v. und von T unabhängige nichtnegative Zufallsgrößen seien. Die Verteilung von X wird mit μ bezeichnet. μ heißt dann Lösung von (3.2) bzw. (3.1). Lösungen dieser Gleichungen treten in zahlreichen Feldern der angewandten Mathematik auf; Details dazu finden sich in Kapitel 3.

(3.2) und (3.1) sind äquivalent zur Funktionalgleichung

$$f(t) = \mathbb{E}\left(\prod_{i \geq 1} f(t\,T_i)\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

wobei f im Falle von Gleichung (3.2) die Laplacetransformierte von X und im Falle von Gleichung (3.1) die linksseitig stetige Überlebensfunktion von X bezeichne. In Abschnitt 3.1.3 wird Gleichung (2.3) *disintegriert*, d. h., aus einer (monoton fallenden, linksseitig stetigen) Lösung f von (2.3) wird auf dem Grundraum Ω (wobei hier die Terminologie von Kapitel 1 verwendet wird und Ω daher eine Familie $\mathbf{T} = (T(v))_{v \in \mathbb{V}}$ von unabhängigen Kopien von T enthält) ein monoton fallender $\mathfrak{B} \otimes \mathcal{A}_\infty$-messbarer stochastischer Prozess $\overline{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, 1]$ konstruiert, der eine disintegrierte Variante der Funktionalgleichung (2.3) löst:

$$\overline{\mathcal{F}}(t) = \prod_{i \geq 1} [\overline{\mathcal{F}}]_i(t\,T_i) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{2.4}$$

Die additive Transformation $\Psi(t) := e^{-\alpha t}(-\log \overline{\mathcal{F}}(e^t))$, $t \in \mathbb{R}$, löst dann die *homogene pfadweise Erneuerungsgleichung (HPRE)*

$$\Psi(t) = \sum_{i\geq 1} T_i^\alpha \, [\Psi]_i(t - X_i) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}, \tag{3.16}$$

wobei $X_i := -\log T_i$ sei, $i \geq 1$. Darüber hinaus liefert die linksseitige Stetigkeit von f, dass Ψ in jedem $t \in \mathbb{R}$ f. s. linksseitig stetig ist. Ebenfalls hat Ψ rechtsseitige Limiten in jedem $t \in \mathbb{R}$ (siehe Lemma 3.1.7). Dies ist der Grund, warum im nichtarithmetischen Fall die Lösungen behandelt werden, die diese Pfadeigenschaften besitzen.

2.1.3 Beispiel (Crump-Mode-Jagers-Verzweigungsprozesse). In der Situation von Beispiel 1.1.1 sei $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ ein nichtnegativer, produktmessbarer Prozess mit $\tilde{\phi}(t) = 0$ für alle $t < 0$. Ein solcher Prozess wird im Folgenden als *Charakteristik* bezeichnet. Dann heißt

$$\widetilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{\Phi}(t) := \sum_{v\in\mathbb{V}} [\tilde{\phi}]_v(t - S(v)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

allgemeiner Verzweigungsprozess gezählt nach der Charakteristik $\tilde{\phi}$ (siehe Nerman [53, 1981]). Konkrete Beispiele sinnvoller Charakteristiken und die daraus resultierenden allgemeinen Verzweigungsprozesse finden sich in Beispiel 1.1.1. An dieser Stelle sei nur noch die Charakteristik $\tilde{\phi}(t) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$ erwähnt, die den allgemeinen Verzweigungsprozess

$$\widetilde{\Phi}(t) := \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t - S(v)) = \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{S(v)\leq t\}}$$

induziert. $\widetilde{\Phi}(t)$ zählt die Anzahl der im Intervall $[0, t]$ geborenenen Individuen.

Nun sei die Existenz eines Malthusischen Parameters angenommen, d. h., die Existenz eines $\alpha > 0$ mit

$$\mathbb{E} \int e^{-\alpha t} \mathcal{Z}(dt) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{E}\, e^{-\alpha X_i} = 1.$$

In diesem Fall wird das allgemeine Verzweigungsmodell wie in Beispiel 1.1.1 in das gewichtete Verzweigungsmodell aus Kapitel 1 eingebettet, d. h. $T_i(v) := e^{-\alpha X_i(v)}$, $i \geq 1$, $v \in \mathbb{V}$. Die so definierte Gewichtsfolge $T(\varnothing)$ erfüllt Bedingung (B1). Ist nun $\tilde{\phi}$ eine beliebige Charakteristik, so löst $\Phi(t) := e^{-\alpha t}\widetilde{\Phi}(t)$ die PRE bzgl. ϕ, wobei $\phi(t) := e^{-\alpha t}\tilde{\phi}(t)$ sei. In der Tat ist

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= e^{-\alpha t} \sum_{v\in\mathbb{V}} [\tilde{\phi}]_v(t - S(v)) \\
&= e^{-\alpha t}\tilde{\phi}(t) + \sum_{i\geq 1} T_i e^{-\alpha(t-X_i)} \sum_{v\in\mathbb{V}} [\tilde{\phi}]_{iv}(t - X_i - S_i(v)) \\
&= \phi(t) + \sum_{i\geq 1} T_i \, [\Phi]_i(t - X_i) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}
\end{aligned}$$

In diesem Beispiel muss abschließend eine kurze Bemerkung zur Filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ gemacht werden. Die PRE ist für $\mathfrak{B}\otimes\mathcal{A}_\infty$-messbare Prozesse ϕ und Ψ formuliert, wobei $\mathcal{A}_\infty = \sigma(\mathbf{T}\otimes\mathbf{X})$ ist. In der Situation des Beispiels darf die Charakteristik $\tilde{\phi}$ und damit auch die Prozesse ϕ und Φ von den Lebensdauern $\lambda(v)$ abhängen. ϕ und Φ sind also nicht notwendig $\mathfrak{B}\otimes\sigma(\mathbf{T}\otimes\mathbf{X})$-messbar. Dies ruft bei der folgenden Analyse der PRE allerdings keine gravierenden Probleme hervor, weil alle Eigenschaften der zugrunde liegenden Filtration, die im Folgenden verwendet werden, nämlich die Eigenschaften

$$\sigma(T(v)\otimes X(x):\,|v|<n)\subseteq\mathcal{A}_n \text{ für jedes } n\geq 0. \tag{2.5}$$

$$\phi \text{ und } \Psi \text{ sind } \mathcal{A}_\infty\text{-messbar.} \tag{2.6}$$

$$[\phi]_v \text{ und } [\Psi]_v \text{ sind unabhängig von } \mathcal{A}_n \text{ für jedes } 0\leq n\leq |v|. \tag{2.7}$$

auch von der Filtration $(\widetilde{\mathcal{A}}_n)_{n\geq 0} := (\sigma(T(v)\otimes X(v),\lambda(v):\,|v|<n))_{n\geq 0}$ mitgebracht werden.

2.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der pfadweisen Erneuerungsgleichungen

Seien $\phi,\Psi:\mathbb{R}\times\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{B}\otimes\sigma(\mathbf{T}\otimes\mathbf{X})$-messbare Funktionen. Wie zu Beginn des Kapitels eingeführt heißt Ψ Lösung der PRE bzgl. ϕ, wenn

$$\Psi(t)=\phi(t)+\sum_{i\geq 1}T_i\,[\Psi]_i(t-X_i) \quad \text{f. s. für alle } t\in\mathbb{R} \tag{2.1}$$

gilt. Die folgende Diskussion behandelt ausschließlich *absolut summierbare Lösungen*, wobei eine Lösung Ψ absolut summierbar heißt, wenn die unendliche Reihe $\sum_{|v|=n}L(v)\,[\Psi]_v(t-S(v))$ für jedes $n\geq 0$ und jedes $t\in\mathbb{R}$ f. s. absolut konvergiert (siehe Lemma 2.2.10 für eine hinreichende Bedingung).

Von besonderer Wichtigkeit bei der Analyse der PRE ist die *homogene pfadweise Erneuerungsgleichung (HPRE)*

$$\Psi(t)=\sum_{i\geq 1}T_i\,[\Psi]_i(t-X_i) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \quad (t\in\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

Da die PRE bzgl. eines vorgelegten Prozesses ϕ eine lineare Gleichung für absolut summierbare stochastische Prozesse ist, besteht die folgende Verbindung zwischen den absolut summierbaren Lösungen der PRE bzgl. ϕ und den absolut summierbaren Lösungen der HPRE: Sind Ψ und Φ absolut summierbare Lösungen der PRE bzgl ϕ, so bildet $\Delta:=\Psi-\Phi$ eine absolut summierbare Lösung der HPRE. Ist umgekehrt Ψ eine absolut summierbare Lösung der PRE bzgl. ϕ, so besitzt Ψ eine Darstellung $\Psi=\Phi+\Delta$ für eine feste absolut summierbare Lösung Φ der PRE bzgl. ϕ und eine von Ψ abhängige absolut summierbare Lösung der

HPRE. Daher ist es vernünftig, zunächst die HPRE zu studieren, was in Abschnitt 2.2.1 geschieht. Im darauf folgenden Abschnitt 2.2.2 wird zu vorgelegtem ϕ eine feste *kanonische Lösung* Φ konstruiert. Diese Lösung dient schließlich in Abschnitt 2.2.3 zur Beschreibung der Lösungen der inhomogenen PRE.

Bevor die Präsentation der Ergebnisse beginnt, werden einige notwendige Notationen eingeführt bzw. erklärt:

- Im Folgenden bezeichnet ϕ stets den vorgegebenen Parameterprozess der PRE. ϕ wird stets als $\mathfrak{B} \otimes \sigma(\mathbf{T} \otimes \mathbf{X})$-messbar vorausgesetzt;
- Φ bezeichnet stets die zu ϕ korrespondierende kanonische Lösung der PRE bzgl. ϕ (definiert durch Gleichung (2.11) weiter unten); weitere Lösungen werden ebenfalls als produktmessbar angenommen und mit griechischen Großbuchstaben (Ψ, Δ etc.) bezeichnet;
- $\overline{\phi}$ bezeichnet die Erwartungswertfunktion von ϕ, d. h. die Funktion $t \mapsto \mathbb{E}\,\phi(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, falls $\mathbb{E}\,\phi(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall folgt aus der Produktmessbarkeit von ϕ und dem Satz von Fubini die $\mathfrak{B}$-Messbarkeit von $\overline{\phi}$. Analoge Schreibweisen werden für Φ, Ψ und ihre Beträge verwendet;
- $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ bezeichnet wie in Kapitel 1 einen Standard-Random-Walk mit Zuwachsverteilung $\overline{\Sigma}_1$ und Erneuerungsmaß $\overline{U}$.

Um die folgenden Resultate prägnant formulieren zu können, wird noch eine Definition benötigt:

2.2.1 Definition. Eine Lösung Ψ der PRE erfüllt die BIC (vom engl. Begriff *bounded integral condition*), wenn

$$\sup_{t\in\mathbb{G}(\Sigma_1)} \overline{|\Psi|}(s+t) = \sup_{t\in\mathbb{G}(\Sigma_1)} \mathbb{E}\,|\Psi(s+t)| < \infty$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt.

Im arithmetischen Fall ($\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z}$ für ein $d > 0$) erfüllt Ψ die BIC genau dann, wenn $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \overline{|\Psi|}(s+kd) < \infty$ für alle $s \in [0,d)$ ist, während die BIC im nichtarithmetischen Fall zur Bedingung $\sup_{t\in\mathbb{R}} \overline{|\Psi|}(t) < \infty$ äquivalent ist. Lemma 2.2.10 zeigt, dass die BIC hinreichend für absolute Summierbarkeit ist.

2.2.1 Die homogene PRE

Wie angekündigt beginnt die Analyse der PRE mit dem homogenen Fall. Hier ist die erste Beobachtung, dass der durch Gleichung (1.7) definierte Martingallimes W aufgefasst als in der Zeitvariablen t konstanter Prozess die HPRE löst:

$$W = \sum_{i\geq 1} T_i\,[W]_i \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{1.9}$$

Damit löst auch cW für jedes $c \in \mathbb{R}$ die HPRE. Im arithmetischen Fall $\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z}$ für ein $d > 0$ ist sogar pW eine Lösung der HPRE, wenn $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine d-periodische, messbare Funktion ist. Satz 2.2.2 zeigt, dass es keine weiteren Lösungen Ψ der HPRE gibt, die die BIC erfüllen. Der Fall $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R}$ wird von Satz 2.2.3 behandelt, der aussagt, dass jede Lösung Ψ, die die BIC erfüllt, unter Zusatzbedingungen an das Pfadverhalten von Ψ oder $\overline{\Psi}$ von der Gestalt cW für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist.

2.2.2 Satz (Arithmetischer Fall). *Angenommen $\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z}$ für ein $d > 0$. Dann gelten:*

(a) Jede Lösung Ψ der HPRE, die die BIC erfüllt, ist von der Gestalt

$$\Psi(t) = p(t)\,W \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s. \quad f.\,a.\ t \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

für eine messbare d-periodische Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Ist umgekehrt eine messbare d-periodische Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, so stellt pW eine Lösung der HPRE dar, die die BIC erfüllt.

2.2.3 Satz (Nichtarithmetischer Fall). *Sei $\mathbb{G}(\overline{\Sigma}_1) = \mathbb{R}$. Dann gelten:*

(a) Angenommen Ψ ist eine Lösung der HPRE und erfüllt die BIC. Dann sind die folgenden Bedingungen (i)-(iv) jeweils hinreichend dafür, dass Ψ von der Gestalt

$$\Psi(t) = cW \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s. \quad f.\,a.\ t \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ ist.

(i) Ψ ist in jedem $t \in \mathbb{R}$ f. s. linksseitig stetig mit existierendem rechtsseitigen Limes und lokal gleichgradig integrierbar, d. h., $(\Psi(t))_{t\in K}$ ist für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ eine gleichgradig integrierbare Familie von Zufallsgrößen.

(ii) $\overline{\Psi}$ ist linksseitig stetig mit rechtsseitigen Limiten.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} \overline{S}_n = \infty$ f. s. und $\lim_{t\to-\infty} \overline{\Psi}(t)$ existiert in $\mathbb{R}$.

(iv) $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ ist rekurrent und es gibt ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so dass $\overline{\Psi}$ einen links- oder rechtsseitigen Limes in t_0 besitzt.

(b) Umgekehrt ist jedes cW ($c \in \mathbb{R}$) eine Lösung der HPRE, die die BIC erfüllt.

Eine Konsequenz der Sätze 2.2.2 und 2.2.3 ist die Tatsache, dass jede Lösung Ψ, die den Bedingungen der Sätze genügt, in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ f. s. verschwindet, wenn $W = 0$ f. s. gilt.

2.2.2 Die kanonische Lösung

In diesem Abschnitt wird die kanonische Lösung zur PRE bzgl. ϕ konstruiert. Diese Konstruktion kommt allerdings nicht ohne einige Voraussetzungen an ϕ und Σ_1 aus. Die zugrunde liegende Idee ist, die kanonische Lösung Φ in ähnlicher Weise zu definieren, wie der allgemeine Verzweigungsprozess gezählt nach einer Charakteristik $\tilde{\phi}$ in Beispiel 2.1.3 definiert ist.

Für einen gegebenen Parameterprozess ϕ ist die *kanonische Lösung (der PRE bzgl. ϕ)* durch

$$\Phi(t) := \sum_{v \in \mathbb{V}} L(v)\,[\phi]_v(t - S(v)) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.11}$$

definiert.

Dabei ist zu beachten, dass die Reihe $\Phi(t) = \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,[\phi]_v(t - S(v))$ i. A. nicht konvergent sein muss. Fasst man sie jedoch vorübergehend als symbolischen Ausdruck auf, so lässt sich wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,[\phi]_v(t - S(v)) \\ &= \phi(t) + \sum_{i\geq 1} T_i \sum_{v\in\mathbb{V}} L_i(v)\,[\phi]_{iv}(t - S(iv)), \end{aligned} \tag{2.12}$$

wobei $S(\varnothing) = 0$ ausgenutzt wurde. Überdies gilt $S(iv) = X_i + S_i(v)$ für alle $i \geq 1$ und $v \in \mathbb{V}$. Folglich gilt für jedes $i \geq 1$:

$$[\Phi]_i(t - X_i) = \sum_{v\in\mathbb{V}} L_i(v)\,[\phi]_{iv}(t - X_i - S_i(v)) = \sum_{v\in\mathbb{V}} L_i(v)\,[\phi]_{iv}(t - S(iv)).$$

Setzt man dies wiederum in (2.12) ein, so folgt, dass Φ die PRE bzgl. ϕ (zumindest in symbolischer Weise) löst. Der folgende Satz stellt eine Bedingung bereit, die sicherstellt, dass die kanonische Lösung Φ eine wohldefinierte absolut summierbare Lösung der PRE ist. Für die Formulierung des Satzes wird der Begriff der *direkten Riemann Integrierbarkeit (d. R. I.)* benötigt (siehe z. B. Asmussen [11, 2003, S. 154] oder Definition 2.5.1 in Alsmeyer [3, 1991] für eine präzise Definition).

2.2.4 Satz. *Die folgenden Bedingungen sind hinreichend dafür, dass Φ die BIC erfüllt:*

(a) $\overline{|\phi|}$ *ist d. R. i. und* $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ *ist transient.*

(b) $\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z}$ *für ein* $d > 0$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{|\phi|}(s + kd) < \infty$ *für jedes* $s \in [0, d)$ *und* $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ *ist transient.*

Ferner ist die folgende Bedingung hinreichend für die lokale Endlichkeit von $\overline{\Phi}$*:*

(c) Σ_1 *ist f. s. auf die positive Halbachse* $[0, \infty)$ *konzentriert,* ϕ *ist nichtnegativ und verschwindet auf* $(-\infty, 0)$ *und* $\overline{\phi}$ *ist lokal endlich.*

In allen drei Fällen (a), (b) und (c) ist Φ eine absolut summierbare Lösung der PRE mit Erwartungswertfunktion

$$\overline{\Phi}(t) = \overline{\phi} * \overline{U}(t) := \int \overline{\phi}(t-s)\,\overline{U}(ds) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{2.13}$$

Die Bedingung (c) des Satzes ist an die Situation der allgemeinen Verzweigungsprozesse (siehe Beispiel 2.1.3) angepasst. Dort beschreibt X_i nämlich den Geburtszeitpunkt des i-ten Nachkommens des Urahns $\varnothing$ und ist folglich nichtnegativ. Dies impliziert, dass Σ_1 f. s. auf die positive Halbachse konzentriert ist. Bezeichnet $\tilde{\phi}(t)$ ferner eine Charakteristik, und ist $\phi(t) = e^{-\alpha t}\tilde{\phi}$, wobei $\alpha > 0$ der Malthusische Exponent sei, so gilt $\phi(t) = 0$ für alle $t < 0$, da Charakteristiken per definitionem auf $(-\infty, 0)$ verschwinden, was darin begründet ist, dass ein allgemeiner Verzweigungsprozess zum Zeitpunkt t nur von Individuen abhängen sollte, die bis zum Zeitpunkt t bereits geboren wurden. Und schließlich sind Charakteristiken stets nichtnegativ.

In der allgemeinen Situation der Analyse der inhomogenen PRE werden im nichtarithmetischen Fall noch detailliertere Informationen über das Pfadverhalten von Φ benötigt. Diese Informationen stellt das folgende Lemma bereit:

2.2.5 Lemma. *Seien $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R}$, $\overline{|\phi|}$ d. R. i. und $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ transient. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Wenn $\overline{\phi}$ linksseitig stetig mit existierenden rechtsseitigen Limiten ist, so gilt dasselbe für $\overline{\Phi}$.

(b) Wenn $\mathbb{E}\,\overline{S}_1 \in (0, \infty]$ ist, so gilt $\lim_{t\to-\infty} \overline{\Phi}(t) = 0$.

(c) Wenn $\lim_{t\downarrow t_0} \overline{\phi}(t)$ oder $\lim_{t\uparrow t_0} \overline{\phi}(t)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ existieren, so existiert der entsprechende Grenzwert auch für $\overline{\Phi}$.

2.2.3 Der inhomogene Fall

In diesem Abschnitt wird angenommen, dass der assoziierte Random-Walk $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ transient ist. Für das Beispiel 2.1.3 stellt dies keine Einschränkung dar, da in der Situation der allgemeinen Verzweigungsprozesse $X_i \geq 0$ f. s. für alle $i \geq 1$ und daher $\overline{\Sigma}_1 = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i\delta_{X_i}$ auf die positive Halbachse konzentriert ist. $\overline{\mathbf{S}}$ ist dann ein Erneuerungsprozess. Aus technischer Sicht wird die Transienz des assoziierten Random-Walks $\overline{\mathbf{S}}$ benötigt, um sicherzustellen, dass das zugehörige Erneuerungsmaß $\mathcal{U}$ lokal endlich ist, was für die sinnvolle Definition der kanonischen Lösung Φ unerlässlich ist (siehe Satz 2.2.4). Die folgenden Sätze ergeben sich als Kombination der Ergebnisse der Abschnitte 2.2.1 und 2.2.2 und ermöglichen die Auflösung der inhomogenen PRE:

2.2.6 Satz (Arithmetischer Fall). *Seien* $\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z}$ *für ein* $d > 0$ *und* $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ *transient. Weiterhin gelte* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{|\phi|}(s+kd) < \infty$ *für alle* $s \in [0,d)$. *Dann gelten:*

(a) *Jede Lösung* Ψ *der PRE bzgl.* ϕ, *die die BIC erfüllt, hat eine Darstellung der Form*

$$\Psi(t) = p(t)W + \Phi(t) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \quad \text{f. a. } t \in \mathbb{R} \tag{2.14}$$

für eine d*-periodische messbare Funktion* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) *Umgekehrt wird durch* $pW + \Phi$ *für jede* d*-periodische messbare Funktion* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *eine Lösung der PRE bzgl.* ϕ *definiert, die die BIC erfüllt.*

2.2.7 Satz (Nichtarithmetischer Fall). *Sei* $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R}$. *Ferner seien* $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ *transient und* $\overline{|\phi|}$ *d. R. i. Dann gelten:*

(a) *Sei* Ψ *eine Lösung der PRE bzgl.* ϕ. *Dann sind die folgenden Bedingungen (i)-(iii) hinreichend dafür, dass* Ψ *von der Gestalt*

$$\Psi(t) = cW + \Phi(t) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \quad \text{f. a. } t \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ *ist:*

(i) ϕ *und* Ψ *sind lokal gleichgradig integrierbar und ferner in jedem* $t \in \mathbb{R}$ *f. s. linksseitig stetig mit existierendem rechtsseitigen Limes.*

(ii) $\overline{\phi}$ *und* $\overline{\Psi}$ *sind linksseitig stetig mit rechtsseitigen Limiten.*

(iii) $\mathbb{E}\,\overline{S}_1 \in (0,\infty]$ *und* $\lim_{t\to-\infty} \overline{\Psi}(t)$ *existiert.*

(b) *Umgekehrt bildet jedes* $cW + \Phi$ $(c \in \mathbb{R})$ *eine Lösung der PRE bzgl.* ϕ, *die die BIC erfüllt.*

Dieser Abschnitt wird von einem Satz beschlossen, der die Situation von Beispiel 2.1.3 aufgreift. Er sagt aus, dass die allgemeinen Verzweigungsprozesse, die in Nerman [53, 1981] betrachtet werden, eindeutig durch die rekursive Gleichung charakerisiert werden, die sie erfüllen (siehe [53, S. 369]). Im Folgenden seien also $X_i \geq 0$ und $T_i = e^{-\alpha X_i}$ für den Malthusischen Parameter $\alpha > 0$ $(i \geq 1)$. Weiterhin seien $\tilde{\phi}$ eine Charakteristik im Sinne von Beispiel 2.1.3 und $\widetilde{\Phi}$ der zugehörige allgemeine Verzweigungsprozess gezählt mit Charakteristik ϕ.

2.2.8 Korollar. *In der gegebenen Situation habe* $\tilde{\phi}$ *eine lokal endliche Erwartungswertfunktion. Weiter seien* $\phi(t) := e^{-\alpha t}\tilde{\phi}(t)$ *und* $\Phi(t) := e^{-\alpha t}\widetilde{\Phi}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. *Dann ist* $\overline{\Phi}$ *lokal endlich und* Φ *ist (bis auf Versionen) der eindeutige produktmessbare Prozess, der auf* $(-\infty, 0)$ *verschwindet, lokal endliche Erwartung besitzt und die PRE bzgl.* ϕ *löst. Insbesondere ist* $\widetilde{\Phi}$ *(bis auf Versionen) der eindeutige auf* $(-\infty, 0)$ *verschwindende Prozess mit lokal endlicher Erwartung, der der Gleichung*

$$\widetilde{\Phi}(t) = \tilde{\phi}(t) + \sum_{i\geq 1} [\widetilde{\Phi}]_i(t - X_i) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \quad (t \in \mathbb{R})$$

genügt.

2.2.4 Die integrierte PRE

2.2.9 Lemma. *Sei Ψ eine Lösung der PRE bzgl. ϕ. $\overline{\phi}$ und $\overline{\Psi}$ seien auf ganz $\mathbb{R}$ endlich und es gelte $\int \overline{|\Psi|}(t-x)\,\overline{\Sigma}_1(dx) < \infty$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Dann löst $\overline{\Psi}$ die Erneuerungsgleichung*

$$\overline{\Psi} = \overline{\phi} + \overline{\Psi} * \overline{\Sigma}_1.$$

Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn Ψ die BIC erfüllt.

Proof. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}(t) &= \mathbb{E}\left[\phi(t) + \sum_{i\geq 1} T_i\,[\Psi]_i(t-X_i)\right] \\ &= \overline{\phi}(t) + \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{i\geq 1} T_i\,[\Psi]_i(t-X_i)\,\middle|\,\mathcal{A}_1\right]\right). \end{aligned}$$

Da $\sum_{i\geq 1} T_i\,|[\Psi]_i(t-X_i)|$ nach Voraussetzung endliche Erwartung besitzt, liefert eine Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz für bedingte Erwartungswerte die Vertauschbarkeit der bedingten Erwartung und der unendlichen Reihe. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}(t) &= \overline{\phi}(t) + \mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 1} \mathbb{E}(T_i\,[\Psi]_i(t-X_i)|\,\mathcal{A}_1)\right) \\ &= \overline{\phi}(t) + \mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 1} T_i\,\overline{\Psi}(t-X_i)\right) \\ &= \overline{\phi}(t) + \int \overline{\Psi}(t-x)\,\overline{\Sigma}_1(dx). \end{aligned}$$

□

2.2.5 Die Beweise im homogenen Fall

2.2.10 Lemma. *Sei Ψ eine Lösung der HPRE, die die BIC erfüllt. Dann ist Ψ absolut summierbar, d. h., $\sum_{|v|=n} L(v)\,[\Psi]_v(t-S(v))$ konvergiert f. s. absolut für jedes $t \in \mathbb{R}$.*

Proof. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann liefern der Satz von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwarzngswerte, die Unabhängigkeit von $[\Psi]_v$ und $\mathcal{A}_n$ für $|v| = n$ und

Gleichung (1.17), dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} |L(v)\,[\Psi]_v(t-S(v))|\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} \mathbb{E}\left[L(v)\,|[\Psi]_v(t-S(v))|\,|\,\mathcal{A}_n\right]\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} L(v)\overline{|\Psi|}(t-S(v))\right) \\
&= \mathbb{E}\,\overline{|\Psi|}(t-\overline{S}_n) \\
&\le \sup_{s\in t+\mathbb{G}(\Sigma_1)} \overline{|\Psi|}(s) < \infty.
\end{aligned}$$

gilt. Insbesondere ist Ψ daher absolut summierbar. □

2.2.11 Lemma. *Sei Ψ eine absolut summierbare Lösung der HPRE. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$ auf einer Menge der Wahrscheinlichkeit 1:*

$$\Psi(t) = \sum_{|v|=n} L(v)\,[\Psi]_v(t-S(v)) \tag{2.16}$$

für alle $n \geq 0$. Ferner gilt

$$\Psi(t) = \sum_{v\in\mathcal{T}} L(v)\,[\Psi]_v(t-S(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{2.17}$$

für jede f. s. beschränkte Stopplinie $\mathcal{T}$.

2.2.12 Bemerkung. Die Aussagen des Lemmas gelten auch, wenn die Voraussetzung der absoluten Summierbarkeit von Ψ durch die Voraussetzung der Nichtnegativität, d. h. $\Psi(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ersetzt wird. Dann können alle Rechnungen im Beweis von Lemma 2.2.11 genauso durchgeführt werden, wobei dann der Wert ∞ angenommen werden kann.

Beweis von Lemma 2.2.11. Sei $A_v(t) := \{[\Psi]_v(t) = \sum_{i\geq 1} T_i(v)\,[\Psi]_{vi}(t-X_i(v))\}$, $v \in \mathbb{V}$, $t \in \mathbb{R}$. Dann liefert die Invarianz von $\mathbb{P}$ unter dem Shiftoperator $[\cdot]_v$ $\mathbb{P}(A_v(t)) = 1$ für alle $v \in \mathbb{V}$ und $t \in \mathbb{R}$. Sei nun

$$B_v(t) := \left\{[\Psi]_v(t-S(v)) = \sum_{i\geq 1} T_i(v)\,[\Psi]_{vi}(t-S(vi))\right\} \quad (v \in \mathbb{V}, t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(B_v(t)) = \mathbb{E}(\mathbb{P}[B_v(t)|S(v)]) = \int \mathbb{P}(A_v(t-s))\ \mathbb{P}(S(v) \in ds) = 1$$

für jedes $v \in \mathbb{V}$ und $t \in \mathbb{R}$. Für festes $t \in \mathbb{R}$ sei nun

$$B := \bigcap_{v \in \mathbb{V}} B_v(t) \cap \left\{ \sum_{|v|=n} L(v)\, |[\Psi]_v(t - S(v))| < \infty \text{ f. a. } n \geq 0 \right\}.$$

Da Ψ absolut summierbar ist und $\mathbb{P}(B_v(t)) = 1$ f. a. $t \in \mathbb{R}$ gilt, folgt $\mathbb{P}(B) = 1$. Wird nun gezeigt, dass Gleichung (2.17) auch für jede f. s. beschränkte Stopplinie auf $B \cap \{\mathcal{T}$ ist beschränkt$\}$ gilt, so ist das Lemma bewiesen, denn $\{|v| = n\} = \mathbb{N}^n$ ist für jedes $n \geq 0$ eine beschränkte Stopplinie. Sei also $\mathcal{T}$ eine f. s. beschränkte Stopplinie und $\mathcal{T}_n := \mathcal{T} \wedge n$, $n \geq 0$. Eine Induktion nach n liefert

$$\Psi(t) = \sum_{v \in \mathcal{T}_n} L(v)\, [\Psi]_v(t - S(v))$$

für alle $n \geq 0$ auf B. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert daher Gleichung (2.17) auf $B \cap \{\mathcal{T}$ ist beschränkt$\}$. □

Es folgt nun der Beweis von Satz 2.2.3. Auf den Beweis von Satz 2.2.2 wird verzichtet, da er weitgehend analog geführt werden kann und an einigen Stellen sogar einfacher ist.

Beweis von Satz 2.2.3. Der Beweis von (b) wurde bereits in der Einleitung von Abschnitt 2.2.1 geführt. Zum Nachweis von (a) sei Ψ eine Lösung der HPRE mit $\sup_{t \in \mathbb{R}} \overline{|\Psi|}(t) < \infty$. Dann ist $\overline{\Psi}$ insbesondere eine beschränkte und messbare Funktion, wobei die Messbarkeit aus der Produktmessbarkeit von Ψ folgt. Darüber hinaus löst $\overline{\Psi}$ nach Lemma 2.2.9 die Erneuerungsgleichung

$$\overline{\Psi}(t) = \int \overline{\Psi}(t - x)\, \overline{\Sigma}_1(dx) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Sei nun eine der Bedingungen (a)(i)-(a)(iv) erfüllt. Dann liefert Satz A.2.6 in jedem Fall die Existenz einer Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $\overline{\Psi}(t) = c$ f. a. $t \in \mathbb{R}$ (man beachte, dass (a)(i) (a)(ii) impliziert). Seien nun $t \in \mathbb{R}$ fest gewählt und der stochastische Prozess $(M_n)_{n \geq 0}$ durch $M_n := \mathbb{E}(\Psi(t)|\, \mathcal{A}_n)$ $(n \geq 0)$ definiert. Da $\Psi(t)$ integrierbar ist, bildet $(M_n)_{n \geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal mit f. s. Limes $\mathbb{E}(\Psi(t)|\, \mathcal{A}_\infty)$. Dann folgt einerseits $\mathbb{E}(\Psi(t)|\, \mathcal{A}_\infty) = \Psi(t)$ f. s. aus der $\mathcal{A}_\infty$-Messbarkeit von $\Psi(t)$. Andererseits liefert Gleichung (2.16)

$$\begin{aligned} M_n = \mathbb{E}(\Psi(t) \mid \mathcal{A}_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} L(v)\, [\Psi]_v(t - S(v)) \;\middle|\; \mathcal{A}_n \right) \\ &= \sum_{|v|=n} \mathbb{E}\left(L(v)\, [\Psi]_v(t - S(v)) \mid \mathcal{A}_n \right) = \sum_{|v|=n} L(v)\, \overline{\Psi}(t - S(v)) \\ &= cW_n \longrightarrow cW \quad \mathbb{P}\text{-f. s. für } n \to \infty, \end{aligned}$$

wobei $\sup_{t\in\mathbb{R}} \overline{|\Psi|}(t) < \infty$ in Kombination mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz für bedingte Erwartungswerte die Vertauschbarkeit der bedingten Erwartung und der unendlichen Reihe sicherstellt. Folglich gilt $\Psi(t) = cW$ f. s. und der Satz ist bewiesen. □

2.2.6 Die Beweise der Ergebnisse aus Abschnitt 2.2.2

Beweis von Satz 2.2.4. Es gelte zunächst (a). Dann ist

$$\begin{aligned}
\overline{|\Phi|}(t) &\leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} L(v)\,|[\phi]_v(t-S(v))|\right) \qquad (2.18)\\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} L(v)\,|[\phi]_v(t-S(v))| \,\middle|\, \mathcal{A}_n\right]\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} L(v)\,\overline{|\phi|}(t-S(v))\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} \overline{|\phi|} * \overline{\Sigma}_n(t) = \overline{|\phi|} * \overline{U}(t),
\end{aligned}$$

d. h., $\overline{|\Phi|} \leq \overline{|\phi|} * \overline{U}$. Es ist eine wohlbekannte Tatsache in der Erneuerungstheorie (siehe z. B. Alsmeyer [3, Korollar 2.2.5]), dass die Transienz von $\overline{\mathbf{S}}$ hinreichend für die lokale Endlichkeit des Erneuerungsmaßes $\overline{U}$ ist. Es liegt sogar die folgende Gleichmäßigkeit vor: $\overline{U}([t,t+1]) \leq \overline{U}([-1,1]) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe Alsmeyer [3, Lemma 2.3.1]). Ferner gilt $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[0,1]} \overline{|\phi|}(x+n) < \infty$, da $\overline{|\phi|}$ d. R. i. ist. Alles in Allem gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\overline{|\Phi|}(t) &\leq \overline{|\phi|} * \overline{U}(t)\\
&= \int \overline{|\phi|}(t-x)\,\overline{U}(dx)\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{U}([t-n-1,t-n]) \cdot \sup_{x\in[0,1]} \overline{|\phi|}(x+n)\\
&\leq \overline{U}([1,1]) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[0,1]} \overline{|\phi|}(x+n) < \infty.
\end{aligned}$$

Die obere Schranke für $\overline{|\Phi|}(t)$ hängt nicht von t ab. Also erfüllt Φ die BIC. Ein ähnliches Argument kann unter der Annahme (b) verwendet werden. Schließlich sind im Falle der Gültigkeit von (c) alle Term in (2.18) nichtnegativ und aus (2.18) folgt dann

$$\overline{\Phi}(t) = \overline{\phi} * \overline{U}(t) = \int_{[0,t]} \overline{\phi}(t-s)\,\overline{U}(ds) \leq \overline{U}([0,t]) \sup_{0\leq s\leq t} \overline{\phi}(s) < \infty,$$

d. h., $\overline{\Phi}$ ist wie behauptet lokal endlich. (2.13) folgt nun aus (2.18), indem die dort folgende Rechnung ohne die Betragsstriche (unter jeder der drei Bedingungen (a), (b) und (c) liegt in (2.18) Integrierbarkeit vor) durchgeführt wird. □

Beweis von Lemma 2.2.5. Sei $\overline{|\phi|}$ d. R. i. Als Erstes wird Aussage (a) bewiesen. Sei also $\overline{\phi}$ linksseitig stetig mit rechtsseitigen Limiten. Die Funktion g sei durch $g(t) := \sup_{|t-s|\leq 1} \overline{|\phi|}(s)$ für $t \in \mathbb{R}$ definiert. Da $\overline{|\phi|}$ nach Voraussetzung d. R. i. ist, ist $g(t) \in [0, \infty)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Darüber hinaus ist g selbst d. R. i. (g erfüllt Bedingung (c) aus Satz 2.5.2 in Alsmeyer [3], wobei man für die $\lambda\!\!\lambda$-f. ü. geltende Stetigkeit von g beachte, dass g linksseitig stetig mit existierenden rechtsseitigen Limiten ist). Aufgrund der Transienz von $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ ist $\overline{U}([t, t+1]) \leq \overline{U}([-1, 1]) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe auch den Beweis von Satz 2.2.4). Folglich ist g integrierbar bzgl. $\overline{U}$. Insgesamt bildet g folglich eine integrierbare Majorante der Familie $(\overline{|\phi|})(t))_{|t-t_0|\leq 1}$ für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$. Ferner gilt $\overline{\Phi} = \overline{\phi} * \overline{U}$ nach der Rechnung im Beweis von Satz 2.2.4, was nach einer Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\overline{\Phi}(t) = \int \overline{\phi}(t-s)\,\overline{U}(ds) \underset{t\uparrow t_0}{\longrightarrow} \int \overline{\phi}(t_0 - s)\,\overline{U}(ds) = \overline{\Phi}(t_0)$$

liefert. Analog ergibt sich

$$\overline{\Phi}(t) \underset{t\downarrow t_0}{\longrightarrow} \int \overline{\phi}((t_0 - s)+)\,\overline{U}(ds).$$

Also existiert $\Phi(t_0+) := \lim_{t\downarrow t_0} \Phi(t)$, denn das letzte Integral existiert aufgrund der d. R. I. von $\overline{|\phi|}$. Damit ist Aussage (a) bewiesen.
Aussage (b) folgt aus der Gleichung $\overline{\Phi} = \overline{\phi} * \overline{U}$ in Kombination mit $\mathbb{E}\,\overline{S}_1 \in (0, \infty]$ und dem 2. Erneuerungstheorem (siehe Alsmeyer [3, 1991, Satz 2.5.3]). Aussage (c) folgt mit denselben Argumenten, die zum Beweis von (a) führen. □

2.2.7 Die Beweise im inhomogenen Fall

Beweis von Satz 2.2.6. Zuerst wird Teil (b) bewiesen. Zu diesem Zweck seien $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine d-periodische messbare Funktion und $\Psi := pW + \Phi$. Nach Satz 2.2.4 genügt Φ der BIC und somit auch Ψ, denn für jedes $s \in [0, d)$ gilt

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \overline{|\Psi|}(s + kd) \leq |p(s)| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} \overline{|\Phi|}(s + kd) < \infty,$$

wobei die d-Periodizität von p und $\mathbb{E}\,W \leq 1$ verwendet wurden. Des Weiteren löst Ψ die PRE bzgl. ϕ, da Ψ die Summe der absolut summierbaren Lösung Φ der PRE bzgl. ϕ und der absolut summierbaren Lösung pW der HPRE ist.

Zum Beweis von (a) sei Ψ eine Lösung der PRE, die die BIC erfüllt. Da Φ ebenfalls eine Lösung der PRE ist, die der BIC genügt, ist $\Delta := \Psi - \Phi$ eine Lösung der HPRE, die die BIC erfüllt. Folglich liefert Satz 2.2.3 $\Delta(t) = p(t)W$

f. s. für jedes $t \in \mathbb{R}$ und eine d-periodische messbare Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Also ist Ψ eine Version von $pW + \Phi$ wie behauptet. □

Beweis von Satz 2.2.7. Aussage (b) folgt mit den gleichen Argumenten, die auch zum Beweis von Teil (b) in Satz 2.2.6 angeführt wurden.

Zum Beweis von (a) sei Ψ eine Lösung der PRE, die der BIC genügt. Dann erfüllt $\Delta := \Psi - \Phi$ ebenfalls die BIC. Es genügt nun zu zeigen, dass Δ eine Version von cW für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ ist. Dazu wiederum genügt es zu zeigen, dass Δ die Voraussetzungen von Satz 2.2.3(a) erfüllt. Zu diesem Zweck wird gezeigt, dass jede der Bedingungen (i)-(iii) eine der Bedingungen (a)(i)-(a)(iii) in Satz 2.2.3 impliziert. Da Bedingung (i) hinreichend für die Gültigkeit von (ii) ist, genügt es zu zeigen, dass jede der Bedingungen (ii) und (iii) eine der Bedingungen (a)(ii)-(a)(iii) in Satz 2.2.3 impliziert.
Sei zunächst (ii) wahr. Dann liefert Lemma 2.2.5, dass $\overline{\Phi}$ linksseitig stetig ist und rechtsseitige Limiten besitzt. Da auch $\overline{\Psi}$ nach Voraussetzung linksseitig stetig ist und rechtsseitige Limiten besitzt, trifft dasselbe auch auf $\overline{\Delta}$ zu. Folglich ist Bedingung (a)(ii) in Satz 2.2.3 erfüllt. Schließlich gelte Bedingung (iii). Dann ist $\lim_{t\to-\infty} \overline{\Phi}(t) = 0$ nach Lemma 2.2.5(b). Folglich existiert $\lim_{t\to-\infty} \overline{\Delta}(t) = \lim_{t\to-\infty} \overline{\Psi}(t)$ und Bedingung (a)(iii) in Satz 2.2.3 ist erfüllt. □

Beweis von Korollar 2.2.8. Die lokale Endlichkeit von $\overline{\Phi}$ folgt aus Satz 2.2.4. Nach (2.13) genügt $\overline{\Phi}$ der Gleichung $\overline{\Phi} = \overline{\phi} + \overline{\Phi} * \overline{\Sigma}_1$. Bezeichnet Ψ nun eine weitere Lösung der PRE bzgl. ϕ, die den Voraussetzungen des Korollars genügt, so ist $\Delta := \Phi - \Psi$ eine absolut summierbare Lösung der HPRFE (siehe Satz 2.2.4(c)). Weiterhin ist $\overline{\Delta}$ lokal endlich, verschwindet auf $(-\infty, 0)$ und genügt der Gleichung $\overline{\Delta} = \overline{\Delta} * \overline{\Sigma}_1$. Also liefert Korollar 3.1.3 in Alsmeyer [3] $\overline{\Delta}(t) = 0$ f. a. $t \in \mathbb{R}$. Mit denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 2.2.3 folgt nun $\Delta(t) = 0$ f. s. für jedes $t \in \mathbb{R}$ und damit die Behauptung. □

2.2.8 Die HPRE im BRW-Fall

In diesem Abschnitt wird noch einmal explizit auf die HPRE im BRW-Fall eingegangen. Für den Rest des Abschnitts wird also angenommen, dass $X_i = -\log T_i$ für alle $i \geq 1$ gilt. Dies stellt zwar eine Einschränkung gegenüber der allgemeinen Betrachtung in Abschnitt 2.2 dar, ist aber andererseits der wichtigste Spezialfall. Ferner kann die HPRE im BRW-Fall fast mit den selben Methoden wie in Abschnitt 2.2 aber unter schwächeren Annahmen sowohl an die Lösung Ψ als auch an die zugrunde liegende Gewichtsfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ aufgelöst werden. In diesem Abschnitt wird nämlich die Bedingung (B1) nicht vorausgesetzt. Vielmehr ist es im BRW-Fall möglich, von der Existenz nichttrivialer, nichtnegativer und integrierbarer Lösungen der HPRE (auf die sich die Überlegungen dieses Abschnitts beschränken) auf die Gültigkeit von Bedingung (B1) zu schließen. Allerdings kommen auch die Überlegungen in diesem Abschnitt nicht ohne einige Annahmen an die T_i aus: die Bedingungen (B2) und (B3) werden vorausgesetzt. Dies ist einerseits aus der Sicht der Hauptanwendung, der Analyse der in Beispiel 2.1.2 vorgestellten stochastischen Fixpunktgleichungen unbedenklich (siehe dazu Kapitel 3). Andererseits lässt sich die HPRE im Falle, dass eine der beiden Bedingungen (B2) und (B3) verletzt ist, mit einfacheren Mitteln als den hier vorgestellten behandeln. Die letzte Annahme an T, die für die folgenden Betrachtungen gerechtfertigt werden muss, ist:

$$\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(T_i = 1) < 1. \tag{2.19}$$

Es ist zunächst klar, dass die Annahme von $\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(T_i = 1) \leq 1$ unproblematisch ist, denn wäre $\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(T_i = 1) > 1$, so wäre

$$\overline{\Psi}(t) = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i\,[\Psi]_i(t - X_i) \geq \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i=1\}}\,\overline{\Psi}(t) = \overline{\Psi}(t)\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(T_i = 1),$$

was $\Psi(t) = 0$ f. s. implizierte, d. h., es gäbe nur die triviale Lösung der HPRE. Etwas komplizierter stellt sich die Situation im Falle $\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(T_i = 1) = 1$ dar. Umformuliert in Termen von $\overline{\Sigma}_1$ ergibt diese Bedingung $\overline{\Sigma}_1(\{0\}) = 1$. Aus Bedingung (B3) folgt dann, dass darüber hinaus $\overline{\Sigma}_1(\mathbb{R}\setminus\{0\}) > 0$ gilt. Dies ergibt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}(t) &= \int \overline{\Psi}(t-s)\,\overline{\Sigma}_1(ds)\\ &= \overline{\Psi}(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \overline{\Psi}(t-s)\,\overline{\Sigma}_1(ds),\end{aligned}$$

was $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \overline{\Psi}(t-s)\,\overline{\Sigma}_1(ds) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ impliziert. Dies wiederum liefert zusammen mit der Nichtnegativität von Ψ, dass $\Psi(t-s) = 0$ f. s. für $\overline{\Sigma}_1$-f. a. $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt. Hat $\overline{\Sigma}_1$ nun ein Atom $\neq 0$ (was insbesondere im arithmetischen Fall gegeben ist), so folgt $\Psi(t) = 0$ f. s. für alle $t \in \mathbb{R}$. Die gleiche Aussage folgt auch, wenn $\overline{\Sigma}_1$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ stetig ist, falls geeignete Annahmen an das Pfadverhalten von Ψ oder das Verhalten von $\overline{\Psi}$ gemacht werden. Aus ökonomischen Gründen wird an dieser Stelle auf weitere Details verzichtet.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist der folgende Satz:

2.2.13 Satz. $\overline{\Sigma}_1$ *sei* σ*-endlich und* T *erfülle ferner die Bedingung* (2.19). Ψ *sei eine nicht* $\lambda\!\!\lambda$*-f. ü. degenerierte nichtnegative Lösung der HPRE, d. h., es gelte* $\lambda\!\!\lambda(\{t : \mathbb{P}(\Psi(t) > 0) > 0\}) > 0$. *Weiterhin sei* $\overline{\Psi}$ *linksseitig (oder rechtsseitig) stetig und lokal* $\lambda\!\!\lambda$*-integrierbar. Dann gibt es ein* $\alpha > 0$, *so dass die Gewichtsfolge* $T^{(\alpha)} := (T_i^\alpha)_{i\geq 1}$ *die Bedingungen* (B1) *(d. h.,* $\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i^\alpha = 1$*) und* (B4) *erfüllt. Weiterhin gilt dann*

$$\Psi(t) = p(t)e^{(\alpha-1)t}\,W^{(\alpha)} \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}, \tag{2.20}$$

wobei $p \geq 0$ *im nichtarithmetischen Fall konstant und im* d*-arithmetischen Fall* d*-periodisch ist (*$d > 0$*).*

Beweis. $\Sigma_1^{(-)}$ bezeichne das zufällige Maß, das durch Punktspiegelung aus Σ_1 hervorgeht, d. h. $\Sigma_1^{(-)} := \sum_{i\geq 1} T_i\delta_{-X_i} = \sum_{i\geq 1} T_i\delta_{\log T_i}$. Dann löst $\overline{\Psi}$ die ICFE bzgl. $\overline{\Sigma}_1^{(-)} := \mathbb{E}\,\Sigma_1^{(-)}$:

$$\overline{\Psi}(t) = \int \overline{\Psi}(t+x)\,\overline{\Sigma}_1^{(-)}(dx) \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Also gilt nach Satz A.2.4:

$$\overline{\Psi}(t) = p_1(t)e^{\alpha_1 t} + p_2(t)e^{\alpha_2 t} \quad \text{für alle } t\in\mathbb{R}\,.$$

Dabei sind $p_1, p_2 \geq 0$ Funktionen, die periodisch modulo dem Träger von $\overline{\Sigma}_1^{(-)}$ sind (und damit auch modulo der vom Träger von $\overline{\Sigma}_1$ erzeugten Gruppe in $\mathbb{R}$), und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int e^{\alpha_1 y}\,\overline{\Sigma}_1^{(-)}(dy) = \int e^{\alpha_2 y}\,\overline{\Sigma}_1^{(-)}(dy) = 1$$

gilt, was äquivalent zu

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} T_i^{1+\alpha_j} = 1 \quad \text{für } j=1,2$$

ist. Für $\gamma\in\mathbb{R}$ seien nun $W_n^{(\gamma)}$ der gewichtete Verzweigungsprozess basierend auf der Gewichtsfolge $(T_i^{\gamma}\,\mathbb{1}_{\{T_i>0\}})_{i\geq 1}$, $W^{(\gamma)} := \liminf_{n\to\infty} W_n^{(\gamma)}$ und $m(\gamma) := \mathbb{E}\,W_1^{(\gamma)} = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i^{\gamma}\,\mathbb{1}_{\{T_i>0\}}$ (siehe auch Abschnitt 3.1.4). Dann lässt sich ähnlich wie im Beweis von Satz 2.2.3 argumentieren:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Psi(t)\mid\mathcal{A}_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} L(v)\,[\Psi]_v(t-S(v)) \;\Big|\; \mathcal{A}_n\right)\\
&= \sum_{|v|=n} L(v)\left(p_1(t-S(v))e^{\alpha_1(t-S(v))} + p_2(t-S(v))e^{\alpha_2(t-S(v))}\right)\\
&= p_1(t)e^{\alpha_1 t}\sum_{|v|=n} L(v)^{1+\alpha_1} + p_2(t)e^{\alpha_2 t}\sum_{|v|=n} L(v)^{1+\alpha_2}\\
&= p_1(t)e^{\alpha_1 t}\,W_n^{(1+\alpha_1)} + p_2(t)e^{\alpha_2 t}\,W_n^{(1+\alpha_2)}\\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_1(t)e^{\alpha_1 t}\,W^{(1+\alpha_1)} + p_2(t)e^{\alpha_2 t}\,W^{(1+\alpha_2)} \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}
\end{aligned}$$

Da Ψ nicht degeneriert ist, gibt es ein $t\in\mathbb{R}$ und ein $i\in\{1,2\}$, etwa $i=1$, so dass $p_1(t)>0$ und $\mathbb{E}\,W^{(1+\alpha_1)}=1$ gilt. Nun muss eine Anleihe an Abschnitt 3.1.4 gemacht werden. Das dortige Lemma 3.1.11 liefert nämlich, dass $m(\beta)>1$ für alle $\beta\in[0,1+\alpha_1)$ gilt. Folglich ist $\alpha_2\geq\alpha_1$. Wäre nun $\alpha_2>\alpha_1$ und $\mathbb{E}\,W^{(1+\alpha_2)}=1$, so müsste wiederum nach Lemma 3.1.11 $\alpha_1\geq\alpha_2$ gelten: Widerspruch! Also gilt $\alpha_1 =$

α_2 oder $W^{(1+\alpha_2)} = 0$ f. s. Es stellt daher keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, $\alpha_1 = \alpha_2$ anzunehmen. Setzt man dann $p := p_1 + p_2$ und $\alpha := 1 + \alpha_1$, so folgt $\Psi(t) = p(t)e^{(\alpha-1)t}W^{(\alpha)}$ f. s. ($t \in \mathbb{R}$), d. h., die Darstellung (2.20) ist bewiesen. Es bleibt, die Aussagen über p zu begründen. Wie weiter oben im Beweis bereits festgestellt wurde, ist p periodisch modulo der vom Träger von $\overline{\Sigma}_1$ erzeugten Gruppe. Im d-arithmetischen Fall ist diese Gruppe $= d\,\mathbb{Z}$ und der Satz ist bewiesen. Im nichtarithmetischen Fall bleibt zu zeigen, dass $p = c$ für eine reelle Konstante $c \geq 0$ gilt. Dies folgt aber aus Lemma A.3.5, da die vom Träger von $\overline{\Sigma}_1$ erzeugte Gruppe $\subseteq \mathbb{R}$ im nichtarithmetischen Fall dicht in $\mathbb{R}$ liegt. □

2.2.9 Lösungen der PRE mit unendlicher Erwartung

Die bisherigen Betrachtungen dieses Abschnitts beschäftigten sich ausnahmslos mit integrierbaren Lösungen der HPRE. Es stellt sich die Frage, ob es auch nicht integrierbare Lösungen gibt, und wenn ja, ob es für diese ähnliche Darstellungssätze wie die Sätze 2.2.2 und 2.2.3 im integrierbaren Fall gibt. Die erste Frage lässt sich mit ja beantworten, die zweite Frage muss offen bleiben, da die Analyse der HPRE ohne Integrierbarkeitsannahmen mit anderen Methoden vorgenommen werden müsste. Hinsichtlich der Existenz nichttrivialer Lösungen der HPRE mit unendlicher Erwartung sei auf Abschnitt A.1.2 im Anhang verwiesen, wo unter geeigneten Annahmen an die Basisfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ die Existenz einer Zufallsgröße ∂W nachgewiesen wird, die eine (zeitunabhängige) Lösung der HPRE bildet. Da die Laplacetransformierte von ∂W in 0 nicht differenzierbar ist (siehe (A.3)), gilt $\mathbb{E}\,\partial W = \infty$. Weitere Lösungen der HPRE ergeben sich dann durch Skalierung von ∂W im nichtarithmetischen Fall bzw. durch Multiplikation mit d-periodischen, messbaren Funktionen im d-arithmetischen Fall ($d > 0$).

