

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK

Stabilität nichtlinearer Hawkes-Prozesse

Diplomarbeit

im Studiengang Mathematik
angefertigt am Institut für Mathematische Statistik

vorgelegt von

Jürgen te Vrugt

Das Thema dieser Arbeit wurde gestellt von

Prof. Dr. G. Alsmeyer

Münster, Januar 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I. Hawkes-Prozesse und Intensitäten von Hawkes-Prozessen	3
1. Punkt-Prozesse und Intensitäten	3
2. Vorhersagbarkeit	8
1) Die σ -Algebra der vorhersagbaren Ereignisse $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$	8
2) Vorhersagbare stochastische Prozesse	9
3. Hawkes-Prozesse	12
4. Stabilität von Intensitäten	14
5. Eigenschaften von Punkt-Prozessen	18
6. Poisson-Prozesse	23
1) Definition und Ergodizität	23
2) Poisson-Einbettung	28
II. Existenz und Stabilität univariater Hawkes-Prozesse	34
7. Zur Konstruktion von Punkt-Prozessen	34
8. Intensitäten mit beschränktem Speicher	38
1) Existenz	39
2) Stabilität in Variation	42
9. Intensitäten mit nichtfallenden Anregungsfunktionen	44
10. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – unbeschränkte Dynamiken	47
1) Existenz	47
2) Stabilität in Verteilung	51
3) Stabilität in Variation	58
4) Zur Einschränkung auf die Menge \mathcal{N}_0	60
11. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – beschränkte Dynamiken	65
1) Existenz	66
2) Stabilität in Variation	71

III. Der K-variate Fall	77
12. Stabilität bei Intensitäten mit beschränktem Speicher	77
13. Existenz im Fall nichtfallender Anregungsfunktionen	80
14. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – der unbeschränkte Fall	84
15. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – der beschränkte Fall	97
IV. Anhang	103
A1. Meßbarkeit	103
1) Einige Mengenidentitäten	103
2) markierte Punkt-Prozesse und Poisson-Prozesse mit zufälliger Punkt-Auswahlbedingung	104
A2. Analysis	108
V. Simulation von Punkt-Prozessen mit beschränktem Speicher	111
A3. Zum Programm	111
1) Installation	112
2) Bedienungshinweise	113
3) Beispiel für die Realisation eines Punkt-Prozesses	114
A4. Quellcodes	115
1) C-Programm	115
2) Tcl/Tk-Script	122
3) Beispiel für eine Funktionsdatei	135
4) Funktionsdateien zum Programm	136
Literaturverzeichnis	iii
Symbolverzeichnis	iv
Index	vi

Einleitung

Gegenstand des vorliegenden Textes ist die Untersuchung des Auftretens zufälliger Punkte auf der reellen Achse, die wir als Zeitachse interpretieren können. Dabei soll zu jedem Zeitpunkt t die „Wahrscheinlichkeit“ oder Rate für die Hervorbringung eines weiteren Punktes im nach t folgenden infinitesimalen Intervall durch das bisherige Auftreten von Punkten bis zum Zeitpunkt t bestimmt sein.

Zur Darstellung von zufälligen Punkten auf der reellen Achse eignen sich im obigen Fall Punkt-Prozesse, für die eine sogenannte Intensität existiert. Eine solche Intensität gibt die Rate des Auftretens weiterer Punkte an. Wir werden im folgenden selbst-anregende *Hawkes-Prozesse* betrachten. Deren Intensitäten bestehen aus einer Übertragungs- und einer Anregungsfunktion. Die Übertragungsfunktion gibt an, wie stark ein jeder Punkt vor t in die Bestimmung der Intensität zum Zeitpunkt t eingeht. Die gewichtete Rückmeldung führt nach Anwendung der Anregungsfunktion, die als eine Art Skalierung der Rückwirkung verstanden werden kann, zur Intensität.

Ziel wird es sein, geeignete Übertragungs- und Anregungsfunktionen zu finden, die zum einen die Existenz eines stationären Punkt-Prozesses mit einer wie zuvor beschriebenen Intensität sichern, und außerdem bei einem vorgegebenem Punkt-Prozeß mit solcher Intensität eine Art „Stationarität im Unendlichen“ zulassen, was wir als *Stabilität* bezeichnen werden. Dazu müssen wir jedoch Anforderungen an die Vergangenheit bis zum Zeitpunkt 0 stellen, dies wird durch geeignete Anfangsbedingungen geschehen.

Im *ersten Kapitel* formalisieren wir den zuvor beschriebenen Sachverhalt und geben grundlegende Eigenschaften von Punkt-Prozessen und Intensitäten sowie das benötigte Grundrüstzeug wieder. Abschließend widmen wir den Poisson-Prozessen einen Abschnitt. Diese besitzen herausragende Bedeutung, denn sie werden als Grundlage der Existenz und Stabilitätsnachweise dienen.

Nach einem einleitenden Abschnitt wenden wir uns in *Kapitel II* der angesprochenen Existenz und Stabilität zu. Dabei wird es nötig sein, die Rückwirkung der vorhandenen Punkte (d.h. der Punkte vor dem Zeitpunkt t) auf die Rate der Entstehung neuer Punkte zum Zeitpunkt t einzuschränken. Dies kann durch Beschränktheitsannahmen an die Anregungsfunktion oder der Forderung nach Eindämmung des Wachstums der Anregungsfunktion bei geeigneter Wahl der Übertragungsfunktion geschehen.

Im *dritten Kapitel* verallgemeinern wir die Aussagen des Kapitels II von univariaten auf K -variate Prozesse. War bisher nur ein Punkt-Prozeß gegeben, betrachten wir hier K Prozesse.

Die Intensität von einem dieser K Prozesse kann dabei von allen anderen Prozessen abhängen. Die Beweistechniken sind an die Beweise des vorherigen Kapitels angelehnt und entsprechen sich zum Teil, so daß wir uns in diesem Abschnitt kürzer fassen können.

Es folgt schließlich ein zweigeteilter Anhang. *Kapitel IV* nimmt technische Aussagen auf, die der Vollständigkeit halber gegeben werden. Die Details zum Nachweis der hier gegebenen Aussagen sind an den entsprechenden Stellen im Haupttext nur von untergeordnetem Interesse. *Kapitel V* beinhaltet den Quelltext eines Simulationsprogramms sowie Hinweise zur Installation und Bedienung. Die grundlegende Funktionsweise wird im Hilfetext des Programms erläutert.

Abschließend noch einige *Konventionen*: Es bezeichne \mathbb{N} (\mathbb{N}_0) die natürlichen Zahlen ohne (mit) Null. Wie üblich sei $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wir nutzen die Schreibweise $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{\geq 0} = [0, \infty)$ für die positive reelle Achse, entsprechendes für $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}^{\leq 0}$. Analog werden diese Bezeichnungen auch bei \mathbb{Q} etc. verwendet.

Wir bezeichnen mit \mathfrak{B}^d die Borelsche- σ -Algebra auf \mathbb{R}^d , und für eine Borel-Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ benenne $\mathfrak{B}(A)$ die Spur- σ -Algebra auf A , $\mathfrak{B}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{B}([0, \infty))$ sowie $\mathfrak{B}^- \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{B}((-\infty, 0])$. Im Fall $d = 1$ schreiben wir wie üblich nur \mathfrak{B} und \mathbb{R} .

Betrachten wir Intervalle der Form $(s, s+t]$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, \infty]$, so gelte $(s, s+t] = (s, \infty)$ im Fall $t = \infty$. Ferner sei $[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$, falls $a > b$.

Für die vorliegende Arbeit sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ stets ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum (falls dieser Raum nicht näher spezifiziert wurde).

Die Verwendung der Begriffe und Symbole orientiert sich an den Skripten der Vorlesungen Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse von Prof. Dr. Alsmeyer (siehe [Als98], [Als96]) sowie dem Seminar „Markierte Punkt-Prozesse und Anwendungen in der Warteschlangentheorie“. Diesem lag das Buch „Elements of Queueing Theory“ von François Baccelli und Pierre Brémaud (siehe [BB94]) zugrunde. Als Basis für diese Arbeit diente der Artikel „Stability of nonlinear Hawkes Processes“ von Pierre Brémaud und Laurent Massoulié (siehe [BM96]).

Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei Herrn Prof. Dr. Alsmeyer für die Betreuung während der Erstellung dieser Arbeit bedanken.

Kapitel I.

Hawkes-Prozesse und Intensitäten von Hawkes-Prozessen

Wir wenden uns zunächst der formalen Definition der Begriffe „Punkt-Prozeß“ und „Intensität“ zu. Anschließend widmen wir uns im Abschnitt 2 der Vorhersagbarkeit. Diese stellt die mathematische Grundlage dafür dar, das derzeitige Verhalten eines Punkt-Prozesses durch die vorangegangenen Punkte zu beschreiben. Abschnitt 3 dient dazu, Hawkes-Prozesse zu charakterisieren, bevor wir in Abschnitt 4 den Begriff der Stabilität einführen wollen. Abschnitt 5 nutzen wir dazu, einige grundlegende Eigenschaften von Punkt-Prozessen anzugeben und nachzuweisen. In Abschnitt 6 erinnern wir an die Definition von Poisson-Prozessen und geben Ergebnisse an, die beim Nachweisen von Existenz und Stabilität eine fundamentale Rolle spielen werden.

1. Punkt-Prozesse und Intensitäten

Als erstes gilt es, den Begriff des Punkt-Prozesses zu erklären.

1.1. Definition (Punkt-Prozeß). Ein *Punkt-Prozeß* N (auf \mathbb{R}) ist eine Familie von Zufallsvariablen $(N(C))_{C \in \mathfrak{B}}$ mit Werten in $\bar{\mathbb{N}}_0$ und

$$(1.1) \quad N(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_C(T_n).$$

Dabei ist $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von *Punkten*, d.h. Zufallsvariablen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$, die

$$(1.2) \quad T_0 \leq 0 \leq T_1 \quad \text{und} \quad T_n \leq T_{n+1} \text{ auf } \{T_n < +\infty\} \cap \{T_{n+1} > -\infty\}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ f.s. erfüllen. N heißt *einfacher Punkt-Prozeß*, wenn in (1.2) strikte Ungleichungen gelten, wobei $T_0 = 0$ zugelassen ist.

Die symbolische Schreibweise $N = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ soll im folgenden für einen Punkt-Prozeß N mit den Punkten T_n , $n \in \mathbb{Z}$, stehen, wobei die Punkte die Bedingung (1.2) der vorherigen

Definition erfüllen. Wir verwenden die Schreibweise N^\pm für die Einschränkung von N auf \mathbb{R}^\pm , also $N^\pm(C) = N(C \cap \mathbb{R}^\pm)$ für alle $C \in \mathfrak{B}$. Ferner sei $N(\omega, C) \stackrel{\text{def}}{=} N(C)(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und $C \in \mathfrak{B}$.

Eine Erweiterung des Begriffs „Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} “ stellt der markierte Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} dar:

1.2. Definition (markierter Punkt-Prozeß). Unter einem (*einfachen*) *markierten Punkt-Prozeß* $N = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (auf \mathbb{R}) mit *Marken* in einem meßbaren Raum (E, \mathcal{E}) versteht man eine Familie von Zufallsvariablen $(N(C_E))_{C_E \in \mathfrak{B} \otimes \mathcal{E}}$ mit Werten in \mathbb{N}_0 , so daß

$$(1.3) \quad N(C_E) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{C_E}(T_n, U_n)$$

gilt und $N(\cdot \times E)$ ein (*einfacher*) Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} ist. Der meßbare Raum (E, \mathcal{E}) wird auch als *Markenraum* bezeichnet.

Punkt-Prozesse und markierte Punkt-Prozesse lassen sich auch auf allgemeineren Räumen definieren (vergleiche [DVJ88] §7). Zu einem (markierten) Punkt-Prozeß N definieren wir nun eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Diese läßt sich wie folgt interpretieren: \mathcal{F}_t beinhaltet sämtliche Informationen über N bis zum „Zeitpunkt“ t , also auf $(-\infty, t]$.

1.3. Definition (Filtration). $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ heißt *Filtration* eines (markierten) Punkt-Prozesses N , wenn $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine nichtfallende Familie von σ -Algebren mit der Eigenschaft $\mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Dabei wird die *interne Filtration* $(\mathcal{F}_t^N)_{t \in \mathbb{R}}$ von N gegeben durch

$$(1.4) \quad \mathcal{F}_t^N \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(N(C); C \in \mathfrak{B}((-\infty, t])) .$$

Falls N ein markierter Punkt-Prozeß mit Markenraum (E, \mathcal{E}) ist, wird die interne Filtration durch

$$(1.5) \quad \mathcal{F}_t^N \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(N(C_E); C_E \in \mathfrak{B}((-\infty, t]) \otimes \mathcal{E})$$

erklärt. Die zu den Marken $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eines markierten Punkt-Prozesses $N = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gehörige Filtration $(\mathcal{F}_t^U)_{t \in \mathbb{R}}$ wird definiert als

$$(1.6) \quad \mathcal{F}_t^U \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(U(s); -\infty < s \leq t) ,$$

wobei $U(s) \stackrel{\text{def}}{=} U_n$ falls $T_n \leq s < T_{n+1}$.

Stellt N einen (markierten) Punkt-Prozeß dar, so heißt dieser *adaptiert* bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ oder \mathcal{F}_t -*adaptiert*, falls $\mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Für eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ definieren wir $\mathcal{F}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t; t \in \mathbb{R})$, analog \mathcal{F}_∞^N und \mathcal{F}_∞^U .

Bevor wir zum zentralen Begriff der Intensität gelangen, benötigen wir noch geeignete Meßbarkeitsbegriffe.

1.4. Definition (Progressivität und Vorhersagbarkeit). Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration. Ist $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ein stochastischer Prozeß derart, daß für alle $t \in \mathbb{R}$ die auf $\Omega \times (-\infty, t]$ definierte Funktion $(\omega, s) \mapsto \lambda(s)(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\omega, s)$ $\mathcal{F}_t \otimes \mathfrak{B}((-\infty, t])$ -meßbar ist, so heißt dieser Prozeß \mathcal{F}_t -progressiv meßbar. Die σ -Algebra der \mathcal{F}_t -progressiv meßbaren Ereignisse wird im folgenden mit $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}((\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}})$ oder kurz $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}_t)$ bezeichnet.

Der Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ wird \mathcal{F}_t -vorhersagbar genannt, falls die Funktion $\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\omega, s) \mapsto \lambda(\omega, s)$ meßbar ist bezüglich der σ -Algebra $\mathcal{P}((\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}})$ (kurz $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$), welche auf $\Omega \times \mathbb{R}$ definiert ist und durch Mengen der Form $A \times (a, b]$ mit $a \leq b$ und $A \in \mathcal{F}_a$ erzeugt wird.

Entsprechende Bezeichnungen werden auch für Funktionen f verwendet, die auf $\Omega \times \mathbb{R}$ definiert sind.

Im vorliegenden Text nutzen wir stets die abkürzende Schreibweise „ \mathcal{F}_t -...“ anstelle von „ $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ -...“, denn es sind keine Mißverständnisse zu erwarten. So schreiben wir beispielsweise \mathcal{F}_t -progressiv meßbar statt $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ -progressiv meßbar.

1.5. Definition (Intensität). Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration eines Punkt-Prozesses N und $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ein nichtnegativer \mathcal{F}_t -progressiv meßbarer Prozeß mit

$$(1.7) \quad \mathbf{E}(N(a, b] | \mathcal{F}_a) = \mathbf{E}\left(\int_a^b \lambda(s) ds \mid \mathcal{F}_a\right) \text{ f.s.}$$

für alle $(a, b] \subset \mathbb{R}$. Der stochastische Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ wird dann \mathcal{F}_t -Intensität von N genannt.

Anstelle der bedingten Erwartungswerte in (1.7) können in der Definition Erwartungswerte über \mathcal{F}_t -vorhersagbare Funktionen treten.

1.6. Bemerkung. Gegeben sei die Situation von 1.5. Dann ist $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ genau dann eine \mathcal{F}_t -Intensität von N , wenn für alle nichtnegativen \mathcal{F}_t -vorhersagbaren Funktionen $H : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$\mathbf{E}\left(\int H(\cdot, t) N(dt)\right) = \mathbf{E}\left(\int H(\cdot, t) \lambda(t) dt\right)$$

gilt.

Diese Bemerkung ist eine Konsequenz aus [BB94] Kapitel 1 Gleichung (8.3.3) und der $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ -Meßbarkeit von $H(\omega, t) = \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{(a,b]}(t)$ für $(a, b] \subset \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{F}_a$.

Wir erinnern an die Definition eines Radon-Maßes: unter einem Radon-Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ verstehen wir ein lokal-endliches und von innen reguläres Maß, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine offene Umgebung V_x mit $\mu(V_x) < \infty$, und $\mu(C) = \sup\{\mu(K); K \in \mathfrak{K}, K \subset C\}$ für alle $C \in \mathfrak{B}$ (\mathfrak{K} System kompakter Mengen), vergleiche [Bau92] §25.

1.7. Bemerkung. In der Situation von 1.5 gilt für alle $C \in \mathfrak{B}$ genau dann $N(C) < \infty$ \mathbf{P} -f.s., wenn $\int_C \lambda(s) ds < \infty$ \mathbf{P} -f.s.. Daraus folgt, daß N genau dann f.s. ein Radon-Maß ist, wenn $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ f.s. lokal integrabel ist.

BEGRÜNDUNG: (i) Um den ersten Teil der Bemerkung zu zeigen, sei $C \in \mathfrak{B}$ eine nichtleere Menge und $a \stackrel{\text{def}}{=} \inf C \in \bar{\mathbb{R}}$.

Gelte zunächst $N(C) < \infty$ f.s. und definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$S_n^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ t \geq a; \int_a^t \mathbb{1}_C(s) N(ds) \geq n \right\} = \inf \{ t \geq a; N(C \cap (-\infty, t]) \geq n \}$$

mit der üblichen Festlegung $\inf \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \infty$. Wir können o.B.d.A. $S_n^{(1)}$ als nach unten beschränkt annehmen, betrachte sonst $S_n^{(1)} \vee n_0$. Hierfür gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(1)} = \infty$ f.s.. Außerdem ist $S_n^{(1)}$ eine \mathcal{F}_t -Stopzeit:

$$\begin{aligned} \{S_n^{(1)} \leq t\} &= \begin{cases} \emptyset & \text{für } t < a \\ \left\{ \int_{[a,t]} \mathbb{1}_C(s) N(ds) \geq n \right\} & \text{für } t \geq a \end{cases} \\ &= \begin{cases} \emptyset & \text{für } t < a \\ \{N(C \cap [a,t]) \geq n\} & \text{für } t \geq a \end{cases} \\ &\in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Unter Beachtung des in Abschnitt 2 noch zu zeigenden Lemmas 2.1 folgt die \mathcal{F}_t -Vorhersagbarkeit von $\mathbb{1}_{\{(\hat{\omega}, \hat{s}) \in \Omega \times \mathbb{R}; \hat{s} \leq S_n^{(1)}(\hat{\omega})\}}$, denn

$$\{(\hat{\omega}, \hat{s}) \in \Omega \times \mathbb{R}; \hat{s} \leq S_n^{(1)}(\hat{\omega})\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(\hat{\omega}, \hat{s}) \in \Omega \times \mathbb{R}; \hat{s} \leq S_n^{(1)}(\hat{\omega}) \wedge k\}$$

(beachte: $S_n^{(1)}$ ist nach unten beschränkt). Hieraus ergibt sich

$$(1.8) \quad \mathbf{E} \left(\int \mathbb{1}_{(-\infty, S_n^{(1)}]}(s) \mathbb{1}_C(s) \lambda(s) ds \right) = \mathbf{E} \left(\int \mathbb{1}_{(-\infty, S_n^{(1)}]}(s) \mathbb{1}_C(s) N(ds) \right) \leq n < \infty,$$

so daß $\int \mathbb{1}_{(-\infty, S_n^{(1)}]}(s) \mathbb{1}_C(s) \lambda(s) ds < \infty$ f.s. gilt. Für alle Elemente $\omega_1 \in \Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{N(C) < \infty\}$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $S_n^{(1)}(\omega_1) = \infty$ für alle $n \geq n_1$. Dies zeigt $\int_C \lambda(s) ds < \infty$ f.s..

Gilt andererseits $\int_C \lambda(s) ds < \infty$ f.s., so betrachte

$$S_n^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ t \geq a; \int_a^t \mathbb{1}_C(s) \lambda(s) ds \geq n \right\}.$$

Auch hier ist $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(2)} = \infty$ f.s.. Ein weiterer Vorgriff auf Abschnitt 2 zeigt

$$\begin{aligned} \{S_n^{(2)} \leq t\} &= \begin{cases} \emptyset & \text{für } t < a \\ \left\{ \int_a^t \mathbb{1}_C(s) \lambda(s) ds \geq n \right\} & \text{für } t \geq a \end{cases} \\ &\in \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, nach Lemma 2.8. Gleichung (1.8) besitzt wie zuvor Gültigkeit, dies liefert $\int \mathbb{1}_{(-\infty, S_n^{(2)}]}(s) \mathbb{1}_C(s) N(ds) < \infty$ f.s.. Es gibt zu $\omega_2 \in \Omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{\int_C \lambda(s) ds < \infty\}$ stets ein $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß $S_n^{(2)}(\omega_2) = \infty$ für $n \geq n_2$ gilt. Daher folgt $N(C) = \int \mathbb{1}_C(s) N(ds) < \infty$ f.s..

(ii) Für $C \in \mathfrak{B}$ und $\omega \in \Omega$ gilt $N(\omega, C) = \sup\{N(\omega, K); K \in \mathfrak{K}, K \subset C\}$; denn ist $N = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, so stellt $K_k \stackrel{\text{def}}{=} \{T_n(\omega); -k \leq n \leq k, T_n(\omega) \in C\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine kompakte Menge mit $K_k \subset C$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} N(\omega, K_k) = N(\omega, C)$ dar.

Bezeichne Ω_0 den Träger von P .

Ist nun $\omega \in \{\hat{\omega} \in \Omega; N(\hat{\omega}, \cdot) \text{ Radon-Maß}\}$, gilt $N(\omega, [a, b]) < \infty$ für beschränkte $[a, b] \subset \mathbb{R}$, und daher $\int_{[a, b]} \lambda(\omega, s) ds < \infty$.

Falls $\omega \in \{\hat{\omega} \in \Omega; (\lambda(\hat{\omega}, t))_{t \in \mathbb{R}} \text{ lokal integrierbar}\}$ ist, folgt für $x \in \mathbb{R}$ die Endlichkeit von $\int_{[x-1, x+1]} \lambda(\omega, s) ds$, also auch $N(\omega, (x-1, x+1)) < \infty$. \diamond

Wir verwenden ab nun eine verkürzende Schreibweise:

Im folgenden werden (markierte) Punkt-Prozesse stets als einfach angenommen, die Nennung des Zusatzes „einfach“ wird unterlassen.

Einen Spezialfall der markierten Punkt-Prozesse stellt der *multivariate Punkt-Prozeß* (oder auch *K-variate Punkt-Prozeß*) dar, bei dem der Markenraum $E \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, K\}$ und \mathcal{E} die Potenzmenge von E ist ($K \in \mathbb{N}$). Im Fall $K = 1$ spricht man auch von einem *univariaten Punkt-Prozeß*, falls $K = 2$ von einem *bivariaten Punkt-Prozeß*.

Ist $N = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein K -variater Punkt-Prozeß, so rechnet man sofort nach, daß $N(\cdot \times \{i\})$ für jedes $i \in \{1, \dots, K\}$ einen gewöhnlichen (univariaten) Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} bildet.

Im folgenden werden wir nur noch K -variate Punkt-Prozesse *ohne gemeinsame Punkte* betrachten, d.h. $N(\{T_n\} \times \{i\}) N(\{T_n\} \times \{j\}) = 0$ f.s. für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $1 \leq i, j \leq K$ mit $i \neq j$.

Ein K -variater Punkt-Prozeß läßt sich durch die Zuordnungen

$$\begin{aligned} N(C \times L) &= \sum_{i \in L} N_i(C) & C \in \mathfrak{B}, L \in \mathcal{E}, \\ N_i(C) &= N(C \times \{i\}) & C \in \mathfrak{B}, \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq K$, mit einem sogenannten K -Vektor-Prozeß $\tilde{N} = (N_1, \dots, N_K)$ identifizieren und umgekehrt, so daß wir beide Darstellungen $N = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $N = (N_1, \dots, N_K)$ als K -variaten Punkt-Prozeß bezeichnen werden. Es gilt dann

$$\mathcal{F}_t^N = \sigma(\mathcal{F}_t^{N_i}; 1 \leq i \leq K).$$

Ferner heißt $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$, $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t))$, \mathcal{F}_t -Intensität des K -variaten Prozesses $N = (N_1, \dots, N_K)$, falls N_i \mathcal{F}_t -adaptiert und $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine \mathcal{F}_t -Intensität von N_i ist für alle $i \in \{1, \dots, K\}$.

Die Einschränkung auf eine der reellen Halbachsen entspricht dem univariaten Fall: $N^\pm = (N_1^\pm, \dots, N_K^\pm)$, dabei stellt N_i^\pm wie im univariaten Fall die Einschränkung von N_i auf \mathbb{R}^\pm dar ($1 \leq i \leq K$).

2. Vorhersagbarkeit

1) Die σ -Algebra der vorhersagbaren Ereignisse $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration. In diesem Unterabschnitt geben wir zwei Erzeuger von $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ an, die beim Nachweis von \mathcal{F}_t -Vorhersagbarkeit nützlich sein werden und bereits im Beweis von Bemerkung 1.7 genutzt wurden. Außerdem gilt es, den Zusammenhang zwischen Vorhersagbarkeit und progressiver Meßbarkeit zu klären.