2.3 Asymptotisches Verhalten der Lösungen der pfadweisen Erneuerungsgleichung

In diesem Abschnitt soll das asymptotische Verhalten der Lösungen der PRE untersucht werden. Nach den Ergebnissen des Abschnitts 2.2 lässt sich (unter gewissen Integrierbarkeitsannahmen) jede Lösung Ψ der PRE bzgl. eines Parameterprozesses ϕ in eine Summe der Form $\Psi = cW + \Phi$ bzw. $\Psi = pW + \Phi$ für eine Konstante c bzw. eine periodische Funktion p und die kanonische Lösung Φ der PRE bzgl. ϕ zerlegen. Dabei sind cW bzw. pW für das asymptotische Verhalten des Prozesses uninteressant. Es genügt also, sich auf die kanonischen Lösungen der PRE zu beschränken. Für diese Lösungen werden zwei Arten von Ergebnissen angestrebt: zum einen $\mathcal{L}^1$-Konvergenzergebnisse (in Abschnitt 2.3.3) und zum anderen Ergebnisse für fast sichere Konvergenz (in Abschnitt 2.3.5). Die Betrachtungen im fast sicheren Sinne beschränken sich auf den BRW-Fall, d. h. auf den Fall $X_i(v) := -\log T_i(v)$ ($i \geq 1$, $v \in \mathbb{V}$). Ferner beschränken sich die

Ergebnisse im d-arithmetischen Fall auf die Limiten der Gestalt $\lim_{k\to\infty}\Phi(kd)$; die Konvergenzergebnisse für die anderen Nebenklassen $s+d\,\mathbb{Z}$, $s\in(0,d)$ ergeben sich durch eine einfache Verschiebung der Prozesse im Argument. Für den gesamten Abschnitt sei

$$\overline{\mu} := \mathbb{E}\,\overline{S}_1 = \int x\,\overline{\Sigma}_1(dx) = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i X_i \in (0,\infty). \tag{2.21}$$

Es liegt in der Natur der Sache, dass viele Ergebnisse das asymptotische Verhalten von Φ betreffend nur unter gewissen Voraussetzungen an den zugrunde liegenden Parameterprozess ϕ bewiesen werden können. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass der zugrunde liegende Parameterprozess $\phi:\mathbb{R}\times\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ stets als produktmessbar angenommen wird. Ferner wird ϕ im nichtarithmetischen Fall ($\mathbb{G}(\Sigma_1)=\mathbb{R}$) als separabel vorausgesetzt. Einige weitere Voraussetzungen an ϕ, die im Verlaufe der Betrachtungen auftreten, sind:

$$\text{Es gibt ein } C>0 \text{ mit } \phi(t)=0 \text{ für alle } t\notin[0,C]. \tag{$\phi1$}$$

$$\mathbb{E}\sup_{t\in\mathbb{G}(\Sigma_1)\cap K}|\phi|(s)<\infty \text{ für alle kompakten } K\subseteq\mathbb{R} \text{ und alle } t\in\mathbb{R}, \tag{$\phi2$}$$

wobei im nichtarithmetischen Fall in Gleichung ($\phi2$) die Separabilität von ϕ die Messbarkeit des Supremums sichert. In einigen Abschnitten wird eine stärkere Bedingung als die obige Bedingung ($\phi2$) benötigt:

$$\mathbb{E}\sup_{x\in\mathbb{G}(\Sigma_1)}|\phi(x)|\psi(x)<\infty \tag{$\phi2+$}$$

für eine Funktion $\psi:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, so dass $\psi|_{[0,\infty)}$ monoton wachsend ist und $1/\psi$ $\lambda\!\!\lambda$-integrierbar ist. Abschließend wird eine Glattheitsbedingung an ϕ formuliert, die benötigt wird, um im nichtarithmetischen Fall von der f. s. Konvergenz von $\Phi(t)$ entlang arithmetischer Progressionen auf f. s. Konvergenz entlang beliebiger Folgen $t\to\infty$ schließen zu können:

$$\lim_{s\downarrow t}\phi(s) \text{ und } \lim_{s\uparrow t}\phi(s) \text{ existieren f. a. } t\in\mathbb{R}\,. \tag{$\phi3$}$$

Jeder Pfad eines Prozesses ϕ, der die Bedingung ($\phi3$) erfüllt, hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Ist im nichtarithmetischen Fall zusätzlich Bedingung ($\phi2$) erfüllt, so liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\overline{\phi}(t-) := \lim_{s\uparrow t}\overline{\phi}(s) = \mathbb{E}\lim_{s\uparrow t}\phi(s)$$

für jedes $t\in\mathbb{R}$ existiert. Analoges gilt für die rechtsseitigen Limiten $\overline{\phi}(t+)$. Also hat dann auch $\overline{\phi}$ rechts- und linksseitige Limiten in jedem Punkt $t\in\mathbb{R}$ und folglich höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen in $\mathbb{R}$. Gilt darüber hinaus die stärkere Bedingung (ϕ2+), so ist die Abschätzung

$$0 \leq \overline{\phi}(t) \leq \frac{1}{\psi(|t|)} \cdot \mathbb{E} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|\psi(|x|),$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ wahr. Die Bedingungen (ϕ2+) und (ϕ3) zusammen implizieren im nichtarithmetischen Fall also die d. R. I. von $\overline{|\phi|}$ (siehe Alsmeyer [3, Satz 2.5.2(e)]). Im d-arithmetischen Fall impliziert (ϕ2+) offenbar, dass $\overline{|\phi|}$ über die $t \in d\mathbb{Z}$ absolut summierbar ist. Insgesamt kann also festgehalten werden:

2.3.1 Lemma. *ϕ sei ein Parameterprozess, der die Bedigung (ϕ2+) erfüllt. Dann gilt (unter der Generalvoraussetzung (2.21)):*

(a) Sei $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R}$. Genügt ϕ dann der Bedingung (ϕ3), so ist $\overline{|\phi|}$ d. R. i.

(b) Sei $\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\mathbb{Z}$ für ein $d > 0$. Dann gilt $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{|\phi|}(kd) < \infty$.

In beiden Fällen (a) und (b) gilt ferner

$$\sup_{t \in \mathbb{G}(\Sigma_1)} \overline{|\Phi|}(t) < \infty. \tag{2.22}$$

Beweis. Die Beweise von (a) und (b) wurden bereits erbracht. Für den Nachsatz sei lediglich auf Satz 2.2.4 verwiesen. □

2.3.1 Konvergenz des ersten Moments

Der erste Schritt in der Herleitung von Resultaten für das asymptotische Verhalten der Lösungen der PRE ist der Blick auf die zugehörige erste Moment: Konvergiert der Erwartungswert einer Lösung $\Phi(t)$ für $t \to \infty$ und wenn ja, wogegen?

2.3.2 Definition (vgl. Proposition 2.2 in [53]). Sei ϕ ein Parameterprozess. $\overline{|\phi|}$ sei d. R. i. im nichtarithmetischen Fall und absolut summierbar über jede Nebenklasse $s + d\mathbb{Z}$ ($s \in [0, d)$) im d-arithmetischen Fall. Dann sei

$$\overline{\phi}(\infty) := \begin{cases} \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi}(x)\, \lambda\!\!\lambda(dx), & \text{falls } \mathbb{G}(\overline{\Sigma}_1) = \mathbb{R} \text{ ist,} \\ \frac{d}{\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\phi}(dk), & \text{falls } \mathbb{G}(\overline{\Sigma}_1) = d\mathbb{Z} \text{ ist.} \end{cases}$$

Hinsichtlich der Notation ist hier zu beachten, dass $\overline{\phi}(\infty)$ natürlich nicht der Limes von $\overline{\phi}(t)$ für $t \to \infty$ ist; dieser Limes ist im Falle d. R. I. bzw. im Falle absoluter Summierbarkeit 0.

2.3.3 Satz. *Sei ϕ ein Parameterprozess. $\overline{|\phi|}$ sei d. R. i. im nichtarithmetischen Fall und absolut summierbar über $d\,\mathbb{Z}$ im d-arithmetischen Fall. Dann gilt*

$$\sup_{t\in\mathbb{G}(\Sigma_1)} \overline{|\Phi|}(t) < \infty,$$

insbesondere $|\Phi(t)| < \infty$ $\mathbb{P}$-f. s. für alle $t \in \mathbb{G}(\Sigma_1)$. Überdies löst $\overline{\Phi}$ die Erneuerungsgleichung

$$\overline{\Phi}(t) = \overline{\phi}(t) + \int_{\mathbb{R}} \overline{\Phi}(t-s)\,\overline{\Sigma}_1(ds) \quad (t \in \mathbb{G}(\Sigma_1)).$$

Darüber hinaus gelten:

$$\lim_{t\to-\infty} \overline{\Phi}(t) = 0 \text{ und } \lim_{t\to\infty} \overline{\Phi}(t) = \overline{\phi}(\infty),$$

wobei hier $\overline{\phi}(\infty)$ wie in Definition 2.3.2 gegeben sei und die Limiten über die $t \in \mathbb{G}(\Sigma_1)$ gebildet werden.

Beweis. Wegen der Generalvoraussetzung dieses Abschnitts, $\overline{\mu} = \mathbb{E}\,\overline{S}_1 \in (0,\infty)$, ist $\overline{\mathbf{S}}$ transient. Unter den Voraussetzungen dieses Satzes liefert Satz 2.2.4 daher

$$\sup_{t\in\mathbb{G}(\Sigma_1)} \overline{|\Phi|}(t) < \infty$$

sowie ferner $\overline{\Phi}(t) = \overline{\phi} * \overline{U}(t)$ für $t \in \mathbb{G}(\Sigma_1)$. Letzteres liefert in Kombination mit $\overline{U} = \sum_{n\geq 0} \overline{\Sigma}_1^{*(n)}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(t) &= \overline{\phi} * \overline{U}(t) \\ &= \overline{\phi}(t) + \overline{\phi} * \overline{\Sigma}_1 * \overline{U}(t) \\ &= \overline{\phi}(t) + \int_{\mathbb{R}} \overline{\Phi}(t-s)\,\overline{\Sigma}_1(ds) \quad (t \in \mathbb{G}(\Sigma_1)). \end{aligned}$$

Satz 3.2.2 in Alsmeyer [3, 1991] liefert die Konvergenzaussagen des Satzes. □

Es gelte nun $\mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z}$ und ϕ sei ein Prozess, der die Voraussetzungen von Satz 2.3.3 erfüllt. Φ sei die zugehörige kanonische Lösung der PRE und es sei ferner für einen Augenblick angenommen, dass $\Phi(nd)$ für $n \to \infty$ in $\mathcal{L}^1$ und f. s. konvergiert. Mit $W^* := \lim_{n\to\infty} \Phi(nd)$ gilt dann

$$W^* = \lim_{n\to\infty} \Phi(nd) = \lim_{n\to\infty} \phi(nd) + \sum_{i\geq 1} T_i\,[\Phi]_i(nd - X_i).$$

Die $[\Phi]_i(nd-X_i)$ konvergieren nun ihrerseits für $n \to \infty$ f. s. gegen $[W^*]_i$, während $\phi(nd)$ wegen $\mathbb{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\phi(kd)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{|\phi|}(kd) < \infty$ f. s. eine Nullfolge bildet.

Unter günstigen Bedingungen, die eine Limesvertauschung rechtfertigen, ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} W^* &= \lim_{n\to\infty} \phi(nd) + \sum_{i\geq 1} T_i\,[\Phi]_i(nd - X_i) \\ &= \sum_{i\geq 1} T_i\,[W^*]_i \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \end{aligned}$$

d. h., W^* ist eine zeitlich konstante Lösung der HPRE. Wegen der vorausgesetzten $\mathcal{L}^1$-Konvergenz bleibt W^* nichts anderes übrig, als integrierbar zu sein mit Erwartungswert $\overline{\phi}(\infty)$. Nach Satz 2.2.2 folgt dann $W^* = \overline{\phi}(\infty)W$ f. s. für den Limes W des kanonischen Martingals $(W_n)_{n\geq 0}$. Eine analoge Heuristik kann für den nichtarithmetischen Fall vorgenommen werden und führt ebenfalls zur Vermutung, dass, wenn die Konvergenz der kanonischen Lösung vorliegt, der Limes von der Gestalt $\overline{\phi}(\infty)W$ sein muss.

2.3.2 Bekannte Resultate

Zunächst sollen hier die wichtigsten bereits bekannten Resultate zum asymptotischen Verhalten der Lösungen der PRE angegeben werden, nämlich die folgenden Sätze von Nerman und Gatzouras. Nerman und Gatzouras machen in ihren Arbeiten [53, 1981] bzw. [32, 2000] stets die folgenden Annahmen:

$$\begin{aligned} 0 \leq X_i = -\log T_i \text{ für alle } i \geq 1 \text{ und} \\ \phi \text{ ist nichtnegativ und verschwindet auf } (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Diese beiden Voraussetzungen, die zusammen im Folgenden als (GBP) bezeichnet werden, sind der Interpretation der Situation als allgemeines Verzweigungsmodell (siehe Beispiel 2.1.3) geschuldet. Das Ziel ist es, diese Beschränkungen aufzuheben. Dies gelingt im Falle der $\mathcal{L}^1$-Konvergenzergebnisse (namentlich Satz 2.3.9 und Korollar 2.3.13) vollständig. Im Fall der fast sicheren Konvergenz sind die hier erzielten Resultate auf den BRW-Fall beschränkt, d. h., auf den Fall $X_i = -\log T_i$.

2.3.4 Satz (Nerman [53], Satz 3.1). *Gegeben sei Gleichung* (2.1) *unter der Voraussetzung (GBP). Ferner sei das Maß* $\overline{\Sigma}_1$ *nichtarithmetisch.* ϕ *erfülle die Bedingung* (ϕ2) *und* $\overline{\phi}$ *sei d. R. i. Dann gilt unter den Voraussetzungen* (B1)-(B3) *sowie unter der Voraussetzung* (B4+)*:*

$$\Phi(t) = \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,[\phi]_v(t - S(v)) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}^1} \overline{\phi}(\infty)W.$$

Man beachte hier gegenüber der Formulierung in Nerman [53] die Tatsache, dass aus stochastischer Konvergenz in Verbindung mit der Konvergenz der

$\mathcal{L}^1$-Norm die Konvergenz in $\mathcal{L}^1$ folgt. Weiterhin ist in der Situation von Satz 3.1 in [53] vorausgesetzt, dass die $[\phi]_v$, $v \in \mathbb{V}$, stochastisch unabhängig sind. Diese Voraussetzung ist jedoch überflüssig, man vergleiche dazu Abschnitt 7 in [53]. Weiterhin wird in Satz 3.1 in [53] anstelle der d. R. I. von $\overline{\phi}$ vorausgesetzt, dass $\overline{\phi}$ $\lambda\!\!\lambda$-f. ü. stetig ist und die Reihe $\sum_{k\geq 0} \sup_{k\leq t\leq k+1} \overline{\phi}(t)$ konvergiert. Diese beiden Formulierungen sind allerdings gleichwertig (vgl. Alsmeyer [3, 1991, Satz 2.5.2]). Schließlich benötigt der Nermansche Satz über die f. s. Konvergenz eine stärkere Momentenbedingung als nur (2.21); diese stärkere Bedingung wird mit (B5) bezeichnet:

$$\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i \varphi(-\log T_i) < \infty \tag{B5}$$

für eine monoton wachsende Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $\int_0^\infty 1/\varphi(x)\, dx < \infty$. Die Bedingungen (B1)-(B5) zusammen implizieren die Gültigkeit von (B4+), die in der Vorlage von Nerman vorausgesetzt wird. (B5) impliziert nämlich die Existenz und Endlichkeit des Erwartungswerts von $\overline{S}_1$. In dieser Situation ist nach Lyons [46] die Bedingung (B4+) äquivalent zur Nichtdegeneriertheit von W.

2.3.5 Satz (Nerman [53], Satz 5.4). *Gegeben sei Gleichung* (2.1) *unter der (GBP)-Annahme. Ferner sei das Maß $\overline{\Sigma}_1$ nichtarithmetisch. ϕ erfülle die Bedingungen (ϕ2+) und (ϕ3). Dann gilt unter den Voraussetzungen* (B1)-(B3), $\overline{\mu} < \infty$ *und* (B5)*:*

$$\Phi(t) = \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, [\phi]_v(t - S(v)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\phi}(\infty) W \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s.$$

In der Arbeit Gatzouras [32] werden die zu diesen Sätzen analogen Sätze im arithmetischen Fall entwickelt:

2.3.6 Satz (Gatzouras [32], Satz 5.1). *Gegeben sei Gleichung* (2.1) *unter der Voraussetzung (GBP). Ferner sei $\overline{\Sigma}_1$ d-arithmetisch, $d > 0$. ϕ erfülle die Bedingung (ϕ2) und $\overline{\phi}$ sei d. R. i. Dann gilt unter den Voraussetzungen* (B1)-(B3) *und* (B4+)

$$\Phi(t) = \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, [\phi]_v(t - S(v)) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}^1} \overline{\phi}(\infty) W,$$

wobei der Limes $t \to \infty$ nur über die $t \in d\,\mathbb{Z}$ gebildet wird.

2.3.7 Satz (Gatzouras [32], Satz 3.2). *Gegeben sei Gleichung* (2.1) *in der (GBP)-Situation. Ferner sei $\overline{\Sigma}_1$ d-arithmetisch, $d > 0$. ϕ erfülle die Bedingung (ϕ2+). Dann folgt unter den Bedingungen* (B1)-(B3), $\overline{\mu} < \infty$ *und* (B5), *dass*

$$\Phi(t) = \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, [\phi]_v(t - S(v)) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\phi}(\infty) W \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s.,$$

wobei der Limes $t \to \infty$ nur über die $t \in d\,\mathbb{Z}$ gebildet wird.

2.3.8 Bemerkung. Man beachte, dass in den Arbeiten von Nerman und Gatzouras eine etwas schwächere Bedingung als Bedingung (B5) gefordert wird, nämlich die Existenz einer Funktion φ wie unter (B5), für die

$$\mathbb{E} \sup_{t\geq 0} \varphi(t) \sum_{i\geq 1} T_i \, \mathbb{1}_{(t,\infty)}(S(i)) < \infty$$

gilt. In der vorliegenden Arbeit wird Bedingung (B5) wegen ihrer einfacheren Gestalt und Interpretation (als Momentenbedingung an den assoziierten Random-Walk) verwendet.

2.3.3 Konvergenzergebnisse für $\Phi(t)$ in $\mathcal{L}^1$

An die gemeinsame Verteilung von $T \otimes X$ wird in diesem Abschnitt außer den in den Sätzen angegebenen und der Generalvoraussetzung $\overline{\mu} \in (0,\infty)$ keine Voraussetzung gestellt. Insbesondere beschränlen sich die Ergebnisse dieses Abschnitts nicht auf den BRW-Fall. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes, der die Sätze 2.3.4 und 2.3.6 verallgemeinert:

2.3.9 Satz. *Die Bedingungen* (B1)-(B4) *seien erfüllt. ϕ sei ein Parameterprozess, der die Bedingung (ϕ2) erfüllt. Weiterhin sei $\overline{\phi}$ im nichtarithmetischen Fall d. R. i. und im d-arithmetischen Fall absolut summierbar über $d\mathbb{Z}$. Dann gilt für die zugehörige kanonische Lösung Φ der PRE:*

$$\Phi(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} \overline{\phi}(\infty) W \quad (t \to \infty),$$

wobei der Grenzübergang auf die $t \in d\mathbb{Z}$ beschränkt bleibe, falls $\overline{\Sigma}_1$ d-arithmetisch ist ($d > 0$).

Von nun an bis zum Ende dieses Abschnitts werden die Bedingungen (B1)-(B4) vorausgesetzt. Wie in Gleichung (B4) auf Seite 141 im Anhang wird der zur Basisfolge $(T_i, -\log T_i)_{i\geq 1}$ assoziierte Random Walk (d. h. der Random-Walk mit Zuwachsverteilung $\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i \delta_{-\log T_i}$) mit $(\overline{\sigma}_n)_{n\geq 0}$ bezeichnet. Er muss an einigen Stellen vom Random-Walk mit Zuwachsverteilung $\overline{\Sigma}_1$ unterschieden werden. Letzterer wird wie gehabt mit $\overline{\mathbf{S}} = (\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ notiert. Der Beweis dieses Satzes führt über einige Hilfsresultate:

2.3.10 Lemma. *Sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(|x|)x^2 + \mathbb{1}_{(1,\infty)}(|x|)(2|x| - 1)$. Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t} \psi(xL(v)) \right) = 0$$

für alle $x > 0$, wobei $\mathcal{S}^t$ die homogene Erstaustrittslinie zum Niveau t bezeichne.

Beweis. Für jedes $x \leq 1$ ist $\psi(xy) \leq \psi(y)$ aufgrund der Monotonie von ψ. Für $x > 1$ gilt stets $\psi(xy) \leq x^2(2x-1)\psi(y)$ für alle $y \geq 0$, was sich nach einer Fallunterscheidung ($y \in [0,1/x]$, $y \in (1/x,1]$ oder $y > 1$) schnell ergibt. Man kann sich also beim Beweis des Lemmas o. B. d. A. auf den Fall $x = 1$ beschränken. Sei nun

$$\overline{\psi}(x) := \begin{cases} \frac{\psi(x)}{|x|} & \text{für } x \neq 0 \text{ und} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\overline{\psi}$ stetig und beschränkt. $\mathcal{S}^t$ ist auch eine HSL für das gewichtete Verzweigungsmodell, das auf $(T(v) \otimes Y(v))_{v\in\mathbb{V}}$ basiert (mit $Y_i(v) := (-\log T_i(v), X_i(v))$ für $i \geq 1$ und $v \in \mathbb{V}$), und zwar die zu $\tau(t)$ korrespondierende HSL, wobei $\tau(t)$ durch $\tau(t)(\mathbf{x}\otimes\mathbf{s}) := \inf\{n \geq 0 : s_n > t\}$ mit $\mathbf{x}\otimes\mathbf{s} = ((x_0,s_0),(x_1,s_1),\ldots)$. Der zu $(-\log L(v), S(v))_{v\in\mathbb{V}}$ korrespondierende Random-Walk auf $\mathbb{R}^2$ ist dann $((\overline{\sigma}_n, \overline{S}_n))_{n\geq 0}$ (man beachte, dass die Komponenten des Random-Walks ein durch $T \otimes X$ bestimmtes, für den weiteren Beweis jedoch unerhebliches Abhängigkeitsverhältnis aufweisen). Nach Lemma 1.2.21 gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t} \psi(L(v))\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t} L(v)\overline{\psi}(L(v))\right) \\ &= \mathbb{E}\,\overline{\psi}\left(\exp(-\overline{\sigma}_{\tau(t)})\right). \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\overline{\sigma}_n = \infty$ f. s. (nach Voraussetzung (B4)) gilt $\tau(t) < \infty$ f. s. für jedes $t > 0$. Ferner gilt $\overline{\sigma}_{\tau(t)} > t$ für jedes $t > 0$ und folglich $\lim_{t\to\infty}\overline{\sigma}_{\tau(t)} = \infty$ f. s. Dies liefert unter Benutzung des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t}\psi(L(v))\right) = \mathbb{E}\,\overline{\psi}\left(\lim_{t\to\infty}\exp(-\overline{\sigma}_{\tau(t)})\right) = 0.$$

□

2.3.11 Lemma. *Seien $s, c \in \mathbb{G}(\Sigma_1)\cap(0,\infty)$ $c > 0$ fest gewählt und $\Psi : \mathbb{R}\times\Omega :\to [0,\infty]$ ein $\mathfrak{B}\otimes\mathcal{A}_\infty$-messbarer Prozess. Die Familie*

$$\mathfrak{F} := \{\Psi(u) : u \in \mathbb{G}(\Sigma_1)\cap[s-c,s]\}$$

sei gleichgradig integrierbar. Dann gilt:

$$\left\|\sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\leq t+c}} L(v)\left([\Psi]_v(t+s-S(v)) - \overline{\Psi}(t+s-S(v))\right)\right\|_1 \underset{t\to\infty, t\in\mathbb{G}(\Sigma_1)}{\longrightarrow} 0. \qquad (2.23)$$

Insbesondere gilt: Erfüllt ϕ in der Situation von Gleichung (2.1) *die Bedingungen* (ϕ1) *und* (ϕ2) *und ist $\mathfrak{F}$ speziell durch*

$$\mathfrak{F} := \{\Phi(u) : u \in \mathbb{G}(\Sigma_1)\cap[0,\infty), u \in \mathbb{G}(\Sigma_1)\cap[s-c,s]\}$$

gegeben, so ist $\mathfrak{F}$ gleichgradig integrierbar und die Konvergenz in (2.23) *gilt mit* $\Psi := \Phi$.

Beweis. Der Beweis beschränkt sich auf den nichtarithmetischen Fall; die zum Beweis der Aussage im d-arithmetischen Fall notwendigen Änderungen liegen auf der Hand. Zunächst wird der Zusatz bewiesen. Bedingung (ϕ1) an ϕ liefert die Existenz eines $C > 0$ mit $\phi(t) = 0$ für alle $t \notin [0, C]$. Für $u \in [s-c, s]$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \sum_{v \in \mathbb{V}} L(v)\, [\phi]_v(u - S(v)) \\ &\leq \sum_{v \in \mathbb{V}} L(v) \sup_{0 \leq y \leq C} [\phi]_v(y)\, \mathbb{1}_{\{s-c-C \leq S(v) \leq s\}},\end{aligned}$$

und diese Zufallsgröße hat nach Bedingung (ϕ2) und der Annahme (2.21), die die Transienz von $\overline{\mathbf{S}}$ und damit die lokale Endlichkeit des zugehörigen Erneuerungsmaßes $\overline{U}$ impliziert (siehe Korollar 2.2.5 in Alsmeyer [3, 1991] oder Abschnitt VI.10 in Feller [30, 1971]), einen endlichen Erwartungswert:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}} L(v) \sup_{0 \leq y \leq C} [\phi]_v(y)\, \mathbb{1}_{\{s-c-C \leq S(v) \leq s\}}\right) \\ &\qquad = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} L(v) \sup_{0 \leq y \leq C} [\phi]_v(y)\, \mathbb{1}_{\{s-c-C \leq S(v) \leq s\}} \;\middle|\; \mathcal{A}_n\right]\right) \\ &\qquad = \overline{U}([s-c-C, s])\ \mathbb{E} \sup_{0 \leq y \leq C} \phi(y) < \infty.\end{aligned}$$

Es folgt die gleichgradige Integrierbareit der Familie $\mathfrak{F}$ in diesem speziellen Fall. In der allgemeinen Situation des Lemmas sei nun

$$G(x) := \sup_{f \in \mathfrak{F}} \mathbb{E}\, f\, \mathbb{1}_{\{f > x\}}$$

für $x \geq 0$. Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit von $\mathfrak{F}$ gilt $G(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Weiterhin sei

$$[\Delta]_v(u) := \big([\Psi]_v(u) - \overline{\Psi}(u)\big) \quad (u \in \mathbb{R}).$$

Es gilt $\overline{\Psi}(u) \leq G(0)$ für alle $u \in [s-c, s]$, was die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie

$$\{\Delta(u) : u \in [s-c, s]\}$$

und damit auch der größeren Familie

$$\mathfrak{F}' := \{[\Delta]_v(u) : u \in [s-c, s], v \in \mathbb{V}\}$$

sicherstellt. Folglich gilt

$$H(x) := \sup_{u\in[s-c,s],v\in\mathbb{V}} \mathbb{E}\,|[\Delta]_v(u)|\ \mathbb{1}_{\{|[\Delta]_v(u)|>x\}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sei nun $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Lemma 2.3.10, d. h.,

$$\psi(x) := \begin{cases} x^2\,\mathbb{1}_{[0,1]}(|x|) & \text{für } |x| \leq 1 \text{ und} \\ 2|x|-1 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

ψ ist eine gerade, nichtnegative, konvexe Funktion mit konkaver Ableitung und mit $\psi(0) = 0$. Daher ist die Topchiĭ-Vatutin-Ungleichung (siehe Vatutin und Topchiĭ [59, 1997, Theorem 2] oder Alsmeyer und Rösler [8, 2003, Theorem 1]) anwendbar und liefert für beliebiges $x > 0$ (unter Benutzung von $\psi(x) \leq 2|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\psi\left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t:\,S(v)\leq t+c} L(v)[\Delta]_v(t+s-S(v))\right) \,\middle|\, \mathcal{A}_{\mathcal{S}^t}\right] \\
&\leq 2\sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\leq t+c}} \mathbb{E}\left[\psi\left(L(v)[\Delta]_v(t+s-S(v))\right) \,\middle|\, \mathcal{A}_{\mathcal{S}^t}\right] \\
&\leq 2\sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\leq t+c}} \Bigg(\mathbb{E}\Big[\psi(xL(v))\,\mathbb{1}_{\{|[\Delta]_v(t+s-S(v))|\leq x\}} \\
&\qquad\qquad + 2L(v)|[\Delta]_v(t+s-S(v))|\,\mathbb{1}_{\{|[\Delta]_v(t+s-S(v))|>x\}} \,\Big|\, \mathcal{A}_{\mathcal{S}^t}\Big]\Bigg) \\
&\leq 2\sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\leq t+c}} \psi(xL(v)) \\
&\quad + 4\sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\leq t+c}} L(v)\,\mathbb{E}\left[|[\Delta]_v(t+s-S(v))|\,\mathbb{1}_{\{|[\Delta]_v(t+s-S(v))|>x\}} \,\middle|\, \mathcal{A}_{\mathcal{S}^t}\right] \\
&\leq 2\sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\leq t+c}} \psi(xL(v)) + 4H(x)\sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\leq t+c}} L(v) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}
\end{aligned}$$

Es folgt unter Verwendung von Lemma 2.3.10:

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\psi\left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t:\,S(v)\leq t+c} L(v)[\Delta]_v(t+s-S(v))\right)\right] \\
&\qquad\qquad \leq 2\limsup_{t\to\infty} \mathbb{E}\sum_{v\in\mathcal{S}^t} \psi(xL(v)) + 4H(x) = 4H(x).
\end{aligned}$$

Da $x > 0$ beliebig gewählt war und $\lim_{x\to\infty} H(x) = 0$ gilt, folgt

$$\mathbb{E}\,\psi\left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t:\,S(v)\le t+c} L(v)[\Delta]_v(t+s-S(v))\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Schließlich gilt mit $Y_t := \sum_{v\in\mathcal{S}^t:\,S(v)\le t+c} L(v)[\Delta]_v(t+s-S(v))$:

$$\begin{aligned}
\|Y_t\|_1 &= \left\|Y_t\,\mathbb{1}_{\{|Y_t|\le 1\}}\right\|_1 + \left\|Y_t\,\mathbb{1}_{\{|Y_t|>1\}}\right\|_1 \\
&\le \left\|Y_t\,\mathbb{1}_{\{|Y_t|\le 1\}}\right\|_2 + \left\|Y_t\,\mathbb{1}_{\{|Y_t|>1\}}\right\|_1 \\
&\le \left(\mathbb{E}\,\psi\,(Y_t)\,\mathbb{1}_{\{|Y_t|\le 1\}}\right)^{1/2} + \mathbb{E}\,\psi\,(Y_t)\,\mathbb{1}_{\{|Y_t|>1\}} \\
&\le \left(\mathbb{E}\,\psi\,(Y_t)\right)^{1/2} + \mathbb{E}\,\psi(Y_t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

2.3.12 Satz. *ϕ sei ein nichtnegativer Parameterprozess ϕ, der den Bedingungen ($\phi 1$) und ($\phi 2$) genügt. Darüber hinaus sei $\overline{\phi}$ d. R. i. Dann gilt für die zugehörige kanonische Lösung Φ der PRE:*

$$\Phi(t) \underset{t\to\infty}{\overset{\mathcal{L}^1}{\longrightarrow}} W\overline{\phi}(\infty),$$

wobei der Limes $t\to\infty$ nur über die $t \in d\,\mathbb{Z}$ zu bilden ist, falls $\overline{\Sigma}_1$ d-arithmetisch ist ($d > 0$).

Bevor der Beweis dieses Satzes in Angriff genommen wird, soll kurz das asymptotische Verhalten von $\overline{\mathcal{R}}_t$ (siehe S. 23 zur Definition von $\mathcal{R}_t$ und $\overline{\mathcal{R}}_t$) untersucht werden. In diesem Abschnitt ist $\mathbb{E}\,\overline{S}_1 = \overline{\mu} > 0$ (siehe Gleichung (2.21)) vorausgesetzt, so dass $\mathbb{P}(\sigma(t) < \infty) = 1$ für die Erstaustrittszeit $\sigma(t)$ zum Niveau t gilt. Korollar 1.2.26 liefert dann $\overline{\mathcal{R}}_t([0,a]) = \mathbb{P}(\overline{R}_t \le a)$ für jedes $a \ge 0$, wobei $\overline{R}_t$ der Exzess von $\overline{\mathbf{S}}$ sei. Lässt man hier $t\to\infty$ streben, so erhält man unter Benutzung eines klassischen Resultats der Erneuerungstheorie (siehe Satz 4.2.2 in Alsmeyer [3, 1991]):

$$\overline{\mathcal{R}}_t([0,a]) \longrightarrow \xi^{>}([0,a]).$$

Dabei bezeichne $\xi^{>}$ die stationäre Erneuerungsverteilung des Leiterhöhenprozesses $\overline{\mathbf{S}}^{>} = (\overline{S}_n^{>})_{n\ge 0}$:

$$\xi^{>}([0,a]) := \begin{cases} \frac{1}{\overline{\mu}^{>}} \int_0^a \mathbb{P}(\overline{S}_1^{>} > t)\,dt, & \text{falls } \overline{\Sigma}_1 \text{ nichtarithmetisch ist,} \\ \frac{d}{\overline{\mu}^{>}} \sum_{0\le kd\le a} \mathbb{P}(\overline{S}_1^{>} > kd), & \text{falls } \overline{\Sigma}_1\ d\text{-arithmetisch ist, } d > 0. \end{cases}$$

Hier gilt nach der 1. Waldschen Gleichung $\overline{\mu}^{>} = \overline{\mu}\ \mathbb{E}\,\sigma^{>} \in (0,\infty)$ mit dem ersten echt aufsteigenden Leiterindex $\sigma^{>}$.

Beweis von Satz 2.3.12. Der folgende Beweis beschränkt sich auf den nichtarithmetischen Fall; der Beweis des arithmetischen Falls kann analog geführt werden. Nach Satz 2.3.3 gilt

$$\overline{\Phi}(t) = \overline{\phi} * \overline{U}(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\phi}(\infty).$$

Ist nun $\overline{\phi}(\infty) = 0$, so ist die behauptete $\mathcal{L}^1$-Konvergenz bewiesen. Ohne Einschränkung gelte also $\overline{\phi}(\infty) > 0$. Da ϕ nach Voraussetzung Bedingung (ϕ1) erfüllt, existiert ein $C > 0$, so dass $\phi(t) = 0$ für alle $t \notin [0, C]$ gilt. Dann gilt für alle $s > C$ und $c > 0$:

$$\begin{aligned}
\Phi(t+s) - W\overline{\phi}(\infty) \quad &= \quad \sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\le t+c}} L(v)([\Phi]_v(t+s-S(v)) - \overline{\Phi}(t+s-S(v))) \\
&\quad + \sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)> t+c}} L(v)\,[\Phi]_v(t+s-S(v)) \\
&\quad + \sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)\le t+c}} L(v)(\overline{\Phi}(t+s-S(v)) - \overline{\phi}(\infty)) \\
&\quad + \left(\sum_{v\in\mathcal{S}^t} L(v) - W\right)\overline{\phi}(\infty) - \sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^t:\\ S(v)> t+c}} L(v)\overline{\phi}(\infty) \\
&=: \quad \sum_{i=1}^{5} S_i(t,s,c).
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $\overline{\Phi}(x) \to \overline{\phi}(\infty)$ für $x \to \infty$ gilt einerseits $0 < \overline{\phi}(\infty) \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \overline{\Phi}(x)$ und es lässt sich folglich ein $c > 0$ in Abhängigkeit von ε so groß wählen, dass

$$\xi^{>}((c,\infty)) \le \frac{\varepsilon}{8\cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} \overline{\Phi}(x)}$$

gilt, wobei $\xi^{>}$ die stationäre Erneuerungsverteilung des Prozesses $(\overline{S}_n^{>})_{n\ge 0}$ bezeichne (mit $\mathbb{P}(\overline{S}_1 \in \cdot) = \mathbb{E}\sum_{v\in\mathcal{S}^{>}} L(v)\delta_{S(v)} = \overline{\Sigma}_1^{>}$). Andererseits kann dann ein $s > 0$ in Abhängigkeit von ε und c so groß gewählt werden, dass

$$|\overline{\Phi}(x) - \overline{\phi}(\infty)| \le \varepsilon/4$$

für alle $x \ge s - c$ gilt. Wegen $\mathbb{E}\,\mathcal{R}_t((c,\infty)) = \mathbb{P}(\overline{R}_t > c) \to \xi^{>}((c,\infty)) \le \varepsilon/(8\cdot\overline{\phi}(\infty))$ und $Z_{\mathcal{S}^t} \to W$ in $\mathcal{L}^1$ für $t\to\infty$ gibt es ferner ein $t_0 > 0$, so dass für alle $t \ge t_0$

$$\mathbb{E}\,\mathcal{R}_t((c,\infty)) \vee \|Z_{\mathcal{S}^t} - W\|_1 \le \frac{\varepsilon}{4\,\overline{\phi}(\infty)}$$

gilt. Mit diesen s, c und für $t \ge t_0$ gilt dann:

$$\|S_5(t,s,c)\|_1 = \overline{\phi}(\infty)\,\mathbb{E}\,\mathcal{R}_t((c,\infty)) \le \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|S_4(t,s,c)\|_1 = \overline{\phi}(\infty)\,\|Z_{\mathcal{S}^t} - W\|_1 \le \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|S_3(t,s,c)\|_1 \le \frac{\varepsilon}{4} \cdot \left\| \sum_{v\in\mathcal{S}^t:\,S(v)\le t+c} L(v) \right\|_1 \le \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und}$$

$$\|S_2(t,s,c)\|_1 \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \overline{\Phi}(x) \cdot \mathbb{E}\,\mathcal{R}_t((c,\infty)) \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nach Lemma 2.3.11 gilt $\|S_1(t,s,c)\|_1 \to 0$ für $t\to\infty$ bei festen s und c. Damit erhält man insgesamt:

$$\limsup_{t\to\infty} \left\|\Phi(t) - W\overline{\phi}(\infty)\right\|_1 \le 4\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Durch eine Abschneidetechnik wird der Beweis von Satz 2.3.9 nun auf Satz 2.3.12 zurückgeführt:

Beweis von Satz 2.3.9. Sei ϕ wie im Satz, d. h., ϕ erfülle Bedingung ($\phi 2$) und $\overline{\phi}$ sei d. R. i. Ferner kann (ggf. durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil $\phi = \phi^+ - \phi^-$) o. B. d. A. angenommen werden, dass $\phi \ge 0$ ist. Für $n\in\mathbb{N}$ sei dann $\phi_n(t) := \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)\cdot\phi(t)$ $(t\in\mathbb{R})$. Dann erfüllt $\phi_n(\cdot+n)$ die Voraussetzungen von Satz 2.3.12 und es folgt, dass $\Phi_n(t+n)$ für $t\to\infty$ in $\mathcal{L}^1$ gegen $W\,\overline{\phi_n}(\infty)$ konvergiert, wobei Φ_n die zu ϕ_n korrespondierende kanonische Lösung der Gleichung (2.1) sei. Folglich gilt auch

$$\Phi_n(t) \xrightarrow{\mathcal{L}^1} W\,\overline{\phi_n}(\infty) \quad (t\to\infty).$$

Sei $\phi'_n := \phi - \phi_n$. Aus der d. R. I. von $\overline{\phi}$ erhält man die Endlichkeit der unendlichen Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{k-1\le x\le k} \overline{\phi}(x)$. Für die korrespondierenden kanonischen Lösungen Φ'_n von (2.1) folgt unter Verwendung der Ungleichung $\overline{U}([x,x+1]) \le \overline{U}([-1,1])$ $(x\in\mathbb{R})$, dass für jedes $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|\Phi'_n(t)\|_1 &= \int \overline{\phi'_n}(t-x)\,\overline{U}(dx) \\
&\le \overline{U}([-1,1]) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{k-1\le x\le k} \overline{\phi'_n}(x) \\
&\le \overline{U}([-1,1]) \sum_{k=-(n-1)}^{n} \sup_{k-1\le x\le k} \overline{\phi}(x) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{glm. in } t)
\end{aligned}$$

gilt. Für ein beliebig vorgelegtes $\varepsilon > 0$ sei $n\in\mathbb{N}$ dann so, dass $\sup_{t\in\mathbb{R}} \overline{\Phi'_n}(t) < \varepsilon/3$ gilt. Weiterhin kann angenommen werden, dass n dabei so groß ist, dass auch $\overline{\phi'_n}(\infty) = |\overline{\phi}(\infty) - \overline{\phi_n}(\infty)| < \varepsilon/3$ gilt. Dies ist aufgrund der d. R. I. von $\overline{\phi}$

unproblematisch. Weiter sei $t_0 \geq 0$ so groß, dass $\left\|\Phi_n(t) - W\overline{\phi_n}(\infty)\right\|_1 < \varepsilon/3$ für alle $t \geq t_0$ gilt. Für jedes $t \geq t_0$ folgt dann (unter Verwendung von $\mathbb{E}\, W = 1$):

$$\begin{aligned}\left\|\Phi(t) - W\overline{\phi}(\infty)\right\|_1 &\leq \left\|\Phi_n(t) - W\overline{\phi_n}(\infty)\right\|_1 \\ &\quad + \|\Phi_n'(t)\|_1 + |\overline{\phi}(\infty) - \overline{\phi_n}(\infty)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

2.3.4 Konvergenzergebnisse für den empirischen Exzess

Das asymptotische Verhalten der Lösungen der PRE im f. s. Sinne wird in der vorliegenden Arbeit unter Zuhilfenahme des empirischen Exzesses

$$\mathcal{R}_t = \sum_{v \in \mathcal{S}^t} L(v)\delta_{S(v)-t}, \quad t \geq 0,$$

(siehe Abschnitt 1.2.4) untersucht. Daher wird das asymptotische Verhalten des Exzesses zuerst beleuchtet. In diesem Abschnitt wird zunächst die Gültigkeit der Bedingungen (B1)-(B4) vorausgesetzt. Wie im Anschluss an Satz 2.3.12 auf S. 63 erläutert, gilt dann $\overline{\mathcal{R}}_t([0,a]) \to \xi^{>}([0,a])$ für $t \to \infty$ (siehe Abschnitt 1.2.4 zur Definition von $\xi^{>}$). In der Tat lässt sich aus Satz 2.3.9 sogar eine genauere Aussage folgern. Nimmt man nämlich zunächst an, dass die $S(v)$ alle nichtnegativ sind und definiert für festes $a \geq 0$ den (produktmessbaren) Prozess $\phi : \mathbb{R} \times \Omega \to [0, \infty]$ durch

$$\phi(t) := \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t) \sum_{i \geq 1} T_i \, \mathbb{1}_{(t,\infty)}(X_i), \quad t \geq 0,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}\Phi(a+t) &= \sum_{v \in \mathbb{V}} L(v)\, [\phi]_v(a + t - S(v)) \\ &= \sum_{v \in \mathbb{V}} L(v)\, \mathbb{1}_{[a,\infty)}(a + t - S(v)) \sum_{i \geq 1} T_i(v)\, \mathbb{1}_{(a+t-S(v),\infty)}(X_i(v)) \\ &= \sum_{v \in \mathbb{V}} L(v) \cdot \mathbb{1}_{\{S(v) \leq t\}} \sum_{i \geq 1} T_i(v)\, \mathbb{1}_{\{a+t<S(vi)\}} \\ &= \mathcal{R}_t((a, \infty)).\end{aligned}$$

Also lässt sich der empirische Exzess im Falle nichtnegativer X_i als Familie kanonischer Lösungen einer PRE bzgl. geeigneter Parameterprozesse auffassen. Als Anwendung von Satz 2.3.9 ergibt sich daher:

2.3.13 Korollar. *Unter den Voraussetzungen* (B1)-(B4) *gilt für jedes $a \geq 0$:*

$$\mathcal{R}_t((a, \infty)) \xrightarrow[t \to \infty]{\mathcal{L}^1} W\xi^{>}((a, \infty)),$$

wobei $\xi^{>}$ die stationäre Erneuerungsverteilung des Prozesses $(\overline{S}_n^{>})_{n\geq 0}$ bezeichne. Dabei ist der Limes im d-arithmetischen Fall nur über die $t \in d\,\mathbb{Z}$ zu bilden.