2.1. Lemma. *Die beiden folgenden Mengen-Systeme bilden durchschnittsstabile Erzeuger der σ -Algebra der vorhersagbaren Ereignisse $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$:*

$$(2.1) \quad \mathcal{E}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{A \times (s, \infty); A \in \mathcal{F}_s, s \in \mathbb{R}\}$$

$$(2.2) \quad \mathcal{E}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; t \leq T(\omega)\}, T \text{ beschränkte } \mathcal{F}_t\text{-Stopzeit} \}.$$

Beweis: Die Durchschnittsstabilität von \mathcal{E}_1 und $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ ist klar. Für $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) = \sigma(\mathcal{E}_1)$ reicht es zu zeigen, daß für $\emptyset \neq (a, b] \subset \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{F}_a$ die Menge $A \times (a, b]$ ein Element von $\sigma(\mathcal{E}_1)$ darstellt. Dazu genügt ein Hinweis auf die Darstellung $A \times (a, b] = A \times (a, \infty) \setminus A \times (b, \infty)$ und $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_b$.

Um $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ zu erhalten zeigen wir $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$. Setze zu beliebigem $s \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{F}_s$

$$T_{s,A}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} s \mathbb{1}_A(\omega) + \infty \mathbb{1}_{A^C}(\omega).$$

$T_{s,A}$ ist eine \mathcal{F}_t -Stopzeit:

$$\{T_{s,A} \leq t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } t < s \\ A & \text{für } s \leq t < \infty \\ \Omega & \text{für } t = \infty \end{cases},$$

d.h. $\{T_{s,A} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, und es folgt

$$(2.3) \quad \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; t \leq T_{s,A}(\omega)\} = A \times (-\infty, s] + A^C \times \mathbb{R} = (A \times (s, \infty))^C.$$

Für eine beliebige nach unten beschränkte (auch nichtendliche) \mathcal{F}_t -Stopzeit T gilt

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; t \leq T(\omega)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; t \leq T(\omega) \wedge n\} \in \sigma(\mathcal{E}_2).$$

Mit (2.3) zeigt dies $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$, also die Inklusion „ \subset “. Es ist für jede beliebige \mathcal{F}_t -Stopzeit T

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; T(\omega) < t\} = \bigcup_{\substack{t \in \mathbb{Q} \\ \{T < t\} \neq \emptyset}} \{T < t\} \times (t, \infty) \in \sigma(\mathcal{E}_1),$$

denn $\{T < t\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$. Dies liefert „ \supset “.

Ebenso wie \mathcal{E}_1 ist \mathcal{E}_2 durchschnittsstabil, denn

$$\bigcap_{i=1,2} \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; t \leq T_i(\omega)\} = \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; t \leq T_1(\omega) \wedge T_2(\omega)\},$$

für zwei beschränkte \mathcal{F}_t -Stopzeiten T_1 und T_2 . \square

Das nachfolgende Lemma rechtfertigt die Beschränkung auf die Betrachtung *vorhersagbarer* Intensitäten.

2.2. Lemma. *Für beliebige Filtrationen $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ gilt $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}_t)$.*

BEWEIS: Sei $A \times (s, \infty) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ mit $s \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{F}_s$. Dann gilt offensichtlich

$$A \times (s, \infty) = \bigcup_{\substack{t_1, t_2 \in \mathbb{Q} \\ s \leq t_1 < t_2}} A \times (t_1, t_2] \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}_t),$$

denn $A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t_2}$. Da \mathcal{E}_1 gemäß (2.1) ein Erzeuger von $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ ist, folgt hieraus die Behauptung. \square

2) Vorhersagbare (und progressiv meßbare) stochastische Prozesse. Einige Aussagen dieses Unterabschnitts lassen sich in größerer Allgemeinheit zeigen. Wir geben hier jedoch teilweise Versionen an, die auf die spätere Verwendung in dieser Arbeit zugeschnitten sind.

Der folgende Satz stellt den Schlüssel zum Beweis von 2.4 dar und stammt aus [Bré81] A1.3. T7.

2.3. Satz (Abzählbare Abhängigkeiten). *Gegeben sei eine Familie $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ von σ -Algebren über einer Menge Ω und I eine beliebige Menge. Setze $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_i; i \in I)$. Dann gilt:
Für alle $A \in \mathcal{F}$ gibt es eine abzählbare Menge $J \subset I$ mit $A \in \sigma(\mathcal{F}_i; i \in J)$.*

BEWEIS: Definiere das Mengensystem \mathcal{E} durch

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathcal{F}; A \in \sigma(\mathcal{F}_i; i \in J) \text{ für eine abzählbare Menge } J \subset I\}.$$

Für alle $i \in I$ gilt $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{E}$, und \mathcal{E} ist eine σ -Algebra über Ω . Daraus folgt die Inklusionskette

$$\sigma(\mathcal{F}_i; i \in I) \subset \mathcal{E} = \sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F}_i; i \in I),$$

also $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{F}_i; i \in I)$. \square

Für vorhersagbare stochastische Prozesse existiert eine Art Faktorisierungslemma.

2.4. Satz. *Gegeben sei ein Punkt-Prozeß N und ein nichtnegativer \mathcal{F}_t^N -vorhersagbarer stochastischer Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Dann besitzt λ die Darstellung $\lambda(\omega, t) = \nu(N(\omega, \cdot), t)$, d.h. λ hängt nur über N von ω ab.*

BEWEIS: Der Beweis wird in zwei Schritten geführt. Zunächst zeigen wir, daß jede beschränkte \mathcal{F}_t^N -Stopzeit die Darstellung $T = \mu(N(C_k); k \in J)$ mit $C_k \in \mathfrak{B}$ für alle $k \in J$ (J

abzählbar) und einer geeigneten Funktion μ besitzt. Anschließend wird ausgenutzt, daß \mathcal{E}_2 gemäß (2.2) ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t^N)$ ist.

(i) Sei T eine beschränkte \mathcal{F}_t^N -Stopzeit. Dann ist T bezüglich der Vergangenheit zur Zeit T

$$\mathcal{F}_T^N = \sigma(A \in \mathcal{F}_\infty^N; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^N \text{ für alle } t \in \mathbb{R}).$$

meßbar. Sei

$$T_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \mathbb{1}_{\{n-1 \leq T < n\}},$$

so ist T_0 ebenfalls eine \mathcal{F}_t^N -Stopzeit. Wähle eine Menge $A \in \mathcal{F}_{T_0}^N$ beliebig und definiere

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} A \cap \{T_0 = i\} = (A \cap \{T_0 \leq i\}) \cap (A \cap \{T_0 \leq i-1\}) \in \mathcal{F}_i^N,$$

dann besitzt A die Darstellung $A = \sum_{i \in \mathbb{Z}} A_i$.

Für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $A_i \in \mathcal{F}_i^N = \sigma(N(C); C \in \mathfrak{B}((-\infty, i]))$. Nach 2.3 folgt $A_i \in \sigma(N(C_{i,k}); k \in J_i)$ mit J_i abzählbar und $C_{i,k} \in \mathfrak{B}((-\infty, i])$, $k \in J_i$. Das Faktorisierungslemma [Als98] Lemma 52.1 sichert für beliebiges $i \in \mathbb{Z}$ die Existenz einer (meßbaren) Abbildung $\mu_i : \mathbb{R}^{|J_i|} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{1}_{A_i} = \mu_i(N(C_{i,k}); k \in J_i),$$

so daß $\mathbb{1}_A(\omega) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \mu_A(N(C_{A,k}); k \in J_A)$ nur über N von ω abhängt, dabei ist $\mu_A : \mathbb{R}^{|J_A|} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, $J_A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} J_i$ abzählbar und $C_{A,k} \in \mathfrak{B}$ für $k \in J_A$.

Unter Ausnutzung des Funktions-Erweiterungsarguments folgt für alle nichtnegativen oder beschränkten $\mathcal{F}_{T_0}^N$ -meßbaren Abbildungen \tilde{T} die Darstellung $\tilde{T} = \tilde{\mu}(N(C_k); k \in J)$ ($\tilde{\mu} : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, J abzählbar, $C_k \in \mathfrak{B}$ für alle $k \in J$).

Da nach Definition $T \leq T_0$ ist, gilt $\mathcal{F}_T^N \subset \mathcal{F}_{T_0}^N$, d.h. für die beschränkte \mathcal{F}_t^N -Stopzeit T existiert eine Darstellung $T = \mu(N(C_k); k \in J)$, wobei wieder $\mu : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ meßbar, J abzählbar und $C_k \in \mathfrak{B}$ für alle $k \in J$.

(ii) Nutzen wir für eine beschränkte \mathcal{F}_t^N -Stopzeit T die Darstellung aus (i), so hängt die Abbildung

$$(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_{\{(\hat{\omega}, \hat{t}) \in \Omega \times \mathbb{R}; \hat{t} \leq T(\omega)\}}(\omega, t) = \mathbb{1}_{\{s \in \mathbb{R}; t \leq s\}}(T(\omega)) = \mathbb{1}_{[t, \infty)}(\mu(N(\omega, C_j); j \in J))$$

nur über N von ω ab. Mittels eines Dynkin-System-Arguments folgt, daß $\mathbb{1}_A(\omega, t)$ für alle $A \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t^N)$ nur durch N von ω abhängt.

Eine erneute Anwendung des Funktions-Erweiterungsarguments zeigt dann für nichtnegative $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t^N)$ -meßbare Funktionen $\lambda(\omega, t)$, daß diese von ω nur über N abhängen. \square

Die folgende Aussage ähnelt [Als98] Lemma 19.10, welches zur Vorbereitung auf den Satz von Fubini (und Tonelli) dient.

2.5. Lemma. *Sei die nichtnegative Abbildung $\lambda : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\omega, t) \mapsto \lambda(\omega, t)$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ vorhersagbar. Dann ist die Abbildung $\lambda(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \lambda(\omega, t)$ \mathcal{F}_t -meßbar.*

BEWEIS: Um das Funktions-Erweiterungsargument anwenden zu können, wird die Behauptung für \mathcal{F}_t -vorhersagbare Funktionen der Form $\lambda(\omega, t) = \mathbb{1}_{A \times (s, \infty)}(\omega, t)$, $s \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{F}_s$, nachgerechnet. Dies ist wegen

$$\omega \mapsto \mathbb{1}_{(s, \infty)}(t) \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq s \\ \mathbb{1}_A(\omega) & \text{für } t > s \end{cases}$$

und $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für $t > s$ klar. \square

Für ein vorgegebenes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\omega \mapsto \lambda(\omega, t)$ also \mathcal{F}_t^N -meßbar. Der Satz 2.3 über abzählbare Abhängigkeiten liefert die Existenz einer abzählbaren Menge J und Mengen $C_k \in \mathfrak{B}((-\infty, t])$, $k \in J$. Damit gilt

$$\lambda(t) = f_t(N(C_k), k \in J) = f_t(N(C_k \cap (-\infty, t]), k \in J)$$

für eine geeignete Funktion $f_t : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir erhalten zu Satz 2.4 folgendes

2.6. Korollar. *Gegeben sei die Situation von 2.4. Dann gilt:*

$$(2.4) \quad \lambda(\omega, t) = \nu(N(\omega, \cdot \cap (-\infty, t]), t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$.

Betrachten wir einen Punkt-Prozeß N mit zugehöriger \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$, so können wir diese Intensität stets \mathcal{F}_t -vorhersagbar wählen. Die Rechtfertigung liefert der nachstehende

2.7. Satz (Existenz einer vorhersagbaren Version der Intensität). *Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration und N ein Punkt-Prozeß mit \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Dann existiert eine \mathcal{F}_t -vorhersagbare \mathcal{F}_t -Intensität $(\tilde{\lambda}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ von N .*

BEWEIS: Nach Definition ist $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ \mathcal{F}_t -progressiv meßbar. Ferner gilt $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}_t)$ (siehe 2.2). Daher werden durch

$$\begin{aligned} \nu_1(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_A \lambda(\omega, t) \mathbf{P} \otimes \mathbb{X}(d\omega \times dt), \\ \nu_2(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_A \mathbf{P} \otimes \mathbb{X}(d\omega \times dt), \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$, Maße auf $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ mit $\nu_1 \ll \nu_2$ definiert. Der Satz von Radon-Nikodym (σ -Endlichkeit von ν_2 ist klar) sichert die Existenz einer $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ -meßbaren Abbildung $\tilde{\lambda} = \frac{d\nu_1}{d\nu_2}$. Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{F}_a$ liefert dies mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{E} \left(\int_{(a, b]} \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_a \right) d\mathbf{P} &= \int_A \int_{(a, b]} \lambda(t) dt d\mathbf{P} = \int_{A \times (a, b]} d\nu_1 \\ &= \int_{A \times (a, b]} \tilde{\lambda}(\omega, t) \nu_2(d\omega \times dt) = \int_A \int_{(a, b]} \tilde{\lambda}(t) dt d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E} \left(\int_{(a, b]} \tilde{\lambda}(t) dt \mid \mathcal{F}_a \right) d\mathbf{P}, \end{aligned}$$

d.h. $(\tilde{\lambda}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist ebenfalls eine \mathcal{F}_t -Intensität von N . \square

Zum Abschluß dieses Abschnitts wird noch ein mit 2.5 vergleichbares Ergebnis (bezüglich der Meßbarkeit) für Integrationen über ein „Zeit“-Intervall gegeben. Dieses Ergebnis erinnert an die Meßbarkeitsaussage im Satz von Fubini (und Tonelli) 19.11(a) in [Als98]).

2.8. Lemma. *Gegeben sei ein nichtnegativer \mathcal{F}_t -progressiv meßbarer Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ für eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Dann gilt für jedes feste $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:*

$$(2.5) \quad \int_{t_0}^t \lambda(s) ds$$

ist adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

BEWEIS: Sei $t \in \mathbb{R}$. Klar ist, daß

$$\mathcal{F}_t \otimes \mathfrak{B}((-\infty, t]) = \sigma(A \times (a, b]; A \in \mathcal{F}_t, (a, b] \subset (-\infty, t]),$$

wobei der angegebene Erzeuger durchschnittsstabil ist. Für beliebige $A \in \mathcal{F}_t$ und $(a, b] \subset (-\infty, t]$ gilt

$$\int_{t_0}^t \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{(a,b]}(s) ds = \mathbb{1}_A(\omega)(b \vee t_0 - a \vee t_0),$$

die Abbildung $\omega \mapsto \int_{t_0}^t \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{(a,b]}(s) ds$ ist also \mathcal{F}_t -meßbar. Mittels eines Dynkin-System-Arguments (nutze den Satz von Fubini) folgt für alle $B \in \mathcal{F}_t \otimes \mathfrak{B}((-\infty, t])$ die \mathcal{F}_t -Meßbarkeit der Abbildungen $\omega \mapsto \int_{t_0}^t \mathbb{1}_B(\omega, s) ds$. Ein Funktions-Erweiterungsargument liefert schließlich unter Beachtung des Satzes von der monotonen Konvergenz die Behauptung. \square

3. Hawkes-Prozesse

Für die vorliegende Arbeit seien

$$(3.1) \quad \phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{und} \quad h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

stets *meßbare* Funktionen. An einigen Stellen wird es sinnvoll sein, h als Funktion auf \mathbb{R} aufzufassen, daher setzen wir dann $h(x) = 0$ für $x \in (-\infty, 0)$.

Wir werden uns mit (einfachen) Punkt-Prozessen befassen, welche eine \mathcal{F}_t^N -Intensität der Form

$$(D1) \quad \begin{aligned} \lambda(t) &= \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N(ds) \right) & [h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}] \\ &= \phi(h * N(t)) & [h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}] \end{aligned}$$

besitzen. Intensitäten der Form (D1) werden im folgenden meist als $(\mathcal{F}_t^N -)$ *Dynamiken* bezeichnet.

Einen Spezialfall solcher Prozesse stellen die *selbst-anregenden Punkt-Prozesse* von Hawkes dar. Für diese gilt:

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\rightarrow [0, \infty), \phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \nu + x, \\ h : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty)\end{aligned}$$

mit $\nu > 0$. Im folgenden sollen allgemeinere Funktionen ϕ betrachtet und der Bildbereich von h auf \mathbb{R} ausgeweitet werden. Aus der Verwendung solcher (i.a. nichtlinearen) Funktionen ϕ stammt die Bezeichnung *nichtlinearer Hawkes-Prozeß* für Punkt-Prozesse mit Intensitäten der Form (D1).

Der Begriff der (linearen) multivariaten Hawkes-Prozesse oder auch wechselseitig anregenden Punkt-Prozesse lässt sich zum Begriff des *multivariaten nichtlinearen Hawkes-Prozesses* erweitern. Ein solcher Prozeß ist eine Familie N_i , $1 \leq i \leq K$ ($K \in \mathbb{N}$), von einfachen Punkt-Prozessen ohne gemeinsame Punkte und zugehörigen \mathcal{F}_t^N -Intensitäten

$$(D2) \quad \lambda_i(t) = \phi_i \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j(ds) \right)$$

mit meßbaren Funktionen

$$(3.2) \quad \phi_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \quad \text{und} \quad h_{ji} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

$1 \leq i, j \leq K$. Wie bereits bei der Definition der K -variablen Punkt-Prozesse gelte

$$\mathcal{F}_t^N \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{N_i}; 1 \leq i \leq K).$$

Auch hier werden wir die \mathcal{F}_t^N -Intensität $((\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t)))_{t \in \mathbb{R}}$ von (N_1, \dots, N_K) meist als $(\mathcal{F}_t^N -)$ *Dynamik* bezeichnen. Die Funktionen ϕ bzw. ϕ_i werden auch *Anregungsfunktionen*, h bzw. h_{ji} *Übertragungsfunktionen* genannt.

3.1. Beispiel. Wählt man im univariaten Fall $\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \mathbb{1}_{[0, c-1]}(x)$ und $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{[0, a]}(t)$ ($c \in \mathbb{N}$, $a > 0$). Dann ist N der Input-Prozeß einer $M/D/c/0$ -Warteschlange, d.h. einer Warteschlange mit Poisson-verteilten Ankünften der Intensität $\lambda > 0$, Service-Zeiten $a > 0$, keinem Warteraum und c Servern. *

3.2. Beispiel. Unter Zuhilfenahme von Hawkes-Prozessen lässt sich *neuronale Aktivität*, auch *neuronales Netzwerk* genannt, modellieren. In dieser Situation bezeichnet

$$(3.3) \quad \lambda_i(t) = \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j(ds)$$

das *Potential von Neuron i* zur Zeit t , ϕ_i ist die *Anregungs-Funktion* von Neuron i und h_{ji} die *Transfer-Funktion* von Neuron j zu Neuron i . Gelte $\frac{1}{\lambda_i} \phi_i(x) = 1 - \mathbb{1}_{[0, \sigma_i]}(x)$, $\lambda_i > 0$, dann heißt σ_i die *Anregungs-Schwelle* von Neuron i , und das Neuron heißt *angeregt* zur Zeit t , falls $\lambda_i(t) > \sigma_i$, bzw. *in Ruhe* oder auch *gehemmt* zur Zeit t , falls $\lambda_i(t) \leq \sigma_i$. *

3.3. Beispiel. Betrachte ein Netzwerk, bestehend aus K Neuronen mit den Eigenschaften:
 Neuron $i \in \{1, \dots, K\}$ feuert mit einer Rate λ_i , falls für alle $j \in \{1, \dots, K\}$ das Neuron j in den letzten θ_{ji} -Zeiteinheiten nicht gefeuert hat ($\theta_{ji} \geq 0$ konstant), ansonsten ist es gehemmt.
 N_i heißt der *Punkt-Prozeß der Spitzen* von Neuron i , die Dynamik dieses Netzwerkes ist vom allgemeinen Typ (D2) mit $\phi_i(x) = \lambda_i \mathbb{1}_{[0,1)}(x)$ und $h_{ji} = \mathbb{1}_{[0,\theta_{ji}]}(t)$, denn

$$\begin{aligned}\lambda_i(t) &= \phi_i \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty,t)} h_{ji}(t-s) N_j(ds) \right) = \phi_i \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty,t)} \mathbb{1}_{[0,\theta_{ji}]}(t-s) N_j(ds) \right) \\ &= \phi_i \left(\sum_{j=1}^K \int_{[t-\theta_{ji},t)} N_j(ds) \right) = \lambda_i \mathbb{1}_{[0,1)} \left(\sum_{j=1}^K N_j[t - \theta_{ji}, t) \right).\end{aligned}$$

★

Das Ziel wird im folgenden sein, geeignete Bedingungen an die Funktionen ϕ und h (bzw. ϕ_i und h_{ji}) zu stellen, welche die Existenz und Eindeutigkeit einer stationären Version von N (bzw. $N = (N_1, \dots, N_K)$) sowie auch die Stabilität (im Sinne von 4.5) der stationären Version sichern.

4. Stabilität von Intensitäten

Sei $X \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) oder $X \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times E$ mit einem meßbaren Raum (E, \mathcal{E}) , $\mathcal{X} = \mathfrak{B}^k$ bzw. $\mathcal{X} = \mathfrak{B} \otimes \mathcal{E}$. Wir bezeichnen den meßbaren Raum der Radon-Maße auf X mit $(M(X), \mathcal{M}(X))$, dabei wird $\mathcal{M}(X)$ durch Abbildungen der Form $f_C : M(X) \rightarrow \mathbb{R}, \mu \mapsto \mu(C)$ erzeugt, also $\mathcal{M}(X) = \sigma(f_C; C \in \mathcal{X})$. Als abkürzende Schreibweise verwenden wir

$$(M_k, \mathcal{M}_k) \stackrel{\text{def}}{=} (M(\mathbb{R}^k), \mathcal{M}(\mathbb{R}^k))$$

sowie (M, \mathcal{M}) im Fall $k = 1$, außerdem

$$(M_E, \mathcal{M}_E) \stackrel{\text{def}}{=} (M(\mathbb{R} \times E), \mathcal{M}(\mathbb{R} \times E)).$$

Mit (M'_k, \mathcal{M}'_k) bezeichnen wir den Raum der *ganzzahligen* Radon-Maße auf \mathbb{R}^k , entsprechendes gelte für (M'_E, \mathcal{M}'_E) . Für weitergehende Betrachtungen dieser Räume verweisen wir auf [DVJ88] Abschnitt 6.1 und 7.1.

Verschiebungen eines Radon-Maßes auf der reellen Achse lassen sich mit dem Shift-Operator darstellen.

4.1. Definition (Shift). Der *Shift-* (oder auch *Translations-*) *Operator* S_t auf $M = M_1$ wird definiert durch

$$(4.1) \quad S_t \mu(C) = \mu(t + C)$$

für $\mu \in M$ und alle $C \in \mathfrak{B}$. Auf M_k ($k \geq 2$) oder M_E wirke der Operator nur auf die erste Komponente des Grundraumes:

$$(4.2) \quad S_t\mu(C \times L) = \mu((t + C) \times L)$$

für $\mu \in M_k$ und alle $C \in \mathfrak{B}$, $L \in \mathfrak{B}^{k-1}$ (bzw. $\mu \in M_E$, $C \in \mathfrak{B}$, $L \in E$).

Es stellt $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$ einen *meßbaren Fluß* auf (M_1, \mathcal{M}_1) bzw. (M_E, \mathcal{M}_E) dar (vergleiche [BB94] 1.1 und 1.3), d.h. die Abbildung $(t, \mu) \mapsto S_t\mu$ ist $\mathfrak{B} \times \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_1$ -meßbar (bzw. $\mathfrak{B} \times \mathcal{M}_E - \mathcal{M}_E$ -meßbar), S_t ist bijektiv und $S_t \circ S_u = S_{t+u}$ für alle $t, u \in \mathbb{R}$.

Der Shift-Operator besitze Vorrang vor der Einschränkung eines Punkt-Prozesses auf die positive oder negative reelle Halbachse, d.h. $S_t N^\pm = N((t + \cdot) \cap \mathbb{R}^\pm)$.

Nach Definition gilt für einen K -variablen Punkt-Prozeß $N = (N_1, \dots, N_K)$ nach Anwendung des Shift-Operators $S_t N = (S_t N_1, \dots, S_t N_K)$.

4.2. Definition (Stationarität und θ_t -Kompatibilität). (i) Ein Punkt-Prozeß N heißt *stationär*, falls $\mathbf{P}(N \in \cdot) = \mathbf{P}(S_t N \in \cdot)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(ii) Sei $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein meßbarer Fluß auf einem meßbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) , vergleiche [BB94] Kapitel 1 1.2. Ein Punkt-Prozeß N heißt θ_t -kompatibel, wenn er für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$

$$(4.3) \quad S_t N(\omega, \cdot) = N(\theta_t \omega, \cdot)$$

erfüllt. Eine Verschiebung einer Realisierung des Punkt-Prozesses als Radon-Maß entspricht also einer „Verschiebung“ der zufälligen Komponente.

Für einen stochastischen Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ verwenden wir ebenfalls das Symbol S_u , um die Verschiebung um u Zeiteinheiten darzustellen: $S_u \lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(u + t)$.

Wir übernehmen auf (M', \mathcal{M}') die Definition der vagen und schwachen Konvergenz aus [Als98] (Definition 36.1 und 43.4): eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Maßen aus M' konvergiert vage gegen einen Grenzwert $\mu \in M'$, wenn für alle stetigen Funktionen f auf \mathbb{R} mit kompakten Träger

$$(4.4) \quad \int f \, d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f \, d\mu$$

gilt. Die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen μ , falls (4.4) für alle stetigen und beschränkten Funktionen f auf \mathbb{R} richtig ist.

Der Raum der ganzzahligen Maße (M', \mathcal{M}') auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ wird versehen mit der Topologie der *vagen Konvergenz*.

4.3. Definition (Anfangsbedingung und Konvergenz). (i) Der Punkt-Prozeß N besitzt die *Anfangsbedingung* (\mathcal{P}_-) , falls die Beschränkung von N auf $(-\infty, 0]$, also $N^- = S_0 N^-$, die Bedingung (\mathcal{P}_-) erfüllt.

(ii) Eine Folge $(N^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkt-Prozessen konvergiert in Verteilung gegen einen Grenzprozeß N , wenn die zugehörigen auf M' induzierten Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{P}(N^{(n)} \in \cdot)$ schwach

gegen $\mathbf{P}(N \in \cdot)$ konvergieren.

Eine solche Folge $(N^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in Variation gegen N , wenn

$$(4.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{C \in \mathcal{M}'} |\mathbf{P}(N^{(n)} \in C) - \mathbf{P}(N \in C)| = 0.$$

Ein nützliches Kriterium zur Prüfung auf Konvergenz in Verteilung einer Folge $(N^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkt-Prozessen gegen einen Grenzprozeß N findet sich in [DVJ88] (Theorem 9.1.VI.): $\mathbf{P}(N^{(n)} \in \cdot)$ konvergiert genau dann schwach gegen $\mathbf{P}(N \in \cdot)$, wenn für jede endliche Familie beschränkter Mengen $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{B}$ mit $\mathbf{P}(N(\delta A_i) > 0) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ die Verteilung von $(N^{(n)}(A_1), \dots, N^{(n)}(A_k))$ schwach in \mathbb{R}^k gegen die Verteilung von $(N(A_1), \dots, N(A_k))$ konvergiert (im „üblichen“ Sinn, siehe [Als98] Abschnitt 43). Dabei bezeichnet δA den topologischen Rand der Menge $A \in \mathfrak{B}$.

Mit den nun vorhandenen Konvergenzbegriffen können wir die Stabilität eines Punkt-Prozesses definieren. Zuvor noch ein Beispiel für eine Anfangsbedingung eines K -variablen Punkt-Prozesses N .

4.4. Beispiel. Gegeben sei ein K -variabler Punkt-Prozeß $N = (N_1, \dots, N_K)$. Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_i((-t, 0])}{t} = \alpha_i$$

f.s. für $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq K$, eine Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) . ★

Die Definition von Stabilität geben wir nur für die Dynamik (D2), da (D1) den Spezialfall $K = 1$ darstellt.

Wir werden im folgenden sagen, daß der Punkt-Prozeß N die Dynamik (D2) auf $[0, \infty)$ besitzt, falls (1.7) für alle $(a, b] \subset [0, \infty)$ gilt.

4.5. Definition (Stabilität). Die Dynamik (D2) heißt *stabil in Verteilung* (bzw. *Variation*) bezüglich einer Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) , wenn für alle Punkt-Prozesse N' mit Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) , welche eine Dynamik (D2) auf $[0, \infty)$ zulassen, ein Punkt-Prozeß N existiert mit

(ST1) N folgt der Dynamik (D2) auf \mathbb{R} und ist stationär,

(ST2) $S_t N'^+ \xrightarrow{\text{Vert.}} N^+$ für $t \rightarrow +\infty$ (bzw. $S_t N'^+ \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{Var.}} N^+$).

Klar ist, daß die Stabilität in Variation die Stabilität in Verteilung impliziert. Koppelt jeder Punkt-Prozeß N' wie in 4.5 bereits mit einem stationären Punkt-Prozeß mit der gewünschten Intensität, so erhalten wir bereits Stabilität in Variation, wie Lemma 4.6 zeigt.

4.6. Lemma. Zu beliebigem Punkt-Prozeß N' mit Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) und Dynamik (D2) lasse sich auf $[0, \infty)$ ein Prozeß N auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum konstruieren, welcher (ST1) erfüllt. Ferner koppeln N und N' , d.h.

(ST2') $S_t N^+ \equiv S_t N'^+$ f.s. für alle $t \geq T$, T Zufallsgröße mit $\mathbf{P}(T < +\infty) = 1$.

Dann ist die Dynamik (D2) stabil in Variation bezüglich der Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) .

BEWEIS: Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathcal{M}'$ gilt unter Ausnutzung der Stationarität von N

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) - \mathbf{P}(N^+ \in C) \\ &= \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C, S_t N'^+ \neq S_t N^+) - \mathbf{P}(S_t N^+ \in C, S_t N'^+ \neq S_t N^+) \\ &\quad + \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C, S_t N'^+ = S_t N^+) - \mathbf{P}(S_t N^+ \in C, S_t N'^+ = S_t N^+) \\ &\leq \mathbf{P}(S_t N'^+ \in M', S_t N'^+ \neq S_t N^+) \\ &\leq \mathbf{P}(S_t N'^+ \neq S_t N^+) \\ &\leq \mathbf{P}(T > t) \end{aligned}$$

und analog $\mathbf{P}(N^+ \in C) - \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) \leq \mathbf{P}(T > t)$. Somit folgt die Kopplungsungleichung und Konvergenz in Variation gegen 0:

$$\sup_{C \in \mathcal{M}'} |\mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) - \mathbf{P}(N^+ \in C)| \leq \mathbf{P}(T > t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

denn $T < +\infty$ f.s.. □

Das folgende Lemma können wir nutzen, um die Eindeutigkeit von stationären Punkt-Prozessen mit gegebener Anfangsbedingung und auf $[0, \infty)$ vorgegebener Intensität zu zeigen.

4.7. Lemma. *Existiere zu Dynamik (D2) eine Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) , so daß (D2) stabil in Verteilung (oder Variation) ist. Sei für jeden Punkt-Prozeß N' , welcher (\mathcal{P}_-) erfüllt und auf $[0, \infty)$ der Dynamik (D2) folgt, die Verteilung des in (ST1) auftretenden stationären Punkt-Prozesses N gleich. In diesem Fall gilt:*

Jeder stationäre Punkt-Prozeß N' , der die Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) besitzt und der Dynamik (D2) auf $[0, \infty)$ genügt, ist verteilt wie N .

Erfüllt außerdem jeder stationäre Punkt-Prozeß, welcher die Dynamik (D2) auf $[0, \infty)$ besitzt, die Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) , so ist die stationäre Lösung eindeutig.

BEWEIS: Sei N' ein stationärer Punkt-Prozeß, der die Anfangsbedingung (\mathcal{P}_-) besitzt und der Dynamik (D2) auf $[0, \infty)$ folgt. Somit gilt $\mathbf{P}^{S_0 N'^+} = \mathbf{P}^{N'^+} = \mathbf{P}^{S_t N'^+}$ für alle $t \in [0, \infty)$. Es folgt $\mathbf{P}^{N'^+} = \mathbf{P}^{N^+}$, da $S_t N'^+ \xrightarrow{t \rightarrow \infty} N^+$ in Verteilung.

Die Stationarität von N' und N liefert außerdem $\mathbf{P}^{S_t N'^+} = \mathbf{P}^{N'^+} = \mathbf{P}^{N^+} = \mathbf{P}^{S_t N^+}$ für $t \in (-\infty, 0]$, d.h. N' ist wie N verteilt.

Die zweite Aussage ist hiermit ebenfalls klar. □

Wir werden in diesem Text einen Punkt-Prozeß $N = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ transient nennen, falls T_n für $n \rightarrow \infty$ f.s. gegen unendlich strebt. In Stabilitätsbeweisen reicht es, transiente Punkt-Prozesse zu betrachten: für ein $\omega \in \Omega$ mit $T_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in (0, \infty)$ gilt nach Definition 1.1, daß $N(\omega, (x, \infty)) =$

0. Auf der Menge $\{\omega \in \Omega; T_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \text{ für ein } x \in (0, \infty)\}$ strebt $S_t N^+$ für $t \rightarrow \infty$ also gegen den leeren Punkt-Prozeß ohne einen einzigen Punkt auf \mathbb{R} .

5. Eigenschaften von Punkt-Prozessen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer technischen Hilfsaussage, die wir im folgenden ohne explizite Nennung verwenden werden.

5.1. Lemma. *Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration, $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ein nichtnegativer \mathcal{F}_t -vorhersagbarer Prozeß und $x \leq a < b$. Dann gilt:*

$$(5.1) \quad \mathbf{E}\left(\int_a^b \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_x\right) = \int_a^b \mathbf{E}(\lambda(t) \mid \mathcal{F}_x) dt \quad f.s..$$

Beweis: Wir beginnen mit einem Dynkin-System-Argument, um die $\mathcal{F}_x \otimes \mathfrak{B}$ -Meßbarkeit der Abbildung

$$(5.2) \quad (\omega, t) \mapsto \mathbf{E}(\lambda(t) \mid \mathcal{F}_x)(\omega)$$

für $\lambda(t) = \mathbb{1}_D(\cdot, t)$, $D \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$, zu zeigen. Das Mengen-System \mathcal{E}_1 aus 2.1 ist ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$. Für $A \times (a, \infty) \in \mathcal{E}_1$ gilt:

$$\mathbf{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(a, \infty)}(t) \mid \mathcal{F}_x) = \mathbb{1}_{(a, \infty)}(t) \mathbf{E}(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_x),$$

d.h. für $\lambda(t) = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(a, \infty)}(t)$ gilt die $\mathcal{F}_x \otimes \mathfrak{B}$ -Meßbarkeit von (5.2). Man rechnet leicht nach, daß das Mengensystem

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{D \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t); (\omega, t) \mapsto \mathbf{E}(\mathbb{1}_D(\cdot, t) \mid \mathcal{F}_x)(\omega) \text{ ist } \mathcal{F}_x \otimes \mathfrak{B}\text{-meßbar}\}$$

ein Dynkin-System bildet. Damit ist die oben genannte Behauptung gezeigt.

Ein Funktions-Erweiterungsargument liefert unter Beachtung monotoner Konvergenz für bedingte Erwartungswerte die $\mathcal{F}_x \otimes \mathfrak{B}$ -Meßbarkeit von (5.2) für alle nichtnegativen \mathcal{F}_t -vorhersagbaren $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

Nach dieser Vorarbeit liefert der Satz von Fubini für beliebige Mengen $A \in \mathcal{F}_x$:

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{E}\left(\int_a^b \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_x\right) d\mathbf{P} &= \int_A \int_a^b \lambda(t) dt d\mathbf{P} = \int_a^b \int_A \lambda(t) d\mathbf{P} dt \\ &= \int_a^b \int_A \mathbf{E}(\lambda(t) \mid \mathcal{F}_x) d\mathbf{P} dt = \int_A \int_a^b \mathbf{E}(\lambda(t) \mid \mathcal{F}_x) dt d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung der definierenden Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes zeigt dies das Gewünschte. \square

Da für die Punkte der negativen reellen Achse eines Punkt-Prozesses N zu einem „Zeit“-punkt $t < 0$ bei Kenntnis der Vergangenheit bis zu diesem t nicht entschieden werden kann, an

welcher Position ein solcher Punkt in der Folge der negativen Punkte eingeordnet werden muß („ n -ter Punkt vor 0“ oder „ $n+1$ -ter Punkt vor 0“ oder ...?), stellen diese Punkte keine Stopzeiten bezüglich der internen Filtration dar. Auf $(0, \infty)$ ist dies jedoch der Fall.

5.2. Lemma. *Sei $N = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} . Die Punkte der positiven reellen Halbachse $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind dann \mathcal{F}_t^N -Stopzeiten, denn für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \{T_n \leq t\} &= \begin{cases} \emptyset & \text{für } t \leq 0 \\ \{N((0, t]) \geq n\} & \text{für } t > 0 \end{cases} \\ &\in \mathcal{F}_t^N. \end{aligned}$$

Schränken wir einen Punkt-Prozeß mit existierender \mathcal{F}_t -Intensität auf die positive reelle Halbachse ein, so läßt sich auch für diesen Prozeß die \mathcal{F}_t -Intensität angeben.

5.3. Lemma. *Gegeben sei eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ und ein \mathcal{F}_t -adaptierter Punkt-Prozeß N mit \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Dann besitzt N^+ die durch*

$$(5.3) \quad \lambda_+(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \lambda(t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

definierte \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda_+(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

BEWEIS: In den Fällen $(a, b] \subset (-\infty, 0)$ oder $(a, b] \subset [0, \infty)$ rechnet man die definierende Gleichung (1.7) sofort nach. Sei also $(a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in (a, b]$. Dafür gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N^+((a, b]) \mid \mathcal{F}_a) &= \mathbf{E}(N((0, b]) \mid \mathcal{F}_a) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(N((0, b]) \mid \mathcal{F}_0) \mid \mathcal{F}_a) \\ &= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\int_0^b \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_0\right) \mid \mathcal{F}_a\right) = \mathbf{E}\left(\int_a^b \lambda_+(t) dt \mid \mathcal{F}_a\right), \end{aligned}$$

denn $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_0$. □

Die Hinzunahme von Informationen, die unabhängig vom vorgegebenen Prozeß sind, ändert die Beziehung zwischen Punkt-Prozeß und Intensität nicht, d.h. bedingen wir nicht nur unter der ursprünglichen σ -Algebra zum Zeitpunkt a , sondern zusätzlich unter der davon unabhängigen σ -Algebra zum Zeitpunkt a , so gewinnen wir keine neuen Erkenntnisse über das Verhalten von Punkt-Prozeß und Intensität in $(a, b]$.

5.4. Satz. *Sei N ein Punkt-Prozeß mit \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ und $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine weitere, von \mathcal{F}_∞ (und damit von \mathcal{F}_∞^N) unabhängige Filtration. Dann ist $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ebenfalls eine $\sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t)$ -Intensität von N .*

BEWEIS: Die Unabhängigkeit von \mathcal{F}_a und \mathcal{G}_a zeigt unter Verwendung von Lemma 2.8

$$\mathbf{E}(N((a, b]) \mid \mathcal{F}_a, \mathcal{G}_a) = \mathbf{E}(N((a, b]) \mid \mathcal{F}_a) = \mathbf{E}\left(\int_a^b \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_a\right) = \mathbf{E}\left(\int_a^b \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_a, \mathcal{G}_a\right)$$

f.s. für beliebige Mengen $(a, b] \subset \mathbb{R}$. □

5.5. Satz (Risikorate). Sei N ein (einfacher) Punkt-Prozeß, welcher eine \mathcal{F}_t^N -vorhersagbare Intensität der Form $\lambda(t) = \nu(N, t)$ auf $[0, \infty)$ zuläßt. Dann gilt:

$$(5.4) \quad \mathbf{P}(N((0, t]) = 0 \mid \mathcal{F}_0^N) = \exp\left(-\int_0^t \nu(N^-, s) ds\right)$$

für alle $t \in (0, \infty]$ auf der Menge $\left\{\int_0^t \nu(N^-, s) ds < \infty\right\}$.

Es wird in 5.5 nicht gefordert, daß die \mathcal{F}_t^N -Intensität $\lambda(t)$ von der Form $\nu(N, t)$ ist. Dies gilt vielmehr, da $\lambda(t)$ \mathcal{F}_t^N -vorhersagbar ist, vergleiche 2.4.

Auf der Menge $\left\{\int_0^t \nu(N^-, s) ds = \infty\right\}$ nimmt Gleichung (5.4) die Gestalt

$$\mathbf{P}(N((0, t]) = 0 \mid \mathcal{F}_0^N) = 0$$

an. Als Basis zum Nachweis dieser Behauptung kann die Anwendung von 5.5 auf Punkt-Prozesse $N^{(n)}$ mit Intensität $\lambda^{(n)}(t) = \lambda(t) \wedge n$ genutzt werden. Dabei werden die Prozesse $N^{(n)}$ aus dem Prozeß N unter Verwendung der Aussagen 6.11 (bzw. 6.12) und 6.14 des nachfolgenden Abschnitts konstruiert (ähnlich dem Vorgehen wie z.B. im Beweis von 8.7). Auf weitere Details verzichten wir und kommen nun zum Beweis von 5.5.

BEWEIS (VON SATZ 5.5): Sei $t \in (0, \infty]$. Unmittelbar klar ist die Gleichheit

$$(5.5) \quad \mathbb{1}_{\{N((0, t])=0\}} = 1 - \int_{(0, t]} \mathbb{1}_{\{N((0, s))=0\}} N(ds).$$

Sei $A \in \mathcal{F}_0^N$ beliebig. Die Abbildung $(\omega, s) \mapsto \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{(0, t]}(s)$ ist $\mathcal{P}(\mathcal{F}_s^N)$ -meßbar. Gezeigt wird nun die \mathcal{F}_s^N -Vorhersagbarkeit der Abbildung

$$(5.6) \quad (\omega, s) \mapsto \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{(0, t]}(s) \mathbb{1}_{\{N((0, s))=0\}}(\omega).$$

Hierfür reicht es, die $\mathcal{P}(\mathcal{F}_s^N)$ -Meßbarkeit der Menge $\{(\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}; N(\omega, (0, s)) = 0\}$ nachzuweisen. Da $\{\omega \in \Omega; T_1(\omega) \geq a\} = \{\omega \in \Omega; N(\omega, (0, a)) = 0\} \in \mathcal{F}_a^N$ für alle $a \in [0, \infty)$, ergibt sich aus der Darstellung

$$\begin{aligned} &\{(\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}; N(\omega, (0, s)) = 0\} \\ &= \Omega \times (-\infty, 0] \cup \{(\omega, s) \in \Omega \times (0, \infty); T_1(\omega) \geq s > 0\} \end{aligned}$$

mit Anhang A1.1 das Gewünschte: $\{(\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}; N(\omega, (0, s)) = 0\} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_s^N)$.

Multiplikation von Gleichung (5.5) mit $\mathbb{1}_A$ liefert wegen der Vorhersagbarkeit von (5.6) unter Beachtung von Bemerkung 1.6

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{N((0, t]) = 0\} \cap A) &= \mathbf{E} \mathbb{1}_A - \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A \int_{(0, t]} \mathbb{1}_{\{N((0, s))=0\}} N(ds)\right) \\ &= \mathbf{P}(A) - \mathbf{E}\left(\int \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(0, t]}(s) \mathbb{1}_{\{N((0, s))=0\}} N(ds)\right) \\ &= \mathbf{P}(A) - \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A \int_{(0, t]} \mathbb{1}_{\{N((0, s))=0\}} \lambda(s) ds\right) \\ &\stackrel{(1)}{=} \mathbf{P}(A) - \mathbf{E}\left(\mathbb{1}_A \int_{(0, t]} \mathbb{1}_{\{N((0, s))=0\}} \nu(N^-, s) ds\right). \end{aligned}$$

Unter (1) wurde die aus der Darstellung $\lambda(s) = \nu(N, s)$ resultierende Identität

$$\mathbb{1}_{\{N((0,s])=0\}}\lambda(\cdot, s) = \mathbb{1}_{\{N((0,s])=0\}}\nu(N, s) = \mathbb{1}_{\{N((0,s])=0\}}\nu(N^-, s)$$

genutzt (siehe auch Korollar 2.6). Dies wiederum zeigt mit dem Satz von Fubini, daß

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{N((0,t])=0\} \mid \mathcal{F}_0^N) &= \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{N((0,t])=0\}} \mid \mathcal{F}_0^N) \\ &= 1 - \mathbf{E}\left(\int_{(0,t]} \mathbb{1}_{\{N((0,s])=0\}}\nu(N^-, s) ds \mid \mathcal{F}_0^N\right) \\ &= 1 - \int_{(0,t]} \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{N((0,s])=0\}}\nu(N^-, s) \mid \mathcal{F}_0^N) ds \\ &= 1 - \int_{(0,t]} \mathbf{P}(N((0,s])=0 \mid \mathcal{F}_0^N) \nu(N^-, s) ds. \end{aligned}$$

Eine induktive Anwendung dieser Gleichung liefert ($s_0 \stackrel{\text{def}}{=} t$)

$$\begin{aligned} (5.7) \quad \mathbf{P}(N((0,t])=0 \mid \mathcal{F}_0^N) &= 1 \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^{s_0} \nu(N^-, s_1) \int_0^{s_1} \nu(N^-, s_2) \cdots \int_0^{s_{k-1}} \nu(N^-, s_k) ds_k \dots ds_2 ds_1 \\ &+ (-1)^{n+1} \int_0^{s_0} \nu(N^-, s_1) \int_0^{s_1} \nu(N^-, s_2) \cdots \int_0^{s_{n-1}} \nu(N^-, s_n) \\ &\quad \int_0^{s_n} \mathbf{P}(N((0,s_{n+1}])=0 \mid \mathcal{F}_0^N) \nu(N^-, s_{n+1}) ds_{n+1} ds_n \dots ds_2 ds_1. \end{aligned}$$

In A2.1 wird gezeigt:

$$\begin{aligned} (5.8) \quad \int_0^{s_0} \nu(N^-, s_1) \int_0^{s_1} \nu(N^-, s_2) \cdots \int_0^{s_{k-1}} \nu(N^-, s_k) ds_k \dots ds_2 ds_1 \\ = \frac{\left(\int_0^t \nu(N^-, s) ds\right)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Aus (5.7) und (5.8) folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(\int_0^t \nu(N^-, s) ds\right)^k}{k!} - \frac{\left(\int_0^t \nu(N^-, s) ds\right)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \leq \mathbf{P}(N((0,t])=0 \mid \mathcal{F}_0^N) \leq \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(\int_0^t \nu(N^-, s) ds\right)^k}{k!} + \frac{\left(\int_0^t \nu(N^-, s) ds\right)^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

was im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ wegen $\frac{\left(\int_0^t \nu(N^-, s) ds\right)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ zu Gleichung (5.4) führt. \square

Satz 5.5 kann im Fall der K -variablen Punkt-Prozesse auf den Prozeß übertragen werden, der die gesamten Punkte aller univariaten Punkt-Prozesse umfaßt.

5.6. Korollar. Bezeichne $N = (N_1, \dots, N_K)$ einen K -variaten Punkt-Prozeß mit \mathcal{F}_t^N -vorher-sagbarer \mathcal{F}_t^N -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}} = ((\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t)))_{t \in \mathbb{R}}$. Die Komponenten besitzen eine Darstellung $\lambda_i(t) = \nu_i(N_1, \dots, N_K, t)$. Außerdem besitzen die einzelnen Prozesse N_1, \dots, N_K f.s. keine gemeinsamen Punkte. Dann gilt:

$$(5.9) \quad \mathbf{P}(N((0, t] \times \{1, \dots, K\}) = 0 \mid \mathcal{F}_0^N) = \exp \left(- \sum_{i=1}^K \int_0^t \nu_i(N_1^-, \dots, N_K^-, s) ds \right)$$

für alle $t \in [0, \infty]$ auf $\left\{ \sum_{i=1}^K \int_0^t \nu_i(N_1^-, \dots, N_K^-, s) ds < \infty \right\}$.

BEGRÜNDUNG: Der Beweis von 5.5 läßt sich vollständig übernehmen, wenn man beachtet, daß aus

$$\mathbb{1}_{\{N((0,t] \times \{1,\dots,K\})=0\}} = 1 - \int_{(0,t]} \mathbb{1}_{\{N((0,s) \times \{1,\dots,K\})=0\}} N(ds \times \{1, \dots, K\})$$

für beliebige Mengen $A \in \mathcal{F}_0^N$ bereits

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{N((0, t] \times \{1, \dots, K\}) = 0\} \cap A) \\ = \mathbf{P}(A) - \sum_{i=1}^K \mathbf{E} \left(\int_{(0,t]} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{N((0,s) \times \{1,\dots,K\})=0\}} N(ds \times \{i\}) \right) \\ = \mathbf{P}(A) - \sum_{i=1}^K \mathbf{E} \left(\int_{(0,t]} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{N((0,s) \times \{1,\dots,K\})=0\}} \nu_i(N_1^-, \dots, N_K^-, s) ds \right) \end{aligned}$$

folgt. Definiere $\nu(N_1^-, \dots, N_K^-, s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^K \nu_i(N_1^-, \dots, N_K^-, s)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{N((0, t] \times \{1, \dots, K\}) = 0\} \mid \mathcal{F}_0^N) \\ = 1 - \int_{(0,t]} \mathbf{P}(\{N((0, s] \times \{1, \dots, K\}) = 0\} \mid \mathcal{F}_0^N) \nu(N_1^-, \dots, N_K^-, s) ds, \end{aligned}$$

was als Basis für die Übernahme des weiteren Beweises dienen möge. \diamond

Abschließend geben wir noch einen Test für das Vorliegen von Stationarität an.

5.7. Lemma. Sei \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein meßbarer Fluß auf (Ω, \mathcal{F}) mit $\mathbf{P} \circ \theta_t = \mathbf{P}$ sowie N ein θ_t -kompatibler Punkt-Prozeß. Dann ist N stationär.

BEWEIS: Sei $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$ und $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{B}$ beschränkt. Somit folgt

$$\begin{aligned} (5.10) \quad & \mathbf{P}(N(A_i + t) = n_i, i = 1, \dots, k) \\ & = \mathbf{P}(S_t N(A_i) = n_i, i = 1, \dots, k) \\ & = \mathbf{P}(N(\theta_t \cdot, A_i) = n_i, i = 1, \dots, k) \\ & = \mathbf{P}(\{\theta_{-t} \omega \in \Omega; N(\omega, A_i) = n_i, i = 1, \dots, k\}) \\ & = \mathbf{P}(N(A_i) = n_i, i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Nach [DVJ88] Kapitel 6.2 Proposition 6.2.III. folgt hieraus die Stationarität von N . \square

Die mittlere Intensität λ eines stationären Punkt-Prozesses N ist die erwartete Zahl der Punkte von N im Intervall $(0, 1]$: $\lambda = \mathbf{E}N((0, 1])$.