Beweis. Wie bereits in den anderen Beweisen des Abschnitts beschränkt sich dieser Beweis auf den nichtarithmetischen Fall. Für festes $a > 0$ ergibt sich hier wie im Absatz vor diesem Korollar mit $\phi^{>}(t) := \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t) \sum_{i\geq 1} T_i^{>} \mathbb{1}_{(t,\infty)}(S^{>}(i))$ und der zugehörigen kanonischen Lösung $\overline{\Phi}^{>}$ für den Leiterlinienprozess:

$$\begin{aligned} \Phi^{>}(a+t) &= \sum_{v\in\mathbb{V}} L^{>}(v)\,[\phi^{>}]_v(a+t-S^{>}(v)) \\ &= \mathcal{R}_t^{>}((a,\infty)). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.3.13 übertragen sich die Bedingungen (B1)-(B4) vom gegebenen Modell basierend auf $\mathbf{T}\otimes\mathbf{X}$ auf den Leiterlinienprozess basierend auf $\mathbf{T}^{>}\otimes\mathbf{X}^{>}$. Weiterhin erfüllt $\phi^{>}$ die Bedingung (ϕ2), denn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi^{>}|(t) &= \mathbb{E}\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t) \sum_{i\geq 1} T_i^{>}\, \mathbb{1}_{(t,\infty)}(S^{>}(i)) \\ &\leq \mathbb{E}\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{i\geq 1} T_i^{>} = 1. \end{aligned}$$

Ferner ist $\overline{\phi}^{>}$ ist d. R. i., denn $\phi^{>}$ verschwindet auf $(-\infty, a)$ und ist ab a eine monoton fallende Treppenfunktion mit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}^{>}(x)\,dx &= \int_a^{\infty} \mathbb{P}(\overline{S}_1^{>} > x)\,dx \\ &= \xi^{>}((a,\infty)) < \infty. \end{aligned}$$

Daher ist Satz 2.3.9 anwendbar und liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t^{>}((a,\infty)) = \Phi(a+t) &\xrightarrow{\mathcal{L}^1} W^{>}\,\overline{\phi}^{>}(\infty) \\ &= W\,\frac{1}{\overline{\mu}^{>}}\xi^{>}((a,\infty)) \quad (t\to\infty). \end{aligned}$$

Nun bleibt abschließend zu bemerken, dass das Niveau t für jede Folge $(S(x|n))_{n\geq 0}$ $(x \in \partial\,\mathbb{V})$ zum ersten Mal in einem streng aufsteigenden Leiterknoten überwunden wird, was $\mathcal{R}_t^{>} = \mathcal{R}_t$ für jedes $t \geq 0$ liefert. □

Beschränkt man sich bei der Betrachtung des empirischen Exzesses auf den BRW-Fall, so kann die obige Konvergenz unter Rückgriff auf die Sätze 2.3.5 und 2.3.7 auch im f. s. Sinne bewiesen werden. Außer der Annahme des BRW-Falles wird dabei nur noch eine weitere Integrabilitätsbedingung benötigt:

2.3.14 Satz. *Im BRW-Fall gilt unter den Voraussetzungen* (B1)-(B5)*:*

$$\mathcal{R}_t((a,\infty)) \longrightarrow W\xi^{>}(a) \text{ für } t \to \infty \ \mathbb{P}\text{-f. s.},$$

wobei $\xi^{>}$ *wiederum die stationäre Erneuerungsverteilung des Erneuerungsprozesses* $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$ *bezeichne. Wie gehabt ist die Limesbildung im d-arithmetischen Fall auf die* $t \in d\,\mathbb{Z}$ *zu beschränken.*

Beweis. Einmal mehr wird die Beweisführung auf den nichtarithmetischen Fall beschränkt. Nach Satz 1.3.13 und Lemma 1.3.14 übertragen sich die Bedingungen (B1)-(B5) vom Verzweigungsmodell basierend auf $\mathbf{T} \otimes \mathbf{X}$ auf das zugehörige Leiterlinienmodell basierend auf $\mathbf{T}^{>} \otimes \mathbf{X}^{>}$. Mit Hinweis auf die Gleichung $\mathcal{R}_t^{>} = \mathcal{R}_t$ genügt es daher, den Satz für den Fall nichtnegativer X_i zu beweisen. Für festes $a > 0$ sei wie im Beweis von Korollar 2.3.13 $\phi(t) := \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t) \sum_{i\geq 1} T_i \,\mathbb{1}_{(t,\infty)}(X_i)$ $(t \in \mathbb{R})$. Dann ist ϕ produktmessbar und f. s. separabel, denn $\mathbb{Q}$ separiert den Prozess ϕ f. s. Anstelle der f. s. Separabilität wird im Folgenden die stärkere Bedingung (ϕ3) nachgewiesen. Dabei erfüllt ϕ nicht nur die Bedingung (ϕ3), sondern hat (auf einer Menge der Wahrscheinlichkeit 1) rechtsseitig stetige Pfade mit linksseitigen Limiten. Dies folgt aus der Tatsache, dass sowohl $t \mapsto \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t)$ und für jedes $i \geq 1$ auch

$$t \mapsto T_i \,\mathbb{1}_{(t,\infty)}(X_i) = T_i \,\mathbb{1}_{(-\infty,X_i)}(t)$$

das gewünschte Pfadverhalten zeigt. Damit ist ϕ auf $\{\sum_{i\geq 1} T_i < \infty\}$ (und diese Menge hat nach (B1) die Wahrscheinlichkeit 1) linksseitig stetig mit rechtsseitigen Limiten (auf dieser Menge häufen sich die Unstetigkeitspunkte X_i nur im Unendlichen), wobei zusätzlich die Menge der Unstetigkeitsstellen von ϕ diskret in $\mathbb{R}$ liegt. Mit der Funktion φ aus Bedingung (B5) gilt ferner:

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} \varphi(t)\phi(t) &= \sup_{t\geq 0} \varphi(t)\,\mathbb{1}_{[a,\infty)}(t) \sum_{i\geq 1} T_i \,\mathbb{1}_{(t,\infty)}(X_i) \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \mathbb{1}_{[a,\infty)}(t) \sum_{i\geq 1} T_i \,\mathbb{1}_{\{X_i > t\}}\, \varphi(X_i) \\
&\leq \sum_{i\geq 1} T_i \varphi(X_i) \in \mathcal{L}^1,
\end{aligned}$$

wobei die Messbarkeit von $\sup_{t\geq 0} \varphi(t)\phi(t)$ aus dem Pfadverhalten von ϕ und φ folgt; folglich erfüllt ϕ mit $\psi := \varphi$ die Voraussetzung (ϕ2+) und Satz 2.3.4 ist anwendbar. Er liefert die behauptete Konvergenzaussage; für die Details der notwendigen Rechnungen sei auf den Beweis von Korollar 2.3.13 und den Absatz vor diesem Korollar verwiesen. □

2.3.5 Konvergenzergebnisse für $\Phi(t)$ im f. s. Sinne

Die bekannten Konvergenzergebnisse für die kanonische Lösung Φ der PRE sollen in diesem Abschnitt vom (GBP)-Fall auf den allgemeinen BRW-Fall ausgedehnt werden. Den Preis für die Ausdehnung der bekannten Resultate bilden verstärkte Voraussetzungen an Momente des assoziierten Random-Walks $(\overline{S}_n)_{n\geq 0}$. Die Hauptergebnisse dieses Abschnitts sind:

2.3.15 Satz. *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B5), *wobei* (B5) *speziell mit der Funktion* $t \mapsto \varphi(t) := 1 \vee t^2$ $(t \in \mathbb{R})$ *erfüllt sei. Darüber hinaus gelte* $\mathbb{E}\, N < \infty$. ϕ *sei ein Parameterprozess, der die Bedingung* (ϕ2+) *erfüllt. Im nichtarithmetischen Fall sei ferner die Bedingung* (ϕ3) *erfüllt. Dann gilt*

$$\Phi(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} W\overline{\phi}(\infty) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.},$$

wobei der der Limes im d-arithmetischen Fall nur über die $t \in d\,\mathbb{Z}$ *gebildet wird.*

2.3.16 Korollar (Blackwellscher Erneuerungssatz für zufällig gewichtete Erneuerungsmaße). *In der Situation von Satz 2.3.15 gilt für jedes Intervall I endlicher Länge:*

$$\mathcal{U}_\Sigma(t+I) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{c_d W}{\overline{\mu}}\, \lambda\!\!\lambda_d(I) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.},$$

wobei $c_0 = 1$ *und* $c_d = d$ *für* $d > 0$ *gelten. Dabei sei d im arithmetischen Fall die Gitterspanne und* 0 *im nichtarithmetischen Fall. Der Limes wird im d-arithmetischen Fall nur über die* $t \in d\,\mathbb{Z}$ *gebildet.*

Beweis. Für ein Intervall I endlicher Länge wähle man $\phi(t) := \mathbb{1}_{-I}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Dann gilt $[\phi]_v(t - S(v)) = \mathbb{1}_{-I}(t - S(v)) = \delta_{t+I}(S(v))$ und die Behauptung folgt aus Satz 2.3.15. □

2.3.17 Definition. Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$T_t := \#\{v \in \mathbb{V} : S(v) \leq t\} = \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{S(v)\leq t\}}$$

Die entsprechende Größe für den Leiterhöhenprozess basierend auf der Gewichtsfolge $(T^>(v))_{v\in\mathbb{V}}$ sei mit $T_t^>$ bezeichnet.

2.3.18 Korollar. *In der Situation von Satz 2.3.15 gilt*

$$e^{-t}T_t \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{W}{\overline{\mu}} \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

im nichtarithmetischen Fall sowie

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nd}T_{nd} = \frac{d}{1-e^{-d}}\,\frac{W}{\overline{\mu}} \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

im d-arithmetischen Fall, $d > 0$.

Beweis. Sei $\phi(t) := e^{-t}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dann erfüllt ϕ die Voraussetzungen von Satz 2.3.15 und es folgt:

$$\begin{aligned} e^{-t}T_t &= e^{-t}\sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{S(v)\le t\}} \\ &= \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,[\phi]_v(t-S(v)) \\ &\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} W\overline{\phi}(\infty) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \end{aligned}$$

Was bleibt, um den Beweis zu vollenden, ist, $\overline{\phi}(\infty)$ zu bestimmen. Im nichtarithmetischen Fall gilt

$$\overline{\phi}(\infty) = \frac{1}{\overline{\mu}} \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

gemäß Definition 2.3.2. Im d-arithmetischen Fall gilt

$$\overline{\phi}(\infty) = \frac{d}{\overline{\mu}} \sum_{n\ge 0} e^{-nd} = \frac{d}{\overline{\mu}(1-e^{-d})}, \quad d > 0.$$

In beiden Fällen gilt also die behauptete Konvergenzaussage. □

2.3.19 Bemerkung. An dieser Stelle ist es angebracht, die Voraussetzungen des Satzes 2.3.15 zu diskutieren. Die Voraussetzung (B1)-(B3) sorgen für die geeignete Normierung bzw. schließen Trivialfälle aus. Weiterhin wird im Satz die Generalvoraussetzung (2.21), d. h. $\overline{\mu} > 0$ angenommen. Diese Bedingung ist nötig, da sie auch im klassischen Blackwellschen Erneuerungssatz vorausgesetzt wird. Bedingung (B4) sorgt für die Nichtdegeneriertheit des Martingallimes W. Wegen $\overline{\mu} > 0$ ist (B4) äquivalent zur einfacheren Bedingung (B4+), die sich unter (2.21) zur $(W_1 \log W_1)$-Bedingung reduziert: $\mathbb{E}\, W_1 \log^+ W_1 < \infty$.
(B5) kann als Momentenbedingung an den assoziierten Random-Walks $\overline{\mathbf{S}}$ angesehen werden. Sie sagt aus, dass $\overline{S}_1$ ein φ-Moment besitzt. Nerman [53] fordert in seiner Arbeit die Existenz eines φ-Moments der (dort nichtnegativen) Zufallsgröße $\overline{S}_1$ für eine monoton wachsende Funktion $\varphi : [0,\infty) \to (0,\infty)$, so dass $1/\varphi$ $\lambda\!\!\lambda$-integrierbar ist. Diese Momentenannahme ist sehr schwach; sie ist z. B. mit den Funktionen der Gestalt $t \mapsto t|\log t|^{1+\varepsilon}$ $(t \ge 0)$ für $\varepsilon > 0$ erfüllt; dies genügt hier nicht. Im Folgenden werden zwei Bedingungen an die Basisfolge $(T_i)_{i\ge 1}$ verwendet: zum einen $\mathbb{E}\, N < \infty$, was nach (1.39) der Endlichkeit von $\mathbb{E}\exp(\overline{S}_1)$, also der Existenz eines exponentiellen Moments, entspricht. Ferner wird die Bedingung $\mathbb{E}\sum_{i\ge 1} T_i(X_i^-)^2 < \infty$ benötigt; sie verhindert allzu große Exkursionen des BRW auf die negative Halbachse (und stellt die Endlichkeit der Erneuerungsfunktion von $\overline{\mathbf{S}}$ sicher). Da die Existenz eines exponentiellen Moments insbesondere $\mathbb{E}(\overline{S}_1^+)^2 < \infty$ liefert, werden beide Bedingungen in der Formulierung des Satzes 2.3.15 und der zum Beweis des Satzes erforderlichen Lemmata durch die formal stärkere Bedingung (B5) mit der Funktion $\varphi(t) := 1 \vee t^2$ $(t \in \mathbb{R})$ und $\mathbb{E}\, N < \infty$ ersetzt.

Der Beweis von Satz 2.3.15:

Der Beweis von Satz 2.3.15 ist aufwändig. Die Beweisstrategie sieht es vor, den Prozess Φ (unter geeigneten Bedingungen) für festes $s > 0$ wie folgt zu zerlegen:

$$\begin{aligned}\Phi(t+s) &= \sum_{v \prec \mathcal{S}^t} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)) \\ &\quad + \sum_{v \in \mathcal{S}^t} L(v)\,[\Phi]_v(t+s-S(v)) \\ &=: S_1(t,s) + S_2(t,s) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Terme S_1 und S_2 werden dann einzeln betrachtet und zwar zunächst unter einer restriktiveren Voraussetzung an den zugrunde liegenden Parameterprozess ϕ. Es wird nämlich im ersten Schritt angenommen, dass ϕ oberhalb einer festen Schranke $C > 0$ verschwindet, d. h., dass $\phi(t) = 0$ für alle $t > C$ gilt. Der Vorteil daran, sich vorerst auf solche „abgeschnittenen“ Parameterprozesse zu beschränken, liegt darin, dass der Term $S_1(t,s)$ dann für alle $s > C$ verschwindet und folglich im Grenzübergang keine Rolle spielt. Für den Beweis des folgenden Satzes ist also nur der Term S_2 zu behandeln.

2.3.20 Satz. *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B5), *wobei* (B5) *mit* $\varphi(t) := 1 \vee t^2$ *(*$t \in \mathbb{R}$*) erfüllt sei. Darüber hinaus sei* $\mathbb{E}\,N < \infty$. ϕ *sei ein Prozess, der die Bedingung* (ϕ2+) *sowie im nichtarithmetischen Fall die Bedingung* (ϕ3) *erfüllt. Weiterhin gebe es ein* $C > 0$ *mit* $\phi(t) = 0$ *für alle* $t > C$*. Dann gilt:*

$$\Phi(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} W\overline{\phi}(\infty) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.},$$

wobei der Limes im d*-arithmetischen Fall nur über die* $t \in d\,\mathbb{Z}$ *zu bilden ist.*

Die sich anschließenden Lemmata und Beweise greifen immer wieder auf die gleichen Objekte zurück. Daher ist es sinnvoll, einige Bezeichnungen zu wiederholen bzw. für den Rest des Abschnitts festzuhalten. Es seien also $\xi^>$ das stationäre Erneuerungsmaß des Erneuerungsprozesses $\overline{\mathbf{S}}^>$, d. h., für $a \geq 0$ ist

$$\xi^>([0,a]) = \begin{cases} \frac{1}{\mu^>} \int_0^a \mathbb{P}(\overline{S}_1^> > t)\,dt & \text{im Fall } \mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \\ \frac{d}{\mu^>} \sum_{0 \leq kd \leq a} \mathbb{P}(\overline{S}_1^> > kd) & \text{im Fall } \mathbb{G}(\Sigma_1) = d\,\mathbb{Z} \text{ für ein } d > 0. \end{cases}$$

Für $a > 0$ sei mit $N^>(a)$ die Anzahl der Knoten auf der ersten Leiterlinie bezeichnet, deren Positionen a nicht überschreiten, d. h.,

$$N^>(a) = \sum_{i=1}^{N^>} \mathbb{1}_{\{S^>(i) \leq a\}}\,.$$

Für $r > 0$ (wobei r im nichtarithmetischen Fall zunächst als freie Variable behandelt wird und $r = d$ im d-arithmetischen Fall gelte) sei $t_k := rk$ $(k \geq 1)$. Ferner seien $T_t^> := \#\{v \in \mathbb{V} : S^>(v) \in [0,t]\}$ $(t \geq 0)$ und

$$m_k := \#\mathcal{S}^{t_k} \quad (k \geq 1).$$

Der Behandlung des Terms S_2 in der Situation des Satzes 2.3.20 gehen nun ein grundsätzliches Lemma und dann das Lemma 2.3.22 über das Verhalten der Folge $(m_k)_{k\geq 1}$ voraus.

2.3.21 Lemma. *Unter den Bedingungen* (B1)-(B4) *gilt*

$$\{W > 0\} = \{N_n \to \infty\} = \{N_n^> \to \infty\} \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s., \tag{2.25}$$

wobei $(N_n)_{n\geq 0}$ *der zugrunde liegende Galton-Watson-Prozess sei (siehe* (1.8)*) und* $(N_n^>)_{n\geq 0}$ *das entsprechende Objekt für den Leiterlinienprozess.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen (B1)-(B4) gilt nach Satz A.1.1:

$$\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(N_n \to 0).$$

Wegen $\{N_n \to 0\} \subseteq \{W = 0\}$ sind diese beiden Mengen f. s. gleich. Das Explosions-Extinktions-Prinzip liefert dann die erste Gleichheit in (2.25). Die zweite Gleichheit folgt mit dem gleichen Argument, da mit der Basisfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ auch $(T_i^>)_{i\geq 1}$ die Bedingungen (B1)-(B4) erfüllt (siehe Lemma 1.3.14(a)) und $W = \lim_{n\to\infty} Z_{\mathcal{S}_n^>}$ f. s. gilt, wobei $\mathcal{S}_n^>$ gemäß Definition 1.2.23 gegeben sei. □

2.3.22 Lemma. *In der Situation von Satz 2.3.20 gelten*

(a) $\liminf_{k\to\infty} \frac{m_k}{\sum_{j<k} m_j} > 0$ *f. s. auf* $\{W > 0\}$ *und*

(b) $\limsup_{k\to\infty} m_k \max_{v\in\mathcal{S}^{t_k}} L(v) \leq CW\infty$ *f. s. auf* $\{W > 0\}$ *für eine hinreichend große Konstante* $C > 0$.

Beweis. Es sei $c > 0$ so groß, dass

$$\xi^>([0,c]) > 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\,N^>(c) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N^>} \mathbb{1}_{\{S^>(i)\leq c\}}\right) > 1 \tag{2.26}$$

sind. Dies ist möglich, da der Erwartungswert von $N^>(c)$ für $c \to \infty$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gegen $\mathbb{E}\,N^>$ konvergiert. Dabei gilt $\mathbb{E}\,N^> > 1$ nach Satz 1.3.13. Weiter sei die Hilfsfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ durch $n_k := \#A_k$ mit $A_k := \{v \in \mathcal{S}^{t_k} : S(v) \leq t_k + c\}$ $(k \geq 1)$ definiert. Nun wird zunächst gezeigt, dass (a) mit der Hilfsfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ anstelle der Folge $(m_k)_{k\geq 1}$ richtig ist. Auf $\{v \in A_k\}$ gilt $t_k < S(v) \leq t_k + c$, also $e^{t_k} < L(v)^{-1} \leq e^{t_k+c}$. Folglich gilt $n_k \leq e^{t_k+c}\sum_{v\in A_k} L(v) = e^{t_k+c}\mathcal{R}_{t_k}([0,c])$ sowie umgekehrt $n_k \geq e^{t_k}\sum_{v\in A_k} L(v) = e^{t_k}\mathcal{R}_{t_k}([0,c])$. Also folgt

$$\frac{\sum_{j<k} n_j}{n_k} \quad \leq \quad e^c\,\frac{\sum_{j<k} e^{t_j}\mathcal{R}_{t_j}([0,c])}{e^{t_k}\mathcal{R}_{t_k}([0,c])}.$$

Nach Satz 2.3.14 gibt es für fast alle $\omega \in \{W > 0\}$ ein k_0, so dass für alle $k \geq k_0$

$$\frac{1}{2}W\xi^>([0,c]) \leq \mathcal{R}_{t_k}([0,c]) \leq 2W\xi^>([0,c])$$

gilt. Damit ergibt sich f. s. auf $\{W > 0\}$:

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \frac{\sum_{j<k} n_j}{n_k} &\leq \limsup_{k\to\infty} e^c \frac{\sum_{k_0\leq j<k} e^{t_j}\mathcal{R}_{t_j}([0,c])}{e^{t_k}\mathcal{R}_{t_k}([0,c])} \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} 4e^c \sum_{k_0\leq j<k} e^{(j-k)r} < \infty,\end{aligned}$$

d. h., es gilt Aussage (a) für die Folge $(n_k)_{k\geq 1}$. Um Aussage (a) nun von der Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ auf die Folge $(m_k)_{k\geq 1}$ zu liften, genügt es,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f. s. auf } \{W > 0\} \tag{2.27}$$

zu zeigen, denn dann folgt f. s. auf $\{W > 0\}$ unter Benutzung von $m_k \geq n_k$:

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} \frac{m_k}{\sum_{j<k} m_j} &= \liminf_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} \frac{n_k}{\sum_{j<k} n_j} \frac{\sum_{j<k} n_j}{\sum_{j<k} m_j} \\ &\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{\sum_{j<k} n_j} \liminf_{k\to\infty} \frac{\sum_{j<k} n_j}{\sum_{j<k} m_j}.\end{aligned}$$

Hier gilt einerseits $\liminf_{k\to\infty} n_k/\sum_{j<k} n_j > 0$ f. s. auf $\{W > 0\}$ nach dem bisher Bewiesenen. Andererseits folgt aus (2.27) auch

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\sum_{j<k} n_j}{\sum_{j<k} m_j} \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{m_k} > 0 \quad \mathbb{P}\text{-f. s. auf } \{W > 0\}.$$

Zum Beweis von (2.27) kann man nun wie folgt abschätzen:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{N^>(t_k,\infty)}{T^>_{t_k}} \limsup_{k\to\infty} \frac{T^>_{t_k}}{N^>(t_k, t_k + c]}.$$

Für den ersten Term folgt unter Benutzung von $T^>_{t_k} \to \infty$ für $k \to \infty$ f. s. auf $\{W > 0\} = \{N^>_n \to \infty\}$ (siehe Lemma 2.3.21) aus dem starken Gesetz der großen Zahlen:

$$\frac{N^>(t_k,\infty)}{T^>_{t_k}} \leq \frac{1}{T^>_{t_k}} \sum_{\substack{v\in\mathbb{V}:\\ S^>(v)\leq t_k}} N^>(v) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\, N^> \quad \mathbb{P}\text{-f. s. auf } \{W > 0\}$$

Hier ist $\mathbb{E}\, N^>$ nach Lemma 1.3.14(c) endlich. Mit einem ähnlichen Argument erhält man $\limsup_{k\to\infty} T^>_{t_k}/N^>(t_k, t_k + c] < \infty$ (siehe Lemma 3.6 in [53]).
Zum Nachweis von (b) beachte man, dass $\max_{v\in\mathcal{S}^{t_k}} L(v) = \max_{v\in A_k} L(v)$ gilt, wenn $A_k \neq \emptyset$ ist. Wegen $\sum_{v\in A_k} L(v) = \mathcal{R}_{t_k}([0,c]) \to W\xi^>([0,c])$ f. s. gilt $A_k \neq \emptyset$

für hinreichend große k auf $\{W > 0\}$ f. s. Dies liefert

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} m_k \max_{v\in\mathcal{S}^{t_k}} L(v) &= \limsup_{k\to\infty} m_k \max_{v\in A_k} L(v) \\
&\le e^c \limsup_{k\to\infty} \sum_{v\in A_k} L(v) \\
&= e^c \limsup_{k\to\infty} \mathcal{R}_{t_k}([0,c]) \\
&= e^c W \xi^{>}([0,c]) < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f. s. auf } \{W > 0\},
\end{aligned}$$

d. h., Aussage (b) ist bewiesen. □

2.3.23 Lemma. *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B5), *wobei* (B5) *mit* $\varphi(t) := 1 \vee t^2$ *(*$t \in \mathbb{R}$*) erfüllt sei. Ferner gelte* $\mathbb{E}\, N < \infty$. ϕ *erfülle die Bedingung* (ϕ2+). *Ist dann* $c > 0$ *so, dass* (2.26) *erfüllt ist, so gilt für alle* $s \in \mathbb{G}(\Sigma_1) \cap (c, \infty)$*:*

$$S_{2,1}(t_k, s) := \sum_{v\in\mathcal{S}^{t_k}} L(v) \left([\Phi]_v(t_k + s - S(v)) - \overline{\Phi}(t_k + s - S(v))\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

Beweis. Nach Lemma 2.3.21 gilt $\{N_n \to 0\}$ auf $\{W = 0\}$ f. s. Daraus folgt, dass auf $\{W = 0\}$ f. s. nur endlich viele $v \in \mathbb{V}$ mit $L(v) > 0$ existieren. Also ist die Summe im Lemma f. s. auf $\{W = 0\}$ für hinreichend große k leer und die behauptete Konvergenzaussage richtig. Der Nachweis der Konvergenzaussage kann daher auf die Menge $\{W > 0\}$ beschränkt werden und wird dort auf ein verallgemeinertes starkes Gesetz der großen Zahlen (Satz A.3.1) und Lévys verallgemeinerte Version des Borel-Cantelli-Lemmas (Lemma A.3.2) zurückgeführt. Dazu sei $\mathcal{G}_k := \mathcal{A}_{\mathcal{S}^{t_k}}$ $(k \ge 1)$. Nach Lemma 1.2.11 gilt auf $\{v \in \mathcal{S}^{t_k}\}$:

$$\mathbb{P}\left([\Phi]_v(t_k + s - S(v)) > x \,\middle|\, \mathcal{G}_k\right) = \mathbb{P}\left(\Phi(t_k + s - \cdot) > x\right) \circ S(v) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

für alle $x > 0$. Für $u > t_k$ und mit $t := t_k + s - u$, $M := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)|\psi(x)$ (für die Funktion ψ aus Bedingung (ϕ2+)) lässt sich hier wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|\Phi(t)| &\le \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, |[\phi]_v(t - S(v))| \\
&= \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, |[\phi]_v(t - S(v))| \psi(t - S(v))\, \frac{1}{\psi(t - S(v))} \\
&\le \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, \frac{1}{\psi(t - S(v))}\, [M]_v
\end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass ψ symmetrisch ist und auf der positiven Halbachse monoton wächst, sein globales Minimum also in 0 annimmt, und dass $t - S(v)$ für $S(v) > s$ negativ ist, so lässt sich die letzte Reihe wie folgt weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, \frac{1}{\psi(t - S(v))}\, [M]_v \;\le\; & \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, \frac{1}{\psi(0)}\, [M]_v\, \mathbb{1}_{\{S(v)\le s\}} \\
& + \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\, \frac{1}{\psi(s - S(v))}\, [M]_v\, \mathbb{1}_{\{S(v)>s\}}
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert der ersten Zufallsgröße auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens kann wie im Beweis von Lemma 2.3.11 durch Aufspaltung der Summe über die $v \in \mathbb{V}$ in die einzelnen Generationen und anschließendes Bedingen des Erwartungswerts der Summanden über die n-te Generation nach der σ-Algebra $\mathcal{A}_n$ weiter verarbeitet werden; der Erwartungswert berechnet sich so zu $1/\psi(0)\,\overline{U}((-\infty,s])\,\mathbb{E}\,M$. Der letzte Faktor dieses Produkts ist dabei wegen (ϕ2+) endlich. Hinreichend für die Endlichkeit des zweiten Faktors, $\overline{U}((-\infty,s])$, ist nach Alsmeyer [3, 1991, Korollar 4.1.8] die Endlichkeit des zweiten Moments von $\overline{S}_1$, die wiederum durch die Bedingung (B5) mit der speziellen Funktion $t \mapsto 1 \vee t^2$ ($t \in \mathbb{R}$) und Gleichung (1.38) sichergestellt wird.
Der Erwartungswert der zweiten Zufallsgröße auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens lässt sich mit den selben Methoden abschätzen:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,\frac{1}{\psi(s-S(v))}\,[M]_v\;\mathbb{1}_{\{S(v)>s\}}\right) \le \mathbb{E}\,M \int_{(s,\infty)} \frac{1}{\psi(s-x)}\,\overline{U}(dx).$$

Hier ist $\mathbb{E}\,M$ aus dem selben Grund wie oben endlich, während die Endlichkeit des Integrals aus der d. R. I. von $1/\psi$ folgt (vgl. [3, Satz 2.5.2]); eine Argumentation, die alle Details zur Abschätzung des obigen Erwartungswerts enthält, findet sich in der Rechnung (2.18) und im darauffolgenden Absatz im Beweis von Satz 2.2.4. Zusammengenommen ist also bisher gezeigt, dass die $[\Phi]_v(t_k+s-S(v))$ jeweils auf $\{v \in \mathcal{S}^{t_k}\}$ von einer integrierbaren Zufallsgröße, die weder von t_k noch von v abhängt (sondern höchstens von s), stochastisch majorisiert werden. Schreibt man nun

$$\begin{aligned} S_{2,1}(t_k,s) &= \sum_{v\in\mathcal{S}^{t_k}} L(v)\left([\Phi]_v(t_k+s-S(v)) - \overline{\Phi}(t_k+s-S(v))\right) \\ &= \frac{1}{m_k}\sum_{v\in\mathcal{S}^{t_k}} m_k L(v)\left(([\Phi]_v-\overline{\Phi})(t_k+s-S(v))\right), \end{aligned}$$

so liefert das bisher Gezeigte zusammen mit den Ergebnissen aus Lemma 2.3.22 die Anwendbarkeit von Satz A.3.1, der für jedes $\varepsilon > 0$ $\{W>0\} \subseteq E_\varepsilon$ f. s. für

$$E_\varepsilon = \left\{\sum_{k\ge 1} \mathbb{P}(|S_{2,1}(t_k,s)| > \varepsilon \,|\, \mathcal{G}_k) < \infty\right\}$$

sicherstellt. Aus dem verallgemeinerten Borel-Cantelli-Lemma von Lévy (Lemma A.3.2) folgt nun $\mathbb{P}(|S_{2,1}(t_k,s)| > \varepsilon \text{ u. o.} | E_\varepsilon) = 0$, was wegen $\{W>0\} \subseteq E_\varepsilon$ f. s. für jedes $\varepsilon > 0$ die behauptete Konvergenzaussage auf $\{W > 0\}$ liefert. □

Mit dem Beweis dieses Lemmas ist der Grundstein für den Beweis von Satz 2.3.20 gelegt. Für den Beweis des Satzes im nichtarithmetischen Fall ist aber noch das Problem zu beseitigen, dass von der Konvergenz von Φ entlang den Punkten eines Gitters $r\,\mathbb{Z}$ ($r > 0$) auf die Konvergenz entlang beliebiger Folgen $t \uparrow \infty$ geschlossen werden muss. Daher wird noch ein wenig Vorarbeit benötigt:

2.3.24 Definition (vgl. (5.10) und (5.11) in Nerman [53]). ϕ sei ein separabler Parameterprozess. Dann seien für $r > 0$

$$\begin{aligned} \phi^{(r)}(t) &:= \sup_{|s-t|\leq r} \phi(s) \quad \text{und} \\ \phi_{(r)}(t) &:= \inf_{|s-t|\leq r} \phi(s). \end{aligned}$$

2.3.25 Lemma. *Seien $\mathbb{G}(\Sigma_1)$ nichtarithmetisch und $r > 0$. Erfüllt ϕ die Bedingungen (ϕ2) und (ϕ3), so gilt dasselbe für $\phi^{(r)}$ und $\phi_{(r)}$. Erfüllt ϕ zusätzlich Bedingung (ϕ2+), so gilt dies auch für $\phi^{(r)}$ und $\phi_{(r)}$.*

Beweis. Die Bedingung (ϕ2) überträgt sich direkt auf $\phi^{(r)}$ und $\phi_{(r)}$. Ferner gilt

$$\lim_{s\uparrow t} \phi^{(r)}(s) = \lim_{y\uparrow t-r} \phi(y) \vee \sup_{y\in[t-r,t+r)} \phi(y) \in \mathbb{R}\,.$$

Analog lässt sich die Existenz der übrigen Limiten zeigen.
ϕ erfülle nun zusätzlich die Bedingung (ϕ2+). Nach Lemma A.3.3 gibt es dann eine monoton wachsende Funktion $\psi_r : [0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $\psi_r \leq \psi$ und $1/\psi_r \in \mathcal{L}^1([0,\infty), \lambda\!\!\lambda)$, die $\sup_{x\geq 0} \psi_r(x+r)/\psi_r(x) < \infty$ erfüllt. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sup_{x\geq r} |\phi^{(r)}(x)|\psi_r(x) &= \mathbb{E}\sup_{x\geq r} \left| \sup_{|t-x|\leq r} \phi(t) \right| \psi_r(x) \\ &\leq \sup_{x\geq 0} \frac{\psi_r(x+r)}{\psi_r(x)}\, \mathbb{E}\sup_{x\geq 0} |\phi(x)|\psi_r(x) \\ &\leq \sup_{x\geq 0} \frac{\psi_r(x+r)}{\psi_r(x)}\, \mathbb{E}\sup_{x\geq 0} |\phi(x)|\psi(x) < \infty. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt $\mathbb{E}\sup_{x\leq -r} \phi^{(r)}(x)\psi_r(|x|) < \infty$ und damit insgesamt

$$\mathbb{E}\sup_{x\in\mathbb{R}} \phi^{(r)}(x)\psi_r(|x|) < \infty,$$

d. h., auch $\phi^{(r)}$ erfüllt Bedingung (ϕ2+). Für $\phi_{(r)}$ kann analog geschlossen werden. $\square$

2.3.26 Lemma. *Seien $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R}$ und $r > 0$. $\Phi^{(r)}$ bezeichne die zu $\phi^{(r)}$ und $\Phi_{(r)}$ die zu $\phi_{(r)}$ korrespondierende kanonische Lösung von (2.1), $r > 0$. Erfüllt ϕ dann die Bedingungen (ϕ2+) und (ϕ3), so gelten:*

(a) $\overline{|\phi_{(r)}|}$ *und* $\overline{|\phi^{(r)}|}$ *sind d. R. i.*

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r\downarrow 0} \limsup_{k\to\infty} \left\| \Phi^{(r)}(kr) - \Phi(t_k) \right\|_1 \\ &= \lim_{r\downarrow 0} \limsup_{k\to\infty} \left\| \Phi^{(r)}(kr) - \Phi(t_k) \right\|_1 , \end{aligned}$$

wobei $(t_k)_{k\geq 1}$ eine aufsteigende Folge reeller Zahlen sei, so dass stets $|t_k - rk| \leq r$ gilt (die Folge $(t_k)_{k\geq 1}$ darf von r abhängen).

(c) $\lim_{r\downarrow 0} |\overline{\phi_{(r)}}(\infty) - \overline{\phi}(\infty)| = \lim_{r\downarrow 0} |\overline{\phi^{(r)}}(\infty) - \overline{\phi}(\infty)| = 0.$

Beweis. Zu (a): Nach Lemma 2.3.25 erfüllen auch $\phi^{(r)}$ und $\phi_{(r)}$ die Bedingungen (ϕ2+) und (ϕ3). Daher liefert Lemma 2.3.1 Aussage (a).
Zu (b): Die d. R. I. von $\overline{\phi_{(r)}}$ und $\overline{\phi^{(r)}}$ sichert nach Satz 2.2.4 unter der Generalvoraussetzung $\overline{\mu} > 0$ die Existenz und Beschränktheit der Funktionen $\overline{\Phi_{(r)}}$ bzw. $\overline{\Phi^{(r)}}$. Damit erhält man unter Benutzung von Satz 2.3.3:

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \left\|\Phi^{(r)}(kr) - \Phi(t_k)\right\|_1 &= \limsup_{k\to\infty} \mathbb{E}\left(\Phi^{(r)}(kr) - \Phi(t_k)\right) \\ &= \overline{\phi^{(r)}}(\infty) - \overline{\phi}(\infty). \end{aligned}$$

Analog kann für $\Phi_{(r)}$ gerechnet werden. Aussage (b) folgt daher aus Aussage (c).
Zu (c): Unter zweimaliger Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz sowie unter Verwendung des Satzes von Fubini erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{r\downarrow 0} |\overline{\phi^{(r)}}(\infty) - \overline{\phi}(\infty)| &= \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\overline{\mu}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\phi^{(r)}}(x) - \overline{\phi}(x)\, \lambda\!\!\lambda(dx) \\ &= \frac{1}{\overline{\mu}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{r\downarrow 0} \overline{\phi^{(r)}}(x) - \overline{\phi}(x)\, \lambda\!\!\lambda(dx) \\ &= \frac{1}{\overline{\mu}} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} (\lim_{r\downarrow 0} \phi^{(r)}(x) - \phi(x))\, \lambda\!\!\lambda(dx) = 0, \end{aligned}$$

da unter Bedingung (ϕ3) für festes $\omega \in \Omega$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von $\phi(\cdot,\omega)$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge ist. Für $\phi_{(r)}$ kann man analog vorgehen. □

Beweis von Satz 2.3.20. Seien ϕ und $C > 0$ wie im Satz. Dann gilt nach Gleichung (2.24) für festes $s \in \mathbb{G}(\Sigma_1) \cap (0,\infty)$:

$$\Phi(t+s) = S_1(t,s) + S_2(t,s)$$

mit

$$\begin{aligned} S_1(t,s) &= \sum_{v \prec \mathcal{S}^t} L(v)\, [\phi]_v(t+s-S(v)) \quad \text{und} \\ S_2(t,s) &= \sum_{v \in \mathcal{S}^t} L(v)\, [\Phi]_v(t+s-S(v)). \end{aligned}$$

Da $\phi(t) = 0$ für alle $t > C$ gilt, verschwindet $S_1(t,s)$ für $t > 0$ und $S > C$. Im Folgenden sei also s stets größer als C. Dann kann man sich beim Grenzübergang $t \to \infty$ auf die Betrachtung von S_2 beschränken. Dazu seien $r > 0$ und $t_k := kr$, $k \geq 1$, wobei im d-arithmetischen Fall $r = d$ gelte. Die folgende Argumentation beschränkt sich zunächst auf die Betrachtung von $\lim_{k\to\infty} S_2(t_k,s)$. $S_2(t_k,s)$ selbst kann wieder in der Form $S_2(t_k,s) = S_{2,1}(t_k,s) + S_{2,2}(t_k,s)$ $(k \geq 1)$ mit

$$\begin{aligned} S_{2,1}(t_k,s) &:= \sum_{v \in \mathcal{S}^{t_k}} L(v) \left([\Phi]_v(t_k+s-S(v)) - \overline{\Phi}(t_k+s-S(v))\right) \quad \text{und} \\ S_{2,2}(t_k,s) &:= \sum_{v \in \mathcal{S}^{t_k}} L(v) \overline{\Phi}(t_k+s-S(v)) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Nach Lemma 2.3.23 gilt $\lim_{k\to\infty} S_{2,1}(t_k, s) = 0$ f. s. für jedes hinreichend große s. Ist nun

$$A = \bigcap_{s\in r\,\mathbb{N}} \{S_{2,1}(t_k, s) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\} \cap \bigcap_{c\in r\,\mathbb{N}} \{\mathcal{R}_{t_k}([0, c]) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} W\xi^{>}([0, c])\},$$

so gilt nach Satz 2.3.14 und dem bisher Gezeigten $\mathbb{P}(A) = 1$. Als Nächstes wird durch eine pfadweise Argumentation gezeigt, dass $\Phi(t_k)$ auf A für $k \to \infty$ gegen $W\overline{\phi}(\infty)$ konvergiert. Dazu muss $S_{2,2}(t_k, s)$ betrachtet werden. Hier wird eine zusätzliche Variable $c \in r\,\mathbb{N}$ benötigt. Für jedes k mit $t_k > c$ gilt dann:

$$\begin{aligned} S_{2,2}(t_k, s) &= \sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^{t_k}:\\ S(v)\le t_k+c}} L(v)\,\overline{\Phi}(t_k + s - S(v)) + \sum_{\substack{v\in\mathcal{S}^{t_k}:\\ S(v)>t_k+c}} L(v)\,\overline{\Phi}(t_k + s - S(v)) \\ &\le \sup_{y\in[s-c,s]} \overline{\Phi}(y)\,\mathcal{R}_{t_k}([0, c]) + \sup_{y\in\mathbb{R}} \overline{\Phi}(y)\,\mathcal{R}_{t_k}((c, \infty)). \end{aligned}$$

Damit erhält man (auf A):

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} S_{2,2}(t_k, s) &\le W\xi^{>}([0, c]) \sup_{y\in[s-c,s]} \overline{\Phi}(y) + W\xi^{>}((c, \infty)) \sup_{y\in\mathbb{R}} \overline{\Phi}(y) \\ &\underset{s\to\infty}{\longrightarrow} W\xi^{>}([0, c])\overline{\phi}(\infty) + W\xi^{>}((c, \infty)) \sup_{y\in\mathbb{R}} \overline{\Phi}(y) \\ &\underset{c\to\infty}{\longrightarrow} W\overline{\phi}(\infty) \end{aligned}$$

Analog gilt für den Limes inferior auf A:

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} S_{2,2}(t_k, s) &\ge W\xi^{>}([0, c]) \inf_{y\in[s-c,s]} \overline{\Phi}(y) \\ &\underset{s\to\infty}{\longrightarrow} W\xi^{>}([0, c])\overline{\phi}(\infty) \\ &\underset{c\to\infty}{\longrightarrow} W\overline{\phi}(\infty). \end{aligned}$$

Elementare Analysis liefert die angestrebte Konvergenzaussage:

$$\Phi(t_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} W\overline{\phi}(\infty) \text{ auf } A.$$

Im d-arithmetischen Fall ($d > 0$) ist der Beweis nun vollendet, wenn man $r = d$ wählt.

Im nichtarithmetischen Fall muss noch ein Blick auf die auftretenden Ausnahmenullmengen geworfen werden. Dazu werden für $r > 0$ die Prozesse $\phi^{(r)}$ und $\phi_{(r)}$, die gemäß Definition 2.3.24 gegeben seien, sowie die zugehörigen kanonischen Lösungen von (2.1), $\Phi^{(r)}$ und $\Phi_{(r)}$, betrachtet. Die Lemmata 2.3.25 und 2.3.26 liefern, dass mit ϕ auch $\phi^{(r)}$ und $\phi_{(r)}$ die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Setzt man nun

$$N^c := \bigcap_{r\in\mathbb{Q}\,\cap(0,1)} \left\{\lim_{k\to\infty} \Phi^{(r)}(kr) = W\overline{\phi^{(r)}}(\infty) \text{ u. } \lim_{k\to\infty} \Phi_{(r)}(kr) = W\overline{\phi_{(r)}}(\infty)\right\},$$

so gilt nach dem bisher Gezeigten $\mathbb{P}(N^c) = 1$. Sei nun $(t_k)_{k\geq 1}$ eine beliebige Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$. Dann gilt $\lim_{k\to\infty} \Phi(t_k) = W\overline{\phi}(\infty)$ auf N^c. Um dies zu beweisen, wird zunächst für jedes $k \geq 1$ und jedes $r \in (0,1)\cap\mathbb{Q}$ ein $n_k = n_k(r)$ mit $n_k r \leq t_k < (n_k+1)r$ gewählt. Dann gelten $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ und ferner

$$\begin{aligned} W\overline{\phi_{(r)}}(\infty) &= \lim_{k\to\infty} \Phi_{(r)}(n_k r) \leq \liminf_{k\to\infty} \Phi(t_k) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \Phi(t_k) \leq \lim_{k\to\infty} \Phi^{(r)}(n_k r) = W\overline{\phi^{(r)}}(\infty) \quad \text{auf } N^c. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $r \downarrow 0$ ($r \in \mathbb{Q}$) liefert nun in Verbindung mit Lemma 2.3.26 die Behauptung. □

Um Satz 2.3.15 zu beweisen, muss schließlich gezeigt werden, dass auf die Zusatzvoraussetzung $\phi(t) = 0$ f. a. $t > C$ und ein hinreichend großes C verzichtet werden kann. Dazu muss geklärt werden, wie sich in diesem Fall der Term S_1 verhält. Dies geschieht ähnlich wie im Beweis von Lemma 5.8 in [53]:

2.3.27 Lemma. *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B5), *wobei* (B5) *mit der Funktion* $\varphi(t) := 1 \vee t^2$ $(t \in \mathbb{R})$ *erfüllt sei.* ϕ *sei ein Parameterprozess, so dass* $\phi|_{[0,\infty)}$ *die Bedingung* (ϕ2+) *erfüllt. Dann gibt es eine Konstante* $K \in [0,\infty)$ *mit*

$$\limsup_{t\to\infty} \left| \sum_{v \prec \mathcal{S}^t} L(v)[\phi]_v(t+s-S(v)) \right| \leq WK \int_{s-2}^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}\, dx \qquad \mathbb{P}\text{-}f.\,s.,$$

für alle $s \in \mathbb{G}(\Sigma_1) \cap (1,\infty)$, *wobei der Limes im* d*-arithmetischen Fall nur über die* $t \in d\,\mathbb{Z}$ *zu bilden ist.*

Beweis. Im d-arithmetischen Fall gelte o. E. $d = 1$. Ferner wird o. B. d. A. angenommen, dass ϕ nichtnegativ ist (ansonsten kann ϕ durch seinen Betrag abgeschätzt werden). ψ sei wie in (ϕ2+) und $M := \sup_{x\geq 0} \phi(x)\psi(x)$. Nach Voraussetzung ist M integrierbar. Dann gilt für $s, t \in \mathbb{G}(\Sigma_1) \cap (1,\infty)$:

$$\begin{aligned} \sum_{v \prec \mathcal{S}^t} L(v)[\phi]_v(t+s-S(v)) &\leq \sum_{k=-\infty}^{[t]+1} \sum_{\substack{v\prec\mathcal{S}^t:\\ k-1<S(v)\leq k}} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{0} \sum_{\substack{v\prec\mathcal{S}^t:\\ k-1<S(v)\leq k}} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{[t]+1} \sum_{\substack{v\prec\mathcal{S}^t:\\ k-1<S(v)\leq k}} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)), \end{aligned}$$

wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $\leq t$ bezeichne. Der zweite Term kann ähnlich wie in [53, Abschnitt 7] behandelt werden:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{[t]+1} \sum_{\substack{v \prec \mathcal{S}^t: \\ k-1<S(v)\leq k}} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)) \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{[t]+1} \sum_{\substack{v \prec \mathcal{S}^t: \\ k-1\leq S(v)\leq k}} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)) \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{[t]+1} \sum_{\substack{v \prec \mathcal{S}^t: \\ k-1\leq S(v)\leq k}} L(v)\,\frac{1}{\psi(t+s-S(v))}\,[M]_v \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{[t]+1} \frac{1}{\psi(t+s-k)} \sum_{\substack{v \prec \mathcal{S}^t: \\ k-1\leq S(v)\leq k}} L(v)\,[M]_v \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{[t]+1} \frac{1}{\psi(t+s-k)}\,\widehat{\Phi}(k),
\end{aligned}$$

wobei $\widehat{\Phi}$ die kanonische Lösung der PRE für den Prozess $\widehat{\phi}(t) := M\,\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ bezeichne. Nun erfüllt $\widehat{\phi}$ die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes 2.3.20 und es folgt $\widehat{\Phi}(k) \longrightarrow W \int_0^\infty \mathbb{E}\,\widehat{\phi}(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx)$ f. s. im nichtarithmetischen Fall bzw. $\widehat{\Phi}(k) \to W \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}\,\widehat{\phi}(k)$ im d-arithmetischen Fall. In beiden Fällen existiert also eine Konstante $K>0$, so dass $\limsup_{k\to\infty} \widehat{\Phi}(k) \leq KW$ f. s. gilt. Für $\mathbb{P}$-f. a. $\omega \in \Omega$ gibt es daher für vorgelegtes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\widehat{\Phi}(k) \leq KW + \varepsilon$ f. a. $k \geq k_0$. Damit gilt für ein solches ω und das zugehörige k_0:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{v \prec \mathcal{S}^t: \\ S(v)>0}} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)) \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{\psi(t+s-k)}\,\widehat{\Phi}(k) + (KW+\varepsilon) \sum_{k=k_0}^{[t]+1} \frac{1}{\psi(t+s-k)} \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{\psi(t+s-k)}\,\widehat{\Phi}(k) + (KW+\varepsilon) \sum_{k=1}^{[t]+1} \frac{1}{\psi(t-[t]-2+s+k)} \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{\psi(t+s-k)}\,\widehat{\Phi}(k) + (KW+\varepsilon) \int_{s-2}^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}dx \\
&\quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} (KW+\varepsilon) \int_{s-2}^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}dx.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung, falls

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{0} \sum_{\substack{v\prec\mathcal{S}^t:\\ k-1\le S(v)\le k}} L(v)[\phi]_v(t+s-S(v)) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

gezeigt werden kann. Hier lässt sich wie oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{0} \sum_{\substack{v\prec\mathcal{S}^t:\\ k-1\le S(v)\le k}} L(v)\,[\phi]_v(t+s-S(v)) \\
&\quad\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi(t+s+k)} \sum_{\substack{v\prec\mathcal{S}^t:\\ -k-1\le S(v)\le -k}} L(v)\,[M]_v \\
&\quad\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\psi(t+s+k)} \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,\mathbb{1}_{\{S(v)\le 0\}}[M]_v \\
&\quad\le \int_{t+s-1}^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}\,dx \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,\mathbb{1}_{\{S(v)\le 0\}}[M]_v
\end{aligned}$$

und dieser Term konvergiert für $t\to\infty$ wegen

$$\mathbb{E}\sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)\,\mathbb{1}_{\{S(v)\le 0\}}[M]_v = \mathbb{E}\,M\cdot\overline{U}((-\infty,0]) < \infty$$

f. s. gegen 0. □

Schließlich kann nun der Beweis von Satz 2.3.15 in Angriff genommen werden:

Beweis von Satz 2.3.15. $\Phi(t+s)$ lässt sich wie im Beweis von Satz 2.3.20 für festes $s\in\mathbb{G}(\Sigma_1)\cap(0,\infty)$ zerlegen:

$$\Phi(t+s) = S_1(t,s) + S_2(t,s)$$

mit $S_i(t,s)$ wie in Gleichung (2.24), $i=1,2$. Für $S_1(t,s)$ gilt mit $s\in\mathbb{G}(\Sigma_1)\cap(1,\infty)$ nach Lemma 2.3.27:

$$\limsup_{\substack{t\to\infty\\ t\in\mathbb{G}(\Sigma_1)}} |S_1(t,s)| \le WK\int_{s-2}^{\infty}\frac{1}{\psi(x)}\,dx \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

mit einer Konstante $K\ge 0$, die nicht von s abhängt. Dieser Term spielt also im Grenzübergang keine Rolle, wenn man s und t groß werden lässt. Mit dem zweiten Term $S_2(t,s)$ kann man wie im Beweis von Satz 2.3.20 verfahren, wobei man beachte, dass das wichtigste Hilfsmittel für den Beweis von Satz 2.3.20, Lemma 2.3.23, auch in dieser allgemeineren Situation anwendbar ist. □

Kapitel 3

Die Analyse der Fixpunktgleichung $X \stackrel{d}{=} \inf_{i \geq 1} \frac{X_i}{T_i}$

Dieses Kapitel widmet sich dem Studium der stochastischen Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{d}{=} \inf_{i \geq 1 : T_i > 0} \frac{X_i}{T_i} \tag{3.1}$$

und den Verbindungen zum additiven Gegenstück, der Fixpunktgleichung der sogenannten *Smoothing Transformation*:

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i \geq 1} T_i X_i. \tag{3.2}$$

Dabei sind $T := (T_i)_{i \geq 1}$ eine gegebene Folge nichtnegativer Zufallsgrößen und $X, X_1, X_2, \ldots$ eine von T unabhängige Folge nichtnegativer u. i. v. Zufallsgrößen. T kann dabei als Parameter der Fixpunktgleichung aufgefasst werden, während X (oder genauer gesagt die Verteilung von X) gewissermaßen als Unbekannte aufgefasst wird, nach der die Gleichung (3.1) „aufgelöst“ werden soll. Nach der Behandlung allgemeiner Grundlagen und einfacher Spezialfälle in Abschnitt 3.1 werden in Abschnitt 3.2 spezielle Lösungen, die sogenannten α-regulären und α-elementaren Lösungen untersucht. Dabei wird die Frage nach der Existenz α-regulärer Lösungen vollständig beantwortet und ferner gezeigt, dass die α-regulären Lösungen genau die Mischungen von Weibullverteilungen oder gewissen periodischen Varianten nach speziellen Mischungsverteilungen sind, die wiederum einer Gleichung der Form (3.2) genügen. In Abschnitt 3.3 wird schließlich gezeigt, dass, wenn in der obigen Situation die erwartete Anzahl positiver Gewichte endlich ist, die Mischungen von Weibullverteilungen auch die einzigen Lösungen der Fixpunktgleichung bilden. Eine Methode mit zentraler Bedeutung für die Argumentation in diesem Kapitel ist die Disintegration der Fixpunkte, die zu einer HPRE für zugeordnete stochastische Prozesse führt.

3.1 Grundlagen und Spezialfälle

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen für die Analysen der Abschnitte 3.2 und 3.3 gelegt. Dies beinhaltet nach einer kurzen Einleitung und der Angabe der bekannten Literatur zur Gleichung (3.1) in Abschnitt 3.1.1 die Diskussion der einfachen Spezialfälle in Abschnitt 3.1.2, die danach von der Analyse ausgeschlossen werden. Das in Kapitel 1 entwickelte gewichtete Verzweigungsmodell ist für die Analyse von Gleichung (3.1) gut geeignet und die Zusammenhänge zwischen der Gleichung und dem Modell werden in Abschnitt 3.1.3 aufgezeigt. Abschnitt 3.1.4 widmet sich der Diskussion einer Funktion, die eine wichtige Rolle bei der Betrachtung von Gleichung (3.1) spielt und die die Definition des sogenannten *charakteristischen Exponenten* ermöglicht. Diesem wiederum sind die Abschnitte 3.1.6 und 3.1.7 gewidmet und zwar einerseits durch die Angabe notwendiger Bedingungen für seine Existenz und andererseits durch die Angabe eines Beispiels, das zeigt, dass die Existenz nichttrivialer Lösungen von (3.1) nicht hinreichend für die Existenz des charakteristischen Exponenten ist.

3.1.1 Einleitung und Literaturhinweise

Für eine gegebene Folge $T := (T_i)_{i\geq 1}$ nichtnegativer Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit $\sup_{i\geq 1} T_i > 0$ f. s. wird die stochastische Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{d}{=} \inf_{i\geq 1} X_i/T_i \tag{3.1}$$

betrachtet, wobei $X, X_1, X_2, \ldots$ eine von T unabhängige Folge u. i. v., nichtnegativer Zufallsgrößen sei und $X_i/T_i := \infty$ auf $\{T_i = 0\}$ definiert wird. Eine Verteilung F (Verteilungen μ auf $\mathbb{R}$ werden im Folgenden aus Gründen der Bequemlichkeit mit ihrer linksseitig stetigen Verteilungsfunktion $t \mapsto \mu((-\infty, t))$ identifiziert) auf $[0, \infty)$ heißt Lösung von (3.1), falls (3.1) mit $X \sim F$ gilt. F heißt positiv, falls $F(\{0\}) = 0$ ist. Zuallererst sei nun bemerkt, dass das Diracmaß in 0 ($F = \delta_0$; die Einpunktverteilung in $c \in \mathbb{R}$ wird im Folgenden stets mit δ_c bezeichnet) eine triviale Lösung der Gleichung (3.1) darstellt. Die Menge aller Lösungen $\neq \delta_0$ wird fürderhin mit $\mathfrak{F}_\wedge$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathfrak{F}_\wedge$ werden auch als *nichttriviale Lösungen* bezeichnet. Es wird ferner $\mathfrak{F}_\wedge(T)$ geschrieben, falls die Abhängigkeit von T betont werden soll. Ist F ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, so wird mit $\overline{F}$ die zugehörige linksseitig stetige Überlebensfunktion bezeichnet, d. h., $\overline{F} := 1 - F$. Für $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ lässt sich Gleichung (3.1) in Termen von $\overline{F}$ äquivalent umformulieren:

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E} \prod_{i\geq 1} \overline{F}(tT_i) \tag{3.3}$$

für alle $t \geq 0$. Bezeichnen $\mathcal{P}$ und $\overline{\mathcal{P}}$ die Räume aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[0, \infty)$ bzw. $[0, \infty]$ und wird $M_\wedge : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ durch

$$M_\wedge(F) := \mathbb{P}\left(\inf_{i\geq 1} X_i/T_i \in \cdot\right), \quad X \stackrel{d}{=} F, \tag{3.4}$$

definiert, so lässt sich $\mathfrak{F}_\wedge$ formal als die Menge aller Fixpunkte $\neq \delta_0$ von $M_\wedge$ in $\mathcal{P}$ auffassen, d. h., $\mathfrak{F}_\wedge = \{F \in \mathcal{P} \setminus \{\delta_0\} : M_\wedge(F) = F\}$. Analog zum Fall der Fixpunktmenge wird für den Operator $M_\wedge(T)$ geschrieben, wenn die Abhängigkeit des Operators von der Gewichtsfolge betont werden soll.

Stochastische Fixpunktgleichungen vom Typ (3.1) oder ähnliche Fixpunktgleichungen mit Minimums- oder Maximumsoperatoren treten in vielen Gebieten der angewandten Mathematik auf, z. B. in der probabilistischen kombinatorischen Optimierung, der Laufzeitanalyse von *Divide-and-Conquer*-Algorithmen und in der Theorie verzweigender Teilchensysteme, wo üblicherweise die asymptotischen Verteilungen der betrachteten Zufallsgrößen Fixpunktgleichungen lösen. Für detailliertere Informationen zu Anwendungen sei der Leser auf die Artikel von Aldous und Steele [1, 2004], Aldous und Bandyopadhyay [2, 2005] und Neininger und Rüschendorf [52, 2005] verwiesen.

Ein erster systematischer Ansatz zur Lösung von Gleichung (3.1) wurde von Jagers und Rösler [39, 2004] unternommen, die die folgende Verbindung zur additiven Gleichung

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i\geq 1} T_i X_i \tag{3.2}$$

mit der entsprechenden Abbildung $M_\Sigma = M_\Sigma(T) : \overline{\mathcal{P}} \to \overline{\mathcal{P}}$,

$$M_\Sigma(F) := \mathbb{P}\left(\sum_{i\geq 1} T_i X_i \in \cdot\right), \quad X \stackrel{d}{=} F, \tag{3.5}$$

(M_Σ wird auch nach Durrett und Liggett [27, 1983] *Smoothing Transformation* genannt) herstellten: Wird (3.2) in Termen der Laplacetransformierten φ von X geschrieben, so ergibt sich

$$\varphi(t) = \mathbb{E} \prod_{i\geq 1} \varphi(tT_i) \tag{3.6}$$

für alle $t \geq 0$. Diese Gleichung ist das direkte Gegenstück der Funktionalgleichung (3.3) für die Minimumsgleichung. Da jede Laplacetransformierte, die in ∞ verschwindet und folglich eine Verteilung auf $(0, \infty)$ definiert, als Überlebensfunktion einer (stetigen) Verteilung auf $[0, \infty)$ betrachtet werden kann, hat man die folgende Implikation:

$$\mathfrak{F}_\Sigma \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{F}_\wedge \neq \emptyset, \tag{3.7}$$

wobei $\mathfrak{F}_\Sigma = \mathfrak{F}_\Sigma(T)$ die Menge aller Lösungen von (3.2) bezeichne. Setzt man

$$T^{(\alpha)} := (T_i^\alpha)_{i\geq 1} \quad (\alpha > 0), \tag{3.8}$$

so gilt überdies die Implikation

$$\mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)}) \neq \emptyset \text{ für ein } \alpha > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{F}_\wedge \neq \emptyset, \tag{3.9}$$

denn offenbar ist $\mathfrak{F}_\wedge = \{\mathbb{P}(X^{1/\alpha} \in \cdot) : \mathbb{P}(X \in \cdot) \in \mathfrak{F}_\wedge(T^{(\alpha)})\}$. Die Verbindung zur Summengleichung gewinnt weiterhin an Nützlichkeit, da die additive Gleichung in zahlreichen Arbeiten ausführlich studiert wurde, u. a. von Kahane und Peyrière [40, 1976], Biggins [13, 1977], Holley und Liggett [35, 1981], Durrett und Liggett [27, 1983], Biggins und Kyprianou [14, 1997], Liu [45, 1998], Kyprianou [43, 1998], Caliebe [18, 19, 2003 bzw. 2004], Caliebe und Rösler [20, 21, 2003 bzw. 2004], Iksanov [36], wiederum Biggins und Kyprianou [16, 2005] und schließlich Alsmeyer und Rösler [9, 2006]. Des Weiteren geben Jagers und Rösler geben ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Implikation nicht umgekehrt werden kann. Dieses sogenannte Wasserkaskadenbeispiel wird in Abschnitt 3.1.7 in verallgemeinerter Form aufgegriffen.

Die zweite erwähnenswerte Arbeit zur Gleichung (3.1) stammt von Alsmeyer und Rösler [10, 2008]. Dort wird der Fall deterministischer Gewichte behandelt. Auf diese Arbeit wird in Abschnitt 3.1.5 genauer eingegangen.

3.1.2 Spezialfälle

Der Zweck dieses Abschnitts ist es, die Sonderfälle der Fixpunktgleichung (3.1) zu behandeln. Ferner sollen die beiden folgenden Voraussetzungen an T (oder um präziser zu sein: an die Verteilung von T) etabliert werden:

$$0 < \mathbb{P}(N > 1) \leq \mathbb{P}(N \geq 1) = 1; \tag{B2+}$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{i\geq 1} T_i < 1\right) > 0, \tag{B3+}$$

wobei wie in Kapitel 1 $N := \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_i > 0\}}$ gesetzt wird. Da stets $\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(\sup_{i\geq 1} T_i = 0) = 0$ vorausgesetzt wird, gilt $N = 1$ f. s., wenn (B2+) verletzt ist. Gleichung (3.1) reduziert sich dann zu $X \sim TX$, wobei T unabhängig von X und f. s. positiv ist. Diese Fixpunktgleichung kann einfach gelöst werden, es gilt nämlich $\mathfrak{F}_\wedge \neq \emptyset$ genau dann, wenn $T = 1$ f. s., vgl. z. B. Liu [45, Lemma 1.1]. Daher wird im Folgenden stets angenommen, dass Bedingung (B2+) erfüllt ist. Eine Konsequenz aus der Voraussetzung (B2+) ist, dass der Galton-Watson-Prozess mit Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(N \in \cdot)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 explodiert. Diese Tatsache findet noch Verwendung in der weiteren Argumentation.

Die Etablierung der Voraussetzung (B3+) ist aufwändiger und basiert auf den folgenden beiden Ergebnissen:

3.1.1 Satz. *Es gelte* (B2+). *Dann folgt* $\mathfrak{F}_\wedge = \emptyset$ *aus*

$$\sup_{i\geq 1} T_i \geq 1 \text{ f. s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\sup_{i\geq 1} T_i > 1\right) > 0.$$

Beweis. Sei F eine Lösung von Gleichung (3.1). Dann liefert (3.3)

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E} \prod_{i \geq 1} \overline{F}(tT_i) \leq \mathbb{E}\, \overline{F}\left(t \sup_{i \geq 1} T_i \right) \leq \overline{F}(t).$$

Folglich gilt $\overline{F}(t) = \mathbb{E}\, \overline{F}(t \sup_{i \geq 1} T_i)$ für alle $t \geq 0$. Sei nun $(Y_i)_{i \geq 1}$ eine Folge u. i. v. Kopien von $\sup_{i \geq 1} T_i$ mit zugehörigem multiplikativem Random-Walk $(M_n)_{n \geq 0}$, d. h., $M_0 = 1$ und $M_n = Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_n$ für $n \geq 1$. Dann gilt auch $\overline{F}(t) = \mathbb{E}\, \overline{F}(tM_n)$ für jedes $n \geq 0$. Die Voraussetzungen an $\sup_{i \geq 1} T_i$ stellen nun sicher, dass $M_n \uparrow \infty$ f. s., was $\overline{F}(t) = 0$ für alle $t > 0$ liefert. Das heißt aber $F = \delta_0$. □

Bevor das zweite angekündigte Ergebnis präsentiert wird, das die Etablierung von (B3+) liefert, ist eine kurze Anmerkung vonnöten. Jede Anwendung einer $\sigma(T)$-messbaren Umordnung π endlich oder unendlich vieler Folgenglieder der Folge T, $T \mapsto T_\pi := (T_{\pi(1)}, T_{\pi(2)}, \ldots)$, hat keine Auswirkung auf die Lösungsmenge von Gleichung (3.1), da die X_i u. i. v. und unabhängig von T sind und damit auch von T_π. Also gilt $\mathfrak{F}_\wedge(T) = \mathfrak{F}_\wedge(T_\pi)$. Folglich stellt es keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, $T_1 = \sup_{i \geq 1} T_i$ anzunehmen, wenn das Supremum der Folge T f. s. angenommen wird (vgl. Abschnitt 1.3.2 für Details zur Gewichtsumordnung). Eine weitere Anwendung dieser Überlegung ist, dass die T_i stets so umnummeriert werden können, dass genau dann $T_i > 0$ gilt, wenn $N \geq i$ ist ($i \geq 1$). Dies wird im Folgenden stets angenommen und Gleichung (3.1) kann dann in der Form

$$X \stackrel{d}{=} \inf_{i=1,\ldots,N} \frac{X_i}{T_i} \tag{3.10}$$

geschrieben werden.

3.1.2 Satz. *Wenn* (B2+) *gilt, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\sup_{i \geq 1} T_i = 1$ *f. s.*

(b) $\exists\, 0 < \gamma \leq 1 : \mathfrak{F}_\wedge = \{F \in \mathcal{P} : F([\gamma c, c]) = 1$ *für ein* $c > 0\}$.

(c) $\delta_c \in \mathfrak{F}_\wedge$ *für alle* $c > 0$.

(d) $\delta_c \in \mathfrak{F}_\wedge$ *für ein* $c > 0$.

Beweis. Die Implikationen „(b) ⇒ (c) ⇒ (d) ⇒ (a)“ sind trivial. Es muss daher lediglich „(a) ⇒ (b)“ bewiesen werden. Es gelte also Aussage (a). Weiter sei $\gamma := 1$, wenn $\mathbb{P}(\exists\, i \in \mathbb{N} : T_i = 1) < 1$ ist, und $\gamma := \operatorname{ess\,sup}_{i \geq 2} T_i$, wenn $\mathbb{P}(\exists\, i \in \mathbb{N} : T_i = 1) = 1$ ist. Im letzteren Falle kann o. B. d. A. $T_1 = \sup_{i \geq 1} T_i$ angenommen werden. Aufgrund der Voraussetzung (B2+) gilt im zweiten Fall $\gamma > 0$. Die beiden Fälle $0 < \gamma < 1$ (Fall 1) und $\gamma = 1$ (Fall 2) werden nun separat behandelt.

Fall 1. Seien $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ und $X, X_1, X_2, \ldots$ eine Folge u. i. v. Zufallsgrößen mit Verteilung F. Wegen $T_1 = 1$ f. s. kann (3.1) in

$$X \stackrel{d}{=} X_1 \wedge \inf_{i\geq 2} \frac{X_i}{T_i} \tag{3.11}$$

umgeschrieben werden. (3.11) impliziert $X_1 \leq \inf_{i\geq 2} X_i/T_i$ f. s. Aufgrund der Unabhängigkeit von X_1 und $\inf_{i\geq 2} X_i/T_i$ gilt dies jedoch genau dann, wenn

$$X_1 \leq c \leq \inf_{i\geq 2} X_i/T_i \quad \text{f. s.}$$

für ein c gilt, etwa $c := \operatorname{ess\,sup} X_1$. Aus $F \neq \delta_0$ folgt dabei $c > 0$. Es bleibt nun $X \geq \gamma c$ f. s. zu zeigen. Wäre dies nicht der Fall, so wäre $\mathbb{P}(X < u\gamma c) > 0$ für ein $u \in (0,1)$. Wegen $\gamma = \operatorname{ess\,sup}_{i\geq 2} T_i$ wäre dann $\nu := \inf\{i \geq 2 : T_i > u\gamma\}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit endlich und ferner $\mathbb{P}(X_\nu \in \cdot \mid \nu < \infty) = \mathbb{P}(X \in \cdot)$, da die X_i, $i \geq 1$, und T unabhängig sind. Dies liefert allerdings den Widerspruch:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(\inf_{i\geq 2} \frac{X_i}{T_i} < c\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\nu < \infty, X_\nu < u\gamma c\right) \\ &\geq \mathbb{P}(\nu < \infty)\, \mathbb{P}\left(X < u\gamma c\right) > 0. \end{aligned}$$

Also gilt $F([\gamma c, c]) = 1$. Ist umgekehrt $F \in \mathcal{P}$, so dass $F([\gamma c, c]) = 1$ für ein $c > 0$ gilt, so folgt $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ direkt aus (3.11), denn $X_1 \wedge \inf_{i\geq 2} X_i/T_i = X_1$ f. s.

Fall 2. Ist $\gamma = 1$, so kann nicht einfach $T_1 = \sup_{i\geq 1} T_i$ angenommen und dann das obige Argument verwendet werden, weil hier der Fall eintreten kann, dass das Supremum mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht angenommen wird. Andererseits vereinfacht sich die zu beweisende Aussage zu $\mathfrak{F}_\wedge = \{\delta_c : c > 0\}$, wobei die Inklusion „$\supseteq$“ unmittelbar klar ist. Für die umgekehrte Inklusion sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. Angenommen F ist nicht in einen einzigen Punkt konzentriert. Dann gibt es ein $s > 0$, so dass $\overline{F}(s) \in (0,1)$ gilt. Für $r \in (0,1)$ sie die Zufallsgröße U_r wie folgt definiert:

$$U_r := \begin{cases} \sup_{i\neq k} T_i & \text{falls ein } k \geq 1 \text{ mit } T_k = 1 \text{ existiert,} \\ T_{\tau_r} & \text{falls } T_i < 1 \text{ für alle } i \geq 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

wobei $\tau_r := \inf\{i \geq 1 : r < T_i < 1\}$. Im zweiten Fall ist $N = \infty$ und $U_{r_k} \uparrow 1$ für jede Wahl $r_k \uparrow 1$, so dass $\prod_{i\neq\tau_r} \overline{F}(tT_i) \leq \lim_{k\to\infty} \overline{F}(tU_{r_k}) = \overline{F}(t)$ aufgrund der linksseitigen Stetigkeit von $\overline{F}$ gilt. Für jedes $t \geq 0$ folgt weiter

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E} \prod_{i\geq 1} \overline{F}(tT_i) \leq \overline{F}(t) \cdot \mathbb{E}\, \overline{F}(tU_r)$$

und daher $\mathbb{E}\, \overline{F}(tU_r) = 1$ für jedes $t \in \{0 < \overline{F} < 1\}$. Wiederum aus der linksseitigen Stetigkeit von $\overline{F}$ folgt $\overline{F}(rt) < 1$ für jedes solche t und ein geeignetes $r \in (0,1)$. $\mathbb{P}(U_r > r) > 0$ liefert dann den Widerspruch

$$1 = \mathbb{E}\, \overline{F}(tU_r) \leq \mathbb{P}(U_r \leq r) + \overline{F}(rt)\, \mathbb{P}(U_r > r) < 1.$$

Folglich muss F in einen einzigen Punkt konzentriert sein. $\square$

3.1.3 Bemerkung. Eine Konsequenz aus Satz 3.1.2 ist, dass alle Lösungen von (3.1) einen kompakten Träger haben, wenn (B2+) gilt und $\sup_{i\geq 1} T_i = 1$ f. s. ist. Zum umgekehrten Schluss lässt sich das Folgende bemerken:
Wenn (B2+) und $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ gelten, dann sind äquivalent:

(a) $\sup_{i\geq 1} T_i = 1$ f. s.

(b) Es gibt ein $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ mit kompaktem Träger.

Beweis. Es genügt, die Implikation „(b) $\Rightarrow$ (a)" zu zeigen. Dazu sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ eine Verteilung mit kompaktem Träger und X eine Zufallsgröße mit Verteilung F. Dann ist $C := \operatorname{ess\,sup} X \in (0, \infty)$. Angenommen es gibt ein $r \in (0,1)$, so dass $q := \mathbb{P}(\sup_{i\geq 1} T_i \leq r) > 0$ ist. Dann können r und $t > C$ so gewählt werden, dass $rt < C < t$ ist und damit $\overline{F}(rt) > \overline{F}(t) = 0$ gilt. Dann folgt aber

$$\begin{aligned} 0 = \overline{F}(t) &= \mathbb{E} \prod_{i\geq 1} \overline{F}(tT_i) \\ &\geq \mathbb{E} \prod_{i\geq 1} \overline{F}(tT_i)\ \mathbb{1}_{\{\sup T_i \leq r\}} \\ &\geq \mathbb{E}\, \overline{F}(rt)^N\ \mathbb{1}_{\{\sup T_i \leq r\}}\ >\ 0: \end{aligned}$$

Widerspruch! Also gilt $\mathbb{P}(\sup_{i\geq 1} T_i \geq 1) = 1$, was in Kombination mit $\mathfrak{F}_\wedge \neq \emptyset$ und Satz 3.1.1 Aussage (a) beweist. $\square$

Dieser Abschnitt wird von einem Lemma beschlossen, das zeigt, dass jede Verteilung auf $\mathbb{R}$, die (3.1) löst, auf eine Halbachse konzentriert ist und somit die Einschränkung auf Lösungen auf $[0, \infty)$ keine echte Einschränkung darstellt. Ferner zeigt das Lemma, dass jede Lösung in 0 stetig ist.

3.1.4 Lemma. *Seien* (B2+) *erfüllt und* $F \neq \delta_0$ *eine Verteilung auf* $\mathbb{R}$*, die* (3.1) *löst. Dann ist* F *in* 0 *stetig und entweder auf* $[0, \infty)$ *oder auf* $(-\infty, 0]$ *konzentriert. Ist* $X \sim F$ *und* G *die Verteilung von* $-X^{-1}$ *($< \infty$ f. s.), so gilt* $G \in \mathfrak{F}_\wedge(T^{-1})$ *mit* $T^{(-1)} := (T_i^{-1}\, \mathbb{1}_{\{T_i > 0\}})_{i\geq 1}$.

Beweis. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ u. i. v. mit Verteilung F und unabhängig von T. In Anbetracht dessen der Erläuterungen vor Satz 3.1.2 kann o. B. d. A. angenommen werden, dass genau die T_i mit $i \leq N$ positiv sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{F}(0) &= \mathbb{P}(X \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(X_i \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq N) = \mathbb{E}\, \overline{F}(0)^N, \end{aligned}$$

d. h., $\overline{F}(0)$ ist ein Fixpunkt der erzeugenden Funktion von N im Einheitsintervall $[0,1]$. Wegen (B2+) kommt also nur $\overline{F}(0) \in \{0,1\}$ infrage, was beweist, dass F

auf eine Halbachse konzentriert ist. Ist nun $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ mit $\mathbb{P}(X > 0) = \overline{F}(0+) < 1$, so folgt aus (3.1)

$$\begin{aligned}\overline{F}(0+) &= \lim_{t\downarrow 0} \overline{F}(t) \\ &\leq \lim_{t\downarrow 0} \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N\wedge n} \overline{F}(tT_i) = \mathbb{E}\, \overline{F}(0+)^{N\wedge n}\end{aligned}$$

für jedes $n \geq 1$ und folglich $\overline{F}(0+) \leq \mathbb{E}\, \overline{F}(0+)^N\, \mathbb{1}_{\{N<\infty\}}$. Andererseits impliziert (B2+) $\mathbb{E}\, s^N \leq s$ für jedes $s \in [0, 1)$; Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn $s = 0$ ist. Also ist $\overline{F}(0+) = 0$ und somit $F = \delta_0$ – Widerspruch! Also gilt $\overline{F}(0) = \overline{F}(0+) = 1$ (und damit die behauptete Stetigkeit in 0) für jedes $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. Schließlich genügt für die letzte Behauptung des Lemmas der Hinweis darauf, dass $X \sim \inf_{i\geq 1} X_i/T_i$ zu $-X^{-1} \sim \inf_{i\geq 1} T_i(-X_i^{-1})$ äquivalent ist. □

Außer wenn es explizit anders formuliert ist, wird im Folgenden stets die Gültigkeit von (B2+) und (B3+) vorausgesetzt. Eine Konsequenz aus (B3+) ist, dass die abgeschlossene multiplikative Gruppe $\mathbb{G}(T)$, die von T erzeugt wird, nicht trivial ($= \{1\}$) ist. Folglich gilt entweder $\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$ für ein $r > 1$ (*r-geometrischer Fall*) oder $\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$ (*stetiger Fall*).

3.1.3 Der gewichtete Verzweigungsprozess und Disintegration

Das in Kapitel 1 eingeführte gewichtete Verzweigungsmodell stellt einen optimalen Rahmen zur Analyse der stochastischen Fixpunktgleichung (3.1) dar. Im Folgenden sei also $\mathbf{T} = (T(v))_{v\in\mathbb{V}}$ eine auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ definierte Familie u. i. v. Kopien der Folge $T = (T_i)_{i\geq 1}$. Dabei gelte $T_i(\varnothing) = T_i$ $(i \geq 1)$. $L(v)$ sei gemäß Gleichung (1.4) gegeben $(v \in \mathbb{V})$. Auch ansonsten werden die Bezeichnungen aus Kapitel 1 übernommen – bis auf eine Ausnahme: auf die Einführung von Positionsverschiebungen $X_i(v) := -\log T_i(v)$ $(i \geq 1,\ v \in \mathbb{V})$ wird hier verzichtet, um keine Bezeichnungskollision zu verursachen. Stattdessen wird direkt $S(v) := -\log L(v)$ gesetzt, wobei $S(v) = \infty$ auf $\{L(v) = 0\}$ gelte $(v \in \mathbb{V})$. Im Folgenden sei $(X(v))_{v\in\mathbb{V}}$ eine von $\mathbf{T}$ unabhängige Folge u. i. v. Zufallsgrößen auf dem Grundraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Mit $X_1, X_2, \ldots$ werden die Zufallsgrößen $X(1), X(2), \ldots$ bezeichnet. Ferner sei $X := X(\varnothing)$. Die Verteilung von X wird vorerst nicht näher spezifiziert. Gilt jedoch $X \sim F$ für ein $F \in \mathfrak{F}_\wedge$, so lässt sich Gleichung (3.1) wie folgt iterieren:

$$X \stackrel{d}{=} \inf_{|v|=n} \frac{X(v)}{L(v)} \tag{3.12}$$

für alle $n \geq 0$. Für die zugehörige Überlebensfunktion $\overline{F}$ bedeutet dies

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E} \prod_{|v|=n} \overline{F}(tL(v)) \tag{3.13}$$

für alle $t \geq 0$. Das nächste Ziel ist es, diese Gleichung zu disintegrieren. Dazu sei (für festes $F \in \mathfrak{F}_\wedge$)

$$\overline{\mathcal{F}}_n(t) := \prod_{|v|=n} \overline{F}(tL(v)). \tag{3.14}$$

In dieser Situation gilt das folgende Lemma:

3.1.5 Lemma. *Sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. Dann bildet $(\overline{\mathcal{F}}_n(t))_{n\geq 0}$ ein beschränktes nichtnegatives Martingal bzgl. $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ und konvergiert daher f. s. und in $\mathcal{L}^1$ gegen eine Zufallsgröße $\overline{\mathcal{F}}(t)$ mit*

$$\mathbb{E}\,\overline{\mathcal{F}}(t) = \overline{F}(t).$$

Beweis. Der Beweis dieses Lemmas findet sich in Biggins und Kyprianou [14, 1997, Theorem 3.1]). □

In der Situation von Lemma 3.1.5 sei

$$\mathcal{F}(t) := 1 - \liminf_{n\to\infty} \overline{\mathcal{F}}_n(t).$$

Der stochastische Prozess $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ heißt *Disintegration von F* und *disintegrierter Fixpunkt*. $\overline{\mathcal{F}}(t)$ sei wiederum als $1-\mathcal{F}(t)$ definiert. Die disintegrierten Fixpunkte genügen einer pfadweisen Funktionalgleichung:

3.1.6 Lemma. *Für $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ und die zugehörige Disintegration $\mathcal{F}$ gilt*

$$\overline{\mathcal{F}}(t) = \prod_{|v|=n} [\overline{\mathcal{F}}]_v(tL(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{3.15}$$

für jedes $t \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{F}}(t) &= \liminf_{k\to\infty} \prod_{|v|=n+k} \overline{F}(tL(v)) \\
&= \liminf_{k\to\infty} \prod_{|v|=n} \prod_{|w|=k} \overline{F}(tL(v)[L(w)]_v) \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \prod_{v\in\{1,\dots,m\}^n} [\overline{\mathcal{F}}_k]_v(tL(v)) \\
&= \prod_{v\in\{1,\dots,m\}^n} [\overline{\mathcal{F}}]_v(tL(v)) \\
&\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{|v|=n} [\overline{\mathcal{F}}]_v(tL(v)) \quad (t \geq 0).
\end{aligned}$$

Bildet man nun auf beiden Seiten der Gleichung den Erwartungswert, so folgt die behauptete f. s. Gleichheit, da die $[\overline{\mathcal{F}}]_v(tL(v))$, $|v| = n$, gegeben $\mathcal{A}_n$ unabhängig sind, den Erwartungswert $\overline{F}(tL(v))$ besitzen (siehe Lemma 3.1.5) und $\overline{F}$ (3.3) löst. □

Gleichung (3.15) ist von grundlegender Bedeutung für die folgenden Betrachtungen. Sie kann in eine additive Gleichung überführt werden, indem sie logarithmiert wird und die Variablentransformation $t \mapsto e^t$ vorgenommen wird. Zu diesem Zweck sei $\alpha > 0$ fest gewählt und

$$\Psi(t) := e^{-\alpha t}(-\log \overline{\mathcal{F}}(e^t)) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Für Ψ ergibt sich gemäß (3.15):

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= e^{-\alpha t} \left(-\log \prod_{|v|=n} [\overline{\mathcal{F}}]_v(eL(v)) \right) \\
&= \sum_{|v|=n} e^{-\alpha t} \left(-\log [\overline{\mathcal{F}}]_v(e^{t-S(v)}) \right) \\
&= \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha e^{-\alpha(t-S(v))} \left(-\log [\overline{\mathcal{F}}]_v(e^{t-S(v)}) \right) \\
&= \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \, [\Psi]_v(t - S(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.},
\end{aligned}$$

d. h., Ψ löst die HPRE:

$$\Psi(t) = \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \, [\Psi]_v(t - S(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{3.16}$$

Das folgende Lemma stellt weitere Eigenschaften disintegrierter Fixpunkte und der zugehörigen additiven Transformationen zusammen:

3.1.7 Lemma. *Seien $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ und $\mathcal{F}$ der zugehörige disintegrierte Fixpunkt. Für $\alpha > 0$ sei $\Psi(t) := e^{-\alpha t}(-\log \overline{\mathcal{F}}(e^t))$ die additive Transformation von $\mathcal{F}$. Dann gelten:*

(a) Es gilt $\mathcal{F}(t) \in [0,1]$ und $\Psi(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ bzw. $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{F}$ und Ψ sind $\mathfrak{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{A}_\infty$- bzw. $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}_\infty$-messbar.

(c) $\mathcal{F}$ hat monoton wachsende Pfade.

(d) Die Pfade von $\mathcal{F}$ und Ψ haben in jedem $t \in \mathbb{R}$ links- und rechtsseitige Limiten. Ferner sind $\mathcal{F}$ und Ψ in jedem $t > 0$ bzw. $t \in \mathbb{R}$ f. s. linksseitig stetig.

(e) $\mathcal{F}(t) \to 1$ f. s. und in $\mathcal{L}^1$ für $t \to \infty$.

Beweis. Die Aussagen (a) und (c) sind nach Definition von $\mathcal{F}$ und Ψ klar. Für den Nachweis von (b) genügt es offenbar, zu zeigen, dass $\overline{\mathcal{F}}$ $\mathfrak{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{A}_\infty$-messbar ist. Dies folgt aber aus

$$\overline{\mathcal{F}}(t) = \liminf_{n\to\infty} \prod_{|v|=n} \overline{F}(tL(v))$$

und der Produktmessbarkeit von $(t,\omega) \mapsto \overline{F}(tL(v)(\omega))$ $(v \in \mathbb{V})$. (a) und (c) zusammen implizieren, dass die Pfade von $\mathcal{F}$ links- und rechtsseitige Limiten besitzen. Dies überträgt sich unmittelbar auf Ψ (wobei zu beachten ist, dass Ψ den Wert ∞ annehmen kann). Zum Nachweis von (d) genügt es also zu zeigen, dass $\mathcal{F}$ und Ψ in jedem $t > 0$ bzw. $t \in \mathbb{R}$ f. s. linksseitig stetig sind. Dabei genügt es wiederum, diese Aussage für $\overline{\mathcal{F}}$ zu zeigen, da sie sich von $\overline{\mathcal{F}}$ mühelos auf $\mathcal{F}$ und Ψ übertragen lässt. Seien also $t > 0$ und $0 < s < t$. Dann folgt aus der Monotonie von $\overline{\mathcal{F}}$:

$$\|\overline{\mathcal{F}}(s) - \overline{\mathcal{F}}(t)\|_1 = \overline{F}(s) - \overline{F}(t) \to 0 \quad \text{für } s \uparrow t,$$

wobei die linksseitige Stetigkeit von $\overline{F}$ ausgenutzt wurde. Folglich gilt $\overline{\mathcal{F}}(s) \to \overline{\mathcal{F}}(t)$ in $\mathcal{L}^1$ und damit auch $\mathbb{P}$-stochastisch für $s \uparrow t$. Nach Lemma 2 auf S. 67 in Chung und Walsh [24, 2005] folgt dann die f. s. linksseitige Stetigkeit von $\overline{\mathcal{F}}$ in t. Damit ist Aussage (d) bewiesen. Aussage (c) folgt ähnlich:

$$\|1 - \mathcal{F}(t)\|_1 = \overline{F}(t) \to 0 \quad \text{für } t \to \infty,$$

also gilt die behauptete $\mathcal{L}^1$-Konvergenz. Bekanntlich gibt es dann eine Folge $t_n \uparrow \infty$, so dass $\mathcal{F}(t_n) \to 1$ f. s. $(n \to \infty)$. Nach (c) gilt dann aber $\mathcal{F}(t) \to 1$ f. s. (wobei die Nullmenge unabhängig von der Wahl der Folge ist). □

3.1.8 Lemma. *Seien $F \in \mathcal{F}_\wedge$ und $\mathcal{F}$ die Disintegration von F. $\mathcal{T}$ sei eine f. s. beschränkte HSL. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{F}}(t) = \prod_{v\in\mathcal{T}} [\overline{\mathcal{F}}]_v(tL(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{3.17}$$

und damit auch

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E} \prod_{v\in\mathcal{T}} \overline{F}(tL(v)) \tag{3.18}$$

für alle $t \geq 0$. Insbesondere gilt $\mathfrak{F}_\wedge \subseteq \mathfrak{F}_\wedge((L(v))_{v\in\mathcal{T}})$.

Beweis. Sei $\Psi(t) := e^{-t}(-\log \overline{\mathcal{F}}(e^t))$ $(t \in \mathbb{R})$ die additive Transformation von $\mathcal{F}$. Ψ ist nichtnegativ und nach Lemma 2.2.11 und der darauffolgenden Bemerkung 2.2.12 genügt Ψ der Gleichung

$$\Psi(t) = \sum_{v\in\mathcal{T}} L(v)[\Psi]_v(t - S(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

Für $\overline{\mathcal{F}}(t) = \exp(-t\Psi(\log t))$ gilt dann (3.17) ($t > 0$). Gleichung (3.18) ergibt sich durch Erwartungswertbildung aus (3.17) und der Gleichung

$$\mathbb{E}\left(\prod_{v\in\mathcal{T}}[\overline{\mathcal{F}}]_v(tL(v)) \;\Big|\; \mathcal{A}_{\mathcal{T}}\right) = \prod_{v\in\mathcal{T}}\overline{F}(tL(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

die wiederum eine Konsequenz aus Lemma 1.2.11 ist. □

3.1.4 Die Funktion m und der charakteristische Exponent

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Fakten über die Funktion

$$m : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty], \quad \beta \mapsto \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} T_i^{\beta}, \tag{3.19}$$

zusammengetragen, wobei hier an die Konvention erinnert sei, dass für $i \geq 1$ genau dann $T_i > 0$ gilt, wenn $N \geq i$ ist (siehe den Absatz vor Satz 3.1.2 auf S. 87). Sowohl Biggins [13, 1977] und Durrett und Liggett [27, 1983] als auch Liu [45, 1998] machen bei ihren Analysen der Gleichung (3.2) erheblichen Gebrauch von m. Mithilfe von m können nämlich zufällig gewichtete Punktmaße wie in Kapitel 1 definiert werden. Denn für $\beta \geq 0$ mit $m(\beta) < \infty$ ist

$$\Sigma_{\beta,n} := m(\beta)^{-n}\sum_{|v|=n} L(v)^{\beta}\delta_{S(v)} \tag{3.20}$$

ein zufällig gewichtetes Punktmaß, dessen Erwartung $\overline{\Sigma}_{\beta,n} := \mathbb{E}\,\Sigma_{\beta,n}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß bildet. $\Sigma_{\beta,1}$ entspricht dem zufällig gewichteten Punktmaß aus (1.12) – allerdings für die Gewichtsfolge $m(\beta)^{-1}T^{(\beta)} = (m(\beta)^{-1}T_i^{\beta})_{i\geq 1}$ anstelle der Folge $(T_i)_{i\geq 1}$. Wie in Kapitel 1 auf S. 8 lässt sich ein zur Folge $m(\beta)^{-1}T^{(\beta)}$ assoziierter Random-Walk $(\overline{S}_{\beta,n})_{n\geq 0}$ mit Zuwachsverteilung $\overline{\Sigma}_{\beta,1}$ definieren. Dieser Random-Walk spielt vor allem dann eine wichtige Rolle, wenn $m(\beta) = 1$ ist, d. h., wenn die Normierung von $T^{(\beta)}$ durch den Faktor $m(\beta)^{-1}$ überflüssig ist.

3.1.9 Satz. *Unter den Bedingungen* (B2) *und* (B3) *gelten:*

(a) $m(0) = \mathbb{E}\,N > 1$.

(c) $\{m < \infty\}$ *ist stets ein (ggf. leeres) Intervall.*

(c) m *ist strikt konvex auf* $\{m < \infty\}$.

(d) Seien $\gamma_- := \inf\{m < \infty\}$ *und* $\gamma_+ := \sup\{m < \infty\}$. *Dann ist* m *(nach kanonischer Fortsetzung) holomorph auf* $\{z \in \mathbb{C} : \gamma_- < \operatorname{Re} z < \gamma_+\}$*; für die* n*-te Ableitung* $m^{(n)}$ *von* m *gilt dann* $m^{(n)}(z) = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} T_i^{z}(\log T_i)^n$ *für alle* z *in dem Streifen* $\{\gamma_- < \operatorname{Re} z < \gamma_+\}$.

(e) *Seien* $-\infty < \gamma_- < \gamma_+$ *und* $m(\gamma_-) < \infty$. *Dann ist* m *in* γ_- *rechtsseitig differenzierbar (ggf. uneigentlich) mit Ableitung* $\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} T_i^{\gamma_-}\log T_i \in [-\infty,\infty)$.

(f) *Seien* $\gamma_- < \gamma_+ < \infty$ *und* $m(\gamma_+) < \infty$. *Dann ist* m *in* γ_+ *linksseitig differenzierbar (ggf. uneigentlich) mit Ableitung* $\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} T_i^{\gamma_+}\log T_i \in (-\infty,\infty]$.

Beweis. Zum Beweis sei lediglich darauf verwiesen, dass m als Laplacetransformierte des Intensitätsmaßes $\overline{\Sigma}_{0,1}$ des Punktprozesses $\sum_{i=1}^{N}\delta_{S(i)}$ aufgefasst werden kann (vgl. Biggins und Kyprianou [14, 1997, S. 338]). Die behaupteten Eigenschaften der Funktion m lassen sich auch mühelos unter Verwendung des Satzes IV.5.8 in Elstrodt [28, 2002] nachweisen. Die Existenz der rechs- bzw. linksseitigen Ableitung in (e) und (f) folgt aus der Konvexität von m. □

Wie im einleitenden Absatz dieses Abschnitts erwähnt wurde, sind die 1-Stellen der Funktion m von besonderer Bedeutung für die Fixpunktgleichung. Genauer gesagt ist die erste Unterschreitung des Niveaus 1 auf der positiven Halbachse von Interesse:

3.1.10 Definition. Der *charakteristische Exponent* $\alpha > 0$ der Folge T ist definiert als das kleinste $\alpha > 0$ mit $m(\alpha) \leq 1$ und $m(\beta) > 1$ für alle $\beta \in [0,\alpha)$, falls ein solches α existiert.

Fürderhin bezeichne $(W_n^{(\beta)})_{n\geq 0}$ den auf der Gewichtsfolge $m(\beta)^{-1}T_i^{(\beta)}$ basierenden gewichteten Verzweigungsprozess (wenn $\beta \geq 0$ und $m(\beta) < \infty$ ist). Mit dieser Notation gilt das folgende Resultat:

3.1.11 Lemma. *Es gelten die Bedingungen* (B2) *und* (B3). *Weiter sei* $\alpha > 0$ *so, dass* $m(\alpha) = 1$ *und* $\mathbb{P}(W^{(\alpha)} > 0) > 0$ *sind. Dann gilt* $m(\beta) > 1$ *für alle* $\beta \in [0,\alpha)$, *d. h.,* α *ist der charakteristische Exponent von* T.

Beweis. Gäbe es ein $\beta < \alpha$ mit $m(\beta) = 1$, so wäre $[\beta,\alpha] \subseteq \{m < \infty\}$. Nach Satz 3.1.9(d) (bzw. (f) im Falle $\sup\{m < \infty\} = \alpha$) ist m in α dann linksseitig differenzierbar mit Ableitung $m'_-(\alpha) \in (-\infty,\infty]$. Weiter ist m auf $\{m < \infty\}$ nach Satz 3.1.9(c) strikt konvex und folglich monoton wachsend in einer geeigneten linksseitigen Umgebung von α. Folglich gilt $m'_-(\alpha) \geq 0$. Dies impliziert $\mathbb{E}\,\overline{S}_{\alpha,1} = -m'_-(\alpha) \leq 0$ nach Formel 1.19. Folglich ist Bedingung (B4) in Satz A.1.1 verletzt und $W_n^{(\alpha)} \to 0$ f. s. $(n \to \infty)$ im Widerspruch zur Voraussetzung des Lemmas. □

Das Lemma zeigt, dass, wenn überhaupt einer der Prozesse $(W_n^{(\beta)})_{n\geq 0}$ gleichgradig integrierbar ist, dann der Prozess mit Index α für den charakteristischen Exponenten $\alpha > 0$. Die gleichgradige Integrierbarkeit dieses Prozesses und der resultierende Limes

$$W^{(\alpha)} := \liminf_{n\to\infty} W_n^{(\alpha)} \tag{3.21}$$

spielen eine wichtige Rolle bei der Analyse der α-elementaren Fixpunkte in Abschnitt 3.2. Daher werden die folgenden Notationen eingeführt:

3.1.12 Notation. In der Situation eines existierenden charakteristischen Exponenten $\alpha > 0$ seien mit Λ_α die Verteilung von $W^{(\alpha)}$ bezeichnet und mit φ_α die zugehörige Laplacetransformierte.