5.8. Lemma. *Sei N ein stationärer Punkt-Prozeß mit endlicher mittlerer Intensität $\lambda \in \mathbb{R}$. Für beliebige $C \in \mathfrak{B}$ gilt*

$$(5.11) \quad \mathbf{E}N(C) = \lambda \mathbb{A}(C)$$

und für beliebige nichtnegative meßbare Funktionen f besteht die Gleichheit

$$(5.12) \quad \mathbf{E}\left(\int f(u) N(du)\right) = \lambda \int f(u) \mathbb{A}(du).$$

BEWEIS: Da N stationär ist, gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathfrak{B}$, daß $\mathbf{E}N(C) = \mathbf{E}N(C + t)$. Gleichung (5.11) folgt aus [Als98] Satz 7.5, denn $\mathbf{E}N(\cdot)$ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Nun können wir (5.11) umschreiben zu

$$\mathbf{E}\left(\int \mathbb{1}_C(u) N(du)\right) = \lambda \int \mathbb{1}_C(u) \mathbb{A}(du).$$

Durch Anwendung des Funktions-Erweiterungsarguments folgt schließlich (5.12). \square

6. Poisson-Prozesse

Der erste Unterabschnitt gibt die Definition eines Poisson-Prozesses sowie einige aus [DVJ88] bekannte Eigenschaften dieser Prozesse wieder. Interessante Ergebnisse für die Konstruktion von Punkt-Prozessen werden im zweiten Unterabschnitt wiedergegeben.

Wir erinnern daran, daß für die Funktionen h und ϕ stets Meßbarkeit unterstellt wird, siehe Beginn von Abschnitt 3.

1) Definition und Ergodizität. Die allgemeine Definition eines Poisson-Prozesses auf \mathbb{R}^k lautet:

6.1. Definition (Poisson-Prozeß). Sei $\bar{N}(\omega, \cdot)$ für alle $\omega \in \Omega$ ein ganzzahliges Radon-Maß auf \mathbb{R}^k und $\bar{N}(C)$ meßbar für alle $C \in \mathfrak{B}^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Außerdem gelte für alle endlichen Familien disjunkter und beschränkter Borel-Mengen $A_i \in \mathfrak{B}^k$, $1 \leq i \leq n$ mit $n \in \mathbb{N}$, und $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$(6.1) \quad \mathbf{P}(\bar{N}(A_i) = j_i; 1 \leq i \leq n) = \prod_{i=1}^n \frac{(\mu(A_i))^{j_i}}{j_i!} e^{-\mu(A_i)}$$

mit einem Maß μ auf \mathbb{R}^k . Dann heißt \bar{N} Poisson-Prozeß mit Intensitäts- (oder auch Parameter-) Maß μ auf \mathbb{R}^k und im Fall $\mu = \Lambda \lambda^k$ Poisson-Prozeß mit Parameter (oder auch Intensität) Λ .

Von Interesse werden hier nur solche Poisson-Prozesse auf \mathbb{R} oder \mathbb{R}^2 sein, deren Intensitätsmaß ein rationales Vielfaches des Lebesgue-Massen ist. Zu einem Poisson-Prozeß \bar{N} auf \mathbb{R}^2 definieren wir die zugehörige *interne Filtration* wie bei einem markiertem Punkt-Prozeß mit Markenraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$:

$$\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\bar{N}(C); C \in \mathfrak{B}((-\infty, t]) \otimes \mathfrak{B}).$$

6.2. Bemerkung. Gegeben sei ein Poisson-Prozeß mit Parameter-Maß μ auf \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$.

- (i) Dann besitzt \bar{N} die *vollständige Unabhängigkeits-Eigenschaft*, d.h. die Zufallsvariablen $\bar{N}(A_i)$, $1 \leq i \leq n$, sind für disjunkte und beschränkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}^k$ stochastisch unabhängig.
- (ii) Im Fall $\mu = \Lambda \lambda^k$ ist die Zahl der Punkte in jedem nichtleeren, beschränkten Intervall $A \in \mathfrak{B}$ f.s. endlich und nicht f.s. 0. Außerdem ist \bar{N} stationär.

Bezeichne \bar{N} einen Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^k mit Intensitäts-Maß μ und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration mit $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \subset \mathcal{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Außerdem seien \mathcal{F}_s und $S_t N^+$ unabhängig für alle $s < t$. Wir sprechen dann auch von einem \mathcal{F}_t -Poisson-Prozeß. Für alle nichtnegativen Abbildungen $H : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, die $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B}^{k-1}$ -meßbar sind, gilt

$$(6.2) \quad \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}^k} H(\cdot, t) \bar{N}(dt)\right) = \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}^k} H(\cdot, t) \mu(dt)\right),$$

was sich sofort durch ein Funktions-Erweiterungsargument verifizieren läßt.

Wir werden einen markierten Punkt-Prozeß $\bar{N} = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ markierten Poisson-Prozeß mit Intensitäts-Maß μ (bzw. Parameter Λ) nennen, falls $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Poisson-Prozeß mit Intensitäts-Maß μ (bzw. Parameter Λ) ist.

Sei $\bar{N} = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein markierter Poisson-Prozeß mit Parameter-Maß μ , welcher bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \subset \mathcal{F}_t$ für alle $t \in \mathbb{R}$, die Eigenschaft „ \mathcal{F}_s und $S_t \bar{N}^+$ sind unabhängig für alle $s < t$ “ besitzt. Außerdem sei $\mathcal{F}_{\infty}^{\bar{N}(\cdot \times E)}$ unabhängig von der Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen $((E, \mathcal{E})$ Markenraum). Es gilt dann als Analogon zu (6.2):

Für alle nichtnegativen Abbildungen $H : \Omega \times \mathbb{R} \times E \rightarrow \mathbb{R}$, die $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{E}$ -meßbar sind, gilt

$$(6.3) \quad \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R} \times E} H(\cdot, t, z) \bar{N}(dt \times dz)\right) = \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R} \times E} H(\cdot, t, z) \mu(dt) Q(dz)\right)$$

falls $\mathbf{P}^{U_n} = Q$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Auch dies läßt sich mittels eines Funktions-Erweiterungsarguments aufgrund der vorausgesetzten Unabhängigkeiten zeigen.

Stelle \bar{N} einen \mathcal{F}_t -Poisson-Prozeß der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dar, dann ist $\bar{N}(\cdot \times [0, \Lambda])$ ein \mathcal{F}_t -Poisson-Prozeß der Intensität Λ auf \mathbb{R} . Dazu reicht der Hinweis, daß für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $(a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{N}((a, b]) = k) &= e^{-\lambda^2(a, b] \times (0, \Lambda)} \frac{(\lambda^2(a, b] \times (0, \Lambda))^k}{k!} \\ &= e^{-\Lambda \lambda((a, b])} \frac{\Lambda^k (\lambda((a, b]))^k}{k!} \end{aligned}$$

gilt.

6.3. Lemma. Sei $A \in (0, \infty)$ und $\bar{N} = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein homogener Poisson-Prozeß mit Intensität $\Lambda \in (0, \infty)$ auf \mathbb{R} . Ein Punkt T_n von N sei ein Punkt des Punkt-Prozesses R genau dann, wenn $T_n - T_{n-1} > A$. Die Punkte des resultierenden Punkt-Prozesses R werden mit $(R_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bezeichnet, wobei die üblichen Konventionen erfüllt sein sollen.

Dann gilt:

$$(i) \lim_{k \rightarrow -\infty} R_k = -\infty \text{ f.s.}$$

$$(ii) R^-(s) = \hat{R}^-(s) \text{ für alle } s \in \mathbb{R}, \text{ dabei ist}$$

$$R^-(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{R_k; k \in \mathbb{Z}, R_k \leq s\}$$

$$\hat{R}^-(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{t \leq s; N([t - A, t)) = 0, N([t - A, t]) \geq 1\}$$

mit der Festlegung $\sup \emptyset = -\infty$.

$$(iii) R^-(s) \text{ ist } \mathcal{F}_s^N\text{-meßbar, } s \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS: zu (i). Wähle $t \in (-\infty, 0]$. Die Zuwächse $T_n - T_{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, eines Poisson-Prozesses sind unabhängig $\text{Exp}(\Lambda)$ -verteilt. Mit Borel-Cantelli folgt aus

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \leq 0} \mathbf{P}(T_n - T_{n-1} > A) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \leq 0} \int_A^\infty \Lambda e^{-\Lambda t} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z} \leq 0} e^{-\Lambda A} = \infty$$

$T_n - T_{n-1} > A$ unendlich oft f.s. ($n \in \mathbb{Z} \leq 0$) und damit natürlich $R_n \rightarrow \infty$ f.s. für $n \rightarrow \infty$.

zu (ii). Sei $\omega \in \Omega$ und $s \in \mathbb{R}$.

Da $R_k(\omega) > R_{k-1}(\omega) + A$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ wird das Maximum in der Definition von $R^-(s)$ angenommen, d.h. es gibt ein $k_0(\omega) \in \mathbb{Z}$ mit $R^-(s)(\omega) = R_{k_0(\omega)}(\omega) \leq s$. Nach Definition der $(R_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ gilt

$$N(\omega, [R_{k_0(\omega)}(\omega) - A, R_{k_0(\omega)}(\omega)]) = 0 \quad \text{und} \quad N(\omega, [R_{k_0(\omega)}(\omega) - A, R_{k_0(\omega)}(\omega)]) > 0,$$

so daß $R^-(s) \leq \hat{R}^-(s)$.

Sei $0 < \varepsilon < \frac{A}{2}$. Dann gibt es ein $t_0(\omega) \leq s$ mit $t_0(\omega) \in (\hat{R}^-(s)(\omega) - \varepsilon, \hat{R}^-(s)(\omega)]$ und

$$N(\omega, [t_0(\omega) - A, t_0(\omega)]) = 0 \quad \text{sowie} \quad N(\omega, [t_0(\omega) - A, t_0(\omega)]) > 0.$$

Für alle $t \in (t_0(\omega), \hat{R}^-(s)(\omega)]$ ist $t_0(\omega) \in [t - A, t)$, woraus $t_0(\omega) = \hat{R}^-(s)(\omega)$ folgt. Außerdem muß $t_0(\omega) = T_{k_0(\omega)}(\omega)$ für ein $k_0(\omega) \in \mathbb{Z}$ sein, was zu $T_{k_0(\omega)}(\omega) > T_{k_0(\omega)-1}(\omega) + A$ führt, denn $N(\omega, [t_0(\omega) - A, t_0(\omega)]) = 0$. Daher gilt $R^-(s) \geq \hat{R}^-(s)$, also ist (ii) gezeigt.

zu (iii). Die \mathcal{F}_s^N -Meßbarkeit von $R^-(s)$ ist natürlich eine Folge der Gleichheit $R^-(s) = \hat{R}^-(s)$, und damit eine Folgerung aus der Darstellung von $R^-(s)$ mittels $N(\cdot \cap [-\infty, s])$: Sei $s \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt nach Anhang A1.4

$$\{R^-(s) > x\} = \bigcup_{\substack{t \in \mathbb{Q} \cup \{s\} \\ x < t \leq s}} \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x < t - \frac{1}{n}}} \left\{ N \left(\left[t - \frac{1}{n} - A, t - \frac{1}{n} \right] \right) = 0, N \left(\left[t - \frac{1}{n}, t \right] \right) > 0 \right\}.$$

Die Meßbarkeit der Menge $\{R^-(s) > x\}$ folgt mit obiger Darstellung sofort, denn für $t \in \mathbb{Q} \cup \{s\}$, $t \leq s$, ist

$$\begin{aligned} \left\{ N \left(\left[t - \frac{1}{n} - A, t - \frac{1}{n} \right] \right) = 0 \right\} &\in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}}^N \subset \mathcal{F}_s^N \\ \left\{ N \left(\left[t - \frac{1}{n}, t \right] \right) > 0 \right\} &\in \mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_s^N \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Weitere Eigenschaften von R nennen wir im nachstehenden Lemma.

6.4. Lemma. *Sei \bar{N} in der Situation von 6.3 θ_t -kompatibel. Dann ist der Punkt-Prozeß R ebenfalls θ_t -kompatibel und besitzt die (durchschnittliche) Intensität $\Lambda e^{-\Lambda A} \in (0, \infty)$.*

BEWEIS: Sei $C \in \mathfrak{B}$, $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned} \bar{N}(\theta_t \omega, C) &= S_t \bar{N}(\omega, C) = \bar{N}(\omega, (t + C)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{t+C}(T_n(\omega)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_C(T_n(\omega) - t) \end{aligned}$$

was $S_t \bar{N} = (T_n - t)_{n \in \mathbb{Z}}$ zeigt. Dies führt zu

$$S_t R(\omega, C) = R(\omega, t + C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{t+C}(T_n(\omega)) \mathbb{1}_{\{T_n - t - (T_{n-1} - t) > A\}}(\omega) = R(\theta_t \omega, C).$$

Für die zweite Behauptung reicht es,

$$\mathbf{E} R((a, b]) = \Lambda(b - a) e^{-\Lambda A}$$

für alle beschränkten Intervalle $(a, b] \subset \mathbb{R}$ nachzuweisen. Wir nehmen dazu eine Fallunterscheidung vor. Bei den folgenden Umformungen verwenden wir, daß

- $T_1, -T_0$ und $T_n - T_{n-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$) eine $\text{Exp}(\Lambda)$ -Verteilung besitzen,
- T_{n-1} und $T_n - T_{n-1}$ für $n \geq 2$ stochastisch unabhängig sind,
- T_n und $T_n - T_{n-1}$ für $n \leq 0$ stochastisch unabhängig sind,
- $\mathbf{E} \bar{N}((a, b]) = \Lambda(b - a)$ gilt.

Ferner ist die Anordnung der Punkte $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von \bar{N} gemäß (1.2) zu beachten.

1. Fall: Sei $(a, b] \subset (-\infty, 0]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} R((a, b]) &= \mathbf{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{(a, b]}(R_k) \right) = \mathbf{E} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n - T_{n-1} > A\}} \right) \\ &= \sum_{n \leq 0} \mathbf{P}(a < T_n \leq b, T_n - T_{n-1} > A) = \mathbf{E} \bar{N}((a, b]) \int_A^\infty \Lambda e^{-\Lambda x} dx = \Lambda(b - a) e^{-\Lambda A}. \end{aligned}$$

2. Fall: Sei nun $(a, b] \subset (0, A]$. Es folgt (beachte $T_n > A$ auf $\{T_n - T_{n-1} > A\}$ für alle $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} ER((a, b]) &= E \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n - T_{n-1} > A\}} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} P(a < T_n \leq b, T_n - T_{n-1} > A) = P(a < T_1 \leq b, T_1 - T_0 > A) \\ &= \int_a^b P(-T_0 > A - x) P^{T_1}(dx) = \int_a^b \int_{A-x}^{\infty} \Lambda e^{-\Lambda y} dy \Lambda e^{-\Lambda x} dx \\ &= \int_a^b e^{-\Lambda A} e^{\Lambda x} \Lambda e^{-\Lambda x} dx = \int_a^b e^{-\Lambda A} \Lambda dx = \Lambda(b - a) e^{-\Lambda A}. \end{aligned}$$

3. Fall: Ist $(a, b] \subset (A, \infty) \subset (0, \infty)$, so erhalten wir (beachte $a > A, T_1 - T_0 > A$ auf der Menge $\{T_1 > a\}$)

$$\begin{aligned} ER((a, b]) &= E \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n - T_{n-1} > A\}} \right) \\ &= P(a < T_1 \leq b, T_1 - T_0 > A) + \sum_{n \geq 2} P(a < T_{n-1} + (T_n - T_{n-1}) \leq b, T_n - T_{n-1} > A) \\ &= P(a < T_1 \leq b) + \sum_{n \geq 2} \int_A^{\infty} P(a - x < T_{n-1} \leq b - x) P^{T_n - T_{n-1}}(dx) \\ &= \int_a^b \Lambda e^{-\Lambda x} dx + \sum_{n \geq 2} \int_A^a P(a - x < T_{n-1} \leq b - x) \Lambda e^{-\Lambda x} dx \\ &\quad + \sum_{n \geq 2} \int_a^b P(0 < T_{n-1} \leq b - x) \Lambda e^{-\Lambda x} dx \\ &= e^{-\Lambda a} - e^{-\Lambda b} + \int_A^a E \bar{N}((a - x, b - x]) \Lambda e^{-\Lambda x} dx + \int_a^b E \bar{N}((0, b - x]) \Lambda e^{-\Lambda x} dx \\ &= e^{-\Lambda a} - e^{-\Lambda b} + \int_A^a \Lambda(b - a) \Lambda e^{-\Lambda x} dx + \int_a^b \Lambda(b - x) \Lambda e^{-\Lambda x} dx \\ &= e^{-\Lambda a} - e^{-\Lambda b} + \Lambda(b - a) (e^{-\Lambda A} - e^{-\Lambda a}) + \Lambda b (e^{-\Lambda a} - e^{-\Lambda b}) + \Lambda [xe^{-\Lambda x}]_a^b - \int_a^b \Lambda e^{-\Lambda x} dx \\ &= \Lambda(b - a) e^{-\Lambda A}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall $(a, b] \subset \mathbb{R}$ lässt sich nun mittels der Zerlegung $(a, b] = (a, b] \cap (-\infty, 0] + (a, b] \cap (0, A] + (a, b] \cap (A, \infty)$ auf die zuvor betrachteten Fälle zurückführen. \square

6.5. Satz. Bezeichne $\bar{N} = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ einen Poisson-Prozeß auf \mathbb{R} der Intensität Λ . Das Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{\bar{N}}$ mischt mit dem Shift $(S_t)_{t \in \mathbb{R}}$, d.h. es gilt

$$(6.4) \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left(P^{\bar{N}}(S_t V \cap \hat{V}) - P^{\bar{N}}(S_t V) P^{\bar{N}}(\hat{V}) \right) = 0$$

für alle $V, \hat{V} \in \mathcal{M}$ (vergleiche [DVJ88] 10.3.I).

Wie übernehmen den Begriff *Semi-Ring* aus [DVJ88] (Anhang A1.1, Seite 593): das System \mathcal{S} von Mengen ist ein Semi-Ring, falls \mathcal{S} durchschnittsstabil und jede symmetrische Differenz von Mengen aus \mathcal{S} durch eine endliche Vereinigung disjunkter Mengen aus \mathcal{S} darstellbar ist.

Beweis (von Satz 6.5): Bezeichne \mathcal{T} den Semi-Ring der beschränkten Borelschen Teilmengen von \mathbb{R} . Ferner wird durch

$$\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{\mu \in M; \mu(A_i) \in B_i, 1 \leq i \leq k\}; A_i \in \mathcal{S}, B_i \in \mathfrak{B}, k \in \mathbb{N}\}$$

ebenfalls ein Semi-Ring gegeben: offensichtlich folgt aus $V, \hat{V} \in \mathcal{T}$ auch $V \cap \hat{V} \in \mathcal{T}$. Falls $V = \{\mu \in M; \mu(A_i) \in B_i, 1 \leq i \leq k\}$ sowie $\hat{V} = \{\mu \in M; \mu(\hat{A}_i) \in \hat{B}_i, 1 \leq i \leq \hat{k}\}$ ist, besitzt die symmetrische Differenz dieser Mengen die Darstellung

$$\begin{aligned} V \Delta \hat{V} &= (V \setminus \hat{V}) \cup (\hat{V} \setminus V) \\ &= \sum_{j=1}^{\hat{k}} V \cap \left\{ \mu \in M; \mu(\hat{A}_j) \in \hat{B}_j^C, \mu(\hat{A}_i) \in \hat{B}_i \text{ für } 1 \leq i < j \right\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \hat{V} \cap \left\{ \mu \in M; \mu(A_j) \in B_j^C, \mu(A_i) \in B_i \text{ für } 1 \leq i < j \right\}, \end{aligned}$$

($A_i \in \mathcal{S}, B_i \in \mathfrak{B}$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, $\hat{A}_i \in \mathcal{S}, \hat{B}_i \in \mathfrak{B}$ für alle $i \in \{1, \dots, \hat{k}\}$ mit $k, \hat{k} \in \mathbb{N}$). Gemäß [DVJ88] A2.5.IV stellt \mathcal{T} einen Erzeuger von \mathcal{M} dar, also $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{T})$. Um den Beweis abzuschließen, reicht es nach [DVJ88] 10.3.II, (6.4) für Mengen aus \mathcal{T} nachzurechnen. Für $V, \hat{V} \in \mathcal{T}$ – mit einer Darstellung wie oben – folgt für betragsmäßig hinreichend große $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\bar{N}}(S_t V \cap \hat{V}) &= \mathbf{P}^{\bar{N}}\left(\{\mu(\cdot + t) \in M; \mu(A_i) \in B_i, 1 \leq i \leq k\} \cap \left\{ \mu \in M; \mu(\hat{A}_j) \in \hat{B}_j, 1 \leq j \leq \hat{k} \right\}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bar{N}(A_i - t) \in B_i, 1 \leq i \leq k; \bar{N}(\hat{A}_j) \in \hat{B}_j, 1 \leq j \leq \hat{k}\right) \\ &= \mathbf{P}(\bar{N}(A_i - t) \in B_i, 1 \leq i \leq k) \mathbf{P}(\bar{N}(\hat{A}_j) \in \hat{B}_j, 1 \leq j \leq \hat{k}) \\ &= \mathbf{P}^{\bar{N}}(V) \mathbf{P}^{\bar{N}}(\hat{V}). \end{aligned}$$

Bei der 3. Gleichheit nutzen wir die Beschränktheit der $A_i, 1 \leq i \leq k$ und $\hat{A}_j, 1 \leq j \leq \hat{k}$, was für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t|$ genügend groß zur Disjunkttheit von $\bigcup_{i=1}^k (A_i - t)$ und $\bigcup_{j=1}^{\hat{k}} \hat{A}_j$, also zur Unabhängigkeit von $\bar{N}(A_i - t), 1 \leq i \leq k$, sowie $\bar{N}(\hat{A}_j), 1 \leq j \leq \hat{k}$, führt. Bei der 4. Gleichheit verwenden wir die Stationarität von \bar{N} . \square

Aus [DVJ88] Abschnitt 10.3 erhalten wir das nachstehende

6.6. Korollar. In der Situation von 6.5 ist $(\mathbf{P}^{\bar{N}}, (S_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ergodisch.

2) Poisson-Einbettung. Wir beginnen diesen Unterabschnitt mit der Angabe des Analogons zu 5.4 für Intensitätskerne.

6.7. Lemma. Es sei \bar{N} ein markierter Punkt-Prozeß der reellen Achse mit Markenraum (E, \mathcal{E}) und $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensitätskern $\Lambda\lambda(dt)Q(dz)$, vergleiche [BB94] Kapitel 1 unterhalb von Beispiel 8.2.2. Zusätzlich sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration unabhängig von \bar{N} (d.h. $\mathcal{F}_\infty^{\bar{N}}$ und \mathcal{F}_∞ sind stochastisch unabhängig). Dann ist $\Lambda\lambda(dt)Q(dz)$ ebenfalls ein $\sigma(\mathcal{F}_t^{\bar{N}}, \mathcal{F}_t)$ -Intensitätskern von \bar{N} .

Zum Nachweis reicht es, nachzurechnen, daß der Punkt-Prozeß $\bar{N}(\cdot \times L)$ für eine fest vorgegebene Menge $L \in \mathcal{E}$ die (konstante) Intensität $\Lambda Q(L)$ besitzt. Dies läßt sich wie im Beweis von 5.4 durchführen.

Wir geben nun zunächst einige Aussagen an, die auch im Abschnitt 5 („Eigenschaften von Punkt-Prozessen“) aufgeführt werden könnten. Diese sichern die Meßbarkeit der nachfolgend konstruierten Intensitäten oder Punkt-Prozesse.

Wie üblich bildet h^+ (bzw. h^-) den Positiv-(bzw. Negativ-) Teil der Funktion h .

6.8. Lemma. Bezeichne N einen Punkt-Prozeß und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration von N . Sei $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathfrak{B}^+ -meßbare Funktion. Ist h nichtnegativ oder erfüllt f.s. für alle $t \in \mathbb{R}$ jeweils eine der folgenden Bedingungen:

$$(6.5) \quad \int_{(-\infty, t)} h^+(t-s) N(ds) < \infty \quad \text{oder} \quad \int_{(-\infty, t)} h^-(t-s) N(ds) < \infty,$$

so ist die Abbildung

$$(6.6) \quad (\omega, t) \mapsto \int_{(-\infty, t)} h(t-s) N(\omega, ds)$$

\mathcal{F}_t -vorhersagbar, also $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ -meßbar.

BEWEIS: Sei zunächst $h(t) = \mathbb{1}_{(a,b]}(t)$, $a, b \in [0, \infty)$. Für solches h gilt

$$\begin{aligned} \int_{(-\infty, t)} h(t-s) N(ds) &= \int_{(-\infty, t)} \mathbb{1}_{(a,b]}(t-s) N(ds) \\ &= N([t-b, t-a] \cap (-\infty, t)) = N([t-b, t-a]). \end{aligned}$$

Da $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration von N ist, erkennt man aus der Darstellung von $\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; N(\omega, [t-b, t-a]) = n\}$ in A1.2 die $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ -Meßbarkeit für Funktionen der Form $h(t) = \mathbb{1}_{(a,b]}(t)$.

Mittels eines Standard Dynkin-System-Arguments zeigt man die Vorhersagbarkeit von (6.6) für alle Funktionen $h = \mathbb{1}_C$ mit $C \in \mathfrak{B}^+$: im Fall $h(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$ zeigt analoges Vorgehen wie bei $h(t) = \mathbb{1}_{(a,b]}(t)$ die Vorhersagbarkeit von $N((-\infty, t))$, die Prüfung der weiteren Voraussetzungen stellt reines Nachrechnen dar.

Das Funktions-Erweiterungsargument liefert gemeinsam mit dem Satz von der monotonen Konvergenz schließlich die Behauptung. \square

6.9. Lemma. Gegeben seien ein Poisson-Prozeß \bar{N} auf \mathbb{R}^2 (oder ein beliebiger markierter Punkt-Prozeß \bar{N} auf \mathbb{R} mit Marken in $E \in \mathfrak{B}$), eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von \bar{N} und ein \mathcal{F}_t -vorhersagbarer

Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ (der im markiertem Fall $[0, \lambda(\omega, t)] \subset E$ für alle $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ erfüllt). Definiert man für $C \in \mathfrak{B}$

$$(6.7) \quad N(C) = \int_{C \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, \lambda(s)]}(z) \bar{N}(ds \times dz).$$

Dann ist N ein \mathcal{F}_t -adaptierter Punkt-Prozeß.