Den Abschluss des Abschnitts bildet ein Lemma, das in Abschnitt 3.3 wichtig wird:

3.1.13 Lemma. *Es gelten die Bedingungen* (B2) *und* (B3). *Ferner gelte* $\mathbb{E}\, N < \infty$ *und es gebe ein* $\beta > 0$ *mit* $m(\beta) = 1$. *Dann existiert der charakteristische Exponent* $\alpha \in (0, \beta]$ *und die Folge* $T^{(\alpha)} = (T_i^\alpha)_{i\geq 1}$ *erfüllt die Bedingungen* (B1)-(B3) *sowie ferner* $\limsup_{n\to\infty} \overline{S}_{\alpha,n} = \infty$ *f. s.*

Beweis. Wegen $m(0) = \mathbb{E}\, N < \infty$ und $m(\beta) = 1$ ist die Funktion m nach Satz 3.1.9 auf dem Intervall $[0, \beta]$ endlich. Ferner gilt $m(0) > 1$ nach (B2+). Da m wiederum nach Satz 3.1.9 konvex ist, nimmt m im Intervall $(0, \beta)$ höchstens ein Mal den Wert 1 an. Sei also $\alpha := \min\{\gamma \in (0, \beta] : m(\gamma) = 1\}$. Dann ist α der charakteristische Exponent von T. Nun gibt es zwei mögliche Fälle. Erstens könnte $\alpha < \beta$ sein. Dann ist m in α streng monoton fallend und $m'(\alpha) < 0$. In diesem Fall gilt $\mathbb{E}\, \overline{S}_{\alpha,1} = -m'(\alpha) \in (0, \infty)$ und folglich $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\alpha,n} = \infty$ f. s. nach dem starken Gesetz der großen Zahlen. Zweitens könnte $\alpha = \beta$ gelten. Dann gilt $m(\gamma) > 1$ für alle $\gamma \in (0, \alpha)$. Nun ist nicht klar, ob m in α differenzierbar ist (da möglicherweise $\alpha = \sup\{m < \infty\}$ gilt). Sicherlich gilt aber $m'_-(\alpha) \in (-\infty, 0]$ für die linksseitige Ableitung von m in α. Weiter existiert dann $\mathbb{E}\, \overline{S}_{\alpha,1}$ für den assoziierten Random-Walk $(\overline{S}_{\alpha,n})_{n\geq 0}$ und ist gleich $-m'_-(\alpha) \in [0, \infty)$ nach Formel (1.19). Folglich gilt wiederum $\limsup_{n\to\infty} \overline{S}_{\alpha,n} = \infty$ f. s. nach dem starken Gesetz der großen Zahlen im Fall $m'_-(\alpha) < 0$ bzw. nach dem Satz von Chung und Fuchs im Fall $m'_-(\alpha) = 0$. □

3.1.5 Mischungen von Weibull-Verteilungen

Gleichung (3.10) wurde im Fall deterministischer (aber nicht notwendig nichtnegativer) Gewichte T_i, $i \geq 1$, ausführlich von Alsmeyer und Rösler [10, 2008] analysiert. Die Resultate dieser Arbeit können wie folgt zusammengefasst werden: Außer in einfachen Spezialfällen existieren nichttriviale Fixpunkte genau dann, wenn T einen charakteristischen Exponenten hat. Letzterer ist im Falle deterministischer Gewichte als die eindeutige positive Zahl $\alpha > 0$ definiert, derart dass $\sum_{i\geq 1} T_i^\alpha = 1$ gilt. In diesem Fall lässt sich die Lösungsmenge $\mathfrak{F}_\wedge$ folgendermaßen beschreiben: Für $\beta > 0$ und $r > 1$ sei $\mathfrak{H}(r, \beta)$ die Menge der linksseitig stetigen, r-periodischen Funktionen $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$, so dass $t \mapsto h(t)t^\beta$ monoton wachsend ist. Die Verteilung F auf $(0, \infty)$ mit Überlebensfunktion

$$\overline{F}(t) := e^{-h(t)t^\beta} \quad (t > 0)$$

heißt dann r-periodische Weibullverteilung mit Parametern h und β (in Zeichen: r-Weib(h, β)). Für $\beta > 0$ und $r > 1$ sei $\mathfrak{W}(r, \beta) := \{r\text{-Weib}(h, \beta) : h \in \mathfrak{H}(r, \beta)\}$

die Menge der r-periodischen Weibullverteilungen mit Parametern h und β; $\mathfrak{W}(1,\beta) := \{\mathrm{Weib}(c,\beta) : c > 0\}$ sei die Menge der (gewöhnlichen) Weibullverteilungen mit Parameter β, d. h. die Menge der Verteilungen F mit Überlebensfunktionen der Gestalt $\overline{F}(t) = \exp(-ct^\beta)$ $(t \geq 0,\ c > 0)$. Dann gilt $\mathfrak{F}_\wedge = \mathrm{Weib}(1,\alpha)$ bzw. $\mathfrak{F}_\wedge = \mathfrak{W}(r,\alpha)$ im stetigen bzw. r-geometrischen Fall.

Wenn auch nicht von vornherein klar ist, ob in der Situation zufälliger Gewichte ein analoges Resultat gilt, so liefert das obige Ergebnis doch immerhin eine Idee, wie Lösungen zur Fixpunktgleichung (3.1) konstruiert werden können – nämlich als Mischungen von Weibullverteilungen:

3.1.14 Definition. Seien $\alpha > 0$ und Λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(0,\infty)$. Dann seien

(a) $\mathfrak{W}_\Lambda(1,\alpha)$ die Menge aller Λ-Mischungen von $\mathrm{Weib}(c,\alpha)$-Verteilungen F der Gestalt
$$F(\cdot) = \int \mathrm{Weib}(yc,\alpha)(\cdot)\,\Lambda(dy)$$
mit einem $c > 0$.

(b) $\mathfrak{W}_\Lambda(r,\alpha)$ für $r > 1$ sei die Menge aller Λ-Mischungen von r-$\mathrm{Weib}(h,\alpha)$-Verteilungen F der Gestalt
$$F(\cdot) = \int r\text{-}\mathrm{Weib}(yh,\alpha)(\cdot)\,\Lambda(dy)$$
mit einem $h \in \mathfrak{H}(r,\alpha)$.

3.1.15 Bemerkung. Die in Definition 3.1.14 eingeführten Mischungen von Weibullverteilungen können auch (wie in Rüschendorf [56, 2006, Proposition 4.3] bemerkt) als zufällige Skalierungen betrachtet werden. Sind nämlich in der Situation von Definition 3.1.14 $Y \sim \Lambda$ und $Z_\alpha \sim \mathrm{Weib}(c,\alpha)$ $(\alpha, c > 0)$ stochastisch unabhängig, so ist $Y^{-1/\alpha}Z_\alpha \sim \int \mathrm{Weib}(yc,\alpha)(\cdot)\,\Lambda(dy)$. Entsprechendes gilt im r-periodischen Fall.

Man beachte, dass für jedes $r > 1$ stets $\mathfrak{W}_\Lambda(1,\alpha)$ in $\mathfrak{W}_\Lambda(r,\alpha)$ enthalten ist. Wie bereits oben angedeutet wurde, sind gewisse Mischungen von Weibullverteilungen Lösungen von Gleichung (3.1):

3.1.16 Lemma. *Sei $\Lambda \in \mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)})$ für ein $\alpha > 0$. Dann gilt $\mathfrak{W}_\Lambda(r,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}_\wedge$ im r-geometrischen Fall ($r > 1$) bzw. $\mathfrak{W}_\Lambda(1,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}_\wedge$ im stetigen Fall.*

Beweis. Der folgende Beweis beschränkt sich auf den r-geometrischen Fall, weil der Beweis im stetigen Fall ähnlich aber einfacher ist. Seien also $h \in \mathfrak{H}(r,\alpha)$ und F wie in Definition 3.1.14(b). φ bezeichne die Laplacetransformierte von Λ. Dann löst φ die Funktionalgleichung (3.6) mit den Gewichten T_i^α anstelle der T_i und

$\overline{F}$ lässt sich in der Form $\overline{F}(t) = \varphi_\alpha(h(t)t^\alpha)$ $(t \geq 0)$ darstellen. Da h multiplikativ r-periodisch ist und f. s. alle positiven T_i $r^{\mathbb{Z}}$-wertig sind, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\prod_{i\geq 1}\overline{F}(tT_i) &= \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N}\varphi(h(tT_i)(tT_i)^\alpha)\\ &= \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N}\varphi(h(t)t^\alpha T_i^\alpha)\\ &= \varphi(h(t)t^\alpha) = \overline{F}(t),\end{aligned}$$

wobei die Funktionalgleichung für φ verwendet wurde. Also löst $\overline{F}$ die Gleichung (3.3), d. h., $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. □

Im Anschluss an dieses Lemma stellt sich die Frage, wann die additive Gleichung (3.2) nichttriviale Lösungen besitzt. Eine sehr allgemeine Antwort auf diese Frage gibt Theorem 1.1 in Liu [45, 1998]. Dies führt zum folgenden Korollar:

3.1.17 Korollar. *Es gelten die Bedingungen* (B2+) *und* (B3+)*. Weiter sei $N < \infty$ f. s. Dann ist die Existenz des charakteristischen Exponenten $\alpha > 0$ hinreichend für $\mathfrak{F}_\wedge \neq \emptyset$.*

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen existiere der charakteristische Exponent $\alpha > 0$. Geht man dann von der Gewichtsfolge T zur Gewichtsfolge $T^{(\alpha)}$ (siehe (3.8)) über, so erfüllt die zugehörige Funktion $m^{(\alpha)}$ (mit $m^{(\alpha)}(\beta) = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1}(T_i^\alpha)^\beta = m(\alpha\beta)$) die Voraussetzungen von Theorem 1.1 in [45]. Daher existiert eine Verteilung $\Lambda \in \mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)})$, was nach Lemma 3.1.16 $\emptyset \neq \mathfrak{W}_\Lambda(r,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}_\wedge$ im r-geometrischen Fall $(r > 1)$ bzw. $\emptyset \neq \mathfrak{W}_\Lambda(1,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}_\wedge$ im stetigen Fall impliziert. □

3.1.6 Notwendige Bedingungen für die Existenz des charakteristischen Exponenten

Das folgende Lemma benötigt die Generalvoraussetzung (B2+) und (B3+) nicht, sondern kommt mit den schwächeren Bedingungen (B2) und (B3) aus:

3.1.18 Lemma. *Es gelten die Bedingungen* (B2) *und* (B3) *und es existiere der charakteristische Exponent $\alpha > 0$. Dann gilt*

$$L_n^* = \sup_{|v|=n} L(v) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

Beweis. Ist $m(\alpha) < 1$, so konvergiert $W_n^{(\alpha)}$ für $n \to \infty$ f. s. gegen 0. Dies ist nur möglich, wenn L_n^* ebenfalls für $n \to \infty$ f. s. gegen 0 konvergiert. Ist $m(\alpha) = 1$, so erfüllt die Folge $T^{(\alpha)}$ die Voraussetzungen von Lemma 1.3.3, das dann die Behauptung liefert. □

3.1.19 Lemma. *Wenn der charakteristische Exponent* $\alpha > 0$ *existiert, so gilt* $\overline{F}(t) < 1$ *für alle* $t > 0$ *und alle* $F \in \mathfrak{F}_\wedge$.

Beweis. Angenommen es existieren ein $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ und ein $t_0 > 0$, so dass $\overline{F}(t_0) = 1$ ist. Dann seien $t > t_0$ und $\tau := \inf\{n \geq 0 : R_n^* \leq t_0/t\}$. Nach Lemma 3.1.18 ist τ eine f. s. endliche Stoppzeit. Daher liefert der Stoppsatz angewandt auf das beschränkte Martingal $(\overline{\mathcal{F}}_n(t))_{n\geq 0}$ (siehe Lemma 3.1.5):

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E}\,\overline{\mathcal{F}}_\tau(t) = \mathbb{E}\prod_{|v|=\tau}\overline{F}(tL(v)) \geq \mathbb{E}\prod_{|v|=\tau}\overline{F}(t_0) = 1.$$

Da $t > t_0$ beliebig gewählt war, gilt $\overline{F}(t) = 1$ für alle $t \geq 0$, was der Tatsache widerspricht, dass F eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $[0, \infty)$ ist. □

3.1.7 Das verallgemeinerte Wasserkaskadenbeispiel

In diesem Abschnitt wird eine Beispielklasse diskutiert, die demonstriert, dass es nichttriviale Lösungen der Gleichung (3.1) geben kann, obwohl der charakteristische Exponent nicht existiert. Dies bildet einen Gegensatz zur Situation im Falle der additiven Gleichung (3.2), in der die Existenz des charakteristischen Exponenten und die Existenz nichttrivialer Lösungen zumindest unter geeigneten Bedingungen an N und T (siehe z. B. Durrett und Liggett [27, 1983, Theorem 1] und Liu [45, 1998, Theorem 1.1]) äquivalent sind.

Das *verallgemeinerte Wasserkaskadenbeispiel* basiert auf einer wie folgt konstruierten Basisfolge T. Die Anzahl N der positiven Gewichte sei eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsgröße mit $\mathbb{E}\,N \in (1, \infty)$. $B_1, B_2, B_3, \ldots$ bezeichne eine von N unabhängige Folge unabhängiger Bernoullivariablen mit Erfolgsparameter $\vartheta \in (0, 1)$, d. h., es gelte $\mathbb{P}(B_i = 1) = \vartheta = 1 - \mathbb{P}(B_i = 0)$, $i \geq 1$. Dann sei $T_i := e^{-B_i}\,\mathbb{1}_{\{N\geq i\}}$ für $i \geq 1$. In dieser Situation gilt dann $\mathbb{G}(T) = e^{\mathbb{Z}}$ (e-geometrischer Fall) und Gleichung (3.1) nimmt die Gestalt

$$X \stackrel{d}{=} \min_{1\leq i\leq N}\frac{X_i}{T_i} \tag{3.22}$$

an. Für $N = 2$ und $\vartheta > 1/2$ handelt es sich um das von Jagers und Rösler [39, 2004] eingeführte *Wasserkaskadenbeispiel*.

3.1.20 Lemma. *In der Situation von Gleichung* (3.22) *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Der charakteristische Exponent $\alpha > 0$ *existiert.*

(b) $\vartheta > 1 - (\mathbb{E}\,N)^{-1}$.

(c) Ist $G := \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{B_i=0\}} = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{T_i=1\}}$, *so ist der Galton-Watson-Prozess mit Reproduktionsverteilung* $\mathbb{P}(G \in \cdot)$ *subkritisch.*

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$m(\alpha) = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} T_i^{\alpha} = (\vartheta e^{-\alpha} + (1-\vartheta))\,\mathbb{E}\,N.$$

Also ist $(1-\vartheta)\,\mathbb{E}\,N < 1$ notwendig und hinreichend für die Existenz eines positiven α mit $m(\alpha) = 1$, was die Äquivalenz von (a) und (b) beweist. (b) und (c) sind wegen $\mathbb{E}\,G = (1-\vartheta)\,\mathbb{E}\,N$ äquivalent. □

Im Folgenden werden drei Fälle unterschieden:

(1) Der *subkritische Fall*: $\vartheta > 1 - (\mathbb{E}\,N)^{-1}$.

(2) Der *kritische Fall*: $\vartheta = 1 - (\mathbb{E}\,N)^{-1}$.

(3) Der *superkritische Fall*: $\vartheta < 1 - (\mathbb{E}\,N)^{-1}$.

In der gegebenen Situation bildet $G_n := \sum_{|v|=n} \mathbb{1}_{\{L(v)=1\}}$ $(n \geq 0)$ einen Galton-Watson-Prozess mit Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(G \in \cdot)$. Im superkritischen Fall überlebt $(G_n)_{n\geq 0}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit, d. h.,

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} L_n^* = 1) = \mathbb{P}(G_n \text{ überlebt}) > 0. \tag{3.23}$$

Die folgende Diskussion fördert zu Tage, dass die Gleichung (3.22) in jedem der drei obigen Fälle eine nichttriviale Lösung besitzt, wobei sich der subkritische und der kritische Fall erheblich vom superkritischen Fall unterscheiden. Mit Blick auf Gleichung (3.23) zeigt dies im superkritischen Fall, dass die Existenz nichttrivialer Lösungen von Gleichung (3.1) nicht notwendig $\limsup_{n\to\infty} L_n^* = 0$ f. s. zur Folge hat, was man vielleicht auf den ersten Blick zu vermuten geneigt wäre.

Für die Konstruktion von Lösungen der Gleichung (3.22) bietet es sich an, einen Blick auf die zugehörigen Funktionalgleichungen für die Überlebensfunktion zu werden. Ist also F eine Lösung, so folgt

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N} \overline{F}(tT_i) = f_N\left(\vartheta\overline{F}(te^{-1}) + (1-\vartheta)\overline{F}(t)\right), \quad t \geq 0,$$

wobei f_N die erzeugende Funktion von N sei, d. h., $f_N(s) := \mathbb{E}\,s^N$ $(0 \leq s \leq 1)$. f_N ist unter den gegebenen Voraussetzungen an N streng monoton wachsend und stetig mit $f_N(0) = 0$ und $f_N(1) = 1$, also eine bijektive Abbildung des Einheitsintervalls auf sich selbst. Die Umkehrfunktion von f_N sei mit f_N^{-1} bezeichnet. Dann gilt:

$$\overline{F}(te^{-1}) = \vartheta^{-1}\left(f_N^{-1}(\overline{F}(t)) - (1-\vartheta)\overline{F}(t)\right) =: g_{N,\vartheta}(\overline{F}(t)) \tag{3.24}$$

mit $g_{N,\vartheta}(u) := \vartheta^{-1}\left(f_N^{-1}(u) - (1-\vartheta)u\right)$ für $0 \leq u \leq 1$. In Lemma 3.1.21 werden einige im Folgenden wichtige Eigenschaften der Funktion $g_{N,\vartheta}$ festgehalten:

3.1.21 Lemma. *Die folgenden Aussagen über $g_{N,\vartheta}$ sind wahr:*

(a) $\{u \in [0,1] : g_{N,\vartheta}(u) = u\} = \{0,1\}$.

(b) $g_{N,\vartheta}(u) > u$ *für alle* $u \in (0,1)$.

(c) *Ist* $\vartheta \geq 1 - (\mathbb{E}\, N)^{-1}$ *(subkritischer und kritischer Fall), so ist* $g_{N,\vartheta}$ *streng monoton wachsend auf* $(0,1)$. *Insbesondere gilt* $g_{N,\vartheta}(u) \in (0,1)$ *für alle* $u \in (0,1)$.

(d) *Ist* $\vartheta < 1 - (\mathbb{E}\, N)^{-1}$ *(superkritischer Fall), so existiert ein eindeutiges* $a_0 \in (0,1)$ *mit* $g_{N,\vartheta}(a_0) = 1$. $g_{N,\vartheta}$ *ist streng monoton wachsend auf* $[0, a_0]$ *und* > 1 *auf* $(a_0, 1)$.

Proof. Offensichtlich gilt $g_{N,\vartheta}(u) = u$ genau dann, wenn $f_N^{-1}(u) = u$ ist und daher wegen $\mathbb{E}\, N > 1$ genau dann, wenn $u \in \{0,1\}$ ist. Also gilt (a). Weiterhin gilt $g_{N,\vartheta}(u) > u$ für alle hinreichend kleinen $u > 0$, denn $g_{N,\vartheta}$ ist auf $(0,1]$ stetig differenzierbar mit

$$g'_{N,\vartheta}(u) = \vartheta^{-1}\left(\frac{1}{f'_N(f_N^{-1}(u))} - (1-\vartheta)\right), \quad u \in (0,1],$$

was $\lim_{u\downarrow 0} g'_{N,\vartheta}(u) = \vartheta^{-1}(\mathbb{P}(N=1)^{-1} - (1-\vartheta)) > 1$ impliziert (hier wird $\mathbb{P}(N = 1)^{-1}$ im Falle $\mathbb{P}(N=1) = 0$ als ∞ aufgefasst). Daher folgt (b) aus der Stetigkeit von $g_{N,\vartheta}$ und (a). Ferner folgt, dass $g'_{N,\vartheta}(u) = 0$ für $u > 0$ dann und nur dann gilt, wenn $f'_N(f_N^{-1}(u))^{-1} = (1-\vartheta)$ ist. Nun durchläuft $f_N^{-1}(u)$ mit u das gesamte offene Einheitsintervall $(0,1)$, während $f'_N(0) = \mathbb{P}(N=1)$ und $f'_N(1) = \mathbb{E}\, N$ gilt. Damit nimmt $f'_N(f_N^{-1}(u))^{-1}$ für $u \in (0,1)$ genau alle Werte in $((\mathbb{E}\, N)^{-1}, \mathbb{P}(N=1)^{-1})$ an. Folglich gilt im subkritischen und kritischen Fall ($(1-\vartheta)\,\mathbb{E}\, N \leq 1$) $g'_{N,\vartheta}(u) \neq 0$ auf ganz $(0,1)$, was Aussage (c) beweist. Im superkritischen Fall ($(1-\vartheta)\,\mathbb{E}\, N > 1$) gilt $g'_{N,\vartheta}(a) = 0$ für ein eindeutiges $a \in (0,1)$. $g_{N,\vartheta}$ ist dann streng monoton wachsend auf $(0,a)$ und strikt fallend auf $(a,1)$. Wegen $g_{N,\vartheta}(1) = 1$ folgt Aussage (d) (vgl. Abbildung 3.1.7). □

A. Der kritische und der subkritische Fall.

Sei $\vartheta \geq 1 - (\mathbb{E}\, N)^{-1}$. Dann liefert Lemma 3.1.21, dass $g_{N,\vartheta}$ auf $[0,1]$ streng monoton wachsend mit genau den Fixpunkten 0 und 1 ist. Folglich existiert die Umkehrfunktion $g_{N,\vartheta}^{-1}$ auf $[0,1]$. Gleichung (3.24) kann dann in Termen von $g_{N,\vartheta}^{-1}$ als

$$\overline{F}(t) = g_{N,\vartheta}^{-1}\overline{F}(t/e) \quad (t \geq 0)$$

geschrieben werden. Gleichungen dieses Typs werden in Satz 2.1 in Alsmeyer und Meiners [7, 2007] vollständig gelöst. Die Anwendung dieses Satzes erlaubt es, die Lösungsmenge $\mathfrak{F}_\wedge$ erschöpfend zu beschreiben. Dazu sei $g_{N,\vartheta}^n$ die $|n|$-fache

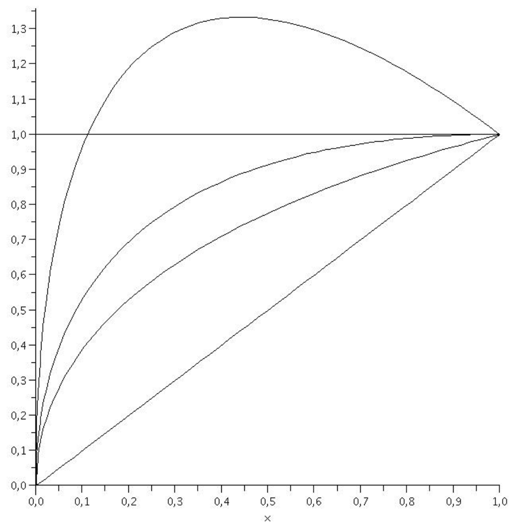

Abbildung 3.1: $g_{N,\vartheta}$ für $N = 2$ und $\vartheta = 1/4, 1/2, 3/4$ im Vergleich mit der Identität (von oben nach unten)

Anwendung von $g_{N,\vartheta}$ $(n \geq 1)$ bzw. der Umkehrfunktion $g_{N,\vartheta}^{-1}$ $(n \leq -1)$ und $g_{N,\vartheta}^{0}$ die Identität auf $[0, 1]$. Auch wenn in [7] eine etwas andere Situation vorliegt, wird die dortige Schreibweise adaptiert. $\mathcal{F}_+$ bezeichne die Menge der monoton fallenden, linksseitig stetigen Funktionen $f : (1, e] \to (0, 1)$ mit $f(t) \leq g_{N,\vartheta}(f(e))$ für alle $t \in (1, e]$. Dann lässt sich der Beweis von Satz 2.1 in [7] mit geringfügigen Änderungen übernehmen, um den folgenden Satz zu beweisen:

3.1.22 Satz (siehe Satz 2.1 in Alsmeyer und Meiners [7]). *Ist $\vartheta \geq 1 - (\mathbb{E}\, N)^{-1}$ (subkritischer oder kritischer Fall), so gibt es eine Bijektion $F \leftrightarrow f$ zwischen $\mathfrak{F}_\wedge$ und $\mathcal{F}_+$, die durch*

$$\overline{F}(t) = g_{N,\vartheta}^{-n} f(t/e^n), \tag{3.25}$$

gegeben ist, wobei $n \in \mathbb{Z}$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit $1 < t/e^n \leq e$ sei.

Im subkritischen Fall, wenn also der charakteristische Exponent existiert, ergibt sich das folgende interessante Korollar:

3.1.23 Korollar. *Seien $\vartheta > 1 - (\mathbb{E}\, N)^{-1}$ (subkritischer Fall) und α der charakteristische Exponent, d. h. $m(\alpha) = 1$. Dann gilt $\mathfrak{F}_\wedge = \mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(e, \alpha)$ für*

$$\Lambda_\alpha := \mathbb{P}(W^{(\alpha)} \in \cdot) \quad mit \quad W^{(\alpha)} = \liminf_{n\to\infty} W_n^{(\alpha)} = \liminf_{n\to\infty} \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha.$$

Insbesondere lässt sich jedes $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ *in der Form* $F(t) = 1-\varphi_\alpha(h(t)t^\alpha)$, $t > 0$, *für die Laplacetransformierte* φ_α *von* Λ_α *und eine eindeutige Funktion* $h \in \mathfrak{H}(e, \alpha)$ *darstellen.*

Beweis. Zunächst folgt aus Satz A.1.1, dass $W^{(\alpha)}$ nichtdegeneriert ist. Nach Lemma 3.1.16 gilt $\mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(e, \alpha) \subseteq \mathfrak{F}_\wedge$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ gewählt. Dann sei $h(t) := \varphi_\alpha^{-1}(\overline{F}(t))t^{-\alpha}$ $(1 < t \le e)$, wobei $\varphi_\alpha^{-1} : (0, \infty) \to (0, 1)$ die Umkehrfunktion der Laplacetransformierten φ_α bezeichne. (Es gilt $0 < \overline{F}(t) < 1$ für alle $t > 0$ nach Lemma 3.1.19 und Bemerkung 3.1.3.) h werde nun multiplikativ e-periodisch auf $(0, \infty)$ fortgesetzt. Es lässt sich leicht zeigen, dass $h \in \mathfrak{H}(e, \alpha)$ gilt. Folglich definiert $G(t) := 1 - \varphi_\alpha(h(t)t^\alpha)$ $(t > 0)$ ein Element von $\mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(e, \alpha)$ und damit auch aus $\mathfrak{F}_\wedge$. Darüber hinaus stimmen F und G auf $(1, e]$ überein. Nach Satz 3.1.22 sind F und G aber durch ihre Funktionswerte auf $(1, e]$ eindeutig bestimmt. Daher gilt $F = G \in \mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(e, \alpha)$. □

B. Der superkritische Fall.

Nun sei $\vartheta < 1-(\mathbb{E}\, N)^{-1}$. Die folgende Konstruktion ist an das Verfahren in Jagers und Rösler [39, 2004] angelehnt und liefert eine nichttriviale diskrete Lösung F von Gleichung (3.22). Ferner wird gezeigt, dass diese Lösung (bis auf Skalierung) eindeutig ist (siehe Satz 3.1.24). Im ersten Schritt der Konstruktion wird eine Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ definiert, derart dass $\{0, 1 - a_0, 1 - a_1, \ldots\}$ genau das Bild von $\overline{F}$ ist. Dazu sei a_0 zunächst die eindeutige Zahl in $(0, 1)$ (siehe Lemma 3.1.21(d)), so dass $g_{N,\vartheta}(a_0) = 1$ gilt. Lemma 3.1.21 stellt nun sicher, dass $g_{N,\vartheta}$ streng monoton wachsend auf $[0, a_0]$ und $g_{N,\vartheta}(u) > u$ für $u \in (0, a_0]$ ist. Folglich sind $g_{N,\vartheta}^{-1} : [0, 1] \to [0, a_0] \subset [0, 1]$ und die Iterationen $g_{N,\vartheta}^{-n} : [0, 1] \to [0, a_0] \subset [0, 1]$ $(n \ge 2)$ wohldefiniert, so dass a_n als $g_{N,\vartheta}^{-n}(a_0)$ gewählt werden kann $(n \ge 1)$. Offensichtlich bildet $(a_n)_{n\ge 0}$ dann eine fallende Folge positiver Zahlen mit Limes $a_\infty := \lim_{n\to\infty} a_n$. Aus der Stetigkeit von $g_{N,\vartheta}$ folgt dann $g_{N,\vartheta}(a_\infty) = a_\infty$, so dass $a_\infty = 0$ nach Lemma 3.1.21(a) gelten muss. F wird nun als

$$F(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le t \le 1, \\ 1 - a_n, & \text{falls } e^n < t \le e^{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \tag{3.26}$$

definiert. F ist dann linksseitig stetig und monoton wachsend mit $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$. Folglich definiert F eine Verteilungsfunktion. Darüber hinaus gilt

$$\overline{F}(te^{-1}) = a_{n-1} = g_{N,\vartheta}(a_n) = g_{N,\vartheta}(\overline{F}(t))$$

(mit $a_{-1} := 1$) für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $e^n < t \le e^{n+1}$. Da $\overline{F}(t) = 1$ für $t \le 1$ ist, zeigt dies, dass $\overline{F}$ die Gleichung (3.24) löst und also $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ gilt.

3.1.24 Satz. *Ist* $\vartheta < 1 - (\mathbb{E}\, N)^{-1}$ *(superkritischer Fall), so gilt*

$$\mathfrak{F}_\wedge = \{G \in \mathcal{P} : G(t) = F(ct) \text{ für alle } t \ge 0 \text{ und ein geeignetes } c > 0\},$$

wobei F *durch* (3.26) *gegeben ist.*

Beweis. Es wurde bereits gezeigt, dass $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ gilt. Da $\mathfrak{F}_\wedge$ offenbar unter Skalierung abgeschlossen ist, folgt $\mathfrak{F}_\wedge \supseteq \{\overline{F}(c\,\cdot) : c > 0\}$. Ist umgekehrt $G \in \mathfrak{F}_\wedge$, so kann G nach 3.1.2 nicht in einen einzelnen Punkt konzentriert sein. Folglich gibt es ein $t > 0$ mit $\overline{G}(t) \in (0,1)$. Angenommen $\overline{G}(t) \notin \{a_n : n \geq 0\}$. Dann gibt es ein eindeutiges $n \geq 1$ mit $a_n < \overline{G}(t) < a_{n-1}$. Dann folgt aus der strengen Monotonie von $g_{N,\vartheta}$ auf $[0, a_0]$ und der Definition der a_n, dass

$$\overline{G}(te^{-(n+1)}) = g_{N,\vartheta}^{n+1}(\overline{G}(t)) > g_{N,\vartheta}^{n+1}(a_n) = g_{N,\vartheta}(a_0) = 1,$$

gilt, was offensichtlich falsch ist. Also gilt $\overline{G}(t) \in \{1\} \cup \{a_n : n \geq 0\}$ für alle $t \geq 0$. Setzt man schließlich $c := \sup\{t \geq 0 : \overline{G}(t) = 1\}$, so gilt einerseits $\overline{G}(c) = 1$ wegen der linksseitigen Stetigkeit von G. Andererseits liefert Gleichung (3.24) und die rekursive Definition der a_n $G = F(c\,\cdot)$. □

3.2 α-elementare, α-reguläre und α-beschränkte Fixpunkte

Iksanov [36, 2004] untersuchte die sogenannten elementaren Fixpunkte der *Smoothing Transformation* M_Σ. In dieser Arbeit (namentlich im Beweis von Proposition 1) befinden sich allerdings mehrere kritische Fehler. Ein Ziel dieses Abschnitts ist es, die Ergebnisse der Arbeit [36] über die Existenz α-elementarer Fixpunkte auf den Fall von Gleichung (3.1) übertragen (siehe die Sätze 3.2.3 und 3.2.4) rigoros herzuleiten. Ein weiteres Ziel besteht darin, zu zeigen, dass die Begriffe α-elementar, α-regulär und α-beschränkt, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden, zusammenfallen (siehe ebenfalls Satz 3.2.4).

3.2.1 Einführung und Erläuterungen

3.2.1 Definition. Seien $\alpha > 0$ und $F \in \mathfrak{F}_\wedge$.

(a) Sei $\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$. Dann heißt F

   (i) *α-beschränkt*, falls $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{1-\overline{F}(t)}{t^\alpha} < \infty$ gilt.

   (ii) *α-regulär*, falls $0 < \liminf_{t\downarrow 0} \frac{1-\overline{F}(t)}{t^\alpha} \leq \limsup_{t\downarrow 0} \frac{1-\overline{F}(t)}{t^\alpha} < \infty$ gilt.

   (iii) *α-elementar*, falls es eine Konstante $c > 0$ mit $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1-\overline{F}(t)}{t^\alpha} = c$ gibt.

(b) Sei $\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$ für ein $r > 1$. Dann heißt F

   (i) *α-beschränkt*, falls $\limsup_{n\to\infty} \frac{1-\overline{F}(sr^{-n})}{(sr^{-n})^\alpha}$ für ein $s \in [1, r)$ endlich ist.

   (ii) *α-regulär*, falls $0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{1-\overline{F}(sr^{-n})}{(sr^{-n})^\alpha} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1-\overline{F}(sr^{-n})}{(sr^{-n})^\alpha} < \infty$ für ein $s \in [1, r)$ gilt.

(iii) *α-elementar*, falls es für jedes $s \in [1, r)$ eine positive Konstante $h(s)$ gibt, derart dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\overline{F}(sr^{-n})}{(sr^{-n})^\alpha} = h(s)$ ist.

Die Mengen der α-beschränkten, α-regulären und α-elementaren Fixpunkte werden mit $\mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{b}}, \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{r}}$ bzw. $\mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{e}}$ bezeichnet.

3.2.2 Bemerkung. (a) α-elementare Fixpunkte wurden von Iksanov [36, 2004] im Zusammenhang mit der Fixpunktgleichung (3.2) eingeführt. Die dort gegebene Definition entspricht der Definition in 3.2.1, wenn in 3.2.1 die Überlebensfunktion $\overline{F}$ einer Lösung $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ durch die Laplacetransformierte φ einer Lösung $\varphi \in \mathfrak{F}_\Sigma$ ersetzt wird.
(b) In der Situation eines existierenden charakteristischen Exponenten $\alpha > 0$ nennen Guivarc'h [34, 1990, S. 268] und später Liu [45, 1998, S. 101f.] eine (nichtnegative) Lösung von (3.2) mit Laplacetransformierter φ *kanonischen Fixpunkt*, falls der Fixpunkt aus einer Lösung von (3.2) für die Gewichtsfolge $T^{(\alpha)} = (T_i^\alpha)_{i\geq 1}$ durch Anwendung der α-stabilen Transformation hervorgeht, d. h., wenn $\varphi(t) = \psi(t^\alpha)$ $(t \geq 0)$ für die Laplacetransformierte ψ des Fixpunkts der Gleichung (3.2) für die Gewichtsfolge $T^{(\alpha)}$ gilt. Diese Definition scheint auf den ersten Blick restriktiver als die α-elementarer Fixpunkte zu sein, da der Begriff der α-Elementarität von vornherein nicht auf den charakteristischen Exponenten $\alpha > 0$ beschränkt ist. Tatsächlich impliziert die Existenz eines α-elementaren Fixpunkts aber, dass α der charakteristische Exponent von T ist (siehe Satz 3.2.3). Die Begriffe „α-elementar“ (zumindest in der restriktiveren Definition von Iksanov [36]) und „kanonisch“ bedeuten im Fall $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$ das Gleiche (siehe [36, Theorem 2] und Satz 3.2.4).
(c) Im r-geometrischen Fall muss $\inf_{s\in[1,r)} h(s) > 0$ sein, denn

$$h(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overline{F}(sr^{-n})}{(sr^{-n})^\alpha} \geq (sr)^{-\alpha} \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overline{F}(r^{n+1})}{r^{-\alpha(n+1)}} = (sr)^{-\alpha} h(1)$$

für alle $s \in (1, r]$ und $n \in \mathbb{Z}$.
(d) Offensichtlich ist jeder α-elementare Fixpunkt auch α-regulär und jeder α-reguläre Fixpunkt auch α-beschränkt. Es gelten also die folgenden Mengeninklusionen:

$$\mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{e}} \subseteq \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{r}} \subseteq \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{b}}. \tag{3.27}$$

3.2.2 Die Hauptergebnisse

Dieser Abschnitt enthält zwei Ergebnisse, die alle Fragen zu elementaren und regulären Fixpunkten beantworten. Der erste Satz (Satz 3.2.3) sagt aus, dass die Existenz eines α-regulären Fixpunkts (und damit erst recht die Existenz eines α-elementaren) dazu äquivalent ist, dass α der charakteristische Exponent von T ist und $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$ gilt. Der folgende Satz 3.2.4 zeigt dann, dass in diesem Fall alle α-beschränkten Lösungen Weibullmischungen mit der Mischungsverteilung Λ_α sind und damit insbesondere α-elementar.

3.2.3 Satz. *Es gelten die Bedingungen* (B2+) *und* (B3+). *Dann sind die folgenden Aussagen für jedes $\alpha > 0$ äquivalent:*

(a) Gleichung (3.1) *hat eine α-elementare Lösung, d. h., $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,e} \neq \emptyset$.*

(b) Gleichung (3.1) *hat eine α-reguläre Lösung, d. h., $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,r} \neq \emptyset$.*

(c) $m(\alpha) = 1$ und $\mathbb{P}(W^{(\alpha)} > 0) > 0$.

(d) $m(\alpha) = 1$ und der gewichtete Verzweigungsprozess basierend auf der Gewichtsfolge $(T_i^{\alpha})_{i\geq 1}$ erfüllt Bedingung (B4), *d. h.,*

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\alpha,n} = \infty \textit{ f. s. und } \int_{(1,\infty)} \left[\frac{u \log u}{\mathbb{E}(\overline{S}^{+}_{\alpha,1} \wedge \log u)}\right] \mathbb{P}(W_1^{(\alpha)} \in du) < \infty.$$

3.2.4 Satz. *Zusätzlich zu den Bedingungen* (B2+) *und* (B3+) *gelte $m(\alpha) = \mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$ für ein $\alpha > 0$. Dann gilt*

$$\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,b} = \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,r} = \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,e} = \mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(d,\alpha),$$

wobei $d = r > 1$ im r-geometrischen Fall ($\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$) und $d = 1$ im stetigen Fall ($\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$) sei.

3.2.5 Bemerkung. (a) Im Anschluss an die Sätze 3.2.3 und 3.2.4 ergibt sich die Frage, ob im Fall $m(\alpha) = 1$ und $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$ für ein $\alpha > 0$ weitere Lösungen von (3.1), d. h. Lösungen in $\mathfrak{F}_\wedge \setminus \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{b}}$, existieren. Jede solche Lösung F muss dann

$$\lim_{t\downarrow 0} F(t)/t^{\alpha} = \infty$$

oder

$$0 \leq \liminf_{t\downarrow 0} F(t)/t^{\alpha} < \limsup_{t\downarrow 0} F(t)/t^{\alpha} = \infty$$

erfüllen. Lemma 3.2.7 schließt die erste Alternative aus. Ob Lösungen mit dem oben beschriebenen bei 0 oszillierenden Verhalten existieren, bleibt allerdings eine offene Frage. In Satz 3.3.1 wird jedoch gezeigt, dass es unter der Zusatzvoraussetzung $\mathbb{E}\, N < \infty$ keine solchen Lösungen gibt.
(b) Es gibt einen weiteren Fall, den *Grenzfall* (nach der engl. Bezeichnung *boundary case* nach Biggins und Kyprianou [16, 2005]), der hier von der Analyse ausgeschlossen ist, da seine Behandlung andere Werkzeuge (als z. B. die Sätze zur Eindeutigkeit von Lösungen der HPRE) erfordert und seine Behandlung folglich den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Der Grenzfall für die additive Gleichung (3.2) liegt vor, wenn $m(\alpha) = 1$ ist und $\mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)})$ ein Element Λ^*_α enthält, das ein unendliches erstes Moment besitzt. In diesem Fall gilt notwendigerweise $W^{(\alpha)} = 0$ f. s. (siehe Korollar 3.2.12). Ferner gilt $m'(\alpha) = 0$, wenn m in einer (ggf. einseitigen) Umgebung von α endlich ist. Mit der Hilfe von Λ^*_α und

Lemma 3.1.16 lassen sich zwar wieder Weibullmischungen in $\mathfrak{F}_\wedge$ einbetten, diese sind jedoch nicht mehr α-elementar. Ist φ^*_α die Laplacetransformierte von Λ^*_α, so verhält sich $1-\varphi^*_\alpha(t)$ unter schwachen Bedingungen (siehe [16, Theorem 5]) wie eine Konstante mal $t|\log t|$ für $t \downarrow 0$, und folglich gilt $\lim_{t\downarrow 0} F(t)/t^\alpha = \infty$ für jedes $F \in \mathfrak{W}_{\Lambda^*_\alpha}(d,\alpha)$. Dieses Verhalten unterscheidet sich deutlich vom Verhalten α-elementarer Lösungen und erfordert eine separate Behandlung. Wiederum im Fall $\mathbb{E}\,N < \infty$ bringen die Ergebnisse aus Abschnitt 3.3 allerdings auch im Grenzfall Einsichten.

3.2.3 $W^{(\alpha)}$-Mischungen von Weibullverteilungen

In der Situation von Lemma 3.1.16 lässt sich das Verhalten der Weibullmischungen bei 0 ergründen, wenn das Mischungsmaß die Verteilung von $W^{(\alpha)}$ ist:

3.2.6 Lemma. *Seien $m(\alpha) = 1$ und $\mathbb{E}\,W^{(\alpha)} = 1$ für ein $\alpha > 0$. Dann gilt $\mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(r,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,e}$ im r-geometrischen Fall ($r > 1$) und $\mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(1,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,e}$ im stetigen Fall.*

Beweis. Dass jedes wie oben definierte F eine Lösung von (3.1) ist, folgt aus Lemma 3.1.16 in Kombination mit Gleichung (1.9). Es bleibt, das behauptete Verhalten bei 0 nachzuweisen. Dies folgt aber aus $F(t) = 1-\varphi_\alpha(h(t)t^\alpha)$ $(t>0)$ für ein $h \in \mathfrak{H}(r,\alpha)$ bzw. $F(t) = 1-\varphi_\alpha(ct^\alpha)$ $(t>0)$ für ein $c>0$ und $-\varphi'_\alpha(0) = \mathbb{E}\,W^{(\alpha)} = 1$ für die Laplacetransformierte φ_α von $W^{(\alpha)}$. □

Es stellt sich die Frage, ob im Falle $\mathbb{E}\,W^{(\alpha)} = 1$ ein grundlegend anderes Verhalten der Lösungen bei 0 als das der $W^{(\alpha)}$-Mischungen von Weibullverteilungen denkbar ist. Einen ersten Hinweis gibt das folgende Lemma:

3.2.7 Lemma. *Angenommen der charakteristische Exponent $\alpha > 0$ existiert und $\mathbb{E}\,W^{(\alpha)} = 1$. Dann gelten die folgenden Aussagen für jedes $F \in \mathfrak{F}_\wedge$:*

(a) $\limsup_{t\downarrow 0} t^{-\alpha}(1-\overline{F}(t)) > 0$.

(b) $\liminf_{t\downarrow 0} t^{-\alpha}(1-\overline{F}(t)) < \infty$.

Proof. (a) Angenommen $\lim_{t\downarrow 0} t^{-\alpha}(1-\overline{F}(t)) = 0$. Dann erfüllt F offensichtlich die Voraussetzungen von Lemma 3.2.8 für jedes $C>0$. Für die Disintegration $\mathcal{F}$ von F gilt dann $\mathbb{P}(-\log\overline{\mathcal{F}}(t) \le 2Ct^\alpha W^{(\alpha)}$ für alle $t \ge 0) = 1$ für jedes $C > 0$. Folglich gilt $-\log\overline{\mathcal{F}}(1) = 0$ f. s., was wiederum $\overline{F}(1) = \mathbb{E}\,\overline{\mathcal{F}}(1) = 1$ nach sich zieht. Dies widerspricht Lemma 3.1.19, d. h., $\limsup_{t\downarrow 0} t^{-\alpha}(1-\overline{F}(t)) > 0$ wie behauptet.
(b) Angenommen $\liminf_{t\downarrow 0} t^{-\alpha}(1-\overline{F}(t)) = \infty$. Dann kann ein Widerspruch prouziert werden, indem $F(t)$ mit der Menge von Lösungen von der Gestalt $F_s(t) := 1-\varphi_\alpha((t/s)^\alpha)$ $(s>0)$ verglichen wird. Da $\lim_{t\downarrow 0} t^{-\alpha}(1-\overline{F}_s(t)) = s^{-\alpha}\,\mathbb{E}\,W^{(\alpha)} = s^{-\alpha}$ für jedes $s>0$ gilt, folgt $\overline{F}(t) \le \overline{F}_s(t)$ für jedes $s>0$ und

$0 < t < \varepsilon(s)$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon(s) > 0$. Für festes $t > 0$ betrachte man nun die durch (3.14) definierten beschränkten Martingale $(\overline{\mathcal{F}}_n(t))_{n\geq 0}$ und $(\overline{\mathcal{F}}_{s,n}(t))_{n\geq 0}$, wobei für das erste Martingal F und für das zweite F_s zugrunde gelegt werde. Nach Lemma 3.1.18 ist die Stoppzeit $\tau(s) := \inf\{n : tL_n^* < \varepsilon(s)\}$ f. s. endlich und

$$\overline{\mathcal{F}}_\tau(t) = \prod_{|v|=\tau} \overline{F}(tL(v)) \leq \prod_{|v|=\tau} \overline{F}_s(tL(v)) = \overline{\mathcal{F}}_{s,\tau}(t)$$

für jedes $s > 0$. Ein Blick auf den Stoppsatz für Martingale liefert daher

$$\overline{F}(t) = \mathbb{E}\,\overline{\mathcal{F}}_\tau(t) \leq \mathbb{E}\,\overline{\mathcal{F}}_{s,\tau}(t) = \overline{F}_s(t)$$

für jedes $s > 0$. Schließlich nutze man $\overline{F}_s(t) = \varphi_\alpha((t/s)^\alpha) \to \varphi_\alpha(\infty) = \mathbb{P}(W^{(\alpha)} = 0) = 0$ für $s \downarrow 0$ um auf $\overline{F}(t) = 0$ und damit den Widerspruch $F = \delta_0$ zu schließen. □

3.2.4 Disintegration von Verteilungen $F \in \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathbf{b}}$

3.2.8 Lemma. *Sei $F \in \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,b}$, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$ sei die Disintegration von F und $\alpha > 0$ sei so, dass $m(\alpha) \leq 1$ gilt. Dann gibt es ein $C > 0$ mit*

$$\mathbb{P}\left(-\log \overline{\mathcal{F}}(t) \leq Ct^\alpha W^{(\alpha)} \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1.$$

Beweis. Zunächst gelte $\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$. Nach Voraussetzung gilt dann $1 - \overline{F}(t) \leq Ct^\alpha/2$ für alle hinreichend kleinen $t \geq 0$ und ein geeignetes $C > 0$. Dies und die Ungleichung $-\log x \leq 2(1-x)$ für alle x in einer hinreichend kleinen linksseitigen Umgebung der 1 liefern

$$-\log \overline{F}(t) \leq 2(1 - \overline{F}(t)) \leq Ct^\alpha$$

für alle $0 \leq t \leq \delta$ und ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Nach Lemma 3.1.18 stellt die Bedingung $m(\alpha) \leq 1$ sicher, dass $\mathbb{P}(B) = 1$ für die Menge $B := \{\sup_{|v|=n} L(v) \to 0\}$ gilt. Für jedes $t > 0$ gilt dann $tL(v) \leq \delta$ auf B für alle $|v| \geq n$ und ein hinreichend großes n. Folglich gilt $-\log \overline{F}(tL(v)) \leq Ct^\alpha L(v)^\alpha$ auf B für alle $|v| \geq n$, was wiederum

$$\begin{aligned}
-\log \overline{\mathcal{F}}(t) &= -\log \liminf_{n\to\infty} \prod_{|v|=n} \overline{F}(tL(v)) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sum_{|v|=n} -\log \overline{F}(tL(v)) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} Ct^\alpha \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \\
&= 2Ct^\alpha W^{(\alpha)} \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}
\end{aligned}$$

auf B impliziert.
Im r-geometrischen Fall ergibt sich mit dem obigen Beweis zunächst nur die Abschätzung

$$-\log \overline{\mathcal{F}}(t) \leq Ct^{\alpha} W^{(\alpha)} \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

für alle t der Gestalt $t = sr^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und einem festen $s \in [1, r)$. Nutzt man nun aus, dass $-\log \overline{\mathcal{F}}$ nach Lemma 3.1.7 monoton wachsende Pfade hat, lässt sich die obige Abschätzung auf alle $t \geq 0$ ausdehnen, indem man die Konstante C durch die größere Konstante Cr^{α} ersetzt. □

3.2.9 Bemerkung. Gilt $W^{(\alpha)} = 0$ f. s., was im Fall $m(\alpha) < 1$ stets und im Fall $m(\alpha) = 1$ gelegentlich gilt (siehe Satz A.1.1), so sagt Lemma 3.2.8 $\overline{\mathcal{F}}(t) = 1$ f. s. für alle $t \geq 0$ aus, was $\overline{F}(t) = 1$ für alle $t \geq 0$ nach sich zieht. Dies ist aber unmöglich. Folglich gilt $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{b}} = \emptyset$ im Fall $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 0$. Der interessante Fall in Lemma 3.2.8 ist also der Fall $m(\alpha) = 1$ und $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$.

3.2.5 Eine hinreichende Bedingung für die Existenz des charakteristischen Exponenten

3.2.10 Lemma. *Seien $\alpha > 0$ und $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,r} \neq \emptyset$. Dann gilt $m(\alpha) \leq 1$.*

Beweis. Sei $F \in \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{r}}$. Dann gilt $c_1 := \liminf_{t\downarrow 0}(1 - \overline{F}(t))/t^{\alpha} > 0$ und $c_2 := \limsup_{t\downarrow 0}(1 - \overline{F}(t))/t^{\alpha} < \infty$. Unter Verwendung von (3.3) lässt sich nun die folgende Identität von Biggins und Kyprianou [14, 1997, S. 345] reproduzieren:

$$1 = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} T_i^{\alpha} \frac{1 - \overline{F}(tT_i)}{(tT_i)^{\alpha}} \frac{t^{\alpha}}{1 - \overline{F}(t)} \prod_{j<i} \overline{F}(tT_j).$$

Das Lemma von Fatou liefert hier

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} T_i^{\alpha} \liminf_{t\downarrow 0} \frac{1 - \overline{F}(tT_i)}{(tT_i)^{\alpha}} \frac{t^{\alpha}}{1 - \overline{F}(t)} \prod_{j<i} \overline{F}(tT_j) \\ &\geq \frac{c_1}{c_2}\, \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} T_i^{\alpha} = \frac{c_1}{c_2}\, m(\alpha). \end{aligned}$$

Das gleiche Argument ist auf (3.13) anwendbar und liefert

$$1 \geq \frac{c_1}{c_2}\, \mathbb{E} \sum_{|v|=n} L(v)^{\alpha} = \frac{c_1}{c_2}\, m(\alpha)^n$$

für jedes $n \geq 1$. Folglich muss $m(\alpha) \leq 1$ gelten. □

Sind $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ zwei Folgen positiver reeller Zahlen, so wird im Folgenden $a_n \sim b_n$ für $n \to \infty$ geschrieben, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$ ist, während in der allgemeineren Situation $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n/b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n/b_n < \infty$ $a_n \asymp b_n$ für $n \to \infty$ geschrieben wird.

3.2.11 Satz. *Seien $\alpha > 0$ und $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,r} \neq \emptyset$. Dann ist α der charakteristische Exponent von T und $W^{(\alpha)}$ f. s. positiv.*

Beweis. Zunächst folgt $m(\alpha) \leq 1$ aus Lemma 3.2.10 und damit $L^*_n \to 0$ f. s. nach Lemma 3.1.18. Dies impliziert zusammen mit $-\log(1-x) \sim x$ für $x \downarrow 0$ und der α-Regularität von F, dass für festes $t > 0$

$$\begin{aligned} -\log \overline{\mathcal{F}}_n(t) &= \sum_{|v|=n} -\log \overline{F}(tL(v)) \\ &\sim \sum_{|v|=n} \big(1 - \overline{F}(tL(v))\big) \\ &\asymp \sum_{|v|=n} L(v)^{\alpha} = W^{(\alpha)}_n \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

gilt. Aus $-\log \overline{\mathcal{F}}_n(t) \to -\log \overline{\mathcal{F}}(t)$ f. s. folgt daher

$$W^{(\alpha)} = \liminf_{n\to\infty} W^{(\alpha)}_n > 0 \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

auf der Menge $\{\overline{\mathcal{F}}(t) < 1\}$. Nach Lemma 3.1.19 gilt $\overline{F}(t) < 1$. Insbesondere gilt dann $\mathbb{P}(\overline{\mathcal{F}}(t) < 1) > 0$, was $m(\alpha) = 1$, $W^{(\alpha)} = \lim_{n\to\infty} W^{(\alpha)}_n > 0$ f. s. und $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$ (nach Satz A.1.1 und (B2+)) beweist. □

3.2.6 Die Beweise der Sätze 3.2.3 und 3.2.4

Beweis von Satz 3.2.3. „(a) ⇒ (b)“ ist trivial, denn $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{e}} \subset \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{r}}$.
„(b) ⇒ (c)“ folgt aus Satz 3.2.11.
„(c) ⇒ (a)“. Unter Bedingung (c) ist $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$. Folglich liefert Lemma 3.2.6 die Gültigkeit von (a).
„(c) ⇔ (d)“. Die Äquivalenz von (c) und (d) ist eine Konsequenz aus Satz A.1.1 im Anhang. □

Beweis von Satz 3.2.4. Nach Bemerkung 3.2.2(d) gilt $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{e}} \subseteq \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{r}} \subseteq \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{b}}$. Lemma 3.2.6 liefert $\mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(d,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{e}}$, wobei $d = 1$ sei, wenn $\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$ ist, und $d = r$ im Fall $\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$. Folglich genügt es, $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\wedge,\mathrm{b}} \subseteq \mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(d,\alpha)$ zu zeigen. Dazu sei F α-beschränkt mit Disintegration $\overline{\mathcal{F}}$. Nach Lemma 3.2.8 gilt

$$\mathbb{P}\left(-\log \overline{\mathcal{F}}(t) \leq C t^{\alpha} W^{(\alpha)} \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1 \tag{3.28}$$

für ein geeignetes $C > 0$. Da $\overline{\mathcal{F}}$ der multiplikativen Gleichung (3.15) genügt, erfüllt die Transformation Ψ definiert durch

$$\Psi(t) := e^{-\alpha t}(-\log \overline{\mathcal{F}}(e^t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

die folgende HPRE (siehe Gleichung (3.16)):

$$\Psi(t) = \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \, [\Psi]_v(t - S(v)) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nun sollen die Sätze 2.2.2 im r-geormetrischen Fall bzw. 2.2.3 im stetigen Fall ins Spiel gebracht werden. Dazu müssen die Voraussetzungen an Ψ geprüft werden. Die Produktmessbarkeit von Ψ folgt aus Lemma 3.1.7(b). Aus Teil (d) dieses Lemmas folgt auch, dass Ψ in jedem $t \in \mathbb{R}$ f. s. linksseitig stetig mit existierendem rechten Limes ist. Nach (3.28) gilt ferner

$$0 \leq \Psi(t) \leq e^{-\alpha t} C e^{\alpha t} W^{(\alpha)} = C W^{(\alpha)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ auf einer Menge mit voller Wahrscheinlichkeit. Dies impliziert $\sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\, \Psi(t) < \infty$ und die lokal gleichgradige Integrierbarkeit von Ψ. Also sind die Sätze 2.2.2 bzw. 2.2.3 anwendbar und liefern $\Psi(t) = p(t) W^{(\alpha)}$ f. s. ($t \in \mathbb{R}$), wobei $p : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine messbare und $(\log r)$-periodische Funktion im r-geometrischen Fall und eine nichtnegative Konstante im stetigen Fall ist. In beiden Fällen gilt

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(t) &= \exp(-t^\alpha \Psi(\log t)) \\ &= \exp(-p(\log t) t^\alpha W^{(\alpha)}) \\ &= \exp(-h(t) t^\alpha W^{(\alpha)}) \; \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

für alle $t > 0$, wobei $h(t) := p(\log t)$ ist. Erwartungswertbildung liefert dann

$$\overline{F}(t) = \varphi_\alpha(h(t) t^\alpha) \quad (t > 0).$$

Im stetigen Fall ist der Beweis damit vollendet, da h in diesem Fall notwendigerweise konstant ist. Für den Rest des Beweises wird also $\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$ angenommen. Dann ist p $(\log r)$-periodisch und h daher multiplikativ r-periodisch. Weiterhin überträgt sich die linksseitige Stetigkeit von $\overline{F}$ auf $t \mapsto h(t) t^\alpha$ und damit auch auf h. Die Antitonie von $\overline{F}$ impliziert ferner die Isotonie von $t \mapsto h(t) t^\alpha$. Insgesamt folgt $h \in \mathfrak{H}(r, \alpha)$, was $F \in \mathfrak{W}_{\Lambda_\alpha}(r, \alpha)$ zeigt. □

Eine Kombination aus Satz 3.2.4 und Lemma 3.2.7 ermöglicht einen sehr kurzen Beweis der Eindeutigkeit (bis auf Skalierung) der Verteilung von $W^{(\alpha)}$ als Lösung von (3.2) mit $T^{(\alpha)}$ anstelle von T:

3.2.12 Korollar. *Angenommen* (B2+) *gilt und es gibt ein* $\alpha > 0$ *mit* $m(\alpha) = 1$ *und* $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$. *Dann gilt* $\mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)}) = \{\Lambda_\alpha(c\,\cdot) : c > 0\}$, *d. h.,* Λ_α *ist die bis auf Skalierung eindeutige Lösung von* (3.2) *für die Gewichtsfolge* $T^{(\alpha)}$.

Dieses Resultat mit (B2) (d. h. $\mathbb{E}\, N > 1$) anstelle von Bedingung (B2+) (der obige Beweis kommt auch mit der schwächeren Bedingung (B2) aus) wurde bereits unter stärkeren Voraussetzungen an die Funktion m von Biggins und Kyprianou [14, 1997, Theorem 1.5], [16, 2005, Theorem 3] bewiesen, wobei das letztgenannte Resultat auch den sogenannten Grenzfall umfasst (siehe dazu Bemerkung 3.2.5(b)).

Beweis. Sei $\Lambda \in \mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)})$ eine weitere Lösung von (3.2) für die Gewichtsfolge $T^{(\alpha)}$. ψ sei die Laplacetransformierte von Λ. Dann kann $t \mapsto \psi(t^\alpha)$ als Überlebensfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung G aufgefasst werden, die Gleichung (3.1) löst. Es gilt $G \in \mathfrak{F}_\wedge$ und $\lim_{t\downarrow 0} G(t)/t^\alpha = \lim_{t\downarrow 0} t^{-\alpha}(1-\psi(t^\alpha)) = |\psi'(0)| \in (0,\infty)$, wobei die Endlichkeit des Erwartungswertes aus Lemma 3.2.7 folgt. Also gilt $G \in \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{b}}$ und damit $\psi(t) = \varphi_\alpha(h(t)t)$ für ein $h \in \mathfrak{H}(r,1)$ im r-geometrischen Fall bzw. einer Konstante $h > 0$ im stetigen Fall. In beiden Fällen impliziert $|\psi'(0)| = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(1-\psi(t)) = \lim_{t\downarrow 0} h(t)$, dass $h = |\psi'(0)|$ gilt, d. h., $\psi(t) = \varphi_\alpha(ct)$ mit $c := |\psi'(0)| > 0$. Dies zeigt, dass $\Lambda = \Lambda_\alpha(c\,\cdot)$ gilt. □

3.2.7 α-elementare, α-reguläre und α-beschränkte Fixpunkte der Summengleichung

Wie bereits im einleitenden Absatz von Abschnitt 3.2 erwähnt wurde, untersuchte Iksanov [36, 2004] die elementaren Fixpunkte von M_Σ. Die zitierte Arbeit enthält allerdings einige Fehler. Die Ergebnisse der Arbeit (namentlich Theorem 2 und Proposition 3) die elementaren Fixpunkte betreffend sind aber teilweise richtig und ergeben sich im Wesentlichen aus den Sätzen 3.2.3 und 3.2.4, da die Gleichung (3.1) und (3.2) auf die gleiche Funktionalgleichung für allerdings unterschiedliche Funktionenklassen führen. Da ferner jede Laplacetransformierte eine Überlebensfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $[0,\infty]$ darstellt, lassen sich die Ergebnisse für Gleichung (3.1) umso leichter auf den Fall von Gleichung (3.2) übertragen.

Für die Formulierung der Resultate über elementare Fixpunkte von M_Σ wird im Folgenden an die Definition stabiler Verteilungen und der r-periodischen Varianten erinnert:

3.2.13 Definition (siehe Durrett und Liggett [27], S. 280). Für $\alpha > 0$ und $r > 1$ sei $\mathfrak{P}(r,\alpha)$ die Menge der multiplikativ r-periodischen Funktionen $p : (0,\infty) \to (0,\infty)$, so dass $t \mapsto p(t)t^\alpha$ eine vollständig monotone Ableitung besitzt. Für $p \in \mathfrak{P}(r,\alpha)$ wird dann die *r-periodische α-stabile Verteilung* r-$\mathcal{S}(p,\alpha)$ als die Verteilung auf $[0,\infty)$ mit der Laplacetransformierten $\varphi(t) = e^{-p(t)t^\alpha}$ $(t > 0)$ definiert.

φ definiert nach Feller [30, 1971, S. 441, Criterion 2] eine Laplacetransformierte. Ist p eine Konstane, etwa $p = c > 0$, so ist φ die Laplacetransformierte einer stabilen Verteilung mit Skalierungsparameter $(c/\cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha}$, Verschiebungsparameter 0 und Stabilitätsindex α (siehe Samorodnitsky und Taqqu [57, 1994, Definition 1.1.6 und Proposition 1.2.12]). Diese Verteilung wird mit $\mathcal{S}(c,\alpha)$ bezeichnet und hängt nicht von r ab. Der Vollständigkeit halber sei r-$\mathcal{S}(0,\alpha) = \mathcal{S}(0,\alpha) := \delta_0$.

Es folgt ein kurzer Beweis der Tatsache, dass die wie oben definierten stabilen Verteilungen nur für $\alpha \leq 1$ existieren.

3.2.14 Lemma. *In der Situation von Definition 3.2.13 ist jedes Element von $\mathfrak{P}(r,1)$ konstant, während $\mathfrak{P}(r,\alpha) = \emptyset$ für jedes $\alpha > 1$ gilt.*

Beweis. Ist $\alpha \geq 1$, so gilt für jedes $s \in (1,r]$

$$p(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-p(sr^{-n})(sr^{-n})^\alpha}}{(sr^{-n})^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-p(sr^{-n})(sr^{-n})^\alpha}}{(sr^{-n})} (sr^{-n})^{1-\alpha}.$$

Da $t \mapsto p(t)t^\alpha$ eine vollständig monotone Ableitung besitzt, ist $e^{-p(t)t^\alpha}$ vollständig monoton, insbesondere konvex. Daher ist der Quotient auf der rechten Seite der abgesetzten Gleichung fallend in s. Ferner ist $t^{1-\alpha}$ im Falle $\alpha \geq 1$ fallend in t. Insgesamt folgt, dass $p(s)$ fallend in s ist. Tatsächlich ist p sogar strikt fallend, wenn $\alpha > 1$ gilt. Die Periodizität von p liefert dann die Konstanz von p im Fall $\alpha = 1$ bzw. einen Widerspruch im Fall $\alpha > 1$. □

Die nächste Definition ist die kanonische Entsprechung von Definition 3.1.14.

3.2.15 Definition. Seien $\alpha \in (0,1]$ und Λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,\infty)$.

(a) $\mathcal{S}_\Lambda(1,\alpha)$ sei die Menge aller Λ-Mischungen von α-stabilen Verteilungen F der Gestalt $F(\cdot) = \int \mathcal{S}(yc,\alpha)(\cdot)\,\Lambda(dy)$ $(c > 0)$.

(b) Für $r > 1$ sei $\mathcal{S}_\Lambda(r,\alpha)$ die Menge aller Λ-Mischungen von r-$\mathcal{S}(p,\alpha)$-Verteilungen F der Gestalt $F(\cdot) = \int r\text{-}\mathcal{S}(yp,\alpha)(\cdot)\,\Lambda(dy)$ $(p \in \mathfrak{P}(r,\alpha))$.

Schließlich seien die Begriffe „α-beschränkt", „α-regulär" und „α-elementar" für Fixpunkte von M_Σ wie in Definition 3.2.1, wobei dort die Überlebensfunktion $\overline{F}$ eines Fixpunkts F von $M_\wedge$ durch die Laplacetransformierte φ eines Fixpunkts von M_Σ ersetzt werde. Die entsprechenden Fixpunktmengen werden mit $\mathfrak{F}^\alpha_{\Sigma,\mathrm{b}}$, $\mathfrak{F}^\alpha_{\Sigma,\mathrm{r}}$ und $\mathfrak{F}^\alpha_{\Sigma,\mathrm{e}}$ bezeichnet.

Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, um die Entsprechungen der Sätze 3.2.3 und 3.2.4 zu formulieren. Dabei werden die im Fall der Minimumsgleichung (3.1) stets vorausgesetzten Bedingungen (B2+) und (B3+) durch die folgenden schwächeren Bedingungen ersetzt:

$$\mathbb{E}\,N > 1. \tag{B2}$$

$$\mathbb{P}(T_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \geq 1) < 1. \tag{B3}$$

Die Annahme dieser Bedingungen ist unproblematisch, siehe dazu Liu [45, Lemma 1.1 und Lemma 3.1].

3.2.16 Satz. *Es gelten die Bedingungen* (B2) *und* (B3). *Weiterhin sei* $\alpha > 0$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Gleichung (3.2) *hat eine* α*-elementare Lösung, d. h.,* $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\Sigma,e} \neq \emptyset$.

(b) Gleichung (3.2) *hat eine* α*-reguläre Lösung, d. h.,* $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\Sigma,r} \neq \emptyset$.

(c) $\alpha \in (0,1]$, $m(\alpha) = 1$ *und* $\mathbb{P}(W^{(\alpha)} > 0) > 0$.

(d) $\alpha \in (0,1]$, $m(\alpha) = 1$, *der Random Walk* $(\overline{S}_{\alpha,n})_{n\geq 0}$ *konvergiert für* $n \to \infty$ *f. s. gegen* ∞ *und*

$$\int_{(1,\infty)} \left[\frac{u \log u}{\mathbb{E}(\overline{S}^{+}_{\alpha,1} \wedge \log u)}\right] \mathbb{P}(W_1^{(\alpha)} \in du) < \infty.$$

3.2.17 Satz. *Es seien die Bedingungen* (B2) *und* (B3) *erfüllt. Weiter gelte* $m(\alpha) = 1$ *und* $\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = 1$ *für ein* $\alpha \in (0,1]$. *Dann gilt*

$$\mathfrak{F}^{\alpha}_{\Sigma,b} = \mathfrak{F}^{\alpha}_{\Sigma,r} = \mathfrak{F}^{\alpha}_{\Sigma,e} = \mathcal{S}_{\Lambda_\alpha}(d,\alpha),$$

wobei $d = r > 1$ *im* r*-geometrischen Fall* ($\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$) *sei und* $d = 1$ *im stetigen Fall* ($\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$).

Die Beweise dieser Sätze können analog zu den Beweisen der Sätze 3.2.3 und 3.2.4 geführt werden. Zusätzlich muss $\alpha \leq 1$ sichergestellt werden. Mit den Argumenten aus dem Beweis von Satz 3.2.3 lässt sich aber zeigen, dass die Laplacetransformierte φ eines Elements aus $\mathfrak{F}^{\alpha}_{\Sigma,\mathrm{b}}$ in der Form $\varphi(t) = \varphi_\alpha(p(t)t^\alpha)$ $(t > 0)$ geschrieben werden kann, wobei p im r-geometrischen Fall eine multiplikativ r-periodische Funktion und im stetigen Fall eine Konstante sei. Nach Lemma 3.2.14 folgt $\alpha \leq 1$, falls gezeigt werden kann, dass im r-geometrischen Fall $p \in \mathfrak{P}(r,\alpha)$ gilt. Nun gilt aber $p(t) = \varphi^{-1}(\varphi_\alpha(t)) \cdot t^{-\alpha}$ $(t > 0)$ (wobei φ^{-1} die Umkehrfunktion von φ bezeichne), d. h., p ist beliebig oft differenzierbar. Es bleibt zu zeigen, dass $t \mapsto p(t)t^\alpha$ eine vollständig monotone Ableitung besitzt. Dazu kann (wie in Durrett und Liggett [27, S. 290]) wie folgt gerechnet werden:

$$\begin{aligned} r^{\alpha n}(1 - \varphi(tr^{-n})) &= \frac{1 - \varphi_\alpha(p(tr^{-n})(tr^{-n})^\alpha)}{p(tr^{-n}) \cdot (tr^{-n})^\alpha} \cdot p(t)t^\alpha \\ &\to p(t)t^\alpha \qquad (n \to \infty), \end{aligned}$$

wobei $\varphi'_\alpha(0) = -\,\mathbb{E}\, W^{(\alpha)} = -1$ ausgenutzt wurde. Da $t \mapsto r^{\alpha n}(1 - \varphi(tr^{-n}))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine vollständig monotone Ableitung besitzt und da die Konvergenz kompakt gleichmäßig ist, hat $t \mapsto p(t)t^\alpha$ ebenfalls eine vollständig monotone Ableitung.

3.2.8 Endogene Fixpunkte der Summengleichung

Bei der Betrachtung der α-regulären Fixpunkte sowohl der Minimumsgleichung (3.1) als auch der Summengleichung (3.2) hat sich herausgestellt, dass diese Fixpunkte jeweils als Mischung gewisser (Weibull- bzw. stabiler) Verteilungen darstellbar sind. Gemischt wird dabei nach der Verteilung eines Fixpunkts von $M_\Sigma(T^{(\alpha)}$, nämlich nach dem Limes W des kanonischen Martingals. $W^{(\alpha)}$ ist jedoch kein einfacher Fixpunkt, sondern besitzt besondere Eigenschaften: $W^{(\alpha)}$ ist erstens eine Funktion des Baums $\mathbf{T}$ und löst zweitens die Gleichung (3.2) (für die Gewichtsfolge $T^{(\alpha)}$) nicht nur in Verteilung sondern sogar f. s. und über jede Generation:

$$W^{(\alpha)} = \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \, [W^{(\alpha)}]_v \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

Ein Fixpunkt mit diesen Eigenschaften wird *endogen* (siehe Aldous und Bandyopadhyay [2, 2005, Definition 7]) genannt:

3.2.18 Definition. Eine Zufallsgröße W^* der Gestalt $W^* = g(\mathbf{T})$ für eine messbare Funktion $g : [0,\infty)^{\mathbb{V}} \to [0,\infty]$ heißt *endogener Fixpunkt* (von M_Σ), falls $\mathbb{P}(W^* > 0) > 0$ ist und

$$W^* = \sum_{|v|=n} L(v) \, [W^*]_v \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{3.29}$$

für alle $n \geq 0$ gilt.

Wie bereits angedeutet spielen endogene Fixpunkte eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der Lösungsmengen der Gleichungen (3.1) und (3.2). Dabei bildet der kanonische Martingallimes nicht das einzige Beispiel für einen endogenen Fixpunkt; eine weitere Beispielklasse bilden die in Abschnitt 2.2.9 eingeführten (zeitunabhängigen) Lösungen der HPRE mit unendlicher Erwartung (siehe dazu auch Abschnitt (A.1.2) im Anhang). Der folgende Satz stellt unter geeigneten Voraussetzungen sicher, dass der endogene Fixpunkt bis auf Skalierung f. s. eindeutig ist, ein Ergebnis, das im Folgenden noch benötigt wird.

3.2.19 Satz. *Es gelten die Bedingungen* (B2) *und* (B3) *und darüber hinaus sei* $\mathbb{E}\, N < \infty$ *sowie* $m(\alpha) = 1$ *für ein* $\alpha > 0$. W^* *sei ein endogener Fixpunkt der Gleichung* (3.2) *für die Gewichtsfolge* $T^{(\alpha)}$. *Dann gilt* $\widehat{W} = cW^*$ *f. s. für jeden weiteren endogenen Fixpunkt* $\widehat{W}$ *aus* $\mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)})$.

Beweis. Seien W^* und $\widehat{W}$ zwei endogene Fixpunkte aus $\mathfrak{F}_\Sigma(T^{(\alpha)})$ mit Laplacetransformierten φ^* und $\hat{\varphi}$. Unter den Voraussetzungen dieses Satzes lässt sich entweder Theorem 3 in Biggins und Kyprianou [16, 2005] oder Korollar 3.2.12 anwenden. In beiden Fällen folgt $\varphi^*(t) = \hat{\varphi}(ct)$ für ein $c > 0$. Durch Skalierung von $\widehat{W}$ kann o. B. d. A. $c = 1$ (also $W^* \sim \widehat{W}$) angenommen werden. Die integrierbare Zufallsgröße $\exp(-W^*)$ lässt sich in der Form

$$\exp(-W^*) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{-\sum_{|v|=n} L(v)^\alpha [W^*]_v} \;\Big|\; \mathcal{A}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{|v|=n} \varphi^*(L(v)^\alpha) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

darstellen. Die gleiche Rechnung kann für $\exp(-\widehat{W})$ durchgeführt werden und liefert die gleiche Darstellung mit $\hat{\varphi}$ anstelle von φ. Wegen $\varphi^* = \hat{\varphi}$ folgt dann $\exp(-W^*) = \exp(-\widehat{W})$ f. s., was nach Logarithmierung und Vorzeichenwechel die behauptete f. s. Eindeutigkeit liefert. $\square$

3.3 Der Spezialfall $\mathbb{E}\, N < \infty$

3.3.1 Die Hauptergebnisse

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes, der vollständige Auskunft über die Gestalt der Lösungsmenge $\mathfrak{F}_\wedge$ sowie die Menge der zugehörigen Disintegrationen im Fall $\mathbb{E}\, N < \infty$ gibt:

3.3.1 Satz. *Zusätzlich zu den Bedingungen* (B2+) *und* (B3+) *gelte* $\mathbb{E}\, N < \infty$. *Weiterhin habe* m *eine* 1*-Stelle in* $(0, \infty)$. *Dann existiert der charakteristische Exponent* $\alpha > 0$. *Ferner gibt es einen endogenen Fixpunkt* W^* *der Gleichung* (3.2) *zur Gewichtsfolge* $(T_i^\alpha)_{i\geq 1}$, *so dass jede Disintegration* $\mathcal{F}$ *eines* $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ *eine Darstellung der Gestalt*

$$\overline{\mathcal{F}}(t) = e^{-h(t)t^\alpha W^*} \quad \mathbb{P}\text{-}f.\,s. \quad (t > 0) \tag{3.30}$$

besitzt. Dabei ist h *im stetigen Fall eine positive Kostante und im Fall* $\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$ $(r > 1)$ *ist* $h \in \mathfrak{H}(r, \alpha)$. *Insbesondere gilt dann*

$$\mathfrak{F}_\wedge = \mathfrak{W}_{\Lambda^*}(d, \alpha) \tag{3.31}$$

für die Verteilung Λ^* *von* W^*, *wobei* $d = 1$ *im stetigen und* $d = r$ *im* r*-geometrischen Fall gelte. Ferner gilt* $\mathbb{E}\, W^* < \infty$ *genau dann, wenn Bedingung* (B4) *gilt, und in diesem Fall kann* $W^* = W$ *für den kanonischen Martingallimes gewählt werden.*

Dieser Satz stellt den Höhepunkt dieses Kapitels dar, da er unter relativ allgemeinen Bedingungen eine vollständige und zufriedenstellende Beschreibung der Lösungsmenge $\mathfrak{F}_\wedge$ darstellt. Ein analoger Satz kann für $\mathfrak{F}_\Sigma$ bewiesen werden, wobei dort sogar auf die Voraussetzung der Existenz einer 1-Stelle von m verzichtet werden kann.

Der Satz kann wie folgt umformuliert werden. Unter den angegebenen Bedingungen an die Gewichtsfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ ist die Lösungsmenge eine Menge von

Mischungen geeigneter Weibullverteilungen, deren wesentlicher Index durch den charakteristischen Exponenten α gegeben wird. Die Mischungsverteilung ist die Verteilung des endogenen Fixpunkts der Summengleichung mit der Gewichtsfolge $(T_i^\alpha)_{i\geq 1}$, der existiert und bis auf Skalierung eindeutig ist. Tatsächlich kann ein endogener Fixpunkt durch $-\log \overline{\mathcal{F}}(1)$ für die Disintegration $\mathcal{F}$ einer beliebigen Lösung $F \in \mathcal{F}_\wedge$ angegeben werden. Dieser endogene Fixpunkt hängt nur von den Gewichten $(T_i)_{i\geq 1}$ ab und kodiert alle wesentlichen Informationen zur Gleichung. Er ist integrierbar und stimmt (bis auf Skalierung) mit dem Limes des kanonischen Martingals überein, wenn dieser nichtdegeneriert ist. In anderen Fällen (siehe Abschnitt A.1.2) ist er der Limes des Ableitungsmartingals.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr aufwändig und erstreckt sich über den Rest des Abschnitts.

3.3.2 Reguläre Variation der Lösungen in 0

Der Schlüssel zum Beweis von Satz 3.3.1 ist der Nachweis, dass jedes $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ in 0 (im Wesentlichen) regulär variierend vom Index α ist, wenn α wie in Satz 3.3.1 gegeben ist. Dies ist Gegenstand des folgenden Satzes, dessen Beweis aufwändig ist und sich in vier Schritte gliedert.

3.3.2 Satz. *Es gelten die Bedingungen von Satz 3.3.1, d. h., es gelten die Bedingungen* (B2+)*,* (B3+)*,* $\mathbb{E}\,N < \infty$ *und es existiere der charakteristische Exponent* $\alpha > 0$*. Dann gilt für jedes* $F \in \mathfrak{F}_\wedge$*:*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1-\overline{F}(ut)}{1-\overline{F}(t)} = u^\alpha \tag{3.32}$$

für alle $u \in \mathbb{G}(T)$*. Dabei wird der Limes* $t \downarrow 0$ *im* r*-geometrischen Fall nur in einer Nebenklasse* $sr^{\mathbb{Z}}$ *für ein* $s \in (r^{-1}, 1]$ *gebildet.*

Schritt 1: Reduktion auf den Fall $T_i < 1$ f. s. für alle $i \geq 1$

Als Erstes wird gezeigt, dass es keine Einschränkung darstellt, sich in der Situation von Satz 3.3.1 auf den Fall $T_i < 1$ f. s. für alle $i \geq 1$ zurückzuziehen. Dazu wird das Leiterlinienkonzept aus Kapitel 1 verwendet. Für $s \in (0,1]$ bezeichne im Folgenden $\mathcal{T}_s$ die Leiterlinie zum Niveau $-\log s$, d. h.,

$$\mathcal{T}_s = \{v \in \mathbb{V} : L(v) < s, L(v|k) \geq s \text{ für alle } k < |v|\}.$$

Weiter sei $\mathcal{T}^> = \mathcal{T}_1$. $(T_i^>)_{i\geq 1}$ bezeichne eine Abzählung von $(L(v))_{v\in\mathcal{T}^>}$ (vgl. Abschnitt 1.3.2). Ferner seien $N_{\mathcal{T}_s} := |\mathcal{T}_s|$ und $N^> := N_{\mathcal{T}^>}$.

3.3.3 Lemma. *Es gelten die Bedingungen von Satz 3.3.1, d. h., es gelten die Bedingungen* (B2+)*,* (B3+)*,* $\mathbb{E}\,N < \infty$ *und es gebe den charakteristischen Exponenten* $\alpha > 0$*. Dann erfüllt die Gewichtsfolge* $(T_i^>)_{i\geq 1}$ *dieselben Bedingungen, d. h.,* $N^> \geq 1$ *f. s. und* $\mathbb{E}\,N^> \in (1,\infty)$*,* $\mathbb{P}(\sup_{i\geq 1} T_i^> < 1) > 0$ *und* $m^>(\alpha) = 1$*.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\alpha > 0$ minimal mit der Eigenschaft $m(\alpha) = 1$. Daher erfüllt die Folge $T^{(\alpha)} = (T_i^\alpha)_{i\geq 1}$ nach Lemma 3.1.13 die Bedingungen (B1)-(B3). Ferner gilt $\limsup_{n\to\infty} \overline{S}_{\alpha,n} = \infty$ f. s. ebenfalls nach Lemma 3.1.13. Nach Satz 1.3.13 erfüllt $((T_i^>)^\alpha)_{i\geq 1}$ dann auch die Bedingungen (B1)-(B3), d. h., es gelten $m^>(\alpha) = 1$, $\mathbb{E}\,N^> = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{(T_i^>)^\alpha > 0\}} > 1$ und

$$\mathbb{P}(T^> \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}) = \mathbb{P}((T_i^>)^\alpha \in \{0,1\} \text{ für alle } i \geq 1) < 1.$$

Dann ist α auch der charakteristische Exponent von $(T_i^>)_{i\geq 1}$, denn $m^>$ ist streng monoton fallend und hat folglich nur eine 1-Stelle in $(0,\infty)$. Nach Lemma 3.1.18 konvergiert $L_n^* = \sup_{|v|=n} L(v)$ f. s. gegen 0, was impliziert, dass $N^> \geq 1$ f. s. gilt. Da die $T_i^>$ alle < 1 sind und $N^>$ f. s. endlich ist, gilt schließlich $\mathbb{P}(\sup_{i\geq 1} T_i^> < 1) = \mathbb{P}(\max_{i=1,\ldots,N} T_i^> < 1) = 1$. □

Nun sind alle Zutaten zusammen, die benötigt werden, um zu zeigen, dass man sich beim Beweis von Satz 3.3.2 auf den Fall $T_i < 1$ f. s. für alle $i \geq 1$ zurückziehen kann. Ist nämlich $F \in \mathfrak{F}_\wedge$, so gilt $F \in \mathfrak{F}_\wedge(T^>)$ nach Lemma 3.1.8. Lemma 3.3.3 impliziert dann, dass die Folge $(T_i^>)_{i\geq 1}$ ebenfalls die Voraussetzungen von Satz 3.3.2 erfüllt. Für den Rest dieses Abschnitts kann also o. B. d. A. angenommen werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} N \geq 1 \text{ f. s. und } \mathbb{E}\,N &\in (1,\infty); \\ T_i < 1 \text{ f. s. für alle } i &\geq 1; \\ m(\alpha) = 1 \text{ für ein } \alpha &> 0. \end{aligned}$$

Schritt 2: Das Auswahlargument

3.3.4 Lemma. *In der gegebenen Situation sei $X \sim F \in \mathfrak{F}_\wedge$. Dann gelten:*

(a) $s \mapsto F(st)/F(t)$ $(0 \leq s \leq 1)$ definiert für jedes $t > 0$ eine linksseitig stetige Verteilungsfunktion, nämlich die zur Verteilung $Q_t := \mathbb{P}(t^{-1}X \in \cdot | X < t)$ korresondierende.

(b) Für jede Folge $t \downarrow 0$ gibt es eine Teilfolge $t_n \downarrow 0$, derart dass $Q_{t_n} \stackrel{v}{\to} Q$ für eine Verteilung Q auf $[0,1]$ mit $Q([0,1)) \geq (\mathbb{E}\,N)^{-1}$.

(c) Für jedes $r > 1$, $s > 0$ und jede Folge $n \uparrow \infty$ gibt es eine Teilfolge $n_j \uparrow \infty$, so dass $\lim_{j\to\infty} F(r^{-k}sr^{-n_j})/F(sr^{-n_j}) =: g(k)$ für alle $k \geq 0$ existiert. Dabei gilt $g(0) = 1$.

Beweis von Lemma 3.3.4. Zum Nachweis von Aussage (a) ist lediglich zu prüfen, dass $\overline{F}(t) < 1$ für alle $t > 0$ gilt. Dies folgt aber nach Lemma 3.1.19 aus der Existenz des charakteristischen Exponenten.
Aus dem Auswahlsatz von Helly-Bray folgt zunächst der erste Teil von Aussage (b), nämlich die Existenz einer vag konvergenten Teilfolge $(Q_{t_n})_{n\geq 0}$. Da die Q_{t_n},

$n \geq 1$, auf die kompakte Menge $[0,1]$ konzentriert sind, gilt $1 \geq Q([0,1]) \geq \limsup_{n\to\infty} Q_{t_n}([0,1]) = 1$ nach dem Portmanteau-Theorem. Der Beweis der Abschätzung $Q([0,1)) \geq (\mathbb{E}\, N)^{-1}$ wird auf Lemma 3.3.5 verschoben.
Die Wahl der Teilfolge und der Grenzfunktion g in Aussage (c) ergibt sich durch wiederholte Anwendung des Satzes von Bolzano und Weierstraß und ein klassisches Diagonalfolgenargument. Dass $g(0) = 1$ gilt, ist trivial. □

3.3.5 Lemma. *Sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. Dann gilt*

$$\lim_{s\uparrow 1} \inf_{t\in(0,1)} \frac{F(st)}{F(t)} \geq \frac{1}{\mathbb{E}\, N}. \tag{3.33}$$

Beweis. Nach Definition von $\mathcal{T}_s$ gilt $L(v) < s$ für $v \in \mathcal{T}_s$. Da $\overline{F}$ fallend ist, folgt $\overline{F}(tL(v)) \geq \overline{F}(st)$ auf $\{v \in \mathcal{T}_s\}$. Dies impliziert

$$1 - \overline{F}(t) = 1 - \mathbb{E} \prod_{v\in\mathcal{T}_s} \overline{F}(tL(v)) \leq \mathbb{E}\left(1 - \overline{F}(st)^{N_{\mathcal{T}_s}}\right), \tag{3.34}$$

wobei Gleichung (3.18) auf die nach Lemma 3.1.18 f. s. beschränkte Stopplinie $\mathcal{T}_s$ angewandt wurde. Durch Anwendung von Ungleichung (3.34) auf den Quotienten $F(st)/F(t)$ ergibt sich

$$\frac{F(st)}{F(t)} = \frac{1 - \overline{F}(st)}{1 - \overline{F}(t)} \geq \frac{1 - \overline{F}(st)}{\mathbb{E}(1 - \overline{F}(st)^{N_{\mathcal{T}_s}})} =: f_s(\overline{F}(st))$$

mit

$$f_s : (0,1) \to (0,1), \quad x \mapsto \frac{1-x}{\mathbb{E}(1 - x^{N_{\mathcal{T}_s}})} = \left(\mathbb{E}\left[\frac{1 - x^{N_{\mathcal{T}_s}}}{1-x}\right]\right)^{-1}.$$

Der nächste Schritt ist der Nachweis der Antitonie von f_s in x. Dazu genügt es wegen der fast sicheren $\mathbb{N}$-Wertigkeit von $N_{\mathcal{T}_s}$ zu zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ $g_k : (0,1) \to (0,\infty)$, $x \mapsto (1-x^k)/(1-x)$, monoton wachsend ist. Dies ist aber klar, denn

$$g_k(x) = \frac{1-x^k}{1-x} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j \quad (x \in (0,1)).$$

Damit ist f_s fallend in x und der Satz von der monotonen Konvergenz liefert:

$$\sup_{x\in(0,1)} f_s(x) = \lim_{x\uparrow 1} f_s(x) = \left(\mathbb{E} \lim_{x\uparrow 1}\left[\frac{1 - x^{N_{\mathcal{T}_s}}}{1-x}\right]\right)^{-1} = (\mathbb{E}\, N_{\mathcal{T}_s})^{-1}.$$

Mit der naheliegenden Definition $f_s(1) := (\mathbb{E}\, N_{\mathcal{T}_s})^{-1}$ ergibt sich:

$$\inf_{t\in(0,1)} \frac{F(st)}{F(t)} \geq \inf_{t\in(0,1)} f_s(\overline{F}(st)) \geq f_s(1) = (\mathbb{E}\, N_{\mathcal{T}_s})^{-1}.$$

Nach Lemma 1.3.14(c) gilt hier $\mathbb{E}\, N_{\mathcal{T}_s} < \infty$ für jedes $s \in (0,1)$. Ferner folgt aus $T_i < 1$ f. s. für alle $i \geq 1$, dass $N_{\mathcal{T}_s} \downarrow N$ für $s \uparrow 1$ konvergiert. Also liefert der Satz von der monotonen Konvergenz:

$$\lim_{s\uparrow 1} \inf_{t\in(0,1)} \frac{1-\overline{F}(st)}{1-\overline{F}(t)} \geq \lim_{s\uparrow 1} (\mathbb{E}\, N_{\mathcal{T}_s})^{-1} = \frac{1}{\mathbb{E}\, N}$$

□

Schritt 3: Eine Anwendung der ICFE

3.3.6 Lemma. *In der gegebenen Situation sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. Dann gelten die beiden folgenden Aussagen:*

(a) Sei $\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es für jede Folge $t \downarrow 0$ eine Teilfolge $(t_n)_{n\geq 1}$ mit $t_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ und eine Konstante $c \in [(\mathbb{E}\, N)^{-1}, 1]$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\overline{F}(ut_n)}{1-\overline{F}(t_n)} = cu^\alpha \tag{3.35}$$

für alle $u \in (0,1)$ ist.

(b) Seien $\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$ für ein $r > 1$ und $s \in (r^{-1}, 1]$. Dann hat jede Folge $n \uparrow \infty$ eine Teilfolge $(n_k)_{k\geq 1}$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1-\overline{F}(usr^{-n_k})}{1-\overline{F}(sr^{-n_k})} = u^\alpha \tag{3.36}$$

für alle $u \in r^{\mathbb{Z}} \cap (0,1)$ ist.

Beweis. Sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. Zunächst wird Aussage (a) bewiesen. Es gelte also $\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$, d. h., $\mathbb{G}(\Sigma_1) = \mathbb{R}$. Weiterhin sei $t \downarrow 0$ eine gegen 0 fallende Folge reeller Zahlen und $(t_n)_{n\geq 1}$ eine Teilfolge gemäß Lemma 3.3.4, d. h., die Folge $(t_n)_{n\geq 1}$ sei so beschaffen, dass mit $Q_{t_n}(u) = F(ut_n)/F(t_n)$ $(u \in (0,1])$ $Q_{t_n} \xrightarrow{v} Q$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $[0,1]$ mit $Q([0,1)) \geq (\mathbb{E}\, N)^{-1}$ gilt. Für jedes $u \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt dann aus (3.10):

$$1 = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \frac{1-\overline{F}(ut_nT_i)}{1-\overline{F}(ut_n)} \prod_{k<i} \overline{F}(ut_nT_k) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_{t_n}(uT_i)}{Q_{t_n}(u)} \prod_{k<i} \overline{F}(ut_nT_k), \tag{3.37}$$

was nach Multiplikation mit $Q_{t_n}(u)$

$$Q_{t_n}(u) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} Q_{t_n}(uT_i) \prod_{k<i} \overline{F}(ut_nT_k) \tag{3.38}$$

liefert. Diese Formel gilt nach der obigen Argumentation für alle $u \in (0,1]$ und reduziert sich für $u = 0$ auf die triviale Gleichung $0 = 0$. Nun ist die Menge $\mathcal{C}(T)^c := \{x \in (0,1] : \mathbb{P}(T_i = x) > 0 \text{ für ein } i \geq 1\}$ ebenso abzählbar wie die Menge $\mathcal{C}(Q)^c = \{x \in [0,1] : Q(\{x\}) > 0\}$. Dies impliziert die Abzählbarkeit von

$$\mathcal{S}^c := \{x \in [0,1] : x = r/t \text{ mit } r \in \mathcal{C}(Q)^c \text{ und } t \in \mathcal{C}(T)^c\} \cup \mathcal{C}(Q)^c.$$

Insbesondere liegt $\mathcal{S}$ dicht in $(0,1]$ und ist gerade so definiert, dass für jedes $u \in \mathcal{S}$ sowohl $u \in \mathcal{C}(Q)$ als auch $uT_i \in \mathcal{C}(Q)$ f. s. für alle $i \geq 1$ gilt. Dies zusammen mit der schwachen Konvergenz $Q_{t_n} \to Q$ $(n \to \infty)$, Gleichung (3.38) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz liefert im Grenzübergang $n \to \infty$

$$Q(u) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} Q(uT_i) \tag{3.39}$$

für alle $u \in \mathcal{S}$. Ist nun $u_0 \in (0,1]$ beliebig, so liefert der Grenzübergang $u \uparrow u_0$, $u \in \mathcal{S}$, in Gleichung (3.39) zusammen mit der linksseitigen Stetigkeit von Q und dem Satz von der majorisierten Konvergenz (der Term unter dem Erwartungswert ist gegen N beschränkt), dass (3.39) auch in u_0 richtig sein muss. Also gilt (3.39) auf ganz $(0,1]$. Für $x \geq 0$ sei nun $f(x) := e^x Q(e^{-x})$. Dann ist $f \geq 0$ messbar (sogar rechtsseitig stetig mit linksseitigen Limiten) und erfüllt

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x Q(e^{-x}) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} e^x Q(e^{-x} T_i) \\ &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} T_i e^{x+S(i)} Q\left(e^{-(x+S(i))}\right) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} T_i f(x + S(i)) \\ &= \int f(x+y)\, \overline{\Sigma}_1(dy) \end{aligned}$$

für alle $x \geq 0$, wobei $\overline{\Sigma}_1 := \overline{\Sigma}_{1,1} = \mathbb{E} \sum_{i \geq 1} T_i \delta_{-\log T_i}$ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $\mathbb{G}(\overline{\Sigma}_1) = \mathbb{R}$ ist. Alles zusammengenommen impliziert Satz A.2.4 daher die Existenz einer Funktion $p \geq 0$, die periodisch modulo $\mathrm{supp}(\overline{\Sigma}_1)$ ist, und einer reellen Zahl γ mit $\int e^{\gamma y}\, \overline{\Sigma}_1(dy) = 1$, so dass

$$f(x) = p(x) e^{\gamma x} \quad \text{für } \lambda\text{-f.a. } x \geq 0 \tag{3.40}$$

gilt. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass p sogar periodisch modulo der von $\mathrm{supp}(\overline{\Sigma}_1)$ erzeugten Halbgruppe ist. Diese ist nach Lemma V.4a.2 in Feller [30, 1971] asymptotisch dicht bei ∞ (siehe Definition A.3.4 im Anhang). Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von f gilt die Gleichung (3.40) daher nach Lemma A.3.5 sogar auf ganz $[0, \infty)$ mit $p = c$ für eine geeignete Konstante $c \geq 0$. Weiter ist

$$1 = \int e^{\gamma y}\, \overline{\Sigma}_1(dy) = \mathbb{E}\left(\sum_{i \geq 1} T_i e^{\gamma S(i)}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i \geq 1} T_i^{1-\gamma}\right) = m(1-\gamma).$$

Da die T_i, $i \geq 1$, echt kleiner 1 sind, ist m streng monoton fallend. Also folgt aus $m(1-\gamma) = 1 = m(\alpha)$ bereits $\gamma = 1-\alpha$. Mit $x = -\log u$ ($u \in (0,1)$) in Gleichung (3.40) ergibt sich daher

$$\frac{Q(u)}{u} = cu^{\alpha-1},$$

also $Q(u) = cu^{\alpha}$ ($u \in (0,1)$). Aus $Q_{t_n} \xrightarrow{v} Q$ für $n \to \infty$ und der Stetigkeit von Q folgt schließlich, dass die Konvergenz in (3.35) für alle $u \in (0,1)$ stattfindet. Schließlich gilt $c = \lim_{u\uparrow 1} Q(u) \in [(\mathbb{E}\,N)^{-1}, 1]$ nach Lemma 3.3.5. Damit ist Aussage (a) bewiesen.
Zum Nachweis von Aussage (b) sei $\mathbb{G}(T) = r^{\mathbb{Z}}$ ($r > 1$). Da Gleichung (3.1) invariant unter Exponentiation mit positiven Exponenten ist, kann o. B. d. A. $r = e$ angenommen werden. Nun seien $s \in (e^{-1}, 1]$, $n \uparrow \infty$ eine beliebige gegen ∞ aufsteigende Folge natürlicher Zahlen und $(n_k)_{k\geq 1}$ eine Teilfolge gemäß Lemma 3.3.4, d. h., $(n_k)_{k\geq 1}$ sei so, dass $\lim_{k\to\infty} F(e^{-n}se^{-n_k})/F(se^{-n_k}) =: g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ existiert. Dabei ist notwendigerweise $g(0) = 1$. Analog zu Gleichung (3.37) gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} \frac{1-\overline{F}(use^{-n_k}T_i)}{1-\overline{F}(use^{-n_k})} \prod_{j<i} \overline{F}(use^{-n_k}T_j) \\
&= \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} \frac{1-\overline{F}(use^{-n_k}T_i)}{1-\overline{F}(se^{-n_k})}\,\frac{1-\overline{F}(se^{-n_k})}{1-\overline{F}(use^{-n_k})} \prod_{k<i} \overline{F}(use^{-n_k}T_k) \\
&\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} \frac{g(-\log(uT_i))}{g(-\log u)}
\end{aligned}$$

für alle $u \in e^{-\mathbb{N}_0}$. Mit $f(n) := e^n g(n)$ lässt sich dieses Ergebnis zu

$$f(n) = e^n g(n) = e^n\,\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} g(n+S(i)) = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{N} T_i f(n+S(i)) \quad (n \geq 0) \tag{3.41}$$

umformen. Nach Satz A.2.2 gilt dann

$$f(n) = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n \tag{3.42}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei $c_1, c_2 \geq 0$ sind und $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ derart, dass

$$\int \gamma_i^n\,\overline{\Sigma}_1(dn) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

gilt. Nun ist aber

$$\int \gamma_i^n\,\overline{\Sigma}_1(dn) = \mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 1} T_i\gamma_i^{S(i)}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 1} T_i^{1-\log\gamma_i}\right),$$

also $\log \gamma_i = 1 - \alpha$ für $i = 1, 2$. Gleichung (3.42) vereinfacht sich damit zu $f(n) = ce^{n(1-\alpha)}$ für eine Konstante $c \geq 0$ und alle $n \geq 0$. Wegen $f(0) = g(0) = 1$ muss $c = 1$ gelten. Insgesamt ergibt sich

$$g(n) = e^{-n} f(n) = e^{-n\alpha} \quad (n \geq 0),$$

was zu zeigen war. □

Schritt 4: Der Beweis von Satz 3.3.2

Beweis von Satz 3.3.2. Es genügt zu zeigen, dass (3.32) für alle $u \in \mathbb{G}(T) \cap (0, 1)$ gilt (für $u \in \mathbb{G}(T) \cap (1, \infty)$ kann in (3.32) der Kehrwert betrachtet werden). Ferner genügt zu zeigen, dass jede Folge $t \downarrow 0$ (wobei t aus einer festen Nebenklasse von $\mathbb{R}_{>0}$ mod $G(T)$ stamme) eine Teilfolge besitzt, so dass die Konvergenz in (3.32) entlang dieser Teilfolge gilt. Im geometrischen Fall liefert Lemma 3.3.6(b) bereits das Gewünschte. Im Fall $\mathbb{G}(T) = \mathbb{R}_{>0}$ liefert Lemma 3.3.6(a) zu einer vorgegebenen Folge $t \downarrow 0$ eine Teilfolge $(t_n)_{n \geq 1}$ und eine Konstante $c \in [(\mathbb{E}\, N)^{-1}, 1]$, so dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \overline{F}(st_n)}{1 - \overline{F}(t_n)} = cs^\alpha \tag{3.43}$$

für alle $s \in (0, 1)$ ist. Für festes $u \in (0, 1)$ lässt sich wiederum Lemma 3.3.6 auf die Folge $(u^{-1}t_n)_{n \geq 1}$ anwenden. Es liefert eine Teilfolge $(u^{-1}t_{n_k})_{k \geq 1}$ von $(u^{-1}t_n)_{n \geq 1}$, für die mit einem $c' \in [(\mathbb{E}\, N)^{-1}, 1]$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1 - \overline{F}(su^{-1}t_{n_k})}{1 - \overline{F}(u^{-1}t_{n_k})} = c's^\alpha \quad \text{für alle } s \in (0, 1) \tag{3.44}$$

gilt. Hier kann ggf. nach Ausdünnen der Folge $(t_n)_{n \geq 1}$ davon ausgegangen werden, dass $(t_n)_{n \geq 1} = (t_{n_k})_{k \geq 1}$ gilt. (3.43) und (3.44) zusammen ergeben:

$$\begin{aligned}
c'(su)^\alpha &= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \overline{F}((su)u^{-1}t_n)}{1 - \overline{F}(u^{-1}t_n)} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \overline{F}(st_n)}{1 - \overline{F}(t_n)} \frac{1 - \overline{F}(uu^{-1}t_n)}{1 - \overline{F}(u^{-1}t_n)} \\
&= cs^\alpha c'u^\alpha = cc'(su)^\alpha.
\end{aligned}$$

Wegen $c, c' > 0$ muss dann $c = 1$ gelten. □

3.3.3 Der Beweis von Satz 3.3.1

Beweis von Satz 3.3.1. Sei $F \in \mathfrak{F}_\wedge$. $\mathcal{F}$ bezeichne den zugehörigen disintegrierten Fixpunkt. (3.32) liefert dann für jedes $u \in \mathbb{G}(T)$ und $s = 1$ im stetigen Fall bzw.