Beweis: Gemäß A1.3 ist die Abbildung $(\omega, s, z) \mapsto \mathbb{1}_{[0, \lambda(\omega, s)]}(z)$ $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B}$ – \mathfrak{B} -meßbar, und nach [Als98] Satz 19.2 gilt

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B} = \sigma(A \times (a, b] \times (\alpha, \beta]; A \in \mathcal{F}_a, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

wobei der angegebene Erzeuger \cap -stabil ist.

Setze $f(\omega, s, z) = \mathbb{1}_A(\omega) \mathbb{1}_{(a, b]}(s) \mathbb{1}_{(\alpha, \beta]}(z)$, $A \in \mathcal{F}_a; a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für jedes feste $C \in \mathfrak{B}((-\infty, t])$ ($t \in \mathbb{R}$) folgt

$$\begin{aligned} N_f(C) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{C \times \mathbb{R}} f(\cdot, s, z) \bar{N}(ds \times dz) \\ &= \int_{C \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{(a, b]}(s) \mathbb{1}_{(\alpha, \beta]}(z) \bar{N}(ds \times dz) \\ &= \begin{cases} \mathbb{1}_A \bar{N}((a, b] \cap C) \times (\alpha, \beta]) & \text{für } (a, b] \cap C \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } (a, b] \cap C = \emptyset \end{cases}. \end{aligned}$$

Dies liefert die \mathcal{F}_t -Meßbarkeit von $N_f(C)$, denn $a < t$ falls $(a, b] \cap C \neq \emptyset$, also $A \in \mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_t$.

Unter Beachtung des Satzes von der monotonen Konvergenz liefert das Funktions-Erweiterungsargument die \mathcal{F}_t -Meßbarkeit von $N_f(C)$ bei beliebigen $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B}$ – \mathfrak{B} -meßbaren nichtnegativen Funktionen f . \square

6.10. Korollar. In der Situation von Lemma 6.9 gilt für jede nichtnegative $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B}$ – \mathfrak{B} -meßbare Funktion f und jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$(6.8) \quad N_f(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{C \times \mathbb{R}} f(\cdot, s, z) \bar{N}(ds \times dz)$$

ist für $C \in \mathfrak{B}((-\infty, t])$ meßbar bezüglich der σ -Algebra \mathcal{F}_t .

Die folgenden beiden Sätze dienen der Konstruktion von Punkt-Prozessen zu vorgegebenen Intensitäten. Bei einer Konstruktion kann ein markierter Punkt-Prozeß als Basis dienen.

6.11. Satz. Gegeben sei ein markierter Punkt-Prozeß $\bar{N} = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, bestehend aus einem homogenen Poisson-Prozeß $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit Intensität $\Lambda \in (0, \infty)$ und einer davon unabhängigen Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von unabhängigen, jeweils auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration von \bar{N} , so daß \mathcal{F}_s und $S_t \bar{N}^+$ für alle $s < t$ unabhängig sind. $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ bezeichne einen nichtnegativen \mathcal{F}_t -vorhersagbaren Prozeß mit $\lambda(\omega, t) \leq \Lambda$ für alle $(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Definiert man für $C \in \mathfrak{B}$

$$(6.9) \quad N(C) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_C(T_n) \mathbb{1}_{[0, \frac{\lambda(T_n)}{\Lambda}]}(U_n) = \int_C \bar{N}\left(dt \times \left[0, \frac{\lambda(t)}{\Lambda}\right]\right).$$

Dann besitzt der Punkt-Prozeß $N(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ als eine \mathcal{F}_t -Intensität.

BEWEIS: Unter Ausnutzung von (6.3) folgt aufgrund der \mathcal{F}_t -Vorhersagbarkeit von $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N((a, b]) | \mathcal{F}_a) &= \mathbf{E}\left(\int_{(a, b] \times [0, 1]} \mathbb{1}_{[0, \frac{\lambda(t)}{\Lambda}]}(z) \bar{N}(dt \times dz) \mid \mathcal{F}_a\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_{(a, b] \times [0, 1]} \mathbb{1}_{[0, \frac{\lambda(t)}{\Lambda}]}(z) \Lambda \lambda^2(dt \times dz) \mid \mathcal{F}_a\right) = \mathbf{E}\left(\int_{(a, b]} \lambda(t) \lambda(dt) \mid \mathcal{F}_a\right) \end{aligned}$$

für alle Teilmengen $(a, b] \subset \mathbb{R}$, denn $(\omega, s, z) \mapsto \mathbb{1}_{[0, \frac{\lambda(\omega, t)}{\Lambda}]}(z)$ ist $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B}([0, 1])$ -meßbar, vergleiche A1.3. \square

Zu jedem Punkt lautet die Auswahlregel also: Teste, ob die Marke U_n im Intervall $\left[0, \frac{\lambda(T_n)}{\Lambda}\right]$ liegt.

Ist \bar{N} ein markierter Punkt-Prozeß oder ein Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 und $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine Intensität, so werden wir die in 6.11 bereits benutzte Schreibweise

$$\int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda(t)]) \stackrel{\text{def}}{=} \int \int \mathbb{1}_C(t) \mathbb{1}_{[0, \lambda(t)]}(z) \bar{N}(dt \times dz), \quad C \in \mathfrak{B},$$

verwenden.

Die zweite (allgemeinere) Konstruktions-Möglichkeit nutzt einen Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 . Diese Möglichkeit findet Verwendung, falls der betrachtete vorhersagbare Prozeß nicht beschränkt ist:

6.12. Satz. Sei \bar{N} ein \mathcal{F}_t -Poisson-Prozeß mit Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 , d.h. $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \subset \mathcal{F}_t$ und \mathcal{F}_s , $S_t \bar{N}^+$ sind unabhängig für alle $s < t$. Zu dem nichtnegativen, \mathcal{F}_t -vorhersagbaren Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ definiere

$$(6.10) \quad N(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{C \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, \lambda(t)]}(z) \bar{N}(dt \times dz) = \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda(t)]),$$

$C \in \mathfrak{B}$. Dann ist N ein Punkt-Prozeß mit \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

BEWEIS: Die nach Anhang A1.3 gültige $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B}$ -Meßbarkeit von $(\omega, t, z) \mapsto \mathbb{1}_{[0, \lambda(\omega, t)]}(z)$ führt mit (6.2) für alle $(a, b] \subset \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N((a, b]) | \mathcal{F}_a) &= \mathbf{E}\left(\int_{(a, b] \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, \lambda(t)]}(z) \bar{N}(dt \times dz) \mid \mathcal{F}_a\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_{(a, b] \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, \lambda(t)]}(z) \lambda^2(dt \times dz) \mid \mathcal{F}_a\right) = \mathbf{E}\left(\int_{(a, b]} \lambda(t) \lambda(dt) \mid \mathcal{F}_a\right), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. \square

Lemma 6.8 und 6.9 lassen sich nun kombinieren zu

6.13. Korollar. Sei \bar{N} ein Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 mit Intensität 1 (bzw. ein markierter Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} mit Marken in $[0, 1]$), $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration unabhängig von \bar{N} und $\mathcal{F}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{\bar{N}}, \mathcal{G}_t)$. Des Weiteren seien N' ein \mathcal{F}_t -adaptierter Punkt-Prozeß und $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Ist der Prozeß

$$(6.11) \quad \lambda(t) = \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N'(ds) \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

f.s. lokal integrierbar, so ist der durch (6.10) (bzw. (6.9)) definierte Punkt-Prozeß N \mathcal{F}_t -adaptiert und $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ stellt eine \mathcal{F}_t -Intensität von N dar.

BEWEIS: Der Prozeß

$$\lambda(t) = \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N'(ds) \right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

ist nach 6.8 \mathcal{F}_t -vorhersagbar, denn ϕ ist messbar.

Satz 6.12 (bzw. 6.11) besagt nun, daß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine \mathcal{F}_t -Intensität von N ist und aus 6.9 folgt, daß (6.10) (bzw. (6.9)) \mathcal{F}_t -adaptiert ist. \square

Wir geben nun ein Ergebnis wieder, welches eine Art Umkehrung von Satz 6.12 darstellt und auf [Jac79] Kapitel 14, Abschnitt 4 §b zurückzuführen ist.

6.14. Satz (Poisson-Inversion). Bezeichne $N = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ einen einfachen, nichtexplodierenden Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} mit \mathcal{F}_t -vorhersagbarer \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$, adaptiert bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Sei $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge unabhängiger, jeweils auf $[0, 1]$ gleichverteilter Zufallsvariablen unabhängig von \mathcal{F}_∞ . Sei \hat{N} ein homogener Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 mit Intensität 1, unabhängig von $\sigma(\mathcal{F}_\infty, \mathcal{F}_\infty^U)$. Definiere auf \mathbb{R}^2 den Punkt-Prozeß \bar{N} durch

$$(6.12) \quad \bar{N}((a, b] \times L) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n) \mathbb{1}_L(\lambda(T_n) U_n) + \int_{(a, b]} \int_{L \setminus (0, \lambda(t)]} \hat{N}(dt \times dz).$$

Dann ist \bar{N} ein homogener Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 mit Intensität 1, und $S_t \bar{N}^+$ und $\sigma(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s^{\bar{N}})$ sind unabhängig für alle $s < t$. \bar{N} stellt also einen $\sigma(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s^{\bar{N}})$ -Poisson-Prozeß dar.

Satz 6.14 zeigt, daß jeder nichtexplodierende Punkt-Prozeß N wie in 6.12 konstruiert werden kann. Der zu N gehörige bivariate homogene Poisson-Prozeß \bar{N} entsteht, indem man die Punkte eines homogenen Poisson-Prozesses \hat{N} außerhalb des „Zufalls“-Streifens $\{(t, z) \in \mathbb{R}^2; 0 < z \leq \lambda(t)\}$ wählt, und innerhalb des Streifens die Punkte T_n von N mit Marken $Z_n = \lambda(T_n) U_n$ versieht (oder anders ausgedrückt: setze zufällig einen Punkt von N in $\{T_n\} \times [0, \lambda(T_n)]$).

Um den homogenen Poisson-Prozeß aus 6.14 zu erhalten, kann die Vergrößerung des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraums notwendig werden. Dies geschieht in der üblichen Weise. Wenden wir im folgenden 6.14 an, so gehen wir von einem geeigneten Grundraum aus, ohne dies explizit zu erwähnen.

Abschließend erweitern wir die Ergebnisse von 6.11 und 6.12.

6.15. Satz. *Es sei \bar{N} ein Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 mit Intensität 1 oder ein markierter Poisson-Prozeß der Intensität Λ mit Marken in $[0, 1]$. Außerdem seien $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$, $i = 1, 2$, zwei \mathcal{F}_t -vorhersagbare Prozesse und $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration von \bar{N} , so daß \mathcal{F}_s und $S_t \bar{N}^+$ unabhängig für alle $s < t$ sind. Definiere*

$$(6.13) \quad N_i(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int_C \mathbb{1}_{[0, \lambda_i(s)]}(z) \bar{N}(ds \times dz)$$

für $C \in \mathfrak{B}$ ($i = 1, 2$).

Der Punkt-Prozeß

$$(6.14) \quad |N_1 - N_2|(\{t\}) \stackrel{\text{def}}{=} |N_1(\{t\}) - N_2(\{t\})|, \quad t \in \mathbb{R},$$

der die verschiedenen Punkte von N_1 und N_2 zählt, besitzt die \mathcal{F}_t -Intensität $(|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|)_{t \in \mathbb{R}}$.

BEWEIS: Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq b$, so setze $(a, b] = \emptyset$. Für beliebige Mengen $C \in \mathfrak{B}$ gilt

$$\begin{aligned} |N_1 - N_2|(C) &= \int_C |N_1 - N_2|(ds) \\ &= \int_C \mathbb{1}_{(\lambda_1(s), \lambda_2(s)]}(z) \bar{N}(ds \times dz) + \int_C \mathbb{1}_{(\lambda_2(s), \lambda_1(s)]}(z) \bar{N}(ds \times dz). \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von 6.12 (bzw. 6.11) können wir zeigen, daß eine \mathcal{F}_t -Intensität des Punkt-Prozesses $(\int_C \mathbb{1}_{(\lambda_i(s), \lambda_j(s)]}(z) \bar{N}(ds \times dz))_{C \in \mathfrak{B}}$ durch $((\lambda_j(t) - \lambda_i(t))^+)_{t \in \mathbb{R}}$ gegeben wird ($\{i, j\} = \{1, 2\}$). Damit folgt, daß $|N_1 - N_2|$ den Prozeß

$$((\lambda_1(t) - \lambda_2(t))^+ + (\lambda_2(t) - \lambda_1(t))^+)_{t \in \mathbb{R}}$$

als \mathcal{F}_t -Intensität besitzt. □

Kapitel II.

Existenz und Stabilität univariater nichtlinearer Hawkes-Prozesse

Beginnen wollen wir dieses Kapitel mit einem Abschnitt, welcher uns des öfteren bei der Konstruktion von Punkt-Prozessen von Nutzen sein wird.

In den anschließenden Abschnitten weisen wir die Existenz und Stabilität von Hawkes-Prozessen bei vorgegebenen Funktionen ϕ und h sowie geeigneten Anfangsbedingungen nach. Dabei macht Abschnitt 8 bereits eine Ausnahme: Es werden nur Funktionen h mit kompaktem Träger zugelassen. Die daraus resultierende Art von Intensitäten können wir in die allgemeinere Menge der Intensitäten mit beschränktem Speicher (Definition: siehe 8.1) einbetten und Existenz und Stabilität für diese Menge zeigen, so daß die Hawkes-Prozesse hier nur einen Spezialfall darstellen.

Stellen wir Beschränktheitsanforderungen an die $\mathcal{L}_1([0, \infty), \mathfrak{B}^+, \lambda|_{[0, \infty)})$ -Norm von h , so können wir bei monotonen Anregungsfunktionen mit beschränktem Wachstum die Existenz eines Hawkes-Prozesses nachweisen (Abschnitt 9). Fordern wir α -Lipschitz-Stetigkeit von ϕ und fixieren die $\mathcal{L}_1([0, \infty), \mathfrak{B}^+, \lambda|_{[0, \infty)})$ -Norm von αh unterhalb von 1, so läßt sich erneut die Existenz zeigen, und wir können geeignete Anfangsbedingungen für Stabilität angeben, siehe dazu Abschnitt 10. In Abschnitt 11 gelte neben der α -Lipschitz-Stetigkeit der Übertragungsfunktion noch die Beschränktheit von ϕ , wir benötigen dann neben der Endlichkeit von $\int_{[0, \infty)} |h(t)| dt$ noch weitere Beschränktheitsanforderungen an h , um neben der Existenz auch Stabilität bei geeigneter Anfangsbedingung zu zeigen.

Da die eigentlichen Beweise zum Teil großen Umfang besitzen, werden sie in Unterabschnitten durchgeführt, um diese durch Lemmata in kleinere Schritte zu zerlegen.

7. Zur Konstruktion von Punkt-Prozessen

Bei der Konstruktion von Punkt-Prozessen bietet es sich an, als Grundraum (Ω, \mathcal{F}) den *kanonischen Raum der Punkt-Prozesse* auf \mathbb{R} mit Marken in $[0, 1]$ oder den *kanonischen Raum der*

Punkt-Prozesse auf \mathbb{R}^2 zu betrachten.

Die im folgenden verwendeten Bezeichnungen für Räume von Radon-Maßen hatten wir bereits am Anfang von Abschnitt 4 eingeführt.

- Der kanonische Raum der Punkt-Prozesse auf \mathbb{R} mit Marken in $[0, 1]$. Wir wählen als Markenraum $(E, \mathcal{E}) = ([0, 1], \mathfrak{B}([0, 1]))$. Durch

$$(7.1) \quad \mu(C \times L) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_C(t_n) \mathbb{1}_L(u_n),$$

$C \in \mathfrak{B}, L \in \mathfrak{B}([0, 1])$, wird zu einer Folge

$$(t_n, u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \{(t_n, u_n)_{n \in \mathbb{Z}}; t_n \in \bar{\mathbb{R}}, u_n \in [0, 1], t_n \leq t_{n+1}, n \in \mathbb{Z}; \\ -\infty \leq \dots \leq t_{-2} \leq t_{-1} \leq t_0 \leq 0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq +\infty\}$$

ein Maß auf $(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}([0, 1]))$ definiert.

Offensichtlich gilt für den Raum $(M'_{[0,1]}, \mathcal{M}'_{[0,1]})$ der ganzzahligen Radon-Maße auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$

$$M'_{[0,1]} = \{\mu; \mu \text{ besitzt Darstellung wie unter (7.1)}\}.$$

Die Abbildungen

$$T_n : M'_{[0,1]} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \mu \mapsto t_n \quad \text{und} \quad U_n : M'_{[0,1]} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \mu \mapsto u_n$$

sind $\mathcal{M}'_{[0,1]}$ -meßbar. Sei \mathcal{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(M'_{[0,1]}, \mathcal{M}'_{[0,1]})$ mit $\mathcal{P} \circ \theta_t = \mathcal{P}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Durch die Festlegungen

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \stackrel{\text{def}}{=} (M'_{[0,1]}, \mathcal{M}'_{[0,1]}, \mathcal{P}) \\ \theta_t \stackrel{\text{def}}{=} S_t$$

$$N(\mu, \cdot) = \text{id}_{M'_{[0,1]}(\mu)}(\cdot \times [0, 1]) = \mu(\cdot \times [0, 1])$$

erhalten wir einen stationären θ_t -kompatiblen Punkt-Prozeß $(N, \theta_t, \mathbf{P})$ mit assoziierter Markenfolge $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

- Der kanonische Raum der Punkt-Prozesse auf \mathbb{R}^2 . Sei \mathcal{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (M'_2, \mathcal{M}'_2) mit $\mathcal{P} \circ S_t = \mathcal{P}$, $t \in \mathbb{R}$. Durch die Festlegungen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) \stackrel{\text{def}}{=} (M'_2, \mathcal{M}'_2, \mathcal{P})$, $\theta_t \stackrel{\text{def}}{=} S_t$ und $N(\mu, \cdot) = \mu(\cdot)$ wird $(N, \theta_t, \mathbf{P})$ zu einem (in der 1. Komponente) stationären θ_t -kompatiblen Punkt-Prozeß.

(Siehe auch [BB94] Kapitel 1.1, u.a. Beispiel 1.3.4).

Der folgende Satz gilt insbesondere im Fall α -Lipschitz-stetiger Funktionen ϕ :

7.1. Satz. Es sei $\Lambda \in (0, \infty)$, $\lambda^{(0)}(t) \equiv x \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$(7.2) \quad h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \int |h(s)| ds < \infty \text{ und} \\ \phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ mit } \phi(s) \leq \lambda + \alpha |s| \text{ für alle } s \in \mathbb{R} (\alpha, \lambda \in [0, \infty)).$$

Gegeben sei ferner einer der folgenden Punkt-Prozesse:

- $\bar{N} = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, so daß $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $R[0, 1]$ -verteilter Zufallsvariablen ist. In diesem Fall ist ϕ durch $\min\{\Lambda, \phi\}$ zu ersetzen, diese Funktion wird o.B.d.A. wieder mit ϕ bezeichnet. Der Punkt-Prozeß $\bar{N}(\cdot \times [0, 1])$ ist ein Poisson-Prozeß mit Intensität Λ unabhängig von $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
- ein Poisson-Prozeß \bar{N} der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 .

Definiere rekursiv die stochastischen Prozesse $(\lambda^{(n+1)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ und Punkt-Prozesse $N^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch

$$(7.3) \quad \begin{aligned} N^{(n)}(C) &= \int_C \bar{N}\left(dt \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \lambda^{(n)}(t)\right]\right) \\ \lambda^{(n+1)}(t) &= \phi\left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(ds)\right) \end{aligned}$$

$C \in \mathfrak{B}$, $t \in \mathbb{R}$, wobei im Fall eines markierten Prozesses $u = 1$ und bei Vorliegen eines Poisson-Prozesses auf \mathbb{R}^2 $u = \Lambda$ zu wählen ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

- (i) $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ und $N^{(n)}$ sind θ_t -kompatibel
- (ii) $N^{(n)}$ ist $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptiert, $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbar und eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N^{(n)}$.

Beweis (Satz 7.1(i)): Zum Nachweis, der durch eine Induktion über n geführt wird, seien $r, t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$. Im Fall $n = 0$ ist die Behauptung klar. Gelte (i) für ein $n \in \mathbb{N}$. Dies liefert unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung beim zweiten Gleichheitszeichen

$$\begin{aligned} \lambda^{(n+1)}(\theta_r \omega, t) &= \phi\left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(\theta_r \omega, ds)\right) \\ &= \phi\left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(\omega, r+ds)\right) \\ &= \phi\left(\int_{(-\infty, t+r)} h(t+r-s) N^{(n)}(\omega, ds)\right) \\ &= \lambda^{(n+1)}(\omega, t+r) \\ &= S_r \lambda^{(n+1)}(\omega, t). \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Behauptung auch für $N^{(n+1)}$:

$$\begin{aligned} N^{(n+1)}(\theta_r \omega, C) &= \int_C \bar{N}\left(\theta_r \omega, dt \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \lambda^{(n+1)}(\theta_r \omega, t)\right]\right) \\ &= \int_C S_r \bar{N}\left(\omega, dt \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} S_r \lambda^{(n+1)}(\omega, t)\right]\right) \\ &= \int_C \bar{N}\left(\omega, r+dt \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \lambda^{(n+1)}(\omega, r+t)\right]\right) \\ &= \int_{r+C} \bar{N}\left(\omega, dt \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \lambda^{(n+1)}(\omega, t)\right]\right) \\ &= N^{(n+1)}(\omega, r+C) \\ &= S_r N^{(n+1)}(\omega, C). \end{aligned}$$

□

Um den zweiten Teil beweisen zu können benötigen wir das

7.2. Lemma. *In der Situation von 7.1 ist $\int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| N^{(n)}(ds)$ f.s. endlich für alle $n \in \mathbb{N}$.*

BEWEIS: Der Fall $\alpha = 0$ ist klar. Sei also $\alpha \in (0, \infty)$. Auch hier bietet sich eine Induktion (über n) an. Wir zeigen

$$\begin{aligned} & \alpha E \left(\int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| N^{(n)}(ds) \right) \\ & \leq \lambda \sum_{k=1}^n \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^k + \max\{\Lambda, x, 1\} \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung erhalten wir im Fall $n = 0$ die Abschätzung

$$\alpha E \left(\int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| N^{(0)}(ds) \right) \leq \max\{\Lambda, x, 1\} \alpha \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| ds.$$

Zum Induktionsschritt: Die Induktionsvoraussetzung liefert die Endlichkeit der rechten Seite von $\lambda^{(n+1)}(s) \leq \lambda + \alpha \int_{(-\infty, s)} |h(s-u)| N^{(n)}(du)$, und es folgt nach 6.8 und 6.11 (bzw. 6.12) sowie dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \alpha E \left(\int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| N^{(n+1)}(ds) \right) \\ & \leq \alpha E \left(\int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| \mathbb{1}_{[0, \frac{u}{\Lambda} \lambda + \frac{u}{\Lambda} \alpha \int_{(-\infty, s)} |h(s-u)| N^{(n)}(du)]}(z) \bar{N}(ds \times dz) \right) \\ & = \alpha E \left(\int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| \left(\lambda + \alpha \int_{(-\infty, s)} |h(s-u)| N^{(n)}(du) \right) ds \right) \\ & = \alpha \lambda \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| ds \\ & \quad + \alpha \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| \alpha E \left(\int_{(-\infty, s)} |h(s-u)| N^{(n)}(du) \right) ds \\ & \leq \alpha \lambda \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| ds \\ & \quad + \alpha \lambda \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| \sum_{k=1}^n \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(u)| du \right)^k ds \\ & \quad + \alpha \max\{\Lambda, x, 1\} \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(u)| du \right)^{n+1} ds \\ & = \lambda \sum_{k=1}^{n+1} \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^k + \max\{\Lambda, x, 1\} \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^{n+2}, \end{aligned}$$

die Induktionsvoraussetzung wurde beim letzten Ungleichheitszeichen eingesetzt. □

Wie können nun den Beweis des zweiten Teils von 7.1 angeben:

BEWEIS (VON SATZ 7.1(ii)): Auch diese Behauptung wird über eine Induktion nach n

gezeigt. Im Fall $n = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei also nun (ii) für ein $n \in \mathbb{N}$ gültig. Aufgrund von 6.8 (anwendbar nach 7.2) ist $(\lambda^{(n+1)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbar und 6.9 zeigt, daß $N^{(n+1)}$ ein $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptierter Punkt-Prozeß ist, der nach 6.11 bzw. 6.12 die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda^{(n+1)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ zuläßt. \square

8. Intensitäten mit beschränktem Speicher

Soll jeder Punkt eines Punkt-Prozesses nur eine endliche Zeit lang Einfluß auf die eigene Zukunft besitzen, so können wir dies durch Intensitäten mit beschränktem Speicher erreichen. Es gilt daher als erstes zu präzisieren, was eine Intensität mit beschränktem Speicher ist.

8.1. Definition. Die Abbildung $\psi : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ heißt *kausal*, wenn aus $m \equiv m'$ auf $(-\infty, 0)$ stets $\psi(m) = \psi(m')$ folgt, also $\psi(m) = \psi(m \cap (-\infty, 0))$.

Ferner besitzt ψ einen *beschränkten Speicher* (oder ein *beschränktes Gedächtnis*) der Länge $A \in (0, \infty)$, wenn $m \equiv m'$ auf $[-A, 0)$ bereits $\psi(m) = \psi(m')$ liefert.

Ein Punkt-Prozeß N besitzt eine *Dynamik mit beschränktem Speicher* der Länge A , falls N eine \mathcal{F}_t^N -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form

$$(8.1) \quad \lambda(t) = \psi(S_t N)$$

zuläßt, wobei $\psi : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ einen beschränkten Speicher der Länge A besitzt.

Nach Definition ist klar, daß jede Abbildung mit beschränktem Speicher kausal ist.

8.2. Beispiel. Sei der Träger der Übertragungsfunktion h kompakt. Dann besitzt die Dynamik (D1) einen beschränkten Speicher. \star

BEGRÜNDUNG: Die Intensität ist von der gewünschten Form (8.1), denn

$$\begin{aligned} \psi(S_t N) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left(\int_{(-\infty, 0)} h(0 - s) S_t N(ds) \right) = \phi \left(\int_{(-\infty, 0)} h(0 - s) N(t + ds) \right) \\ &= \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t - s) N(ds) \right) = \lambda(t). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gibt es $a, b \in [0, \infty)$, so daß $h \equiv 0$ auf $(a, b]^C$. Sei $A \stackrel{\text{def}}{=} b$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi(m) &= \phi \left(\int_{(-\infty, 0)} h(0 - s) m(ds) \right) = \phi \left(\int_{(-\infty, 0) \cap [-b, -a]} h(0 - s) m(ds) \right) \\ &= \phi \left(\int_{(-\infty, 0) \cap [-b, -a]} h(0 - s) m'(ds) \right) = \psi(m') \end{aligned}$$

für alle $m, m' \in M$ mit $m \equiv m'$ auf $[-A, 0)$. \diamond

Dynamiken der Form (D1) mit kompaktem Träger der Übertragungsfunktion bilden die Grundlage für das in Kapitel V vorgestellte Programm. Als generelle Voraussetzung gelte ab jetzt für diesen Abschnitt

Voraussetzung 1. Sei $\psi : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine Abbildung mit beschränktem Speicher der Länge $A \in (0, \infty)$, welche

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mu \in M} \psi(\mu) < \infty$$

erfüllt.

Zunächst weisen wir die Existenz eines stationären Punkt-Prozesses nach (Satz 8.5). Dieser ist eindeutig. Für diesen Nachweis benötigen wir jedoch die Stabilität in Variation, die im zweiten Unterabschnitt bewiesen wird (Satz 8.7).

1) Existenz. Es sei (Ω, \mathcal{F}) der kanonische Raum der markierten Punkt-Prozesse auf \mathbb{R} mit Marken in $[0, 1]$. Ferner sei \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem $\bar{N} = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein markierter Poisson-Prozeß mit Intensität Λ und $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $\mathbb{R}[0, 1]$ -verteilter Zufallsvariablen, unabhängig von $\mathcal{F}_\infty^{\bar{N}(\cdot \times [0, 1])}$, ist. Für alle $A \in \mathcal{M}_{[0, 1]}$ gilt $\mathbf{P}(\{\bar{N}(\cdot) \in A\}) = \mathbf{P}(A)$, also $\mathbf{P}^{\bar{N}(\cdot)} = \mathbf{P}$.

Der Punkt-Prozeß R werde wie folgt konstruiert:

Ein Punkt T_n von \bar{N} ist genau dann ein Punkt von $R = (R_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, falls $T_n - T_{n-1} > A$, also

$$R(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_C(T_n) \mathbb{1}_{\{T_n - T_{n-1} > A\}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_C(R_k),$$

$C \in \mathfrak{B}$. Aus 6.4 folgt die θ_t -Kompatibilität von R sowie die Endlichkeit der durchschnittlichen Intensität von R . Ziel wird im folgenden die Konstruktion eines θ_t -kompatiblen Punkt-Prozesses N der Form

$$(8.2) \quad N(C) = \int_C \bar{N} \left(dt \times \left[0, \frac{\psi(S_t N)}{\Lambda} \right] \right) = \int_{C \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, \frac{\psi(S_t N)}{\Lambda}]}(z) \bar{N}(dt \times dz),$$

$C \in \mathfrak{B}$, sein. Dazu werden wir uns der Prozesse \bar{N} und R bedienen. Die Problematik der Festlegung von N durch Gleichung (8.2) entstammt dem Auftreten von N in ψ auf der rechten Seite. Dies macht die Wahl geeigneter Startpunkte der folgenden Konstruktion nötig.

8.3. Lemma. Läßt sich gemäß (8.2) ein Punkt-Prozeß N konstruieren, so besitzt dieser im zufälligen Intervall $[R_k - A, R_k)$ keinen Punkt, und für die Konstruktion auf $[R_k, \infty)$ ist die Kenntnis von N auf $(-\infty, R_k)$ nicht erforderlich.

Beweis: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt nach Definition von R

$$\begin{aligned} 0 \leq N([R_k - A, R_k)) &= \int_{[R_k - A, R_k)} \bar{N} \left(dt \times \left[0, \frac{\psi(S_t N)}{\Lambda} \right] \right) \\ &\leq \int_{[R_k - A, R_k)} \bar{N}(dt \times [0, 1]) = \bar{N}([R_k - A, R_k) \times [0, 1]) = 0. \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich für alle $t \in [R_k, \infty)$ aufgrund des beschränkten Speichers der Abbildung ψ

$$\begin{aligned}\psi(S_t N) &= \psi(S_t N(\cdot \cap [-A, 0))) = \psi(N((t + \cdot) \cap [t - A, t])) \\ &= \psi(N((t + \cdot) \cap [t - A, t] \cap [R_k, \infty))),\end{aligned}$$

denn $[t - A, t] \subset [R_k - A, \infty)$. □

Nach Lemma 6.3 gilt $\lim_{k \rightarrow -\infty} R_k = -\infty$ f.s.. Sei $\omega \in \Omega$, $k \in \mathbb{Z}$ und $\tau_k : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $R_k(\omega) = T_{\tau_k(\omega)}(\omega)$. In dieser Situation müssen die τ_k , $k \in \mathbb{Z}$, nicht meßbar sein. Wie im Beweis zuvor erkennt man

$$\begin{aligned}\psi(S_{T_{\tau_k+n}} N) &= \psi(N((T_{\tau_k+n} + \cdot) \cap [T_{\tau_k+n} - A, T_{\tau_k+n}])) \\ &= \psi(N((T_{\tau_k+n} + \cdot) \cap [T_{\tau_k+n} - A, T_{\tau_k+n-1}])).\end{aligned}$$

Für jeden Punkt T_{τ_k+n} , $n \in \mathbb{N}_0$, der R_k nachfolgt, können wir anhand der Prozesse (\emptyset bezeichne den „leeren Punkt-Prozeß“, d.h. $\emptyset(C) = 0$ für alle $C \in \mathfrak{B}$)

$$(8.3) \quad \begin{aligned}N^{(k,0)} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{N}\left(\cdot \cap \{T_{\tau_k}\} \times \left[0, \frac{\psi(\emptyset)}{\Lambda}\right]\right), \\ N^{(k,n)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\cdot \cap [T_{\tau_k}, T_{\tau_k+n}]} \bar{N}\left(dr \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \psi(S_r N^{(k,n-1)})\right]\right), \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

induktiv entscheiden, ob dieser zu N gehört, denn nach Konstruktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$N(\cdot \cap [T_{\tau_k}, T_{\tau_k+n}]) = N^{(k,n)},$$

wobei im Fall $n = 0$ diese Entscheidung für keinen Punkt getroffen sein muß. Die Punkte R_k stellen Regenerationspunkte des Prozesses N und damit Startpunkte der Konstruktion dar. Streng genommen muß die Konstruktion auf Intervallen $[R_k, R_{k+1})$ durchgeführt werden. Da $N([R_{k+1} - A, R_{k+1})) = 0$ gilt, ist es jedoch für die Durchführung der Konstruktion auf $[R_{k+1}, R_{k+2})$ unerheblich, ob zuvor bereits Punkte erzeugt wurden. Daher kann o.B.d.A. die Konstruktion auf $[R_k, \infty)$ durchgeführt werden.

8.4. Lemma. *Die in (8.3) definierten Punkt-Prozesse sind θ_t -kompatibel, woraus die θ_t -Kompatibilität von N folgt.*

Beweis: Sei $k \in \mathbb{Z}$, $\omega \in \Omega$ und $C \in \mathfrak{B}([R_k(\omega), \infty))$. Für $n = 0$ gilt, da \bar{N} und R θ_t -kompatibel sind,

$$\begin{aligned}N^{(k,0)}(\omega, t + C) &= N(\omega, (t + C) \cap \{T_{\tau_k(\omega)}(\omega)\}) \\ &= \bar{N}\left(\omega, (t + C) \cap \{R_k(\theta_t \omega) + t\} \times \left[0, \frac{\psi(\emptyset)}{\Lambda}\right]\right) \\ &= S_t \bar{N}\left(\omega, C \cap \{R_k(\theta_t \omega)\} \times \left[0, \frac{\psi(\emptyset)}{\Lambda}\right]\right) \\ &= \bar{N}\left(\theta_t \omega, C \cap \{T_{\tau_k(\theta_t \omega)}(\theta_t \omega)\} \times \left[0, \frac{\psi(\emptyset)}{\Lambda}\right]\right) = N^{(k,0)}(\theta_t \omega, C).\end{aligned}$$

Gelte die θ_t -Kompatibilität für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
& N^{(k,n+1)}(\omega, t + C) \\
&= \int_{t+C \cap [T_{\tau_k}(\omega), T_{\tau_k(\omega)+n+1}(\omega)]} \bar{N} \left(\omega, dr \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \psi(S_r N^{(k,n)}(\omega, \cdot)) \right] \right) \\
&= \int_{C \cap [R_k(\theta_t \omega), T_{\tau_k(\theta_t \omega)+n+1}(\theta_t \omega)]} \bar{N} \left(\omega, t + dr \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \psi(S_r S_t N^{(k,n)}(\omega, \cdot)) \right] \right) \\
&= \int_{C \cap [T_{\tau_k(\theta_t \omega)}(\theta_t \omega), T_{\tau_k(\theta_t \omega)+n+1}(\theta_t \omega)]} S_t \bar{N} \left(\omega, dr \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \psi(S_r N^{(k,n)}(\theta_t \omega, \cdot)) \right] \right) \\
&= N^{(k,n+1)}(\theta_t \omega, C),
\end{aligned}$$

die Induktionsvoraussetzung wurde dabei beim vorletzten, die θ_t -Kompatibilität von \bar{N} und R beim letzten und zweiten Gleichheitszeichen genutzt. \square

Nach Korollar A1.8 ist N ein $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptierter Punkt-Prozeß. Die \mathcal{F}_t^N -Vorhersagbarkeit von $(\omega, t) \mapsto S_t N(\omega, \cdot \cap (-\infty, 0))$ zeigt die folgende Überlegung: Für beliebige Mengen $A \in \mathcal{M}'_1$ der Gestalt $A = \{\mu \in \mathcal{M}'_1; \mu(C) \in B\}$ mit $C \in \mathfrak{B}$, B ein Element der Potenzmenge von \mathbb{N}_0 , gilt nach Lemma 6.8

$$\begin{aligned}
& \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; S_t N(\omega, \cdot \cap (-\infty, 0)) \in A\} \\
&= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; S_t N(\omega, C \cap (-\infty, 0)) \in B\} \\
&= \left\{ (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; \int_{(t+C) \cap (-\infty, t)} N(\omega, ds) \in B \right\} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t^N).
\end{aligned}$$

Der Beginn von Abschnitt 4 rechtfertigt die Beschränkung auf Mengen A der obigen Form.

Es folgt die \mathcal{F}_t^N -Vorhersagbarkeit für Prozesse $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form $\lambda(t) = \psi(S_t N)$.

Da N natürlich auch $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptiert ist, gilt $\mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ und Satz 6.11 zeigt, daß N die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ zuläßt. Hieraus folgt schließlich, daß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ebenfalls eine \mathcal{F}_t^N -Intensität von N ist.

Beachten wir nun noch 5.7, so erhalten wir für kausale Abbildungen ψ mit beschränktem Gedächtnis die Existenzaussage:

8.5. Satz (Dynamiken mit beschränktem Speicher I). *Es sei die Situation von Voraussetzung 1 gegeben. Dann gibt es ein (eindeutiges) stationäres Verteilungsgesetz eines Punkt-Prozesses N mit Dynamik mit beschränktem Speicher der Form (8.1).*

Die Eindeutigkeit erhalten wir im Anschluß an den Stabilitätsbeweis.

8.6. Bemerkung. Die Existenzbeweise in diesem Abschnitt und Abschnitt 11 werden aufgrund der anschaulichkeit mittels eines markierten Poisson-Prozesses \bar{N}_1 durchgeführt. Zu jedem Punkt wählen wir zufällig eine Marke im Intervall $[0, 1]$ und entscheiden anhand der Vergangenheit des Prozesses, ob der zugehörige Punkt zum konstruierten Prozeß gehören soll (siehe Gleichung (8.3)).

Im Fall beschränkter Anregungsfunktionen lässt die Analogie von 6.11 und 6.12 sowie die problemlose Übertragung der weiteren Ergebnisse auch eine Konstruktion unter Zuhilfenahme eines Poisson-Prozesses \bar{N}_2 der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 zu; dazu haben wir die Zuordnungen

$$(8.4) \quad \bar{N}_2(\cdot \times [0, \Lambda]) = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{anstelle von} \quad \bar{N}_1(\cdot \times [0, 1]) = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{und}$$

$$(8.5) \quad \int_C \bar{N}_2(dt \times [0, \lambda(t)]) \quad \text{anstelle von} \quad \int_C \bar{N}_1\left(dt \times \left[0, \frac{\lambda(t)}{\Lambda}\right]\right) \quad \text{etc.}$$

zu treffen.

2) Stabilität in Variation. Ohne Voraussetzung 1 zu verschärfen, erhalten wir für eine Dynamik der Form (8.1) Stabilität in Variation. Diese Stabilität resultiert aus dem beschränkten Gedächtnis von ϕ . Wir werden wie bereits im Existenzteil Regenerationspunkte nutzen und anhand dieser Kopplung durchführen.

8.7. Satz (Dynamiken mit beschränktem Speicher II). *Gegeben sei die Voraussetzung 1. Dann sind Dynamiken der Form (8.1), unabhängig von der Anfangsbedingung, stabil in Variation. Die Konvergenz in Variation ist exponentiell schnell.*

Beweis: Sei $N' = (T'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Punkt-Prozeß, welcher die $\mathcal{F}_t^{N'}$ -Intensität $(\lambda'(t))_{t \in [0, \infty)}$ auf $[0, \infty)$ zuläßt, $\lambda'(t) = \psi(S_t N')$. Da ψ beschränkt durch Λ ist, gilt $\mathbf{E}(N'((a, b])) \leq (b - a)\Lambda$ für $(a, b] \subset [0, \infty)$, somit ist N' nichtexplodierend auf $[0, \infty)$. Nach Anwendung von 6.14 erhalten wir durch

$$\begin{aligned} \bar{N}((a, b] \times L) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T'_n) \mathbb{1}_L(\lambda'_+(T'_n) U'_n) + \int_{(a, b]} \int_{L \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}'(dt \times dz) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{(a, b]} \int \mathbb{1}_L(\lambda'_+(t)z) \delta_{\{U'_n\}}(dz) \delta_{\{T'_n\}}(dt) + \int_{(a, b]} \int_{L \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}'(dt \times dz), \end{aligned}$$

$\lambda'_+(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \lambda'(t)$, einen homogenen $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}})$ -Poisson-Prozeß der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 . Dabei werden $(U'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und \hat{N}' gemäß 6.14 gewählt. Für $C \in \mathfrak{B}^+$ gilt

$$\begin{aligned} &\int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda'(t)]) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_C \int \mathbb{1}_{[0, \lambda'(t)]}(\lambda'_+(t)z) \delta_{\{U'_n\}}(dz) \delta_{\{T'_n\}}(dt) + \int_C \int_{[0, \lambda'(t)] \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}'(dt \times dz) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_C \int \mathbb{1}_{[0, \lambda'(t)]}(\lambda'(t)z) \delta_{\{U'_n\}}(dz) \delta_{\{T'_n\}}(dt) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_C(T'_n) = N'(C). \end{aligned}$$

Wir konstruieren aus \bar{N} wie im Existenzbeweis einen stationären Punkt-Prozeß N mit \mathcal{F}_t^N -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form (8.1), beachte 8.6.

Setze $(\bar{N}(\cdot \times [0, \Lambda]) = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}})$

$$\begin{aligned} T &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{\{T_1 \leq A\}} \left(T_1 + \sum_{n \geq 2} (T_n - T_{n-1}) \prod_{k=2}^n \mathbb{1}_{\{T_k - T_{k-1} \leq A\}} \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{T_1 \leq A\}} \sup\{T_n; n \in \mathbb{N}, T_k - T_{k-1} \leq A \text{ für alle } 2 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

Falls $T_1 > A$ ist gilt $T = 0$, ansonsten ist T der erste Punkt $T_k > 0$ mit $T_{k+1} - T_k > A$. Da N und N' auf einem solchen Punkt T_k verschieden sein können, ist T keine Kopplungszeit. Analog zur Begründung von 4.6 zeigt man eine schwächere „Kopplungsungleichung“

$$(8.6) \quad \sup_{C \in \mathcal{M}'} \left| \mathbf{P}(S_t N^+ \in C) - \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) \right| \leq \mathbf{P}(T \geq t).$$

Für alle $\alpha > 0$ gilt

$$\mathbf{P}(T \geq t) e^{\alpha t} = \int_{\{T \geq t\}} e^{\alpha t} d\mathbf{P} \leq \int_{\{T \geq t\}} e^{\alpha T} d\mathbf{P} \leq \int e^{\alpha T} d\mathbf{P} = \mathbf{E} e^{\alpha T},$$

somit $\mathbf{P}(T \geq t) \leq (\mathbf{E} e^{\alpha T}) e^{-\alpha t}$. Aus der Definition von T leitet man

$$\begin{aligned} e^{\alpha T} &= e^{\alpha 0} \mathbb{1}_{\{T_1 > A\}} + e^{\alpha T} \mathbb{1}_{\{T_1 \leq A\}} \\ &= \mathbb{1}_{\{T_1 > A\}} + \mathbb{1}_{\{T_1 \leq A\}} e^{\alpha T_1} \sum_{n \geq 2} \mathbb{1}_{\{T_n - T_{n-1} > A\}} \prod_{k=2}^{n-1} e^{\alpha(T_k - T_{k-1})} \mathbb{1}_{\{T_k - T_{k-1} \leq A\}} \end{aligned}$$

ab, was zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{\alpha T} &= \mathbf{P}(T_1 > A) \\ &\quad + \sum_{n \geq 2} \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{T_1 \leq A\}} e^{\alpha T_1}) \mathbf{E}(\mathbb{1}_{\{T_n - T_{n-1} > A\}}) \prod_{k=2}^{n-1} \mathbf{E}(e^{\alpha(T_k - T_{k-1})} \mathbb{1}_{\{T_k - T_{k-1} \leq A\}}) \\ &= \int_A^\infty \Lambda e^{-\Lambda t} dt + \sum_{n \geq 2} \int_0^A \Lambda e^{(\alpha-\Lambda)t} dt \int_A^\infty \Lambda e^{-\Lambda t} dt \prod_{k=2}^{n-1} \int_0^A \Lambda e^{(\alpha-\Lambda)t} dt \\ &= e^{-\Lambda A} \left(1 + \sum_{n \geq 2} \left(\frac{\Lambda}{\alpha - \Lambda} (e^{(\alpha-\Lambda)A} - 1) \right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

führt, denn die $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ bilden einen Poisson-Prozeß. Aus dieser Gleichheit können wir ablesen, daß der Erwartungswert $\mathbf{E} e^{\alpha T}$ genau dann endlich ist, wenn $\frac{\Lambda}{\alpha - \Lambda} (e^{(\alpha-\Lambda)A} - 1) < 1$. Die Abbildung $\alpha \mapsto \frac{\Lambda}{\alpha - \Lambda} (e^{(\alpha-\Lambda)A} - 1) \geq 0$ ist stetig auf dem Intervall $[0, \Lambda]$, und da $\frac{\Lambda}{0 - \Lambda} (e^{(0-\Lambda)A} - 1) = 1 - e^{-\Lambda A} < 1$ ist, läßt sich z.B. ein hinreichend kleines $\alpha > 0$ finden, so daß $\mathbf{E} e^{\alpha T}$ endlich ist.

Zusammen mit (8.6) zeigt dies für ein geeignetes $\alpha > 0$

$$\sup_{C \in \mathcal{M}'} \left| \mathbf{P}(S_t N^+ \in C) - \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) \right| \leq (\mathbf{E} e^{\alpha T}) e^{-\alpha t}$$

und daher $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{C \in \mathcal{M}'} |\mathbf{P}(S_t N^+ \in C) - \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C)| = 0$. Da N stationär ist, folgt somit $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{S_t N'^+} = \mathbf{P}^{N^+}$ in Variation, d.h. die Dynamik ist stabil in Variation, und die Konvergenzrate ist exponentiell schnell, unabhängig von der Anfangsbedingung. \square

Die in 8.5 angesprochene Eindeutigkeit der stationären Lösung erhalten wir wie in Lemma 4.7, wir führen den Beweis daher nicht erneut durch.

8.8. Bemerkung (Kopplungszeiten im Beweis von 8.5). Eine Alternative zu T im Stabilitätsbeweis wäre der erste Punkt $T_n > 0$ mit $T_n - T_{n-1} > A$, also R_1 , gewesen. Diese Kopplungszeit stellt jedoch eine nicht so scharfe Schranke für die Konvergenz dar.

BEGRÜNDUNG: Da $T < R_1$ f.s. folgt aus $\mathbf{E} e^{\alpha R_1} < \infty$ stets $\mathbf{E} e^{\alpha T} < \infty$. Ferner zeigt

$$\mathbf{E} e^{\alpha R_1} \geq \mathbf{E} e^{\alpha T_1} = \int_0^\infty \Lambda e^{(\alpha-\Lambda)t} dt = \frac{\Lambda}{\alpha-\Lambda} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha-\Lambda)t} - 1 \right),$$

$\alpha \neq \Lambda$, daß für die Endlichkeit von $\mathbf{E} e^{\alpha R_1}$ die Bedingung $\alpha < \Lambda$ notwendig ist. Für $\mathbf{E} e^{\alpha T} < \infty$ reicht die im Beweis gegebene Bedingung, $\alpha > \Lambda$ ist ebenfalls zugelassen. \diamond

9. Intensitäten mit nichtfallenden Anregungsfunktionen

Im nun folgenden Satz wird die Existenz stationärer Verteilungen für einen Punkt-Prozeß N mit Dynamik (D1) gezeigt, ohne die in Satz 8.5 benötigte Bedingung eines endlichen Speichers zu fordern. Wie brauchen hier nur die Monotonie der Anregungsfunktion und eine Beschränkung des Wachstums der Übertragungsfunktion, können in diesem Zusammenhang aber keine Aussage über Stabilität treffen.

9.1. Satz (Wachsende Anregungsfunktionen). *Gegeben sei eine nichtfallende, linksseitig stetige und nichtnegative Funktion ϕ , die*

$$(9.1) \quad \phi(x) \leq \lambda + \alpha x, \quad x \in \mathbb{R},$$

für ein $\lambda > 0$ und $\alpha \geq 0$ erfüllt. Zusätzlich bezeichne $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine Funktion mit

$$(9.2) \quad \alpha \int_{[0, \infty)} h(t) dt < 1.$$

Dann gibt es einen stationären Punkt-Prozeß N mit Dynamik (D1).

Verschärfen wir die Anforderungen (9.1) an ϕ dahingehend, daß ϕ sogar α -Lipschitz-stetig ist, so können wir Anfangsbedingungen angeben, in denen Stabilität gilt, siehe Abschnitt 10 und 11.

9.2. Bemerkung. Gelte in 9.1 $\alpha = 0$. Dann ist die Aussage auch für quasi-integrierbare Funktionen h richtig.

BEWEIS (VON 9.1): Sei (Ω, \mathcal{F}) der kanonische Raum der Punkt-Prozesse auf \mathbb{R}^2 , versehen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} , unter dem $\bar{N}(\omega, \cdot) = \omega$ Poisson-verteilt mit Intensität 1 ist. Gelte $\mathbf{P} \circ S_t = \mathbf{P}$ und $\theta_t = S_t$, also ist \bar{N} θ_t -kompatibel.

Es wird nun induktiv ein Punkt-Prozeß mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert. Sei $\lambda^{(0)}(t) \equiv 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Definiere nun rekursiv die Prozesse $(\lambda^{(n+1)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ und $N^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch

$$(9.3) \quad \begin{aligned} N^{(n)}(C) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C \bar{N}(ds \times [0, \lambda^{(n)}(s)]) , \\ \lambda^{(n+1)}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(ds) \right) , \end{aligned}$$

$C \in \mathfrak{B}$, $t \in \mathbb{R}$.

BEHAUPTUNG 1. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und nichtleeren Mengen $C \in \mathfrak{B}$ sind $\lambda^{(n)}(t)$ und $N^{(n)}(C)$ monoton wachsend in n .

Für die leere Menge $C = \emptyset$ ist die Aussage von Behauptung 1 klar.

BEGRÜNDUNG (VON BEHAUPTUNG 1): Mittels einer Induktion nach n zeigen wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda^{(n)}(t) \geq \lambda^{(n-1)}(t) \quad \text{und} \quad N^{(n)}(C) \geq N^{(n-1)}(C).$$

Im Fall $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Gelten also diese Ungleichungen für ein $n \geq 2$. Nach Voraussetzung ist $h \geq 0$ und ϕ nichtfallend, so daß für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda^{(n+1)}(t) &= \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(ds) \right) \\ &\geq \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n-1)}(ds) \right) = \lambda^{(n)}(t), \end{aligned}$$

und damit für $C \in \mathfrak{B}$

$$N^{(n+1)}(C) = \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda^{(n+1)}(t)]) \geq \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda^{(n)}(t)]) = N^{(n)}(C)$$

folgt. ◊

Behauptung 1 zeigt, daß die Prozesse

$$\lambda(\omega, t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(\omega, t) \quad \text{und} \quad N(\omega, C) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(\omega, C)$$

für alle $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathfrak{B}$ definiert sind. Die Grenzprozesse sind nach 7.1(i) θ_t -kompatibel (und können den Wert ∞ annehmen). Außerdem ist $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ als Grenzwert $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbarer Prozesse wieder $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbar (siehe 7.1(ii) und [Bau92] 9.7 Korollar 2).