$s \in (r^{-1}, 1]$ im r-geometrischen Fall:

$$\begin{aligned}
-\log \overline{\mathcal{F}}(su) &= -\log \lim_{n\to\infty} \prod_{|v|=n} \overline{F}(suL(v)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{|v|=n} (1 - \overline{F}(suL(v))) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{|v|=n} \frac{1 - \overline{F}(usL(v))}{1 - \overline{F}(sL(v))} (1 - \overline{F}(sL(v))) \\
&= u^\alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{|v|=n} (1 - \overline{F}(sL(v))) \\
&= u^\alpha (-\log \overline{\mathcal{F}}(s)) \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für festes $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}
-\log \overline{\mathcal{F}}(s) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{|v|=n+k} (1 - \overline{F}(sL(v))) \\
&= \sum_{|v|=n} \lim_{k\to\infty} \sum_{|w|=k} (1 - \overline{F}(sL(vw))) \\
&= \sum_{|v|=n} \lim_{k\to\infty} \sum_{|w|=k} \frac{1 - \overline{F}(sL(v)L_v(w))}{1 - \overline{F}(sL_v(w))} (1 - \overline{F}(sL_v(w))) \\
&= \sum_{|v|=n} \lim_{k\to\infty} \sum_{|w|=k} L(v)^\alpha (1 - \overline{F}(sL_v(w))) \\
&= \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha [-\log \overline{\mathcal{F}}(s)]_v \quad \mathbb{P}\text{-f. s.},
\end{aligned}$$

wobei man beachte, dass die $\{|v| = n\}$ wegen $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ f. s. endlich ist. Dabei kann nicht $-\log \overline{\mathcal{F}}(s) = 0$ f. s. gelten, denn $\mathbb{E}\,\overline{\mathcal{F}}(s) = \overline{F}(s) < 1$ nach Lemma 3.1.19. Also bildet $-\log \overline{\mathcal{F}}(s)$ einen endogenen Fixpunkt der Fixpunktgleichung (3.2) mit den Gewichten T_i^α, $i \geq 1$. Sei $W^* = -\log \overline{\mathcal{F}}(1)$. Dann ist Gleichung (3.30) im stetigen Fall bewiesen. Im r-geometrischen Fall kommt Satz 3.2.19 ins Spiel. Dieser Satz liefert nämlich in der gegebenen Situation für jedes $s \in (r^{-1}, 1]$ die Existenz einer Konstante $h(s) > 0$, so dass $-\log \overline{\mathcal{F}}(s) = h(s)s^\alpha W^*$ f. s. gilt. Zusammen mit $-\log \overline{\mathcal{F}}(su) = u^\alpha(-\log \overline{\mathcal{F}}(s))$ f. s. für $u \in \mathbb{G}(T)$ und $s \in (r^{-1}, 1]$ folgt auch im r-geometrischen die behauptete Darstellung (3.30), wobei die Funktion h auf $(0, \infty)$ multplikativ periodisch fortgesetzt werde. Um $h \in \mathfrak{H}(r, \alpha)$ einzusehen, fehlt noch der Nachweis der Monotonie und linksseitigen Stetigkeit von $t \mapsto h(t)t^\alpha$. Beides ergibt sich sofort durch Integration von (3.30), Lemma 3.1.5 und der anschließenden Verwendung der linksseitigen Stetigkeit und Antitonie von $\overline{F}$.

Die Tatsache, dass W^* unabhängig von der Wahl von $\overline{F}$ gewählt werden kann, ergibt sich aus der f. s. Eindeutigkeit des endogenen Fixpunktes (bis auf Skalierung) und der Skalierungsinvarianz von $(0,\infty)$ (im stetigen Fall) bzw. $\mathfrak{H}_(r,\alpha)$ (im r-periodischen Fall). $\mathfrak{W}_{\Lambda^*}(d,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}_\wedge$ ergibt sich aus Lemma 3.1.16. Die umgekehrte Inklusion ist ebenfalls richtig, da jedes $F \in \mathfrak{F}_\wedge$ eine Disintegration wie in Gleichung (3.30) besitzt, was nach Integration $F \in \mathfrak{W}_{\Lambda^*}(d,\alpha)$ liefert.
Schließlich muss gezeigt werden, dass $\mathbb{E}\,W^* < \infty$ genau dann gilt, wenn (B4) erfüllt ist. Ist nun (B4) erfüllt, so ist der kanonische Martingallimes W ein endogener Fixpunkt. Die Eindeutigkeit endogener Fixpunkte bis auf Skalierung liefert dann $W^* = cW$ für ein $c > 0$ und damit die Integrierbarkeit von W^*. Ist umgekehrt W^* integrierbar, so gilt $\mathfrak{W}_{\Lambda^*}(d,\alpha) \subseteq \mathfrak{F}^\alpha_{\wedge,\mathrm{e}}$, was nach Satz 3.2.3 (B4) impliziert. Dass in diesem Fall $W^* = W$ angenommen werden kann, liegt wiederum an der Eindeutigkeit der endogenen Fixpunkte bis auf Skalierung und der Skalierungsinvarianz von $\mathfrak{F}_\wedge$. $\square$

Kapitel 4

Rekurrenz und Transienz verzweigender Random-Walks

Die in Kapitel 1 hergeleiteten Ergebnisse können dazu verwendet werden, *verzweigende Random-Walks* in Bezug auf Rekurrenz und Transienz zu untersuchen. Im Folgenden wird zunächst eine informelle Beschreibung des verzweigenden Random-Walks gegeben, bevor dann die Modellierung mittels des in Kapitel 1 beschriebenen gewichteten Verzweigungsmodells vorgenommen wird. Darauf folgen die Formulierung und die Herleitung von Charakterisierungsresultaten für die Transienz und Rekurrenz des verzweigenden Random-Walks.

Gegeben sei ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt 0 im Ursprung aufhält. Das Teilchen, das auch als *Urahn* bezeichnet wird, teile sich gemäß einer vorgelegten Reproduktionsverteilung $(p_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{N}_0$ mit $p_0 = 0$ in eine zufällige Anzahl von (direkten) Nachkommen, die sich unabhängig voneinander und unabhängig vom Reproduktionsmechanismus gemäß einer Verteilung Q auf $\mathbb{R}$ bewegen. Die direkten Nachkommen des Urahns heißen *Individuen* oder *Teilchen der ersten Generation.* In ihren neuen Standorten verfahren die Teilchen der ersten Generation nun genauso wie der Urahn und unabhängig voneinander: sie teilen sich gemäß der Verteilung $(p_n)_{n\geq 0}$; die neuerlichen Teilungen finden dabei unabhängig von allen bisher beschriebenen Vorgängen statt. Die entstehenden Teilchen der zweiten Generation bewegen sich wiederum gemäß der Verteilung Q sowie unabhängig voneinander und unabhängig von allem, was zuvor geschah. Setzt man den beschriebenen Spaltungs- und Bewegungsmechanismus ad infinitum fort, so erhält man einen *verzweigenden Random-Walk.* Dieser Prozess wird im Folgenden auf Rekurrenz und Transienz untersucht, d. h., es wird geprüft, unter welchen Voraussetzungen an $(p_n)_{n\geq 0}$ und Q Intervalle endlicher Länge unendlich oft oder nur endlich viele Male aufgesucht werden. Diese Fragestellung ist offenbar nur dann interessant, wenn der Standard-Random-Walk mit Zuwachsverteilung Q transient ist. Setzt man zum Beispiel voraus, dass Q einen endlichen positiven Erwartungswert besitzt, so bewegt sich jedes einzelne Teilchen nach dem starken Gesetz der großen Zahlen im Wesentlichen mit linearer Geschwindigkeit nach

$+\infty$. Es stellt sich die Frage, wann die Verzweigungsrate so groß ist, dass trotz der mittleren Tendenz der Teilchen, nach rechts zu wandern, genügend Teilchen vorhanden sind, die sich atypisch verhalten, so dass jedes kompakte Intervall (das erreichbar ist) unendlich oft aufgesucht wird. Die Antwort auf diese Frage gibt Satz 4.2.4.

Die Frage nach Transienz- und Rekurrenzkriterien für verschiedene Varianten verzweigender Irrfahrten, wobei der Begriff *Irrfahrt* hier auf Markov'sche Übergangsmechanismen hindeutet, findet sich auch in der jüngeren Literatur. Es seien hier nur die Arbeiten von Benjamini und Peres [12, 1994], Menshikov und Volkov [49, 1997], Comets u. a. [25, 1998], Machado und Popov [48, 2000], Machado u. a. [47, 2001] und Gantert und Müller [31, 2006] erwähnt. Dabei ist anzumerken, dass die zitierten Arbeiten sowohl hinsichtlich der Übergangswahrscheinlichkeiten allgemeiner sind als auch zum Teil noch zufällig variierende Umgebungen zulassen. Andererseits beschäftigen sich die zitierten Arbeiten nur mit abzählbaren Zustandsräumen, während der Zustandsraum hier $\mathbb{R}$ ist.

4.1 Modellierung und Definitionen

Es folgt nun die Modellierung des oben beschriebenen Prozesses im Rahmen der in Kapitel 1 bereitgestellten Mittel sowie danach die Präzisierung der Begriffe Rekurrenz und Transienz für den verzweigenden Random-Walk. Der verzweigende Random-Walk dieses Kapitels stellt einen Spezialfall des in Beispiel 1.1.2 beschriebenen BRW dar, nämlich den Spezialfall, in dem der dort auftretende Punktprozess $\mathcal{Z}$ eine endliche Familie u. i. v. Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_N$ generiert, wobei N selbst wiederum zufällig sein darf und von den X_i unabhängig ist. Dies soll im Folgenden noch einmal ausführlich dargelegt werden: Zunächst sei eine Folge $X = (X_i)_{i\geq 1}$ unabhängiger und reellwertiger Zufallsgrößen mit Verteilung Q gegeben. Darüber hinaus sei N eine von X unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgröße mit Verteilung $(p_n)_{n\geq 0}$. $(p_n)_{n\geq 0}$ heißt auch Reproduktionsverteilung. $T := (T_i)_{i\geq 1}$ sei durch $T_i := \mathbb{1}_{\{i\leq N\}}\, e^{-X_i}$, $i \geq 1$, gegeben. Nun seien $(X(v))_{v\in\mathbb{V}}$ und $(N(v))_{v\in\mathbb{V}}$ voneinander unabhängige Familien unabhängiger Kopien von X bzw. N. Für jedes $v \in \mathbb{V}$ sei $T_i(v)$ in Analogie zur Definition von T_i als $T_i(v) := \mathbb{1}_{\{i\leq N(v)\}}\, e^{-X_i(v)}$ definiert ($i \geq 1$). Die Familie $(T(v)\otimes X(v))_{v\in\mathbb{V}}$ mit $T(v)\otimes X(v) = ((T_i(v), X_i(v)))_{i\geq 1}$ bildet dann wie in Abschnitt 1.1.2 eine Familie von unabhängigen Kopien von $T \otimes X = ((T_i, X_i))_{i\geq 1}$. Um den Notationsaufwand gering zu halten, kann gleich $T \otimes X = T(\varnothing) \otimes X(\varnothing)$ und $N = N(\varnothing)$ angenommen werden. Der oben beschriebene verzweigende Random-Walk wird nun durch die Folge $\mathbf{B}_n := ((S(v))_{|v|=n, L(v)>0})_{n\geq 0}$ repräsentiert, wobei $L(v)$ und $S(v)$ gemäß (1.4) bzw. (1.5) definiert seien ($v \in \mathbb{V}$). Der zugrunde liegende Verzweigungsprozess ist durch die Folge $(N_n)_{n\geq 0}$ mit $N_n := \sum_{|v|=n} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}$ ($n \geq 0$) gegeben. $(N_n)_{n\geq 0}$ bildet einen Galton-Watson-Prozess mit Reproduktionsverteilung $(p_n)_{n\geq 0}$.

Zur Formulierung der Begriffe Rekurrenz und Transienz wird auf die zufälligen gewichteten Punktmaße von verwandten gewichteten Verzweigungsmodellen zurückgegriffen, nämlich auf die der Familien $(T^{(\alpha)}(v) \otimes X(v))_{v\in\mathbb{V}}$ mit $T^{(\alpha)}(v) = (T_1(v)^\alpha, T_2(v)^\alpha, \ldots)$ $(v \in \mathbb{V},\ \alpha \geq 0)$ (wobei hier $T_i(v)^0 := \mathbb{1}_{\{T_i(v)>0\}}$ sei):

$$\Sigma_{\alpha,n} := \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \delta_{S(v)}, \quad n \geq 0. \tag{4.1}$$

Ebenso wird auf die korrespondierenden zufälligen gewichteten Erneuerungsmaße

$$\mathcal{U}^{(\alpha)} := \sum_{n\geq 0} \Sigma_{\alpha,n} = \sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)^\alpha \delta_{S(v)} \tag{4.2}$$

zurückgegriffen. $\mathcal{U}^{(0)}(I)$ gibt an, wie oft der Prozess $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ das Intervall I aufsucht. Bezeichnet $\mathbb{G}$ die kleinste abgeschlossene additive Untergruppe von $\mathbb{R}$, die vom Träger von Q erzeugt wird, so gilt offenbar $\mathcal{U}^{(0)}(I) = 0$ f. s. für alle $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $I \cap \mathbb{G} = \emptyset$.

4.1.1 Definition. In der oben beschriebenen Situation heißt ein Zustand $x \in \mathbb{R}$ *rekurrent* für $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$, falls $\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty$ f. s. für jedes offene Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in I$ gilt. Ein Zustand $x \in \mathbb{R}$ heißt *transient* für den Prozess, falls es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathcal{U}^{(0)}(I) < \infty$ f. s. ist.

Der verzweigende Random-Walk heißt *rekurrent*, falls jedes $x \in \mathbb{G}$ rekurrent für $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ ist. $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ heißt *transient*, falls jedes $x \in \mathbb{R}$ transient ist.

Es stellt sich die Frage, ob jeder verzweigende Random-Walk entweder rekurrent oder transient ist. Dies ist nicht der Fall, wie sich mit Satz 4.2.3 herausstellt.

Ist $Q = \delta_0$, so ist $\mathbb{G} = \{0\}$. Insbesondere reduziert sich die Frage nach der Rekurrenz von $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ dann auf die Frage, wann der zugrunde liegende Galton-Watson-Prozess $(N_n)_{n\geq 0}$ ausstirbt. Dieser Fall wird fürderhin ausgeschlossen, d. h., es wird

$$Q \neq \delta_0 \tag{Q1}$$

vorausgesetzt. Darüber hinaus wird im Folgenden stets die Annahme

$$p_0 = 0 \quad \text{und} \quad p_1 < 1 \tag{N1}$$

getroffen, um auszuschließen, dass der zugrunde liegende Galton-Watson-Prozess mit positiver Wahrscheinlichkeit ausstirbt, und um zu verhindern, dass es sich bei dem verzweigenden Random-Walk um einen gewöhnlichen Random-Walk (ohne Verzweigung) handelt. Insbesondere gilt damit $m := \sum_{n\geq 1} np_n = \mathbb{E}\, N > 1$.

Ein wichtiges Werkzeug zur Charakterisierung von Transienz und Rekurrenz des verzweigenden Random-Walks stellt die analytische Transformierte Φ von Q dar. $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ist definiert durch

$$\Phi(t) := \int e^{tx}\, Q(dx), \quad t \in \mathbb{R},$$

und $\mathfrak{D}(\Phi) := \{\Phi < \infty\} = \{t \in \mathbb{R} : \Phi(t) < \infty\}$ bezeichnet den kanonischen Definitionsbereich von Φ.

4.2 Resultate

Die Untersuchung des verzweigenden Random-Walks $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ fördert zwei grundsätzlich verschiedene Situationen zu Tage. Wie im Anschluss an Definition 4.1.1 angedeutet, liegt im Allgemeinen keine Rekurrenz-Transienz-Dichotomie vor. Die Ursache dafür liegt in einer Besonderheit, die im Fall einer einseitigen Bewegung auftreten kann, nicht jedoch im echt zweiseitigen Fall. Die folgende Definition präzisiert die Begriffe *einseitig* und *echt zweiseitig*:

4.2.1 Definition. Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung Q auf $\mathbb{R}$ heißt *echt zweiseitig*, falls $Q((-\infty,0)) \wedge Q((0,\infty)) > 0$ gilt. Anderenfalls heißt Q *einseitig*, d. h., falls $Q((-\infty,0]) \vee Q([0,\infty)) = 1$ ist.

Im echt zweiseitigen Fall liegt eine Rekurrenz-Transienz-Dichotomie vor:

4.2.2 Satz. *Q sei eine echt zweiseitige Verteilung auf $\mathbb{R}$. Dann ist $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ entweder rekurrent oder transient.*

Im einseitigen Fall liegt keine Rekurrenz-Transienz-Dichotomie vor. Insbesondere ist $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ im einseitigen Fall nicht automatisch transient, was man auf den ersten Blick vermuten könnte. Das Phänomen, das im einseitigen Fall auftreten kann und im Fall seines Auftretens die Transienz verhindert, ist eine superkritische Anzahl von Teilchen der ersten Generation, die in 0 verharren. Die Details dazu finden sich im Beweis des folgenden Satzes (siehe Seite 138).

4.2.3 Satz. *Q sei auf eine Halbachse konzentriert, d. h., es gelte $Q((-\infty,0]) \vee Q([0,\infty)) = 1$. Dann gilt $\inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t) = Q(\{0\})$ und $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$. Ist nun $m > Q(\{0\})^{-1}$, so ist $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ weder rekurrent noch transient.*

Der folgende Satz liefert eine erschöpfende Charakterisierung der Rekurrenz des verzweigenden Random-Walks unter der Bedingung eines existierenden und nichtverschwindenden ersten Moments

$$\mu(Q) := \int x\, Q(dx) \neq 0$$

von Q im zweiseitigen Fall:

4.2.4 Satz. *Q sei eine echt zweiseitige Verteilung mit endlichem ersten Moment $\mu(Q) \neq 0$. Dann ist $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ genau dann rekurrent, wenn*

$$m > \left(\inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t)\right)^{-1} \tag{4.3}$$

gilt. Anderenfalls ist $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ transient.

4.3 Die Beweise der Sätze aus Abschnitt 4.2

4.3.1 Definition. Sei Q eine Verteilung auf $\mathbb{R}$. Dann wird der *Träger von Q* (d. h. die kleinste abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $Q(A) = 1$) mit $\mathrm{supp}(Q)$ bezeichnet.

4.3.2 Lemma. *Ist Q eine echt zweiseitige Verteilung auf $\mathbb{R}$, so ist der zugehörige Standard-Random-Walk $(S_n)_{n\geq 0}$* topologisch irreduzibel, *d. h., für alle $x \in \mathbb{G}$ und $\varepsilon > 0$ gilt:*

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0. \tag{4.4}$$

Beweis. Seien $A_n = \mathrm{supp}(Q^{*(n)})$ der Träger von $Q^{*(n)} = \mathbb{P}(S_n \in \cdot)$ und $A := A_1$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt nach Definition von A_n:

$$x \in A_n \Longleftrightarrow \mathbb{P}(S_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) > 0 \quad \text{f. a. } \varepsilon > 0. \tag{4.5}$$

Nach Lemma V.4a.2(a) in Feller [30, 1971] gilt dann $\bigcup_{n\geq 1} A_n = d\,\mathbb{Z}$ im d-arithmetischen Fall, während $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ im nichtarithmetischen Fall dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Im d-arithmetischen Fall folgt die Behauptung direkt, im nichtarithmetischen Fall aus der Tatsache, dass die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die (4.4) für alle $\varepsilon > 0$ erfüllen, abgeschlossen ist. □

Einen wichtigen Schritt auf dem Weg zum Beweis von Satz 4.2.2 stellen das folgende Lemma und das sich daraus ergebende Korollar 4.3.4 dar, in deren Anschluss direkt zum Beweis von Satz 4.2.2 übergegangen wird:

4.3.3 Lemma. *Q sei echt zweiseitig. $I, J \subseteq \mathbb{R}$ seien zwei Intervalle endlicher Länge mit $I \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$ und $J \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\{\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty\} = \{\mathcal{U}^{(0)}(J) = \infty\} \quad \textit{f. s.},$$

d. h., die symmetrische Differenz der beiden Mengen ist eine $\mathbb{P}$-Nullmenge.

4.3.4 Korollar. *Ist Q eine echt zweiseitige Verteilung auf $\mathbb{R}$, so sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty$ f. s. für ein Intervall I endlicher Länge.

(ii) $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ ist rekurrent.

Beweis. Die Implikation (ii)⇒(i) gilt trivialerweise. Ist umgekehrt $\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty$ f. s. für ein Intervall I endlicher Länge, so gilt $\mathcal{U}^{(0)}(J) = \infty$ f. s. für jedes Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit $J \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$ nach Lemma 4.3.3. Dies ist jedoch genau die behauptete Rekurrenz des Prozesses $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$. □

Beweis von Lemma 4.3.3. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle endlicher Länge mit $I \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$ und $J \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{U}^{(0)}(J) = \infty$ f. s. auf der Menge $\{\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty\}$ gilt. Um den Beweis dafür möglichst anschaulich zu gestalten, wird nun nach dem Typ der von Q erzeugten Gruppe $\mathbb{G}$ unterschieden.

1. Fall: $\mathbb{G} = d\,\mathbb{Z}$ für ein $d > 0$.
Hier kann o. B. d. A. $d = 1$ angenommen werden. Es genügt dann zu zeigen, dass $\mathcal{U}^{(0)}(\{n\}) = \infty$ f. s. auf $\{\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty\}$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist, da J ein solches n enthält. Sei also $n \in \mathbb{Z}$ beliebig und seien $i_1, \ldots, i_k$ genau die Elemente von $I \cap \mathbb{Z}$. Dann gilt $\mathcal{U}^{(0)}(\{i_1, \ldots, i_k\}) = \infty$ f. s. Nach (4.4) gibt es für jedes $j = 1, \ldots, k$ ein $n_j \geq 1$ mit $\mathbb{P}(S_{n_j} = n - i_j) > 0$. Sei $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p &:= \min_{j=1,\ldots,k} \mathbb{P}(S_r + i_j = n \text{ für ein } r \in \{1, \ldots, m\}) \\ &\geq \min_{j=1,\ldots,k} \mathbb{P}(S_{n_j} = n - i_j) > 0. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\nu_i := \begin{cases} \inf_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathbb{V} : S(v) \in I \cap \mathbb{Z}\}, & \text{falls } i = 1 \text{ ist, und} \\ \inf_{\prec_{\mathbb{V}}}\{|v| > |\nu_{i-1}| + m : S(v) \in I \cap \mathbb{Z}\}, & \text{falls } i > 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Jedes ν_i ist auf $\{\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty\}$ f. s. endlich, da dort wegen der lokalen Endlichkeit des zugrunde liegenden Galton-Watson-Baums oberhalb jeder Generation noch Individuen die Menge I besuchen müssen. Des Weiteren ist jedes ν_i und auch jedes $\nu_i \mathbf{1}_j$ (mit $\mathbf{1}_j = 1 \ldots 1$ (j-mal)) nach Lemma 1.2.2 eine $\mathbb{V}$-wertige Stoppzeit und $\nu_i \mathbf{1}_j \preceq_{\mathbb{V}} \nu_{i+1}$ für jedes $i \geq 1$ und $j = 1, \ldots, m$; also ist $S(\nu_i \mathbf{1}_j)$ insbesondere $\mathcal{A}_{|\nu_l|}$-messbar für $i < l$ und $j = 1, \ldots, m$. Damit folgt wiederum nach Lemma 1.2.2:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty, S(\nu_i \mathbf{1}_j) \neq n \text{ f. a. } 1 \leq i \leq l \text{ und } 1 \leq j \leq m) \\ &\quad \leq \mathbb{P}(\nu_l < \infty, S(\nu_i \mathbf{1}_j) \neq n \text{ f. a. } 1 \leq i \leq l \text{ und } 1 \leq j \leq m) \\ &\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(\nu_l < \infty, S(\nu_i \mathbf{1}_j) \neq n \text{ f. a. } 1 \leq i \leq l \text{ und } 1 \leq j \leq m \mid \mathcal{A}_{|\nu_l|})\right] \\ &\quad = \mathbb{E}\Big[\, \mathbb{1}_{\{\nu_l < \infty, S(\nu_i \mathbf{1}_j) \neq n \text{ f. a. } 1 \leq i \leq l-1 \text{ und } 1 \leq j \leq m\}} \\ &\qquad\qquad \cdot \mathbb{P}(S(\nu_l \mathbf{1}_j) \neq n \text{ f. a. } 1 \leq j \leq m \mid \mathcal{A}_{|\nu_l|})\Big] \\ &\quad \leq (1-p)\, \mathbb{P}(\nu_{l-1} < \infty, S(\nu_i \mathbf{1}_j) \neq n \text{ f. a. } 1 \leq i \leq l-1, 1 \leq j \leq m) \\ &\quad \leq \ldots \leq (1-p)^l. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $l \to \infty$ liefert $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty, S(v) \neq n \text{ f. a. } v \in \mathbb{V}) = 0$, d. h., n wird auf $\{\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty\}$ f. s. mindestens einmal aufgesucht. Setzt man $\nu(n) := \inf_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathbb{V} : S(v) = n\}$, so kann man das obige Argument unter Benutzung der starken Markoveigenschaft auf $\{|v| > \nu(n)\}$ wiederholen und erhält, dass n auf $\{\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty\}$ f. s. mindestens zweimal aufgesucht wird usw. Insgesamt erhält man

$$\mathbb{P}(\{\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty\} \cap \{\mathcal{U}^{(0)}(\{n\}) < \infty\}) = 0$$

wie behauptet.

2. Fall: $\mathbb{G} = \mathbb{R}$.

In diesem Fall lässt sich der Beweis bis auf einige Änderungen analog zum Beweis im ersten Fall führen und wird daher nur skizzenhaft ausgeführt. Sei $I = (a, b)$ mit $a < b$ und sei J ein offenes Intervall endlicher Länge, etwa $J = (t-2\varepsilon, t+2\varepsilon)$, wobei o. B. d. A. davon ausgegangen werden kann, dass $\varepsilon = (b-a)/(k+1)$ für ein $k \geq 1$ ist. Seien nun $t_i = a + i\varepsilon$, $0 \leq i \leq k$, insbesondere sind dann $t_0 = a$ und $t_{k+1} = b$ und $I = \bigcup_{i=1}^{k}(t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon)$. Nach (4.4) gibt es natürliche Zahlen $n_1, \ldots, n_k$, so dass $\mathbb{P}(S_{n_i} \in (t - t_i - \varepsilon, t - t_i + \varepsilon)) > 0$ für $i = 1, \ldots, k$ gilt. Analog zum arithmetischen Fall gilt (mit $m := \max\{n_1, \ldots, n_k\}$):

$$\begin{aligned} p &:= \inf_{s \in I} \mathbb{P}(S_r + s \in (t - 2\varepsilon, t + 2\varepsilon) \text{ für ein } r \in \{1, \ldots, m\}) \\ &\geq \min_{i=1,\ldots,k} \mathbb{P}(S_{n_i} \in (t - t_i - \varepsilon, t - t_i + \varepsilon)) > 0. \end{aligned}$$

Mit dem so definierten p kann man wie im arithmetischen Fall weiterschließen und erhält das entsprechende Ergebnis. □

Beweis von Satz 4.2.2. Nach Lemma 4.3.3 haben die Ereignisse $\{\mathcal{U}^{(0)}(I) < \infty\}$ für alle Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ endlicher Länge mit $I \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$ dieselbe Wahrscheinlichkeit p unter $\mathbb{P}$. Daher gilt für jedes solche I:

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}(I) < \infty) = \mathbb{P}([\mathcal{U}^{(0)}]_i(t - X_i) < \infty \text{ für jedes } i \leq N_1) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}([\mathcal{U}^{(0)}]_i(I - X_i) < \infty \text{ für jedes } i \leq n, N_1 = n) \\ &= \sum_{n \geq 1} p_n \, \mathbb{P}([\mathcal{U}^{(0)}]_i(I - X_i) < \infty \text{ für jedes } i \leq n) \\ &= \sum_{n \geq 1} p_n \, \mathbb{P}([\mathcal{U}^{(0)}]_1(I - X_1) < \infty)^n \\ &= \sum_{n \geq 1} p_n \left(\int \mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}(I - x) < \infty) \; \mathbb{P}^{X_1}(dx) \right)^n \\ &= \sum_{n \geq 1} p_n p^n, \end{aligned}$$

wobei die Unabhängigkeit von N_1 und $([\mathcal{U}^{(0)}]_i, X_i)_{i \geq 1}$ sowie die Unabhängigkeit der Familien $([\mathcal{U}^{(0)}]_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ausgenutzt wurden. Sei nun f die erzeugende Funktion von N_1, d. h., $f(s) = \mathbb{E}\, s^{N_1} = \sum_{n \geq 1} p_n s^n$ $(s \in [0, 1])$. Wegen $p_0 = 0$ ist $f(s) \leq s$ auf $[0, 1]$ und $\{0, 1\}$ sind genau die Fixpunkte von f auf $[0, 1]$. Insbesondere gilt $p = f(p) \in \{0, 1\}$, was zu zeigen war. □

Um Satz 4.2.4, nämlich die Charakterisierung der Rekurrenz von $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ unter Annahme der Existenz des Erwartungswerts $\mu(Q) > 0$ von Q, zu beweisen, wird noch ein Hilfsresultat benötigt, das die Lücke zwischen unendlich vielen Besuchen von $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ auf der negativen Halbachse und der Rekurrenz des Prozesses schließt. Im Anschluss an den Beweis des Lemmas wird direkt zum Beweis von Satz 4.2.4 übergegangen.

4.3.5 Lemma. *Q sei eine echt zweiseitige Verteilung mit endlichem und positivem ersten Moment $\mu(Q) > 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}((-\infty, 0]) = \infty) > 0$.

(ii) $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ *ist rekurrent.*

Beweis. Die Implikation (ii)⇒(i) ist trivialerweise wahr. Daher genügt es, den Beweis der Implikation (i)⇒(ii) zu führen. Es gelte also $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}((-\infty, 0]) = \infty) > 0$. Nach Satz 4.2.2 genügt es, $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}(I) = \infty) > 0$ für ein Intervall I endlicher Länge zu zeigen. Dazu seien $(S_n)_{n\geq 0}$ ein Standard-Random-Walk mit Zuwachsverteilung Q, $\sigma(t)$ die zugehörige Erstaustrittszeit des Intervalls $(-\infty, t]$ und $R_t := S_{\sigma(t)} - t$ der Exzess ($t \geq 0$). Da $\mu(Q)$ existiert und positiv ist, ist $\sigma(t)$ für jedes $t \geq 0$ f. s. endlich und der Exzess konvergiert für $t \to \infty$ in Verteilung gegen die stationäre Erneuerungsverteilung $\xi^>$ des Leiterhöhenprozesses $(S_n^>)_{n\geq 0}$ (mit $S_1^> := S_{\sigma(0)}$) von $(S_n)_{n\geq 0}$:

$$\mathbb{P}(R_t \in \cdot) \xrightarrow{d} \xi^> = \frac{1}{\mathbb{E}\, S_1^>} \mathbb{P}(S_1^> > x)\, \omega_{\mathbb{G}}(dx) \quad (t \to \infty, t \in \mathbb{G}), \tag{4.6}$$

wobei $\omega_{\mathbb{G}}$ das normierte Haar'sche Maß auf $\mathbb{G}$ bezeichne, d. h., $\omega_{\mathbb{Z}}$ ist das Zählmaß auf $\mathbb{Z}$ (wobei wieder o. B. d. A. $d = 1$ für die Gitterkonstante d im arithmetischen Fall angenommen wird) und $\omega_{\mathbb{R}}$ ist das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. Nach (4.6) und wegen $S_1^> > 0$ f. s. gibt es ein $c > 1$ und ein $t_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$p := \inf_{t\in\mathbb{G}:t\geq t_0} \mathbb{P}(R_t \leq c) \geq \frac{1}{2}\xi^>([0, c]) > 0 \tag{4.7}$$

ist. Nun lässt sich auf $\{\mathcal{U}^{(0)}((-\infty, 0]) = \infty\}$ f. s. eine bzgl. $\prec_{\mathbb{V}}$ aufsteigende Folge zufälliger Knoten $(\nu_n^*)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{V}$ mit $S(\nu_n^*) \in [t_0, t_0+c]$ wie folgt konstruieren: Seien $v^0(1) := \nu_0(1) := \varnothing$ sowie für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} v^k(1) &:= \inf\nolimits_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathbb{V} : |v| > |\nu_{k-1}(1)|, S(v) \leq 0\} \quad \text{und} \\ \nu_k(1) &:= \inf\nolimits_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathbb{V} : S(v) > t_0 \text{ und } v = v^k(1)\mathbf{1}_j \text{ für ein } j \geq 1\}, \end{aligned}$$

wobei hier wie gehabt $\mathbf{1}_j = 1\ldots 1$ (j-mal) sei. Weiter seien

$$\begin{aligned} \tau(1) &:= \inf\{k \geq 1 : S(\nu_k(1)) \in [t_0, t_0 + c]\} \quad \text{und} \\ \nu_1^* &:= \nu_{\tau(1)}. \end{aligned}$$

Des Weiteren seien $v^0(n) := \nu_0(n) := \nu^*_{n-1}$ und

$$\begin{aligned} v^k(n) &:= \inf\nolimits_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathbb{V} : |v| > |\nu_{k-1}(n)|, S(v) \leq 0\} \quad \text{und} \\ \nu_k(n) &:= \inf\nolimits_{\prec_{\mathbb{V}}}\{v \in \mathbb{V} : S(v) > t_0 \text{ und } v = v^k(n)\mathbf{1}_j \text{ für ein } j \geq 1\} \end{aligned}$$

für $n > 1$. Analog zur Definition von $\tau(1)$ und ν^*_1 seien

$$\begin{aligned} \tau(n) &:= \inf\{k \geq 1 : S(\nu_k(n)) \in [t_0, t_0 + c]\} \quad \text{und} \\ \nu^*_n &:= \nu_{\tau(n)}. \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass alle auftretenden ($\mathbb{V}$-wertigen) Stoppzeiten auf $\{\mathcal{U}^{(0)} = \infty\}$ f. s. endlich sind. Dies wird per Induktion nach n bewiesen. $v^0(1) := \nu_0(1)$ sind offensichtlich endlich. Sind $v^{k-1}(1)$ und $\nu_{k-1}(1)$ für festes $k \geq 1$ auf $\{\mathcal{U}^{(0)} = \infty\}$ f. s. endlich, so gilt dasselbe für $v^k(1)$, da die lokale Endlichkeit des zugrunde liegenden Galton-Watson Baums impliziert, dass auf $\{\mathcal{U}^{(0)} = \infty\}$ oberhalb der $\nu_{k-1}(1)$-ten Generation noch Individuen die negative Halbachse aufsuchen. Dann ist aber auch $\nu_k(1)$ auf $\{\mathcal{U}^{(0)} = \infty\}$ f. s. endlich, da $S(v^k(1)\mathbf{1}_j)$ wegen $\mu(Q) > 0$ nach dem starken Gesetz der großen Zahlen für $j \to \infty$ f. s. gegen ∞ konvergiert. Daher gilt für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau(1) > m, \mathcal{U}^{(0)} = \infty) &\leq \mathbb{P}(S(\nu_k(1)) > t_0 + c \text{ für } k = 1, \ldots, m, v^m(1) < \infty) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(S(\nu_k(1)) > t_0 + c \text{ für } k = 1, \ldots, m, v^m(1) < \infty \,|\, \mathcal{A}_{|v^m(1)|})\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{S(\nu_k(1)) > t_0 + c, 1 \leq k < m, v^m(1) < \infty\}}\, \mathbb{P}(S(\nu_m(1)) > t_0 + c \,|\, \mathcal{A}_{|v^m(1)|})\right], \end{aligned}$$

wobei hier Lemma 1.2.2(b) für den Nachweis der $\mathcal{A}_{|v^m(1)|}$-Messbarkeit der Indikatorfunktion herangezogen werden kann. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(S(\nu_m(1)) > t_0 + c \,|\, \mathcal{A}_{|v^m(1)|}) \\ &\qquad = \mathbb{P}(S(\nu_m(1)) - S(v^m(1)) - (t_0 - S(v^m(1))) > c \,|\, \mathcal{A}_{|v^m(1)|}) \\ &\qquad = \int \mathbb{P}(R_{t_0 - s} > c)\ \mathbb{P}^{S(v^m(1))}(ds) \\ &\qquad \leq 1 - p, \end{aligned}$$

wobei $S(v^m(1)) \leq 0$ f. s. und (4.7) ausgenutzt wurden. Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau(1) > m, v^m(1) < \infty) &\leq (1 - p)\, \mathbb{P}(\tau(1) > m - 1, v^{m-1}(1) < \infty) \\ &\leq \ldots \leq (1 - p)^m \end{aligned}$$

und folglich $\mathbb{P}(\tau(1) > m, \mathcal{U}^{(0)} = \infty) \leq (1 - p)^m$. Da $m \geq 1$ beliebig war, folgt die f. s. Endlichkeit von $\tau(1)$ auf $\{\mathcal{U}^{(0)} = \infty\}$ und damit auch die f. s. Endlichkeit von ν^*_1 auf dieser Menge. Der Induktionsanfang ist nun erledigt. Der Induktionsschritt kann ähnlich behandelt werden. Insgesamt folgt $\mathcal{U}^{(0)}([t_0, t_0 + c]) = \infty$ f. s. auf $\{\mathcal{U}^{(0)}((-\infty, 0]) = \infty\}$, was $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}([t_0, t_0 + c]) = \infty) > 0$ beweist. □

Beweis von Satz 4.2.4. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\mu(Q) > 0$ angenommen werden.

Es gelte zunächst $m \leq (\inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t))^{-1}$. Dann ist zu zeigen, dass $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ transient ist. Dazu wird zunächst gezeigt, dass ein $\alpha > 0$ mit $\Phi(-\alpha) = 1/m$ existiert. Dazu wiederum genügt es zu zeigen, dass ein $t_0 < 0$ mit $\Phi(t_0) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t)$ $(\leq 1/m)$ existiert. Denn dann ist entweder $\Phi(t_0) = 1/m$ und $\alpha := -t_0$ leistet das Verlangte oder $\Phi(t_0) < 1/m$ und der Zwischenwertsatz (in Verbindung mit $\Phi(0) = 1$ und der Stetigkeit von Φ auf der konvexen Menge $\mathfrak{D}(\Phi) \supseteq [t_0, 0]$) liefert die Existenz eines $-\alpha \in (t_0, 0)$ mit $\Phi(-\alpha) = 1/m$. Um also zu beweisen, dass Φ sein Infimum auf $\mathbb{R}$ annimmt, sei bemerkt, dass $\inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t) = \inf_{t\leq 0} \Phi(t)$ gilt. Ist nämlich $\Phi(t) < \infty$ für ein $t > 0$, so ist $\Phi(t) > 1$, da Φ auf $\mathfrak{D}(\Phi)$ konvex ist und in 0 die rechtsseitige Ableitung $\mu(Q) > 0$ besitzt. Die $t > 0$ spielen also keine Rolle bei der Infimumsbildung. Nun muss wegen $m > 1$ ein $t < 0$ mit $\Phi(t) < 1$ existieren. Daher gilt $\gamma := \inf \mathfrak{D}(\Phi) \in [-\infty, 0)$. Im Fall $\gamma = -\infty$ gilt $\Phi(t) \to \infty$ für $t \to -\infty$, da Q nach Voraussetzung Masse auf der negativen Halbachse trägt. Also folgt aus der Stetigkeit von Φ, dass Φ sein Minimum in einem Punkt $t_0 \in (-\infty, 0)$ annimmt. Ist dagegen $\gamma \in (-\infty, 0)$, so ist entweder $\gamma \in \mathfrak{D}(\Phi)$ und die Transformierte Φ nimmt auf dem kompakten Intervall $[\gamma, 0]$ ihr Minimum an, wohingegen im Fall $\gamma \notin \mathfrak{D}(\Phi)$ aus Lemma A.3.6 folgt, dass $\Phi(t)$ für $t \downarrow \gamma$ gegen ∞ konvergiert, was wiederum zeigt, dass Φ den Wert $\inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t)$ auf dem kompakten Intervall $\{\Phi \leq 1\}$ annimmt. Insgesamt ist also die Existenz eines $\alpha > 0$ mit $\Phi(\alpha) = 1/m$ nachgewiesen. Für dieses α gilt dann:

$$\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i^\alpha = \mathbb{E} \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\geq i\}}\, e^{-\alpha X_i} = \mathbb{E}\, N\ \mathbb{E}\, e^{-\alpha X_1} = m\, \Phi(-\alpha) = 1.$$

Aus Lemma 1.3.3 folgt dann die Transienz von $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$.

Für die umgekehrte Implikation des Satzes betrachte man zunächst für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, \Sigma_{0,n}((-\infty, 0]) &= \mathbb{E} \sum_{|v|=n} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}\, \mathbb{1}_{\{S(v)\leq 0\}} \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}\, \mathbb{1}_{\{S(v)\leq 0\}} \;\middle|\; N(v) : |v| < n \right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{|v|=n} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}\, \mathbb{P}(S(v) \leq 0 \,|\, N(v) : |v| < n) \right] \\
&= \mathbb{E}\, N_n\ \mathbb{P}(S_n \leq 0) = m^n\ \mathbb{P}(S_n \leq 0),
\end{aligned}$$

wobei $(S_n)_{n\geq 0}$ einen Standard-Random-Walk mit Zuwachsverteilung Q bezeichne. Nun liegt es nahe, ein Prinzip der großen Abweichungen zu verwenden, um die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_n \leq 0)$ abzuschätzen. Dazu wird Satz 1.1 von Cramér und

Chernoff in Olivieri und Vares [54, 2005] verwendet. Aus Teil (b) des Satzes folgt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \le 0) \ge \log \inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t).$$

Ist nun $m > (\inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t))^{-1}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \le 0) > -\log m.$$

Für dieses n gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\Sigma_{0,n}((-\infty,0]) &= m^n\ \mathbb{P}(S_n \le 0) \\ &= m^n \exp\left(n\left(\frac{1}{n}\log \mathbb{P}(S_n \le 0\right)\right) \\ &> m^n \exp(n(-\log m)) = 1, \end{aligned}$$

d. h., die erwartete Anzahl der Individuen der n-ten Generation, die sich auf der negativen Halbachse $(-\infty, 0]$ befinden, ist größer als 1. Damit ist der Galton-Watson-Prozess $(Z_k)_{k\ge0}$ mit

$$Z_k := \sum_{|v|=kn} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}\ \mathbb{1}_{\{S(v)\le S(v|_{(k-1)n})\le\ldots\le S(v|n)\le 0\}}$$

$(k \ge 0)$ superkritisch und hat eine positive Überlebenswahrscheinlichkeit. Insbesondere gilt also $\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}((-\infty,0]) = \infty) > 0$, was nach Lemma 4.3.5 die Rekurrenz des Prozesses $(\mathbf{B}_n)_{n\ge0}$ impliziert. □

4.3.6 Bemerkung. Bei der Betrachtung von Random-Walks $(S_n)_{n\ge0}$ auf $\mathbb{R}$ stellt sich heraus (siehe z. B. Korollar 2.2.5 in Alsmeyer [3, 1991]), dass die Bedingung

$$U(I) = \infty \text{ für ein Intervall } I \text{ endlicher Länge} \tag{4.8}$$

(wobei $U(\cdot) = \sum_{n\ge0} \mathbb{P}(S_n \in \cdot)$ das zugehörige Erneuerungsmaß bezeichnet) ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Rekurrenz des Prozesses $(S_n)_{n\ge0}$ darstellt. Das Analogon von (4.8) für den verzweigenden Random-Walk lautet wie folgt:

$$\overline{\mathcal{U}}^{(0)}(I) = \infty \text{ für ein Intervall } I \text{ endlicher Länge,} \tag{4.9}$$

wobei $\overline{\mathcal{U}}^{(0)}$ wie in Kapitel 1 als $\overline{\mathcal{U}}^{(0)} := \mathbb{E}\,\mathcal{U}^{(0)}$ definiert sei. Diese Bedingung ist offenbar notwendig für die Rekurrenz von $(\mathbf{B}_n)_{n\ge0}$, aber sie ist nicht hinreichend. Letzteres ergibt sich wie folgt aus dem Beweis von Satz 4.2.4: Sei Q eine echt zweiseitige Verteilung auf $\mathbb{R}$, deren Moment erzeugende Funktion Φ auf ganz $\mathbb{R}$ endlich ist und $\inf_{t\in\mathbb{R}} \Phi(t) < 1$ erfüllt. Φ nehme sein Minimum in $-\alpha < 0$ an. Der dem Modell zugrunde liegende Galton-Watson-Verzweigungsprozess $(N_n)_{n\ge0}$ sei so gewählt, dass $m = \mathbb{E}\,N_1 = \Phi(-\alpha)^{-1}$ gilt. Nach Satz 4.2.4 ist $(\mathbf{B}_n)_{n\ge0}$

dann transient, d. h., $\mathcal{U}^{(0)}(I) < \infty$ f. s. für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ endlicher Länge. Andererseits gilt wie im Beweis von Satz 4.2.4:

$$\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i^\alpha = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\geq i\}}\, e^{-\alpha X_i} = \mathbb{E}\, N\ \mathbb{E}\, e^{-\alpha X_1} = m\,\Phi(-\alpha) = 1.$$

Da $-\alpha < 0$ Minimalstelle von Φ ist, hat die Funktion $\beta \mapsto \mathbb{E}\, T_i^\beta$ eine in α verschwindende Ableitung. Der Random-Walk $(\overline{S}_{\alpha,n})_{n\geq 0}$ mit der Zuwachsverteilung $\mathbb{P}(\overline{S}_{\alpha,1} \in\ \cdot) = \overline{\Sigma}_{\alpha,1} = \mathbb{E}\,\Sigma_{\alpha,1}$ ist daher nach Gleichung (1.19) zentriert, insbesondere rekurrent nach Satz 2.2.6 in Alsmeyer [3, 1991]. Nach Korollar 2.2.5 in [3] gilt für das Erneuerungsmaß $\overline{U}_\alpha$ von $(\overline{S}_{\alpha,n})_{n\geq 0}$ daher $\overline{U}_\alpha(I) = \infty$ für alle I mit $I \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$. Korollar 1.1.9 liefert wiederum $\mathbb{E}\,\mathcal{U}^{(\alpha)} = \overline{U}_\alpha$, was im Zusammenspiel mit Lemma 4.3.7

$$\overline{\mathcal{U}}^{(0)}(I) = \infty$$

für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ endlicher Länge mit $I \cap \mathbb{G} \neq \emptyset$ liefert. Insbesondere gilt (4.8), obwohl $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ transient ist, d. h., (4.8) ist nicht hinreichend für die Rekurrenz von $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$.