BEHAUPTUNG 2. Der Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist $\mathbf{P} \otimes \mathbb{A}$ -f.ü. endlich.

BEGRÜNDUNG: Wegen $\mathbf{E} \left(\int_{-T}^T \lambda(t) dt \right) = \int_{-T}^T \mathbf{E}(\lambda(\theta_t, 0)) dt = 2T\mathbf{E}(\lambda(0))$ reicht es, die

Endlichkeit von $\mathbf{E} \lambda(0)$ nachzurechnen. Aus Voraussetzung (9.1) ergibt sich gemeinsam mit 7.1(ii) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \lambda^{(n+1)}(0) &= \mathbf{E} \left(\phi \left(\int_{(-\infty, 0)} h(-s) N^{(n)}(ds) \right) \right) \leq \lambda + \mathbf{E} \left(\alpha \int_{(-\infty, 0)} h(-s) N^{(n)}(ds) \right) \\ &= \lambda + \mathbf{E} \left(\alpha \int_{(-\infty, 0)} h(-s) \lambda^{(n)}(s) ds \right) = \lambda + \alpha \int_{(-\infty, 0)} h(-s) \mathbf{E}(\lambda^{(n)}(s)) ds \\ &= \lambda + \alpha \int_{(0, \infty)} h(s) ds \mathbf{E}(\lambda^{(n)}(0))\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Wir können hieraus induktiv $\mathbf{E}(\lambda^{(n+1)}(0)) \leq \lambda \sum_{k=0}^n \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^k$ folgern, müssen dabei $\lambda^{(0)}(t) \equiv 0$ beachten, und nach Voraussetzung (9.2) gilt im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \lambda(0) \leq \frac{\lambda}{1 - \alpha \int_{[0, \infty)} h(s) ds} < \infty$$

nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. \diamond

BEHAUPTUNG 3. $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von N .

BEGRÜNDUNG: Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$N(C) = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[0, \lambda^{(n)}(t)]}(z) \bar{N}(dt \times dz)$$

und außerdem $\mathbb{1}_{[0, \lambda(t)]}(z) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[0, \lambda^{(n)}(t)]}(z) \leq \mathbb{1}_{[0, \lambda(t)]}(z)$. Wie im Satz 6.12 zeigen wir, daß der Prozeß $(\int_C \mathbb{1}_{[0, \lambda(t)]}(z) \bar{N}(dt \times dz))_{C \in \mathfrak{B}}$ die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ zuläßt, woraus mit Satz 6.12 folgt, daß N die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ besitzt. \diamond

BEHAUPTUNG 4. Der stochastische Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist von der gewünschten Form (D1).

BEGRÜNDUNG: Da $N^{(n)} \uparrow N$ und ϕ monoton wachsend ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = \lambda^{(0)}(t) \leq \lambda^{(n)}(t) = \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n-1)}(ds) \right) \leq \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N(ds) \right)$$

und $\lambda^{(n)}(t) \uparrow \lambda(t)$ zeigt

$$\lambda(t) \geq \lambda^{(n+1)}(t) = \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(ds) \right).$$

Diese Ungleichungen führen zu

$$\lambda(t) \leq \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N(ds) \right)$$

und, aufgrund der linksseitigen Stetigkeit von ϕ , zu

$$\lambda(t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(ds) \right) = \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N(ds) \right).$$

Dies zeigt, daß N die gewünschte Dynamik besitzt. \diamond

Aus 7.1(i) folgt die θ_t -Kompatibilität von N als Grenzwert θ_t -kompatibler Prozesse. Somit ist N nach 5.7 stationär, was den Beweis abschließt. \square

10. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – unbeschränkte Dynamiken

Wir verschärfen die Bedingungen aus Satz 9.1 und stellen in diesem Abschnitt die folgenden Bedingungen an die Übertragungsfunktion h und die Anregungsfunktion ϕ :

Voraussetzung 2. Gegeben seien eine α -Lipschitz-stetige Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $\alpha > 0$, und $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, die der Bedingung

$$(10.1) \quad \alpha \int_{[0, \infty)} |h(t)| dt < 1$$

genügt.

Zunächst wenden wir uns der Existenz eines stationären Punkt-Prozesses N mit Intensität gemäß (D1) zu, die obigen Anforderungen genügt, siehe Satz 10.5. Um in Satz 10.10 und 10.12 Stabilität zu zeigen, werden wir weitere Forderungen ausspielen müssen.

Durch den Übergang zu $\phi(\frac{1}{\alpha} \cdot)$ und αh können wir o.B.d.A. $\alpha = 1$ wählen.

1) Existenz. Wie im Beweis zu Satz 9.1 sei (Ω, \mathcal{F}) der kanonische Raum der Punkt-Prozesse auf \mathbb{R}^2 , \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) mit $\mathbf{P} \circ S_t = \mathbf{P}$ derart, daß $\bar{N}(\omega, \cdot) = \omega$ Poisson-verteilt mit Intensität 1 ist. Durch die Zuordnung $\theta_t = S_t$ ist \bar{N} θ_t -kompatibel. Sei $\lambda^{(0)}(t) \equiv 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für $t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathfrak{B}$ setze

$$\begin{aligned} N^{(n)}(C) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda^{(n)}(t)]) , \\ \lambda^{(n+1)}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left(\int_{(-\infty, t]} h(t-s) N^{(n)}(ds) \right) , \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}_0$. Für diese Prozesse gilt 7.1(i) und (ii).

10.1. Lemma. Für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert $(\lambda^{(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ f.s. und in $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gegen ein $\lambda(t)$.

BEWEIS: Die Lipschitz-Stetigkeit von ϕ zeigt mit den Sätzen 7.1(ii) und 6.15

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|) &\leq \mathbf{E} \left(\left| \int_{(-\infty, 0]} h(-s) N^{(n)}(ds) - \int_{(-\infty, 0]} h(-s) N^{(n-1)}(ds) \right| \right) \\ &\leq \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| |N^{(n)} - N^{(n-1)}|(ds) \right) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| |\lambda^{(n)}(s) - \lambda^{(n-1)}(s)| ds \right).$$

Diese Ungleichung lässt sich unter Berücksichtigung des Satzes von Fubini und der θ_t -Kompatibilität der Prozesse $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ (siehe 7.1(i)) aufgrund der Wahl von \mathbf{P} fortführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|) &\leq \int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| \mathbf{E}(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda^{(n-1)}(0)|) ds \\ &= \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \mathbf{E}(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda^{(n-1)}(0)|). \end{aligned}$$

Die induktive Anwendung führt zu

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|) &\leq \sum_{n \geq 0} \left(\int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^n \mathbf{E}(|\lambda^{(1)}(0) - \lambda^{(0)}(0)|) \\ (10.2) \quad &= \sum_{n \geq 0} \left(\int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^n \mathbf{E}\left(\left| \phi\left(\int_{(-\infty, 0)} h(-s) N^{(0)}(ds)\right) - 0 \right|\right) \\ &= \phi(0) \sum_{n \geq 0} \left(\int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^n < \infty, \end{aligned}$$

unter Beachtung von Voraussetzung (10.1). Bezuglich der (Halb-)Norm $\|\cdot\|_1 = \mathbf{E}|\cdot|$ auf dem Raum $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gilt somit

$$(10.3) \quad \lambda^{(n)}(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(0),$$

denn $\|\lambda^{(k)}(0) - \lambda^{(m)}(0)\|_1 \leq \sum_{n \geq k} \|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ (o.B.d.A. $m \geq k$). Die Markov-Ungleichung sichert

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)| > \left(\int_0^\infty |h(s)| ds\right)^{\frac{n}{2}}\right) \\ &\leq \frac{1}{\left(\int_0^\infty |h(s)| ds\right)^{\frac{n}{2}}} \mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|) \\ &\leq \frac{1}{\left(\int_0^\infty |h(s)| ds\right)^{\frac{n}{2}}} \left(\int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^n \mathbf{E}(|\lambda^{(1)}(0) - \lambda^{(0)}(0)|) \\ &= \phi(0) \left(\int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Endlichkeit von $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}\left(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)| > \left(\int_0^\infty |h(s)| ds\right)^{\frac{n}{2}}\right)$, woraus gemäß [Nev65] Prop. II.4.2 (Seite 45) die fast sichere Gültigkeit von (10.3) folgt.

Durch die Festlegung $\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\theta_t \cdot, 0)$ erhalten wir aus der θ_t -Kompatibilität der betrachteten Prozesse die Behauptung: es gilt

$$\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\theta_t \cdot, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(\theta_t \cdot, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t)$$

bezüglich $\|\cdot\|_1$ und

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) = \lambda(t)\right) = \mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(\theta_t \cdot, 0) = \lambda(\theta_t \cdot, 0)\right) = \mathbf{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(0) = \lambda(0)\right) = 1.$$

□

Die Abbildung $\omega \mapsto \lambda(\omega, 0)$ ist \mathcal{F} -meßbar und $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ein meßbarer Fluß auf (Ω, \mathcal{F}) , d.h. $(\omega, t) \mapsto \theta_t \omega$ ist $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B} - \mathcal{F}$ -meßbar. Daher ist $(\omega, t) \mapsto \lambda(\theta_t \omega, 0) = \lambda(\omega, t)$ $\mathcal{F} \otimes \mathfrak{B} - \mathfrak{B}$ -meßbar. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) = \lambda(t)$ f.s. gilt, ist $\lambda(t)$ $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbar (siehe 2.5), und nach [DVJ88] (Seite 649 unten) können wir $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ als $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -progressiv und schließlich als $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbar annehmen (vergleiche 2.7).

Durch $(\int_C \bar{N}(ds \times [0, \lambda(s)]))_{C \in \mathfrak{B}}$ wird ein θ_t -kompatibler Prozeß (denn für die auftretenden Prozesse gilt dies, Nachweis analog zum Beweis von 7.1(i)) mit $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ gegeben (siehe 6.12). Dieser ist nach 5.7 stationär und wird im folgenden mit N bezeichnet.

10.2. Lemma. Auf allen beschränkten Borel-Mengen C wird $N^{(n)}$ für wachsendes n f.s. konstant (d.h. die Lage der Punkte bleibt f.s. gleich) und $\lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(C)$ stimmt f.s. mit $N(C)$ überein.

BEWEIS: Sei $C \in \mathfrak{B}$ beschränkt. Da $|N^{(n)} - N^{(n-1)}|(C) \in \mathbb{N}_0$ ist, zeigt sich unter Berücksichtigung von Satz 6.15, dem Satz von Fubini und der θ_t -Kompatibilität von $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}\left(\int_C |N^{(n+1)} - N^{(n)}|(ds) \neq 0\right) &\leq \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}\left(\int_C |N^{(n+1)} - N^{(n)}|(ds)\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}\left(\int_C |\lambda^{(n+1)}(s) - \lambda^{(n)}(s)| ds\right) = \sum_{n \geq 0} \int_C \mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|) ds \\ &= \lambda(C) \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|) < \infty, \end{aligned}$$

vergleiche (10.2), so daß sich aus dem Borel-Cantelli-Lemma

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_C |N^{(n+1)} - N^{(n)}|(ds) \neq 0 \right\}\right) = 0$$

ergibt. Dies bedeutet, daß $N^{(n)}$ und $N^{(n+1)}$ auf C für wachsendes n schließlich f.s. stets dieselben Punkte besitzen.

Die zweifache Anwendung des Lemmas von Fatou zeigt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\int_C \left| \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(ds) - N(ds) \right| \right) &= \mathbf{E}\left(\int_C \left| \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(ds) - \bar{N}(ds \times [0, \lambda(s)]) \right| \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left(\int_C |\bar{N}(ds \times [0, \lambda^{(n)}(s)]) - \bar{N}(ds \times [0, \lambda(s)])|\right) \end{aligned}$$

Aus 6.15 folgt gemeinsam mit der θ_t -Kompatibilität der beteiligten Prozesse sowie der θ_t -Invarianz des zugrundliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\int_C \left| \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(ds) - N(ds) \right| \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left(\int_C |\lambda^{(n)}(s) - \lambda(s)| ds\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C) \mathbf{E}(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda(0)|) = 0, \end{aligned}$$

siehe 10.1. \square

10.3. Lemma. *Der Prozeß $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist von der Form (D1).*

Beweis: Aufgrund der θ_t -Kompatibilität reicht es, an der Stelle „0“ die Form (D1) nachzurechnen:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\left|\lambda(0) - \phi\left(\int_{(-\infty,0)} h(-s) N(ds)\right)\right|\right) \\ & \leq \mathbf{E}(|\lambda(0) - \lambda^{(n+1)}(0)|) \\ & \quad + \mathbf{E}\left(\left|\phi\left(\int_{(-\infty,0)} h(-s) N^{(n)}(ds)\right) - \phi\left(\int_{(-\infty,0)} h(-s) N(ds)\right)\right|\right) \\ & \leq \mathbf{E}(|\lambda(0) - \lambda^{(n+1)}(0)|) + \mathbf{E}\left(\int_{(-\infty,0)} |h(-s)| |N^{(n)} - N|(ds)\right) \\ & = \mathbf{E}(|\lambda(0) - \lambda^{(n+1)}(0)|) + \mathbf{E}\left(\int_{(-\infty,0)} |h(-s)| |\lambda^{(n)}(s) - \lambda(s)| ds\right) \\ & = \mathbf{E}(|\lambda(0) - \lambda^{(n+1)}(0)|) + \int_{(-\infty,0)} |h(-s)| ds \mathbf{E}(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda(0)|) \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

denn ϕ ist Lipschitz-stetig, $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ und $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ sind θ_t -kompatibel, und es gilt 6.15. Die Konvergenz folgt aus 10.1 und Voraussetzung (10.1). \square

10.4. Lemma. *Durch N wird ein Punkt-Prozeß mit endlicher mittlerer Intensität λ gegeben, $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(N((0,1]))$.*

Beweis: Die Nutzung der Lipschitz-Stetigkeit und die Verwendung einer analogen Abschätzung wie im Nachweis von 7.2 beim letzten Ungleichheitszeichen lassen uns zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}N((0,1]) &= \mathbf{E}\left(\int_0^1 \lambda(s) ds\right) = \mathbf{E}(\lambda(0)) \leq \mathbf{E}(|\lambda(0) - \lambda^{(n+1)}(0)|) + \mathbf{E}(\lambda^{(n+1)}(0)) \\ &\leq \mathbf{E}(|\lambda(0) - \lambda^{(n+1)}(0)|) + \phi(0) + \mathbf{E}\left(\int_{(-\infty,t)} |h(t-s)| N^{(n)}(ds)\right) \\ &\leq \mathbf{E}(|\lambda(0) - \lambda^{(n+1)}(0)|) + \phi(0) + \phi(0) \sum_{k=1}^n \left(\int_{[0,\infty)} |h(s)| ds\right)^k + \phi(0) \left(\int_{[0,\infty)} |h(s)| ds\right)^{n+1} \end{aligned}$$

gelangen. Im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zeigt dies

$$(10.4) \quad \mathbf{E}N((0,1]) \leq \frac{\phi(0)}{1 - \int_{[0,\infty)} |h(s)| ds} < \infty$$

aufgrund von Voraussetzung (10.1). \square

Insgesamt haben wir damit den folgenden Satz gezeigt:

10.5. Satz (Unbeschränkte Lipschitz-Dynamik I). *Gegeben sei Voraussetzung 2. Dann gibt es einen eindeutigen stationären Punkt-Prozeß N mit Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ gemäß (D1) und endlicher mittlerer Intensität $\lambda = \mathbf{E}(N((0, 1]))$.*

Die bisher noch nicht gezeigte Eindeutigkeit wird in Lemma 10.11 nachgeliefert. Nachdem wir die Existenz eines stationären Punkt-Prozesses zeigen konnten, wenden wir uns nun der Frage zu, unter welchen Anfangsbedingungen Stabilität in Verteilung bzw. Variation nachweisbar ist.

2) Stabilität in Verteilung. Zunächst schränken wir die Klasse der betrachteten Punkt-Prozesse ein. Mit \mathcal{N}_0 wird die Menge aller Punkt-Prozesse N bezeichnet, für die die Abbildung

$$(10.5) \quad t \mapsto \mathbf{E}(\lambda(t) | \mathcal{F}_0^N) = \mathbf{E}\left(\phi\left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N(ds)\right) \middle| \mathcal{F}_0^N\right)$$

f.s. lokal integrierbar auf $[0, \infty)$ ist (siehe dazu auch Unterabschnitt 4)).

Geeignete Anfangsbedingungen für die Stabilität in Variation werden in Voraussetzung 3 gegeben:

Voraussetzung 3. *Gegeben sei die Voraussetzung 2. Ferner definiere für einen Punkt-Prozeß N*

$$(10.6) \quad \varepsilon_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} \int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| N(du) ds,$$

$a \in [0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$. Durch

(AB i) $\sup_{t \geq 0} \varepsilon_a(t) < \infty$ f.s. und $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_a(t) = 0$ f.s. für alle $a > 0$

(AB ii) $\sup_{t \geq 0} \mathbf{E} \varepsilon_a(t) < \infty$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \varepsilon_a(t) = 0$ für alle $a > 0$

werden zwei Anfangsbedingungen (AB i) und (AB ii) für diesen Punkt-Prozeß gegeben.

Genügt ein Punkt-Prozeß N mit \mathcal{F}_t^N -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form (D1) Anfangsbedingung (AB i), so können wir die mittlere Zahl der Punkte von N im Intervall $(t-a, t] \subset [0, \infty)$, falls wir unter der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt $t-a$ bedingen, wie folgt aufgrund der α -Lipschitz-Stetigkeit abschätzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(N((t-a, t]) | \mathcal{F}_{t-a}^N) &= \mathbf{E}\left(\int_{t-a}^t \lambda(s) ds \middle| \mathcal{F}_{t-a}^N\right) \\ &\leq a\phi(0) + \int_{t-a}^t \int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| N(du) ds + \mathbf{E}\left(\int_{t-a}^t \int_{(0,s)} |h(s-u)| N(du) ds \middle| \mathcal{F}_{t-a}^N\right). \end{aligned}$$

Beachten wir, daß $\phi(0)$ die „Grundanregung“ des Punkt-Prozesses ohne einen einzigen Punkt ist, so können wir diese Darstellung zum Anlaß nehmen, um Anfangsbedingung (AB i) wie folgt zu interpretieren:

Da $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_a(t) = 0$ f.s. gilt, nimmt der Einfluß der Punkte von N^- für die Bestimmung von N in

$(t-a, t]$ bei wachsendem t ab. Gewichtet mit der Übertragungsfunktion strebt die Rückmeldung der Punkte der negativen Achse (von N) gegen 0, Anfangsbedingung (AB ii) besitzt eine analoge Interpretation.

Nun zum Nachweis der Stabilität in Verteilung, der in Satz 10.10 mündet.

Sei $N' = (T'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein transienter Punkt-Prozeß mit $\mathcal{F}_t^{N'}$ -Intensität $(\lambda'(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form (D1) auf $[0, \infty)$, $N' \in \mathcal{N}_0$. Ferner genüge N' einer der Anfangsbedingungen (AB i) oder (AB ii). Für alle $(a, b] \subset [0, \infty)$ gilt nach (10.5)

$$\mathbf{E}\left(N'((a, b]) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) = \mathbf{E}\left(\int_a^b \lambda'(t) dt \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) = \int_a^b \mathbf{E}\left(\lambda'(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) dt < \infty \quad \text{f.s.},$$

d.h. $N'((a, b]) < \infty$ f.s., also ist N' auf $[0, \infty)$ nichtexplodierend. Mittels 6.14 konstruiere auf \mathbb{R}^2 einen $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}})$ -Poisson-Prozeß der Intensität 1, $(U'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und \hat{N}' wie in der Konstruktion von 6.14 benötigt:

$$\begin{aligned} \bar{N}((a, b] \times L) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T'_n) \mathbb{1}_L(\lambda'_+(T'_n) U'_n) + \int_{(a, b]} \int_{L \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}'(dt \times dz) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \iint \mathbb{1}_{(a, b]}(t) \mathbb{1}_L(\lambda'_+(t) z) \delta_{\{U'_n\}}(dz) \delta_{\{T'_n\}}(dt) + \int_{(a, b]} \int_{L \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}'(dt \times dz), \end{aligned}$$

$(a, b] \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathfrak{B}$ und $\lambda'_+(t) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \lambda'(t)$. Aus dieser Darstellung erkennt man für beliebige Borel-Mengen $C \subset (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda'(t)]) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \iint \mathbb{1}_C(t) \mathbb{1}_{[0, \lambda'(t)]}(\lambda'_+(t) z) \delta_{\{U'_n\}}(dz) \delta_{\{T'_n\}}(dt) + \int_C \int_{[0, \lambda'(t)] \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}'(dt \times dz) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_C(T'_n) = N'(C), \end{aligned}$$

denn $\mathbf{P}^{U'_n} = \text{R}[0, 1]$ und $\hat{N}'(\cdot \times \{0\}) \sim \text{Poi}(0)$ ($\hat{N}'(\cdot \times \{0\})$ besitzt also keinen Punkt auf \mathbb{R}). Konstruiere aus \bar{N} wie zuvor in Unterabschnitt 1) einen stationären Punkt-Prozeß N mit endlicher durchschnittlicher Intensität und \mathcal{F}_t^N -Dynamik $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form (D1), dabei ist $\mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$. Definiere die Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$f(t) = f(\cdot, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{E}(|\lambda(t) - \lambda'(t)| \mid \mathcal{F}_0^{N'}) (\cdot) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Da $\mathbf{E}(\lambda'(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'})$ f.s. lokal integrierbar ist, folgt dies auch für f :

$$\begin{aligned} (10.7) \quad \int_a^b f(t) dt &= \int_{a \vee 0}^{b \vee 0} \mathbf{E}(|\lambda(t) - \lambda'(t)| \mid \mathcal{F}_0^{N'}) dt \\ &\leq \int_{a \vee 0}^{b \vee 0} \mathbf{E}(\lambda(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}) dt + \int_{a \vee 0}^{b \vee 0} \mathbf{E}(\lambda'(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}) dt < \infty \quad \text{f.s.}, \end{aligned}$$

denn aus der Endlichkeit der durchschnittlichen Intensität von N lässt sich Endlichkeit von $\mathbf{E}\left(\int_{a \vee 0}^{b \vee 0} \lambda(t) dt\right) = \mathbf{E}\left(\int_{(a \vee 0, b \vee 0]} N(dt)\right) = \mathbf{E}(N((a \vee 0, b \vee 0]))$ ableiten, gemäß [Als98] Gleichung (51.9) folgt dann die f.s. Endlichkeit von $\mathbf{E}\left(\int_{a \vee 0}^{b \vee 0} \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right)$.

10.6. Lemma. *Für f gilt die Ungleichung*

$$(10.8) \quad f(t) \leq \lambda \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| ds + \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N'(ds) + \int_0^t |h(t-s)| f(s) ds \quad \text{f.s.}$$

für alle $t > 0$.

Beweis: Da ϕ Lipschitz-stetig, N' auf $(-\infty, 0)$ $\mathcal{F}_0^{N'}$ -meßbar und N auf $(-\infty, 0)$ $\mathcal{F}_0^{\bar{N}}$ -meßbar ist, wobei nach Konstruktion $\mathcal{F}_0^{\bar{N}} = \mathcal{F}_0^{N'}$ und $\mathcal{F}_0^{N'}$ unabhängig sind, gilt für $t > 0$

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \mathbf{E} \left(\left| \int_{(-\infty, 0)} h(t-s) N(ds) - \int_{(-\infty, 0)} h(t-s) N'(ds) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{[0, t)} h(t-s) N(ds) - \int_{[0, t)} h(t-s) N'(ds) \right| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &\leq \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N(ds) \mid \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &\quad + \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N'(ds) \mid \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &\quad + \mathbf{E} \left(\int_{[0, t)} |h(t-s)| |N - N'| (ds) \mid \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N(ds) \right) + \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N'(ds) \\ &\quad + \mathbf{E} \left(\int_{[0, t)} |h(t-s)| |\lambda(s) - \lambda'(s)| ds \mid \mathcal{F}_0^{N'} \right) \quad \text{f.s.,} \end{aligned}$$

wende bei der letzten Gleichheit 6.15 an, denn wir können anstelle von $\mathcal{F}_0^{N'}$ auch $\sigma(\mathcal{F}_0^{N'}, \mathcal{F}_0^{\bar{N}})$ einsetzen. Mittels 5.8 lässt sich dies fortsetzen zu

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \lambda \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| ds + \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N'(ds) \\ &\quad + \int_0^t |h(t-s)| \mathbf{E}(|\lambda(s) - \lambda'(s)| \mid \mathcal{F}_0^{N'}) ds \\ &= \lambda \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| ds + \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N'(ds) + \int_0^t |h(t-s)| f(s) ds \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

□

Für festes $a > 0$ setzen wir $F_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t-a}^t f(s) ds = \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} f(s) ds$ (denn $f(t) = 0$ für $t < 0$) und außerdem

$$\bar{\varepsilon}_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varepsilon'_a(t) + \lambda a \int_{(t-a) \vee 0}^{\infty} |h(s)| ds & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

wobei $\varepsilon'_a(t)$ durch Gleichung (10.6) mit N' anstelle von N definiert wird.

10.7. Lemma. Die zufällige Funktion $F_a(t)$ genügt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Abschätzung

$$(10.9) \quad F_a(t) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\varepsilon}_a * |h|^{*i}(t) + F_a * |h|^{*n}(t) \quad \text{f.s.},$$

$t > 0$.