4.3.7 Lemma. *Für jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ endlicher Länge und jedes $\alpha > 0$ gilt:*

$$\mathcal{U}^{(0)}(I) < \infty \Longleftrightarrow \mathcal{U}^{(\alpha)}(I) < \infty.$$

Beweis. Seien $a := \inf I$ und $b := \sup I$. Dann folgt die behauptete Äquivalenz aus der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^{\alpha a}\mathcal{U}^{(\alpha)}(I) &= e^{\alpha a}\sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)^\alpha\, \mathbb{1}_{\{S(v)\in I\}} \\ &= e^{\alpha a}\sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}\, e^{-\alpha S(v)}\, \mathbb{1}_{\{S(v)\in I\}} \\ &\leq \sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}\, \mathbb{1}_{\{S(v)\in I\}} = \mathcal{U}^{(0)}(I) \\ &\leq e^{\alpha b}\sum_{v\in\mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}}\, e^{-\alpha S(v)}\, \mathbb{1}_{\{S(v)\in I\}} \\ &= e^{\alpha b}\sum_{v\in\mathbb{V}} L(v)^\alpha\, \mathbb{1}_{\{S(v)\in I\}} \\ &= e^{\alpha b}\mathcal{U}^{(\alpha)}(I). \end{aligned}$$

□

Abschließend folgt der Beweis von Satz 4.2.3:

Der Beweis von Satz 4.2.3. Im folgenden Beweis wird o. B. d. A. $Q([0,\infty)) = 1$ angenommen.

Sei nun $m > Q(\{0\})^{-1}$. Dann gilt für den Galton-Watson-Prozess $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit $Z_n := \sum_{|v|=n} \mathbb{1}_{\{L(v)>0, S(v)=0\}}$ $(n \geq 0)$:

$$\mathbb{E}\, Z_1 = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\geq i\}}\, \mathbb{1}_{\{S(i)=0\}} = \mathbb{E}\, N\, Q(\{0\}) > 1.$$

Der Prozess ist also superkritisch und überlebt mit Wahrscheinlichkeit $q > 0$. Des Weiteren gilt $Q \neq \delta_0$ nach Voraussetzung (Q1). Folglich gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $Q((\varepsilon, \infty)) > 0$. Es folgt:

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}([0,\varepsilon]) < \infty) \geq \mathbb{P}(S(1) > \varepsilon, \ldots, S(N) > \varepsilon) = f(Q((\varepsilon,\infty))) > 0,$$

wobei $f : s \mapsto \mathbb{E}\, s^N$ $(0 \leq s \leq 1)$ die erzeugende Funktion von N bezeichne. Insgesamt folgt also

$$q \leq \mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}([0,\varepsilon]) = \infty) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{U}^{(0)}([0,\varepsilon]) < \infty) \leq 1 - f(Q((\varepsilon,\infty))) < 1,$$

d. h., $(\mathbf{B}_n)_{n\geq 0}$ ist weder rekurrent noch transient. $\square$

Anhang A

A.1 Die Martingallimiten W und ∂W

A.1.1 Der kanonische Martingallimes W

In diesem Abschnitt wird der Martingallimes W genauer betrachtet. Um überhaupt von einem Martingallimes sprechen zu können, wird dabei die Bedingung

$$\mathbb{E}\,W_1 = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i = \sum_{i\geq 1}\mathbb{E}\,T_i = 1 \tag{B1}$$

vorausgesetzt. Diese Bedingung wird auch in Kapitel 2 bei der Analyse der PRE (weitestgehend) vorausgesetzt. In dieser Situation ist es von besonderem Interesse, zu wissen, in welchen Fällen W nichtdegeneriert ist. Auch in der Situation der Analyse der stochastischen Fixpunktgleichungen (3.1) und (3.2) in Kapitel 3 ist es wichtig zu wissen, wann W nichtdegeneriert ist, da W dann eine endogene Lösung der Summengleichung darstellt. Wenn der dem gewichteten Verzweigungsmodell zugrunde liegende Galton-Watson-Prozess subkritisch ist, ist W sicherlich degeneriert. Dasselbe gilt im kritischen Fall $\mathbb{E}\,N = 1$, wenn N nicht f. s. gleich 1 ist. Im letzteren Fall kann $T_1 > 0$ f. s. angenommen werden und man kann mühelos prüfen, dass W in diesem Fall genau dann nichtdegeneriert ist, wenn $T_1 = 1$ f. s. gilt. Der interessante Fall ist also der superkritische:

$$\mathbb{E}\,N > 1. \tag{B2}$$

In diesem Fall ist notwendigerweise auch die folgende Bedingung erfüllt:

$$\mathbb{P}(T_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \geq 1) < 1. \tag{B3}$$

Sind nun die Bedingungen (B1)-(B3) erfüllt, so bildet die folgende Bedingung eine äquivalente Charakterisierung der Nichtdegeneriertheit von W:

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\sigma}_n = \infty \text{ f. s. und } \int_{(1,\infty)}\left[\frac{u\log u}{\mathbb{E}(\overline{\sigma}_1^+ \wedge \log u)}\right]\mathbb{P}(W_1 \in du) < \infty. \tag{B4}$$

Dabei wird mit $(\overline{\sigma}_n)_{n\geq 0}$ der assoziierte Random-Walk des gewichteten Verzweigungsmodells im BRW-Fall bezeichnet, d. h. ein Random-Walk mit Zuwachsverteilung $\overline{\Sigma}_1 = \mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i\delta_{-\log T_i}$. Die Bedingung (B4) ist technisch und auf den ersten Blick schwer verständlich. Sie bildet den letzten Schritt in einer Serie von Arbeiten über den Martingallimes. Die erste Arbeit stammt dabei von Biggins [13, 1977]. Einen Meilenstein bei der Analyse des Martingallimes stellt die Arbeit von Lyons [46, 1997] dar, in der unter Benutzung eines Maßwechselargument die Bedingung

$$\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i \log T_i \in (-\infty, 0) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\, W_1 \log^+ W_1 < \infty \tag{B4+}$$

als hinreichend für die Nichtdegeneriertheit von W erkannt wird (in der Tat wird in dieser Arbeit sogar gezeigt, dass (B4+) äquivalent zur Nichtdegeneriertheit von W ist, wenn (B1)-(B3) gelten und $\mathbb{E}\sum_{i\geq 1} T_i \log T_i$ existiert und endlich ist). Kuhlbusch [42, 2004, Theorem 2.7] zeigte ein ähnliches Resultat. Alsmeyer und Iksanov gelang schließlich durch eine Kombination der Beweismethode in [46] mit den Ergebnissen einer Arbeit von Goldie und Maller [33, 2000] eine erschöpfende Beschreibung der Situation:

A.1.1 Satz (Satz 1.3 in Alsmeyer und Iksanov [5]). *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B3). $q > 0$ *bezeichne die Überlebenswahrscheinlichkeit des zugrunde liegenden Galton-Watson-Prozesses. Dann sind äquivalent:*

(a) $\mathbb{P}(W > 0) > 0$.

(b) $\mathbb{P}(W > 0) = q$.

(c) $\mathbb{E}\, W = 1$.

(d) $(W_n)_{n\geq 0}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

(e) Der gewichtete Verzweigungsprozess basierend auf der Gewichtsfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ *erfüllt Bedingung* (B4).

A.1.2 Der Limes ∂W des Ableitungsmartingals

Wenn in der Situation des letzten Abschnitts, d. h. unter den Bedingungen (B1)-(B3), die Bedingung (B4) verletzt ist, so ist der kanonische Martingallimes W degeneriert und stellt folglich keine endogene Lösung der Fixpunktgleichung (3.2) dar. Es stellt sich Frage, ob in dieser Situation dennoch ein endogener Fixpunkt existiert. Tatsächlich gelang Biggins und Kyprianou [16, 2005] die Konstruktion einer nichtdegenerierten Lösung der HPRE vermöge des *Ableitungsmartingals* (engl. *derivative martingale*) $(\partial W_n)_{n\geq 0}$:

$$\partial W_n := \sum_{|v|=n} L(v)(-\log L(v)) \quad (n \geq 0). \tag{A.1}$$

Die Bezeichnung *Ableitungsmartingal* für den Prozess $(\partial W_n)_{n\geq 0}$ findet ihren Ursprung dabei in der Tatsache, dass $-\partial W_n$ die (pfadweise) Ableitung der Funktion

$\theta \mapsto \sum_{|v|=n} L(v)^\theta$ nach θ ausgewertet an der Stelle $\theta = 1$ ist, wenn diese Ableitung existiert (siehe [16, S. 623f.]). Konvergiert nun das Martingal $(\partial W_n)_{n\geq 0}$ f. s. gegen eine endliche Zufallsgröße ∂W, so ist ∂W eine Funktion von $\mathbf{T}$. Ferner folgt aus $\mathbb{P}(W = 0) = 1$ sofort, dass ∂W unter der Zusatzvoraussetzung $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ der Gleichung

$$\partial W = \sum_{i=1}^{N} T_i \, [\partial W]_i \quad \mathbb{P}\text{-f. s.} \tag{A.2}$$

genügt. ∂W ist unter den angegeben Bedingungen also ein endogener Fixpunkt von M_Σ, wenn $\mathbb{P}(\partial W > 0) > 0$ gilt. Es stellt sich also die Frage, unter welchen Bedingungen ∂W nichtdegeneriert ist. Um diese Frage zu beantworten, muss zunächst ein Blick auf die Menge $\mathfrak{F}_\Sigma$ aller (nichttrivialen) Fixpunkte von M_Σ geworfen werden. Aus der Gültigkeit der Bedingungen (B1)-(B3) folgt nach Liu [45, 1998, Theorem 1.1] zunächst $\mathfrak{F}_\Sigma \neq \emptyset$. In dieser Situation werde die Existenz eines $\theta \in (0,1)$ mit $\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i^\theta < \infty$ angenommen. Existiert dann der Erwartungswert $\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i \log T_i = 0$, so folgt, dass $\mathfrak{F}_\Sigma$ bis auf Skalierung nur ein Element enthält (siehe [16, Theorem 3]), dessen Laplacetransformierte mit φ bezeichnet werde.

A.1.2 Satz. *Es gelten die Bedingungen* (B1)-(B3) *sowie*

$$\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i(-\log T_i) = 0 \quad \textit{und} \quad \mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i(-\log T_i)^2 < \infty.$$

Ferner sei $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$. *Dann sind die folgenden Aussagen wahr:*

(a) $(\partial W_n)_{n\geq 0}$ *ist ein Martingal, das f. s. gegen einen nichtnegativen Limes* ∂W *konvergiert, der der Gleichung* (A.2) *genügt.*

(b) Gilt zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen $\mathbb{E} \sum_{i\geq 1} T_i^\theta < \infty$ *für ein* $\theta \in (0,1)$, *so gilt* $\mathbb{P}(\partial W > 0) > 0$ *genau dann, wenn*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1-\varphi(t)}{t|\log t|} = c \in (0,\infty). \tag{A.3}$$

Darüber hinaus gilt genau dann $\mathbb{P}(\partial W = 0) = 1$, *wenn der Quotient in der obigen Gleichung für* $t \downarrow 0$ *gegen* ∞ *strebt.*

Beweis. Dieses Ergebnis folgt aus Proposition 16 und Theorem 17 in [16]. □

Zwar charakterisiert Satz A.1.2 die Nichtdegeneriertheit von ∂W unter gewissen Voraussetzungen; das angegebene Kriterium (A.3) ist jedoch nur schwer überprüfbar. Glücklicherweise geben Biggins und Kyprianou [16, Theorem 5] ein für (A.3) hinreichendes Kriterium in Termen der Gewichtsfolge $(T_i)_{i\geq 1}$ an. In der Situation von Satz A.1.2(b) ist mit $S(i) = -\log T_i$ und $G_1 := \sum_{i\geq 1} T_i S(i) \, \mathbb{1}_{\{S(i)>0\}}$ nämlich

$$\mathbb{E}\left(G_1 \, \log G_1 \, \log\log\log G_1\right) < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left(W_1 \, (\log W_1)^2 \, \log\log\log W_1\right) < \infty$$

hinreichend für (A.3).

A.2 Zwei Funktionalgleichungen

In diesem Abschnitt werden zwei wichtige Funktionalgleichungen diskutiert: zum einen die *integrierte Cauchysche Funktionalgleichung (ICFE)*,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\, Q(dy), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{A.4}$$

und zum anderen die *homogene Erneuerungsgleichung auf* $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, Q(dy) =: f * Q(x), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{A.5}$$

Dabei seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und Q ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Die Gleichungen (A.4) und (A.5) sind eng miteinander verwandt und werden durch Spiegelung von Q ineinander überführt. Dementsprechend können sie mit den gleichen Methoden behandelt werden.

Beide Gleichungen finden zahlreiche Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie, z. B. in der Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (siehe Ramachandran und Lau [55, 1991, S. 39ff.]) und in der Erneuerungstheorie (siehe Feller [29, 1968, S. 337], Feller [30, 1971, S. 364, 382] und Alsmeyer [3, 1991, S. 97-104]). In der vorliegenden Arbeit treten die beiden Gleichungen an zwei Stellen auf: zunächst tritt Gleichung (A.5) in der Analyse der pfadweisen Erneuerungsgleichung in den Abschnitten 2.2.4 und 2.2.5 auf, dann treten Gleichungen vom Typ (A.4) in Abschnitt 2.2.8 und bei der Betrachtung stochastischer Fixpunktgleichungen in Abschnitt 3.3.2 auf.

Die Gleichungen (A.4) und (A.5) werden in verschiedener Allgemeinheit in zahlreichen Arbeiten studiert. Eine frühe Arbeit, in der (A.5) betrachtet wird, stammt von Choquet und Deny [23, 1960]. Dort wird die Gleichung auf lokalkompakten Abelschen Gruppe analysiert, um die Faltungsgleichung $\mu = \mu * \sigma$ zu lösen. Die ICFE wird im Lehrbuch von Meyer [50, 1966, S. 151f.] ebenfalls auf einer lokalkompakten Abelschen Gruppe diskutiert, wobei das zur Analyse verwendete Argument, das einer Arbeit von Doob u. a. [26, 1960] entnommen ist, auch in allgemeinerem Kontext anwendbar ist, siehe dazu Székely und Zeng [58, 1990]. Alsmeyer [3, S.87ff.] (im Falle $\int x\, Q(dx) > 0$) und Feller [30, S.382] (für stetiges f) studieren die Erneuerungsgleichung auf $\mathbb{R}$. Eine vergleichsweise allgemeine Behandlung von (A.4) findet sich bei Ramachandran und Lau [55, 1991].

Dieser Abschnitt dient der Bereitstellung einiger Sätze, die in den Kapiteln 2 und 3 benötigt werden. Der erste Satz, der hier angegeben wird, Satz A.2.2, charakterisiert die nichtnegativen Lösungen der ICFE auf $\mathbb{Z}$, während der folgende Satz A.2.4 die nichtnegativen und lokal integrierbaren Lösungen der ICFE auf $\mathbb{R}$ charakterisiert. Die Sätze A.2.5 und A.2.6 behandeln die beschränkten Lösungen der homogenen Erneuerungsgleichung im arithmetischen bzw. im nichtarithmetischen Fall (unter zusätzlichen Annahmen). Für eine prägnante Formulierung der folgenden Sätze werden noch einige Schreibweisen benötigt:

A.2.1 Notation. Für ein σ-endliches Maß Q auf $\mathbb{R}$ bezeichne $\mathrm{supp}(Q)$ im Folgenden die kleinste abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $Q(A^c) = 0$, während $\mathbb{G}(Q)$ die von $\mathrm{supp}(Q)$ erzeugte abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$ sei. Schließlich bezeichne $(S_n)_{n\geq 0}$ im Fall $Q(\mathbb{R}) = 1$ einen in 0 startenden Random-Walk mit unabhängigen Zuwächsen $X_n = S_n - S_{n-1} \sim Q$ $(n \geq 1)$.

A.2.2 Satz (Satz 8.1.7 in Ramachandran und Lau [55]). *Sei $f : \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ eine Funktion und Q ein Maß auf $\mathbb{Z}$ mit $q_n := Q(\{n\}) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $q_0 < 1$. Ferner gelte $\mathbb{G}(Q) = \mathbb{Z}$ (oder äquivalent $\mathrm{ggT}\{k \in \mathbb{Z} : q_k > 0\} = 1$). f erfülle die ICFE bezüglich Q, d. h., es sei*

$$f(n) = \int f(n+k)\, Q(dk) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n+k) q_k \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{A.6}$$

Dann gilt

$$f(n) = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei $c_1, c_2 \geq 0$ sind und $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ derart, dass

$$\int \gamma_i^n\, Q(dn) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_i^n q_n = 1 \quad (i = 1, 2)$$

gilt. Existiert kein solches γ_i, so gilt $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

A.2.3 Satz (Satz 2.2.4 in Ramachandran und Lau [55]). *Seien $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine lokal $\lambda\!\!\lambda$-integrierbare Funktion, die* (A.4) *für $\lambda\!\!\lambda$-f. a. $x \geq 0$ löst, und Q ein σ-endliches Maß auf $([0, \infty), \mathfrak{B}([0, \infty)))$ mit $Q(\{0\}) < 1$. Dann gilt*

$$f(x) = p(x)e^{\alpha x} \text{ für } \lambda\!\!\lambda\text{-f. a. } x \geq 0.$$

Dabei ist $p : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine messbare Funktionen, die periodisch mod $\mathrm{supp}(Q)$ *ist, und $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$\int e^{\alpha y}\, \sigma(dy) = 1$$

gilt. Existiert kein solches α, so gilt $f = 0$ $\lambda\!\!\lambda$-f.ü.

A.2.4 Satz (Satz 8.1.6 in Ramachandran und Lau [55]). *Seien $f \geq 0$ eine lokal $\lambda\!\!\lambda$-integrierbare Funktion, die* (A.4) *für $\lambda\!\!\lambda$-f. a. $x \in \mathbb{R}$ löst, und Q ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $Q(\{0\}) < 1$. Dann gilt*

$$f(x) = p_1(x)e^{\alpha_1 x} + p_2(x)e^{\alpha_2 x} \quad \text{für } \lambda\!\!\lambda\text{-f. a. } x \in \mathbb{R}\,.$$

Dabei sind $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ messbare Funktionen, die periodisch mod $\mathrm{supp}(Q)$ *sind, und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$\int e^{\alpha_1 y}\, \sigma(dy) = \int e^{\alpha_2 y}\, \sigma(dy) = 1$$

gilt. Existiert kein solches α_i, so gilt $f = 0$ $\lambda\!\!\lambda$-f.ü.

Beweis. Siehe Ramachandran und Lau [55, S. 190ff.]. □

A.2.5 Satz (Arithmetischer Fall). *Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{G}(Q) = d\,\mathbb{Z}$ für ein $d > 0$. f bezeichne eine messbare Lösung von* (A.5)*. Dann sind äquivalent:*

(a) Für jedes $t \in [0, d)$ gilt $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |f(t + kd)| < \infty$.

(b) f ist d-periodisch.

Beweis. Die Implikation (b)⇒(a) ist trivial. Daher genügt es, die umgekehrte Implikation zu beweisen. Seien also Q d-arithmetisch (o E. gelte $d = 1$) und f eine messbare Lösung von Gleichung (A.5), die $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |f(t + k)| < \infty$ für jedes $t \in [0, 1)$ erfüllt. Für festes $0 \le t < 1$ sei $f_t : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ durch $k \mapsto f(t-k)$ definiert. Indem man f_t ggf. durch $f_t + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |f(t+k)|$ ersetzt, kann man o. B. d. A. davon ausgehen, dass $f_t \ge 0$ gilt. Weiter gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$:

$$f_t(k) = f(t - k) = \int f(t - k - y)\,Q(dy) = \int f_t(k + y)\,Q(dy),$$

d. h., f_t erfüllt die ICFE auf $\mathbb{Z}$ bzgl. Q. Nach Satz A.2.2 besitzt f daher eine Darstellung der Gestalt

$$f_t(n) = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei $c_1, c_2 \ge 0$ sind und $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ derart, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_i^n\,Q(\{n\}) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

gilt. Da f_t beschränkt ist, gilt $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, f_t ist also konstant, d. h. $f(t - k) = f_t(k) = f_t(0) = f(t)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Da $t \in [0, 1)$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

A.2.6 Satz (Nichtarithmetischer Fall). *Seien Q eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $\mathbb{G}(Q) = \mathbb{R}$ und f eine messbare und beschränkte Lösung der homogenen Erneuerungsgleichung* (A.5)*. Dann sind die folgenden Aussagen hinreichend dafür, dass f konstant ist:*

(a) f ist linksseitig stetig mit existierenden rechtsseitigen Limiten.

(b) $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ *f. s. und* $f(-\infty) := \lim_{y\to-\infty} f(y)$ *existiert.*

(c) $(S_n)_{n\ge0}$ *ist rekurrent und es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass f in x_0 einen existierenden linksseitigen oder rechtsseitigen Limes besitzt.*

Beweis. Sei f eine messbare und beschränkte Lösung von (A.5). Weiterhin gelte (a), d. h., f sei linksseitig stetig mit rechtsseitigen Limiten. Zunächst wird für $\sigma > 0$ eine Hilfsfunktion konstruiert. Sei also für $\sigma > 0$

$$f_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int f(x-y)\, \mathfrak{N}(0,\sigma^2)(dy) =: f * \mathfrak{N}(0,\sigma^2)(x).$$

Mit f ist auch f_σ beschränkt. Darüber hinaus gilt

$$f_\sigma = f * \mathfrak{N}(0,\sigma^2) = f * Q * \mathfrak{N}(0,\sigma^2) = f * \mathfrak{N}(0,\sigma^2) = f_\sigma * Q,$$

d. h., mit f ist auch f_σ eine Lösung von (A.5). Schließlich ist f_σ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, wie die folgende Abschätzung zeigt:

$$\begin{aligned} |f_\sigma(x) - f_\sigma(y)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du - \int_{-\infty}^{\infty} f(y-u) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\, du \right| \\ &\leq \frac{\sup_{u\in\mathbb{R}} |f(u)|}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{(u-|x-y|)^2}{2\sigma^2}} \right| du \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{für } |x-y| \to 0. \end{aligned}$$

Dann liefert der Beweis von Satz 1 in [23, 1960] die Konstanz von f_σ. Letztere folgt aber auch aus [55, Corollary 8.1.8] unter Berücksichtigung der Tatsache, dass f_σ die ICFE bzgl. der Spiegelung Q^- von Q löst. Sei nun $Y \sim \mathfrak{N}(0,1)$. Dann liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$f_\sigma(x) = \mathbb{E}\, f(x - \sigma Y) \underset{\sigma\downarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f(x) + f(x+))$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$, wobei ausgenutzt wurde, dass f linksseitig stetig ist und rechtsseitige Limiten besitzt. Insbesondere existiert $\lim_{\sigma\downarrow 0} f_\sigma(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Da f_σ konstant ist, kann $\lim_{\sigma\downarrow 0} f_\sigma(x)$ nicht von x abhängen. Also ist die Funktion $x \mapsto f(x) + f(x+)$ konstant. Dies wiederum hat $f(x+) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ zur Folge. Anderenfalls gäbe es nämlich ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x+) \neq f(x)$, etwa $f(x+) < f(x)$. Zu $\varepsilon < 1/2(f(x) - f(x+))$ gibt es dann aufgrund der linksseitigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in [x-\delta, x]$ gilt. Dann muss aber für jedes $y \in [x-\delta, x)$ schon $f(y) + f(y+) > f(x) + f(x+)$ gelten; Widerspruch! Also ist $f(x+) = f(x)$ f. a. $x \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich die Konstanz von f, da die Funktion $x \mapsto f(x) + f(x+)$ bereits als konstant erkannt wurde.

Um nachzuweisen, dass auch die Voraussetzungen (b) und (c) hinreichend für die Konstanz von f sind, sei zunächst bemerkt, dass der stochastische Prozess $(f(x - S_n))_{n\geq 0}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein beschränktes Martingal bezüglich der kanonischen Filtration von $(S_n)_{n\geq 0}$ bildet. Tatsächlich gilt nämlich für jedes $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(x-S_n)|S_0,\ldots,S_{n-1}) &= \mathbb{E}(f(x-S_n)|S_{n-1}) \\ &= \int f(x - S_{n-1} - y)\, Q(dy) \\ &= f(x - S_{n-1}) \quad \text{f. s.} \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung (b) liefert dann der Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$f(x) = \mathbb{E}\, f(x - S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(-\infty) \quad \text{f. s.}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, d. h., f ist konstant $= f(-\infty)$. Unter der Voraussetzung (c), etwa wenn es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass f in x_0 einen linksseitigen Limes $f(x_0-)$ besitzt, sind die Stoppzeiten $\tau(\varepsilon)$ mit

$$\tau(\varepsilon) = \inf\{n \geq 0 : S_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0)\}$$

wegen $\mathbb{G}(Q) = \mathbb{R}$ und der Rekurrenz von $(S_n)_{n\geq 0}$ für jedes $\varepsilon > 0$ f. s. endlich. Daher ist der Stoppsatz für Martingale auf jedes $\tau(\varepsilon)$ anwendbar und liefert

$$f(x) = \mathbb{E}\, f(x - S_{\tau(\varepsilon)}) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} f(x_0-)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$, wobei für den Grenzübergang der Satz von der majorisierten Konvergenz verwendet wurde. □

A.3 Hilfsergebnisse

A.3.1 Zwei Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

A.3.1 Satz (Verallgemeinertes starkes Gesetz der großen Zahlen). *Seien $n_1, n_2, \ldots$ natürliche Zahlen und X_{ik}, $1 \leq i \leq n_k$, für festes k stochastisch unabhängige Zufallsgrößen. Alle X_{ik}, $1 \leq i \leq n_k$, $k \geq 1$, seien stochastisch majorisiert durch eine nichtnegative, integrierbare Zufallsgröße Y, d. h., es gelte*

$$\mathbb{P}\left(|X_{ik}| > t\right) \leq \mathbb{P}(Y > t)$$

für alle $t \geq 0$. Weiter sei

$$S_k := \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \mathbb{E}\, X_{ik})$$

für $k \geq 1$. Gilt dann

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{\sum_{j<k} n_j} > 0,$$

so konvergiert für jedes $\varepsilon > 0$ die unendliche Reihe

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(|S_k| > \varepsilon).$$

Insbesondere konvergiert $(S_k)_{k\geq 0}$ für $k \to \infty$ f. s. gegen 0.

Beweis. Der Beweis wird in Abschnitt 4 in Nerman [53, 1981] erbracht. □

A.3.2 Lemma (Verallgemeinertes Borel-Cantelli-Lemma). *$(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ sei eine aufsteigende Folge von σ-Algebren und $(A_n)_{n\geq 1}$ eine Folge messbarer Mengen. Ist dann*

$$E := \left\{ \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n \,|\, \mathcal{G}_n) < \infty \right\},$$

so gilt $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n \,|\, E\right) = 0$.

Beweis. Siehe Satz 21 in Meyer [51, 1972]. □

A.3.2 Drei elementare Lemmata

A.3.3 Lemma. *Sei $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ eine monoton wachsende Funktion mit $1/\psi \in \mathcal{L}^1([0,\infty), \lambda\!\!\lambda)$. Dann existiert zu jedem $r > 0$ eine monoton wachsende Funktion $\psi_r : [0,\infty) \to (0,\infty)$ mit*

(i) $1/\psi_r \in \mathcal{L}^1([0,\infty), \lambda\!\!\lambda)$.

(ii) $\psi_r \leq \psi$.

(iii) $\sup_{x\geq 0} \frac{\psi_r(x+r)}{\psi_r(x)} < \infty$.

Beweis. Ohne Einschränkung seien $r = 1$ sowie ψ eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion mit Stufen der Länge 1. (Ist ψ keine solche Treppenfunktion, so setzte man $\hat{\psi}(x) := \psi(n)$ für $n \leq x < (n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\hat{\psi} \leq \psi$ und $1/\hat{\psi}$ ist nach dem Integralvergleichskriterium ebenfalls integrierbar.) Gilt $\sup_{x\geq 0} \psi(x+1)/\psi(x) < \infty$, so leistet ψ selbst das Verlangte. Es gelte also $\sup_{x\geq 0} \psi(x+1)/\psi(x) = \infty$. Es folgt die Konstruktion einer Funktion $\psi^* = \psi_r$ mit den gewünschten Eigenschaften. Dieser Konstruktion liegt die folgende Anschauung zugrunde: Wenn $\sup_{x\geq 0} \psi(x+1)/\psi(x) = \infty$ gilt, wächst ψ schneller als exponentiell schnell oder ψ wächst höchstens exponentiell schnell. Im letzteren Fall gibt es dann lange Strecken, auf denen ψ nur langsam wächst, und sehr kurze Strecken, auf denen ψ rapide anwächst. Die Idee ist nun, ψ im ersten Fall durch eine Funktion zu ersetzen, die nur exponentiell schnell wächst, und im zweiten Fall die Strecken rapiden Wachstums durch Strecken exponentiellen Wachstums zu überbrücken. Konkret sieht das Vorgehen wie folgt aus: Es seien $x_0 := 0$ und $x_1 := \inf\{x \in \mathbb{N}_0 : \psi(x+1) > e\psi(x)\}$. Wegen $\sup_{x\geq 0} \psi(x+1)/\psi(x) = \infty$ ist $x_1 < \infty$ und auf $[0, x_1]$ sei dann

$$\psi^*(x) := \psi(x).$$

Weiter sei $x_2 := \inf\{x \geq x_1 : \psi^*(x_1)e^{x-x_1} \geq \psi(x)\}$, wobei wie üblich $\inf\emptyset := \infty$ sei. Auf $[x_1, x_2)$ sei

$$\psi^*(x) := \psi^*(x_1)e^{x-x_1}.$$

Ist $x_2 = \infty$, so ist ψ^* vollständig konstruiert. Ist $x_2 < \infty$, so wird das obige Vorgehen wiederholt: in x_2 (es gilt dann notwendigerweise $x_2 \notin \mathbb{N}$, weil ψ als Treppenfunktion mit Stufen der Länge 1 vorausgesetzt ist) gilt $\psi(x_2) = \psi^*(x_1)e^{x_2-x_1}$. Weiter sei

$$\psi^*(x) := \psi(x)$$

auf $[x_2, x_3]$ mit $x_3 := \inf\{x \in \mathbb{N}_0 : x \geq x_2 \text{ und } \psi(x+1) > e\psi(x)\}$. Dann gilt wiederum $x_3 < \infty$ und x_4 sei definiert durch $x_4 := \inf\{x \geq x_3 : \psi^*(x_3)e^{x-x_3} \geq \psi(x)\}$ sowie

$$\psi^*(x) := \psi^*(x_3)e^{x-x_3}$$

auf $[x_3, x_4)$ usw. Auf diese Weise erhält man eine endliche oder unendliche Folge $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ reeller Zahlen und eine monoton wachsende (und stetige) Funktion $\psi^* : [0, \infty) \to (0, \infty)$, für die offensichtlich $\psi^* \leq \psi$ gilt. Weiterhin gilt $\sup_{x\geq 0} \psi^*(x+1)/\psi^*(x) \leq e^2 < \infty$, da für vorgelegtes $x \geq 0$ ψ^* auf $[x, x+1]$ sowohl durch exponentielles Wachstum als auch durch *einen* Sprung jeweils höchstens um den Faktor e größer werden kann (denn alle Sprünge um mehr als den Faktor e sind überbrückt), also insgesamt höchstens um den Faktor e^2. Es bleibt zu zeigen, dass $1/\psi^*$ integrierbar ist. Dies ist klar, falls die Folge $x_0, x_1, \ldots$ endlich ist, da ψ^* in diesem Fall schließlich exponentiell schnell wächst. Besitzt die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ hingegen unendlich viele Folgenglieder, so gilt $\psi^*(x) = \psi(x)$ auf $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und folglich:

$$\begin{aligned}
\int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{\psi^*(x)}\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} \frac{1}{\psi^*(x)}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{2n}}^{x_{2n+1}} \frac{1}{\psi^*(x)}\,dx \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} \frac{1}{\psi^*(x_{2n-1})e^{x-x_{2n-1}}}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{x_{2n}-x_{2n-1}} \frac{e^{-x}}{\psi(x_{2n-1})}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}\,dx \\
&\leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\psi(x_{2n-1})} + \int_0^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}\,dx < \infty.
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Endlichkeit der Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\psi(x_{2n-1})}$ wie folgt: wegen $x_1 \geq 0$ und $x_{2n+1} - x_{2n-1} \geq 1$ f. a. $n \geq 1$ ist $\psi(x_{2n+1}) \geq \psi(n)$ für jedes $n \geq 0$. Dies liefert

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\psi(x_{2n-1})} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\psi(x_{2n+1})} \leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\psi(n)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\psi(x)}\,dx < \infty,$$

wobei verwendet wurde, dass ψ als Treppenfunktion mit Stufen der Länge 1 vorausgesetzt ist. □

A.3.4 Definition. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt *asymptotisch dicht bei* ∞, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $x_0 > 0$ existiert, so dass $[x, x+\varepsilon] \cap A \neq \emptyset$ für alle $x \geq x_0$ gilt.

A.3.5 Lemma. *Seien $A \subseteq [0,\infty)$ eine bei ∞ asymptotisch dichte Menge und $p,h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ messbare Funktionen, wobei h rechtsseitig stetig sei und p A-periodisch, d. h., $p(x+y) = p(x)$ für alle $x \geq 0$ und alle $y \in A$. Gilt dann $p = h$ $\lambda\!\!\lambda$-f. ü., so ist h konstant und p folglich $\lambda\!\!\lambda$-f. ü. konstant.*

Beweis. Es kann o. B. d. A. angenommen werden, dass A die Menge aller Perioden von p ist, d. h., $A = \{y \in \mathbb{R} : p(x+y) = p(x) \text{ für alle } x \geq (0 \vee -y)\}$. A ist eine Gruppe, denn erstens ist offenbar $0 \in A$. Zweitens ist für $y \in A$ und $x \geq (0 \vee y)$ stets $x - y \geq (0 \vee -y)$ und daher

$$p(x) = p(x-y+y) = p(x-y),$$

d. h., $-y \in A$. Sind drittens $y_1, y_2 \in A$, wobei o. E. $y_1 \leq y_2$ gelte, so folgt für $y := y_1 + y_2$ und $x \geq (0 \vee -y)$, dass $x \geq (0 \vee -y_2)$ gilt. Dies impliziert wiederum $x + y_2 \geq 0$ und damit auch $x + y_2 \geq (0 \vee -y_1)$. Dies liefert

$$p(x) = p(x+y_2) = p(x+y_2+y_1) = p(x+y)$$

nach Definition von A. Da $x \geq (0 \vee -y)$ beliebig gewählt war, folgt $y \in A$ und damit die Behauptung, dass A eine Gruppe ist. Da A ferner nach Voraussetzung asymptotisch dicht in bei ∞ ist, liegt A dicht in $\mathbb{R}$. Um nun nachzuweisen, dass h konstant ist, wird $h(0) = h(y)$ für alle $y > 0$ gezeigt. Die Beweisstrategie sieht dabei vor, zu einem vorgelegten $y > 0$ die Existenz zweier Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \to 0$, $y_n \to y$, $x_n \geq 0, y_n \geq y$, $x_n, y_n \in \{p = h\}$ und $y_n - x_n \in A$ $(n \in \mathbb{N})$ nachzuweisen. Sei also $y > 0$ vorgelegt. Für festes $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \in A$ nun so gewählt, dass $a_n + [1/(n+1), 1/n] \subseteq [y, y+1/n]$ ist. Diese Wahl von a_n ist möglich, da A nach dem bereits Bewiesenen dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Nun ist aufgrund der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes mit $\{p \neq h\}$ auch die Menge $-a_n + \{p \neq h\}$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Nullmenge, was

$$\lambda\!\!\lambda([1/(n+1), 1/n] \cap \{p = h\} \cap (-a_n + \{p = h\})) = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

impliziert. Insbesondere gilt $[1/(n+1), 1/n] \cap \{p = h\} \cap (-a_n + \{p = h\}) \neq \emptyset$. Sei also $x_n \in [1/(n+1), 1/n] \cap \{p = h\} \cap (-a_n + \{p = h\})$ gewählt. Setzt man nun $y_n := x_n + a_n$, so erfüllen die Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ die gewünschten Eigenschaften. Nun folgt:

$$\begin{aligned} h(y) &= \lim_{n\to\infty} h(y_n) = \lim_{n\to\infty} p(y_n) = \lim_{n\to\infty} p(x_n + a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} p(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(0). \end{aligned}$$

□

Der Anhang wird von einem Lemma über Moment erzeugende Funktionen beschlossen, das im Beweis von Satz 4.2.4 in Kapitel 4 Verwendung findet.

A.3.6 Lemma. *Q sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit Moment erzeugender Funktion Φ, d. h., $\Phi(t) := \int e^{tx}\, Q(dx)$ $(t \in \mathbb{R})$. Für den kanonischen Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\Phi) := \{\Phi < \infty\}$ von Φ gelte $-\infty < \gamma := \inf \mathfrak{D}(\Phi) \notin \mathfrak{D}(\Phi)$. Dann gilt $\lim_{t\downarrow\gamma} \Phi(t) = \infty$.*

Beweis. Eine zweifache Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz liefert

$$\begin{aligned} \lim_{t\downarrow\gamma} \Phi(t) &= \lim_{t\downarrow\gamma} \left(\int_{(-\infty,0]} e^{tx}\, Q(dx) + \int_{(0,\infty)} e^{tx}\, Q(dx) \right) \\ &= \int_{(-\infty,0]} e^{\gamma x}\, Q(dx) + \int_{(0,\infty)} e^{\gamma x}\, Q(dx) = \Phi(\gamma) = \infty, \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $\gamma \notin \mathfrak{D}(\Phi)$ gilt. □

Literaturverzeichnis

[1] ALDOUS, David ; STEELE, John M.: The objective method: probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence. In: *Probability on Discrete Structures* 110 (2004), S. 1–72

[2] ALDOUS, David J. ; BANDYOPADHYAY, Antar: A survey of max-type recursive distributional equations. In: *Ann. Appl. Probab.* 15 (2005), Nr. 2, S. 1047–1110. – ISSN 1050-5164

[3] ALSMEYER, Gerold: *Erneuerungstheorie*. Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik, 1991

[4] ALSMEYER, Gerold: *Stochastische Prozesse*. 2. erweiterte Auflage. Universität Münster, 2002 (Skripten zur Mathematischen Statistik 33). – xv+334 S

[5] ALSMEYER, Gerold ; IKSANOV, Aleksander M.: A log-type moment result for perpetuities and its application to martingales in supercritical branching random walks / Universität Münster, Institut für Mathematische Statistik. 2008. – Forschungsbericht

[6] ALSMEYER, Gerold ; KUHLBUSCH, Dirk: Double martingale structure and existence of ϕ-moments for weighted branching processes / Universität Münster, Institut für Mathematische Statistik. 2005. – Forschungsbericht

[7] ALSMEYER, Gerold ; MEINERS, Matthias: A stochastic maximin fixed-point equation related to game tree evaluation. In: *J. Appl. Probab.* 44 (2007), Nr. 3, S. 586–606. – ISSN 0021-9002

[8] ALSMEYER, Gerold ; RÖSLER, Uwe: The best constant in the Topchii-Vatutin inequality for martingales. In: *Statist. Probab. Lett.* 65 (2003), Nr. 3, S. 199–206. – ISSN 0167-7152

[9] ALSMEYER, Gerold ; RÖSLER, Uwe: A stochastic fixed point equation related to weighted branching with deterministic weights. In: *Electron. J. Probab.* 11 (2006), S. 27–56 (elektronisch). – ISSN 1083-6489

[10] Alsmeyer, Gerold ; Rösler, Uwe: A stochastic fixed point equation for weighted minima and maxima. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques* 44 (2008), S. 89–103

[11] Asmussen, Søren: *Applications of Mathematics (New York).* Bd. 51: *Applied Probability and Queues.* 2. Auflage. New York : Springer-Verlag, 2003. – xii+438 S

[12] Benjamini, Itai ; Peres, Yuval: Markov Chains Indexed by Trees. In: *The Annals of Probability* 22 (1994), Nr. 1, S. 219–243. – ISSN 00911798

[13] Biggins, John D.: Martingale convergence in the branching random walk. In: *J. Appl. Probability* 14 (1977), Nr. 1, S. 25–37. – ISSN 0021-9002

[14] Biggins, John D. ; Kyprianou, Andreas E.: Seneta-Heyde Norming in the Branching Random Walk. In: *The Annals of Probability* 25 (1997), Nr. 1, S. 337–360. – ISSN 00911798

[15] Biggins, John D. ; Kyprianou, Andreas E.: Measure Change in Multitype Branching. In: *Advances in Applied Probability* 36 (2004), Nr. 2, S. 544–581. – ISSN 00018678

[16] Biggins, John D. ; Kyprianou, Andreas E.: Fixed points of the smoothing transform: the boundary case. In: *Electron. J. Probab.* 10 (2005), S. 609–631 (elektronisch). – ISSN 1083-6489

[17] Bingham, Nicholas H. ; Doney, Ronald A.: Asymptotic properties of supercritical branching processes. II. Crump-Mode and Jirina processes. In: *Advances in Appl. Probability* 7 (1975), S. 66–82. – ISSN 0001-8678

[18] Caliebe, Amke: Symmetric Fixed Points of a Smoothing Transformation. In: *Advances in Applied Probability* 35 (2003), Nr. 2, S. 377–394. – ISSN 00018678

[19] Caliebe, Amke: Representation of fixed points of a smoothing transformation. In: *Mathematics and Computer Science. III* (2004), S. 311–324

[20] Caliebe, Amke ; Rösler, Uwe: Fixed points with finite variance of a smoothing transformation. In: *Stochastic Process. Appl.* 107 (2003), Nr. 1, S. 105–129. – ISSN 0304-4149

[21] Caliebe, Amke ; Rösler, Uwe: *Fixed Points of a Smoothing Transformation with Finite Expectation: Closing a Gap.* 2004. – Preprint, `http://www-computerlabor.math.uni-kiel.de/stochastik/caliebe`

[22] Chauvin, Brigitte: Product Martingales and Stopping Lines for Branching Brownian Motion. In: *The Annals of Probability* 19 (1991), Nr. 3, S. 1195–1205. – ISSN 00911798

[23] Choquet, Gustave ; Deny, Jacques: Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. In: *C. R. Acad. Sci. Paris* 250 (1960), S. 799–801

[24] Chung, Kai L. ; Walsh, John B.: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Bd. 249: *Markov Processes, Brownian Motion, and Time Symmetry*. 2. Auflage. New York : Springer, 2005. – xii+431 S. – ISBN 978-0387-22026-0; 0-387-22026-7

[25] Comets, Francis M. ; Menshikov, Mikhail V. ; Popov, Serguei Y.: One-dimensional branching random walk in a random environment: a classification. In: *Markov Process. Related Fields* 4 (1998), Nr. 4, S. 465–477. – I Brazilian School in Probability (Rio de Janeiro, 1997). – ISSN 1024-2953

[26] Doob, J. L. ; Snell, J. L. ; Williamson, R. E.: Application of boundary theory to sums of independent random variables. In: *Contributions to probability and statistics*. Stanford, Calif. : Stanford Univ. Press, 1960, S. 182–197

[27] Durrett, Richard ; Liggett, Thomas M.: Fixed points of the smoothing transformation. In: *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 64 (1983), Nr. 3, S. 275–301. – ISSN 0044-3719

[28] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. 3. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 2002 (Springer-Lehrbuch). – xvi+434 S. – Grundwissen Mathematik. – ISBN 3-540-43582-4

[29] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. I*. 3., korrigierte Auflage. New York : John Wiley & Sons Inc., 1968. – xviii+509 S

[30] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. II*. 2. Auflage. New York : John Wiley & Sons Inc., 1971. – xxiv+669 S

[31] Gantert, Nina ; Müller, Sebastian: The critical branching Markov chain is transient. In: *Markov Process. Related Fields* 12 (2006), Nr. 4, S. 805–814. – ISSN 1024-2953

[32] Gatzouras, Dimitris: On the Lattice Case of an Almost-Sure Renewal Theorem for Branching Random Walks. In: *Advances in Applied Probability* 32 (2000), Nr. 3, S. 720–737. – ISSN 00018678

[33] Goldie, Charles M. ; Maller, Ross A.: Stability of perpetuities. In: *Ann. Probab.* 28 (2000), Nr. 3, S. 1195–1218. – ISSN 0091-1798

[34] Guivarc'h, Yves: Sur une extension de la notion de loi semi-stable. In: *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 26 (1990), Nr. 2, S. 261–285. – ISSN 0246-0203

[35] Holley, Richard ; Liggett, Thomas M.: Generalized potlatch and smoothing processes. In: *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 55 (1981), Nr. 2, S. 165–195. – ISSN 0044-3719

[36] Iksanov, Aleksander M.: Elementary fixed points of the BRW smoothing transforms with infinite number of summands. In: *Stochastic Process. Appl.* 114 (2004), Nr. 1, S. 27–50. – ISSN 0304-4149

[37] Jagers, Peter: *Branching processes with biological applications.* London : Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], 1975. – xiii+268 S. – Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. – ISBN 0-471-43652-6

[38] Jagers, Peter: General branching processes as Markov fields. In: *Stochastic Process. Appl.* 32 (1989), Nr. 2, S. 183–212. – ISSN 0304-4149

[39] Jagers, Peter ; Rösler, Uwe: Stochastic fixed points for the maximum. In: *Mathematics and computer science. III.* Basel : Birkhäuser, 2004 (Trends Math.), S. 325–338

[40] Kahane, Jean-Pierre ; Peyrière, Jacques: Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. In: *Advances in Math.* 22 (1976), Nr. 2, S. 131–145. – ISSN 0001-8708

[41] Kingman, John F. C.: The first birth problem for an age-dependent branching process. In: *Ann. Probability* 3 (1975), Nr. 5, S. 790–801

[42] Kuhlbusch, Dirk: On weighted branching processes in random environment. In: *Stochastic Process. Appl.* 109 (2004), Nr. 1, S. 113–144. – ISSN 0304-4149

[43] Kyprianou, Andreas E.: Slow variation and uniqueness of solutions to the functional equation in the branching random walk. In: *J. Appl. Probab.* 35 (1998), Nr. 4, S. 795–801. – ISSN 0021-9002

[44] Kyprianou, Andreas E.: Martingale convergence and the stopped branching random walk. In: *Probab. Theory Related Fields* 116 (2000), Nr. 3, S. 405–419. – ISSN 0178-8051

[45] Liu, Quansheng: Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk. In: *Advances in Applied Probability* 30 (1998), Nr. 1, S. 85–112. – ISSN 00018678

[46] Lyons, Russell: A simple path to Biggins' martingale convergence for branching random walk. 84 (1997), S. 217–221

[47] Machado, Fábio P. ; Menshikov, Mikhail V. ; Popov, Serguei Y.: Recurrence and transience of multitype branching random walks. In: *Stochastic Process. Appl.* 91 (2001), Nr. 1, S. 21–37. – ISSN 0304-4149

[48] Machado, Fábio P. ; Popov, Serguei Y.: One-dimensional branching random walks in a Markovian random environment. In: *J. Appl. Probab.* 37 (2000), Nr. 4, S. 1157–1163. – ISSN 0021-9002

[49] Menshikov, Mikhail V. ; Volkov, Stanislav E.: Branching Markov chains: qualitative characteristics. In: *Markov Process. Related Fields* 3 (1997), Nr. 2, S. 225–241. – ISSN 1024-2953

[50] Meyer, Paul-André: *Probability and Potentials.* Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1966. – xiii+266 S

[51] Meyer, Paul-André: *Martingales and stochastic integrals. I. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 284.* Berlin : Springer-Verlag, 1972. – vi+89 S

[52] Neininger, Ralph ; Rüschendorf, Ludger: Analysis of algorithms by the contraction method: additive and max-recursive sequences. In: *Interacting Stochastic Systems* (2005), S. 435–450

[53] Nerman, Olle: On the convergence of supercritical general (C-M-J) branching processes. In: *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 57 (1981), Nr. 3, S. 365–395. – ISSN 0044-3719

[54] Olivieri, Enzo ; Vares, Maria E.: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Bd. 100: *Large Deviations and Metastability.* Cambridge : Cambridge University Press, 2005. – xvi+512 S. – ISBN 0-521-59163-5

[55] Ramachandran, Balasubrahmanyan ; Lau, Ka-Sing: *Functional Equations in Probability Theory.* Boston, MA : Academic Press Inc., 1991 (Probability and Mathematical Statistics). – xviii+249 S. – ISBN 0-12-437730-0

[56] Rüschendorf, Ludger: On stochastic recursive equations of sum and max type. In: *J. Appl. Probab.* 43 (2006), Nr. 3, S. 687–703. – ISSN 0021-9002

[57] Samorodnitsky, Gennady ; Taqqu, Murad S.: *Stable non-Gaussian Random Processes.* New York : Chapman & Hall, 1994 (Stochastic Modeling). – xxii+632 S

[58] Székely, Gábor J. ; Zeng, Wei B.: The Choquet-Deny convolution equation $\mu = \mu * \sigma$ for probability measures on abelian semigroups. In: *J. Theoret. Probab.* 3 (1990), Nr. 2, S. 361–365. – ISSN 0894-9840

[59] Vatutin, Vladimir A. ; Topchiĭ, Valentin A.: The maximum of critical Galton-Watson processes, and left-continuous random walks. In: *Teor. Veroyatnost. i Primenen.* 42 (1997), Nr. 1, S. 21–34. – ISSN 0040-361X

Index