Beweis: Aus Lemma 10.6 und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} F_a(t) &\leq \lambda \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} \int_{(-\infty, 0]} |h((t-a)\vee 0 - s)| \, ds \, du + \varepsilon'_a(t) \\ &\quad + \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} \int_0^u |h(s)| f(u-s) \, ds \, du \\ (10.10) \quad &\leq \lambda a \int_{(t-a)\vee 0}^{\infty} |h(s)| \, ds + \varepsilon'_a(t) + \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} \int_0^t |h(s)| f(u-s) \, ds \, du \\ &= \bar{\varepsilon}_a(t) + \int_0^t \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} f(u-s) \, du \, |h(s)| \, ds \\ &= \bar{\varepsilon}_a(t) + \int_0^t \int_{(t-s-a)\vee 0}^{(t-s)\vee 0} f(u) \, du \, |h(s)| \, ds \\ &= \bar{\varepsilon}_a(t) + \int_0^t F_a(t-s) |h(s)| \, ds = \bar{\varepsilon}_a(t) + \int_{\mathbb{R}} F_a(t-s) |h(s)| \, ds \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Die Behauptung lässt sich nun durch eine Induktion nach n herleiten: Im Fall $n = 0$ ist die Behauptung klar, falls $n = 1$ ist, zeigt (10.10)

$$F_a(t) \leq \bar{\varepsilon}_a(t) + \int F_a(t-s) |h(s)| \, ds = \bar{\varepsilon}_a(t) + F_a * |h|(t) \quad \text{f.s.},$$

also das Gewünschte. Gilt nun (10.9) für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung und dem Fall $N = 1$

$$\begin{aligned} F_a(t) &\leq \bar{\varepsilon}_a(t) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} \bar{\varepsilon}_a * |h|^{*i} + F_a * |h|^{*n} \right) * |h|(t) \\ &\leq \bar{\varepsilon}_a(t) + \left(\sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}_a * |h|^{*i}(t) + F_a * |h|^{*n+1}(t) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \bar{\varepsilon}_a(t) * |h|^{*i}(t) + F_a * |h|^{*n+1}(t) \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

□

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall, etwa $I \subset [x, y] \subset \mathbb{R}$. Die fast sichere lokale Integrierbarkeit von f liefert für beliebiges $t \in I$

$$F_a(t) = \int_{t-a}^t f(s) \, ds \leq \int_{x-a}^y f(s) \, ds < \infty \quad \text{f.s.},$$

also ist F_a auf jedem endlichen Intervall f.s. beschränkt. Außerdem ist die Norm $\|\cdot\|_1$ von h auf $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ streng kleiner 1. Daher folgt für $t \in \mathbb{R}$ aus [Als98] Gleichung (20.20)

$$F_a * |h|^{*n}(t) = \int_0^t F_a(t-s) |h|^{*n}(s) ds \leq M_t \int_0^t |h|^{*n}(s) ds \leq M_t \|h\|_1^n \quad \text{f.s.}$$

für eine endliche Zufallsgröße $M_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, was $\lim_{n \rightarrow \infty} F_a * |h|^{*n}(t) = 0$ f.s. zeigt. Gemeinsam mit (10.9) ergibt sich für $F_a(t)$ (nach dem Satz von Fubini) die Abschätzung

$$\begin{aligned} (10.11) \quad F_a(t) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\varepsilon}_a * |h|^{*i}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int \bar{\varepsilon}_a(t-s) |h|^{*i}(s) ds \\ &= \int \bar{\varepsilon}_a(t-s) \sum_{i=0}^{\infty} |h|^{*i}(s) ds = \int \bar{\varepsilon}_a(t-s) H(s) ds \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

mit der Festlegung $H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} |h|^{*i}(s)$. Nach [Als96] S. 235 Kapitel 27 ist H die Erneuerungsdichte eines defekten Erneuerungsmaßes (assoziiert mit h), für die

$$\begin{aligned} \int H(t) dt &= \int \sum_{n \geq 0} |h|^{*n}(t) dt = \sum_{n \geq 0} \int |h|^{*n}(t) dt = \sum_{n \geq 0} \||h|^{*n}\|_1 \\ &\leq \sum_{n \geq 0} \|h\|_1^n = \frac{1}{1 - \|h\|_1} = \frac{1}{1 - \int |h(s)| ds} < \infty \end{aligned}$$

gilt, beachte (10.1).

Von nun an bedarf es der Trennung des weiteren Vorgehens in Abhängigkeit von der vorliegenden Anfangsbedingung.

- Erfülle N' zunächst Anfangsbedingung (AB i) aus Voraussetzung 3.

10.8. Lemma. Auf jedem endlichen Intervall stimmt $S_t N$ schließlich mit $S_t N'$ überein, d.h.

$$(10.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_t N \equiv S_t N' \text{ auf } (s-a, s]) = 1$$

für alle $s, a \in \mathbb{R}$.

BEWEIS: Da (AB i) für N' gilt, ist $\varepsilon'_a(t)$ f.s. beschränkt. Damit muß dann auch $\bar{\varepsilon}_a(t)$ auf $(0, \infty)$ f.s. wegen $\int_{t-a}^{\infty} |h(s)| ds \leq \int_0^{\infty} |h(s)| ds < \infty$ beschränkt sein. Nach (AB i) gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon'_a(t) = 0$ f.s. und (10.1) sichert $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-a}^{\infty} |h(s)| ds = 0$, also insgesamt $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}_a(t) = 0$ f.s.. Der Satz von der majorisierten Konvergenz zeigt somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_a(t) = 0 \quad \text{f.s.}$$

Einmal mehr nutzen wir Satz 6.15:

$$\begin{aligned} F_a(t) &= E \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |\lambda(u) - \lambda'(u)| du \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &= E \left(E \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |\lambda(u) - \lambda'(u)| du \middle| \mathcal{F}_0^{N'}, \mathcal{F}_0^N \right) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left(\mathbf{E} \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |N - N'| (du) \middle| \mathcal{F}_0^{N'}, \mathcal{F}_0^N \right) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\
&= \mathbf{E} \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |N - N'| (du) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right),
\end{aligned}$$

was sich nach Definition des Erwartungswertes und wegen $|N - N'| (C) \in \mathbb{N}_0$ fortführen lässt zu

$$\begin{aligned}
F_a(t) &\geq \sum_{k>0} \mathbf{P} \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |N - N'| (du) = k \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\
&= 1 - \mathbf{P} \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |N - N'| (du) = 0 \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\
&= 1 - \mathbf{P} \left(N \equiv N' \text{ auf } ((t-a) \vee 0, t \vee 0] \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right).
\end{aligned}$$

Daher können wir für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}
1 &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(N \equiv N' \text{ auf } (t-a, t] \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\
&\geq \mathbf{E} \left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(N \equiv N' \text{ auf } (t-a, t] \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \right) \\
&\geq \mathbf{E} \left(1 - \liminf_{t \rightarrow \infty} F_a(t) \right) \\
&= \mathbf{E}(1) = 1
\end{aligned}$$

folgern. \square

10.9. Lemma. Für jede fest vorgegebene Wahl beschränkter Borel-Mengen $A_1, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$, konvergiert $((S_t N'(A_1), \dots, S_t N'(A_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen $(N(A_1), \dots, N(A_n))$.

Beweis: Wähle also beschränkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gibt es $a, s \in \mathbb{R}$ mit $A_1 \cup \dots \cup A_n \subset (s-a, s]$.

Die Stationarität von N liefert

$$\begin{aligned}
&\sup_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} |\mathbf{P}(S_t N'(A_i) = a_i; i = 1, \dots, n) - \mathbf{P}(N(A_i) = a_i; i = 1, \dots, n)| \\
&= \sup_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} |\mathbf{P}(S_t N'(A_i) = a_i, S_t N'(A_i) = S_t N(A_i); i = 1, \dots, n) \\
&\quad - \mathbf{P}(S_t N(A_i) = a_i, S_t N(A_i) = S_t N'(A_i); i = 1, \dots, n) \\
&\quad + \mathbf{P}(S_t N'(A_i) = a_i, i = 1, \dots, n; \\
&\quad \quad S_t N'(A_i) \neq S_t N(A_i) \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}) \\
&\quad - \mathbf{P}(S_t N(A_i) = a_i, i = 1, \dots, n; \\
&\quad \quad S_t N(A_i) \neq S_t N'(A_i) \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\})| \\
&\leq \sup_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} |\mathbf{P}(S_t N'(A_i) = a_i, i = 1, \dots, n; \\
&\quad \quad S_t N'(A_i) \neq S_t N(A_i) \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}) \\
&\quad - \mathbf{P}(S_t N(A_i) = a_i, i = 1, \dots, n; \\
&\quad \quad S_t N(A_i) \neq S_t N'(A_i) \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\})| \\
&\leq \mathbf{P}(S_t N(A_i) \neq S_t N'(A_i) \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}).
\end{aligned} \tag{10.13}$$

Aufgrund von Gleichung (10.12) ist

$$\mathbf{P}(S_t N(A_i) \neq S_t N'(A_i) \text{ für ein } i \in \{1, \dots, n\}) \leq 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(S_t N \equiv S_t N' \text{ auf } (s-a, s]) = 0,$$

was die gewünschte Verteilungskonvergenz zeigt (z.B. mittels [Als98] Satz 43.1). \square

Aufgrund von 10.9 läßt sich aus [DVJ88] Theorem 9.1.VI. die schwache Konvergenz von $S_t N'^+$ gegen N^+ für $t \rightarrow \infty$ folgern, d.h. im Fall von Anfangsbedingung (AB i) haben wir Stabilität in Verteilung erhalten.

- Gehen wir jetzt von der Gültigkeit von (AB ii) für N' aus und steigen bei (10.11) erneut in den Beweis ein. Erwartungswertbildung und der Satz von Fubini zeigen

$$\mathbf{E}(F_a(t)) \leq \int \mathbf{E}(\bar{\varepsilon}_a(t-s)) H(s) ds \leq \sup_{t \geq 0} \mathbf{E}(\bar{\varepsilon}_a(t)) \int H(s) ds < \infty,$$

denn aus der f.s. Beschränktheit von $\mathbf{E}(\varepsilon'_a(t))$ auf $[0, \infty)$ ($\varepsilon'_a(t) \equiv 0$ für $t < 0$) folgt die Beschränktheit von $\mathbf{E}(\bar{\varepsilon}_a(t))$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz zeigt wie zuvor gemeinsam mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\varepsilon'_a(t)) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(F_a(t)) = 0.$$

Gleicher Vorgehen wie im Beweis von 10.8 führt zu (10.12), so daß auch bei Vorliegen von Anfangsbedingung (AB ii) die schwache Konvergenz von $S_t N'$ gegen N für $t \rightarrow \infty$ aus Lemma 10.9 folgt.

Damit haben wir gezeigt:

10.10. Satz (Unbeschränkte Lipschitz-Dynamik II). *In der Situation von Voraussetzung 2 und bei Beschränkung auf die Menge \mathcal{N}_0 von Punkt-Prozessen ist die Dynamik (D1) stabil in Verteilung bezüglich jeder der folgenden beiden Anfangsbedingungen:*

$$(AB \text{ i}) \sup_{t \geq 0} \varepsilon_a(t) < \infty \text{ f.s. und } \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_a(t) = 0 \text{ f.s. für alle } a > 0$$

$$(AB \text{ ii}) \sup_{t \geq 0} \mathbf{E} \varepsilon_a(t) < \infty \text{ und } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \varepsilon_a(t) = 0 \text{ für alle } a > 0$$

wobei $\varepsilon_a(t)$ zu einem Punkt-Prozeß $N \in \mathcal{N}_0$ durch (10.6) definiert wird.

Die in Satz 10.5 noch fehlende Eindeutigkeit folgt nun durch einfaches Nachrechnen einer der obigen Anfangsbedingungen.

10.11. Lemma. *Der nach 10.5 existierende, stationäre Punkt-Prozeß N mit endlicher mittlerer Intensität λ und Intensität der Form (D1) ist eindeutig.*

BEWEIS: Es genügt also, Voraussetzung 10.10 (AB ii) nachzurechnen. Dazu sei $t \geq 0$ und \tilde{N} ein weiterer stationärer Punkt-Prozeß mit $\mathcal{F}_t^{\tilde{N}}$ -Intensität $(\tilde{\lambda}(t))_{t \in \mathbb{R}}$, die von der Form (D1) ist und endlicher mittlerer Intensität $\tilde{\lambda}$ sowie $\tilde{\varepsilon}_a(t)$ gemäß Voraussetzung 3. Der Satz von Fubini und

5.8 liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{\varepsilon}_a(t)) &= \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} \mathbf{E}\left(\int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| \tilde{N}(du)\right) ds \\ &= \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} \tilde{\lambda} \int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| du ds = \tilde{\lambda} \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} \int_s^\infty |h(u)| du ds \\ &\leq \tilde{\lambda} a \int_{(t-a)\vee 0}^\infty |h(u)| du, \end{aligned}$$

was zum einen den ersten Teil von Bedingung (AB ii) zeigt:

$$\sup_{t \geq 0} \mathbf{E}(\tilde{\varepsilon}_a(t)) \leq \tilde{\lambda} a \int_0^\infty |h(u)| du < \infty,$$

und außerdem noch zu $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\tilde{\varepsilon}_a(t)) = 0$ führt. \square

3) Stabilität in Variation. Eine Verschärfung von Anfangsbedingung (AB i) aus Voraussetzung 3 stellt Anfangsbedingung (AB iii) des anschließenden Satzes dar. Fordern wir zusätzlich noch die Gültigkeit von (10.14), so erhalten wir die stärkere Form der Stabilität: Stabilität in Variation.

10.12. Satz (Unbeschränkte Lipschitz-Dynamik III). Gegeben sei Voraussetzung 2. Dann ist innerhalb der Menge \mathcal{N}_0 die Dynamik (D1) stabil in Variation unter der Anfangsbedingung:

$$(AB \text{ iii}) \quad \int_{[0, \infty)} |h(t)| N([-t, 0)) dt = \int_{[0, \infty)} \int_{-\infty}^0 |h(t-s)| N(ds) dt < \infty \text{ f.s.,}$$

falls zusätzlich

$$(10.14) \quad \int_{[0, \infty)} t |h(t)| dt < \infty$$

gilt.

Ebenso wie im Fall der Stabilität in Verteilung sichert die gegebene Anfangsbedingung (AB iii), daß der mit h gewichtete Einfluß der Punkte auf der negativen reellen Achse verschwindet.

Dies läßt sich bei linearer Anregungsfunktion $\phi(x) = cx$ ($c \in (0, \infty)$) und nichtnegativer Anregungsfunktion h wie folgt deutlich machen: Gegeben sei die Vergangenheit bis zum Zeitpunkt 0, dann wird durch jeden Punkt T_n von N^- auf $[0, \infty)$ ein Poisson-Prozeß mit Intensitäts-Maß $\mu_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} c \int_A h(t - T_n) dt$ erzeugt, siehe [Kin93] Existenz-Theorem in Abschnitt 2.5 (Seite 23). Somit ist die Zahl der durch N^- auf $[0, \infty)$ erzeugten Punkte, falls wir unter der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt 0 bedingen, gleich

$$(10.15) \quad \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \leq 0}} \mu_n([0, \infty)) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \leq 0}} c \int_{[0, \infty)} h(t - T_n) dt = c \int_{[0, \infty)} \int_{(-\infty, 0]} h(t-s) N(ds) dt,$$

nach Anfangsbedingung (AB iii) also f.s. endlich. Betrachten wir nun das Intervall (t, ∞) anstelle von $[0, \infty)$, so verschwindet die Nachwirkung von N^- für $t \rightarrow \infty$.

Im Lipschitz-stetigen Fall ist bei beliebigen Funktionen h der Einfluß von N^- ohne die „Grundintensität“ $\phi(0)$ des leeren Prozesses auf $(-\infty, 0]$ kleiner oder gleich Gleichung (10.15) nach Multiplikation mit einer geeigneten Konstanten. Also verschwindet auch hier die Nachwirkung.

BEWEIS (VON SATZ 10.12): Sei $N' = (T'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein transienter Punkt-Prozeß, der den Bedingungen von 10.12 genügt und auf $[0, \infty)$ eine $\mathcal{F}_t^{N'}$ -Intensität $(\lambda'(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form (D1) besitzt. Wir können Unterabschnitt 2) bis einschließlich 10.6 übernehmen.

Aus dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t |h(t-s)| f(s) ds dt &= \int_0^T \int_0^T |h(t-s)| dt f(s) ds = \int_0^T \int_s^T |h(t-s)| dt f(s) ds \\ &\leq \int_{[0, \infty)} |h(t)| dt \int_0^T f(t) dt < \infty \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Dies liefert für alle $T > 0$ durch Integration von (10.8) über t von 0 bis T nach einer einfachen Umformung

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T f(t) dt - \int_0^T f(t) dt \int_0^\infty |h(s)| ds \\ &\leq \int_0^T \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N'(ds) dt + \lambda \int_0^T \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| ds dt \\ &\leq \int_{[0, \infty)} \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| N'(ds) dt + \lambda \int_{[0, \infty)} \int_{(-\infty, 0)} |h(t-s)| ds dt \\ &= \int_{[0, \infty)} |h(t)| \int_{[-t, 0)} N'(ds) dt + \lambda \int_{[0, \infty)} \int_t^\infty |h(s)| ds dt \\ &= \int_{[0, \infty)} |h(t)| N'([-t, 0)) dt + \lambda \int_{[0, \infty)} t |h(t)| dt \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Hieraus folgt die fast sichere Endlichkeit von $\int_0^\infty f(t) dt$, denn für alle $T > 0$ ist

$$(10.16) \quad \int_0^T f(t) dt \leq \frac{1}{1 - \int_0^\infty |h(s)| ds} \left(\int_{[0, \infty)} |h(t)| N'([-t, 0)) dt + \lambda \int_{[0, \infty)} t |h(t)| dt \right) < \infty \quad \text{f.s.}$$

nach (10.14) und (AB iii). Also ist $\int_0^T f(t) dt$ f.s. durch eine von T unabhängige Schranke nach oben begrenzt. Da $f \geq 0$ gilt, ist $\int_0^T f(t) dt$ außerdem monoton wachsend in T , und nach Definition folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t) dt &= \int_0^\infty \mathbf{E}(|\lambda(t) - \lambda'(t)| \mid \mathcal{F}_0^{N'}) dt = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty |\lambda(t) - \lambda'(t)| dt \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_0^\infty |N - N'| (dt) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right), \end{aligned}$$

beachte 6.15. Es ist also $\int_0^\infty f(t) dt$ die mittlere Anzahl von Punkten von $|N - N'|$ auf $[0, \infty)$ bei Kenntnis der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt 0, also bedingt unter $\mathcal{F}_0^{N'}$. Nach (10.16) ist diese Anzahl f.s. endlich, was $|N - N'|([0, \infty)) < \infty$ f.s. liefert.

Der Prozeß der verschiedenen Punkte von N und N' , $|N - N'|$, besitzt auf $[0, \infty)$ also f.s. nur endlich viele Punkte. Nach [BB94] Kapitel 2 4.1 koppeln N und N' somit f.s. in endlicher Zeit. Ähnliches Vorgehen wie bei (10.13) führt zu

$$\begin{aligned} & \sup_{C \in \mathcal{M}'} \left| \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) - \mathbf{P}(N^+ \in C) \right| \\ &= \sup_{C \in \mathcal{M}'} \left| \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) - \mathbf{P}(S_t N^+ \in C) \right| \\ &= \sup_{C \in \mathcal{M}'} \left| \mathbf{P}(S_t N'^+ \in C, S_t N'^+ \neq S_t N^+) - \mathbf{P}(S_t N^+ \in C, S_t N^+ \neq S_t N'^+) \right| \\ &\leq \mathbf{P}(S_t N'^+ \neq S_t N^+) \\ &= \mathbf{P}(N'((t + \cdot) \cap [t, \infty))) \neq N((t + \cdot) \cap [t, \infty))), \end{aligned}$$

was $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{C \in \mathcal{M}'} |\mathbf{P}(S_t N'^+ \in C) - \mathbf{P}(N^+ \in C)| = 0$ zeigt, d.h. $S_t N'^+$ konvergiert in Variation gegen N^+ ($t \rightarrow \infty$). \square

10.13. Bemerkung. Gelte $\phi(0) = 0$. Dann ist der Punkt-Prozeß ohne einen einzigen Punkt $N = \emptyset$ ein stationärer Punkt-Prozeß mit Intensität der Form (D1). Da dieser eindeutig ist, stellt er die einzige Lösung dar.

Ein beliebiger transienter Punkt-Prozeß mit Anfangsbedingung (AB i), (AB ii) oder (AB iii) strebt dann notwendigerweise gegen den leeren Prozeß, d.h. er stirbt aus.

Bemerkung 10.13 zeigt, daß kein linearer stationärer Hawkes-Prozeß ungleich des leeren Prozesses mit stochastischer Intensität $\int_{(\infty, t)} h(t-s) N(ds)$, $t \in \mathbb{R}$, bei Gültigkeit von $\int_{[0, \infty)} h(t) dt < 1$ ($h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$) existiert.

4) Zur Einschränkung auf die Menge \mathcal{N}_0 .

10.14. Bemerkung. Gegeben sei die Situation von 10.10 oder 10.12. In diesem Fall kann die vorgenommene Beschränkung auf die Klasse der Punkt-Prozesse N , für die (10.5) f.s. lokal integrierbar auf $[0, \infty)$ ist, fallengelassen werden.

Erfüllt ein Punkt-Prozeß N die Bedingung (AB i) (bzw. (AB ii) oder (AB iii)), folgt daraus bereits die f.s. lokale Integrierbarkeit von (10.5) auf $[0, \infty)$.

BEGRÜNDUNG: Es sei N' ein transienter Punkt-Prozeß mit Dynamik $(\lambda'(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form (D1) auf $[0, \infty)$. Erfülle $\varepsilon'_a(t)$ Anfangsbedingung (AB i), wobei $\varepsilon'_a(t)$ gemäß (10.6) unter Verwendung von N' definiert werde.

Zu zeigen ist, daß die Abbildung

$$t \mapsto \mathbf{E}\left(\lambda'(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) = \mathbf{E}\left(\phi\left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N'(ds)\right) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right)$$

f.s. lokal integrierbar auf $[0, \infty)$ ist.

Wir betrachten einen Punkt-Prozeß N' auf \mathbb{R} . Durch Übergang von \mathbf{P} zu $\mathbf{P}(N' \in \cdot)$ erhalten wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (M', \mathcal{M}') , d.h. wir können o.B.d.A. $(\Omega, \mathcal{F}) = (M', \mathcal{M}')$ wählen und bezeichnen das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß wieder mit \mathbf{P} . Nach [DVJ88] Anhang A2.6., Theorem A2.6.III.(i), ist (M', \mathcal{M}') ein polnischer Raum (d.h. es gibt eine Metrik, so daß M' mit dieser Metrik ein separabler vollständiger metrischer Raum ist). Dies erlaubt uns die folgende Festlegung:

Sei $\mathbf{P}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}}$ def $\mathbf{P}^{\text{id} | \mathcal{F}_0^{N'}}$ die regulär bedingte Verteilung der Identität id auf (Ω, \mathcal{F}) gegeben $\mathcal{F}_0^{N'}$. Definiere für $T > 0$

$$\mu_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}(d\omega' \times dt) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \mathbf{P}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}}(d\omega') \lambda|_{(0,T]}(dt),$$

so ist $\mu_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}(\cdot)(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega \times \mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{N'} \otimes \mathfrak{B})$. Der zugehörige Erwartungswert wird mit $\mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}(\cdot)(\omega)$ bezeichnet.

Es sei $\lambda'^{(0)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi\left(\int_{(-\infty,0]} h(t-s) N'(ds)\right)$ und ferner

$$\begin{aligned} N'^{(n)}(\{t\}) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} N'(\{t\}) & \text{für } t \leq 0 \\ \int_{\{t\}} \bar{N}\left(ds \times [0, \lambda'^{(n)}(s)]\right) & \text{für } t > 0 \end{cases} \\ \lambda'^{(n+1)}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi\left(\int_{(-\infty,t]} h(t-s) N'^{(n)}(ds)\right) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dabei ist \bar{N} der nach 6.14 aus N'^+ konstruierbare homogene $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}})$ -Poisson-Prozeß der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 . Ferner ist $(\lambda'^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}})$ -Intensität von $N'^{(n)}$, siehe 6.12.

Wir benötigen einige Abschätzungen:

$$\begin{aligned} (\text{a}) \quad \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}\left(\left|\lambda'^{(n+1)} - \lambda'^{(n)}\right|\right) &\leq \frac{\alpha}{T} \int_0^T \mathbf{E}\left(\int_{(-\infty,t]} |h(t-s)| \left|N'^{(n)} - N'^{(n-1)}\right|(ds) \middle| \mathcal{F}_0^{N'}\right) dt \\ &= \frac{\alpha}{T} \mathbf{E}\left(\int_0^T \int_0^{T-s} |h(t)| dt \left|N'^{(n)} - N'^{(n-1)}\right|(ds) \middle| \mathcal{F}_0^{N'}\right) \\ &\leq \alpha \int_{[0,\infty)} |h(t)| dt \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}\left(\left|\lambda'^{(n)} - \lambda'^{(n-1)}\right|\right), \end{aligned}$$

denn ϕ ist α -Lipschitz-stetig, $\left|N'^{(n)} - N'^{(n-1)}\right|((-\infty, 0]) = 0$ und $(\left|\lambda'^{(n)}(t) - \lambda'^{(n-1)}(t)\right|)_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}})$ -Intensität von $\left|N'^{(n)} - N'^{(n-1)}\right|$ auf $(0, \infty)$ (siehe 6.15). Beachte weiterhin, daß $\mathcal{F}_0^{N'}$ und $\mathcal{F}_0^{\bar{N}}$ nach Konstruktion unabhängig sind. Induktiv kann dies zu

$$\mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}\left(\left|\lambda'^{(n+1)} - \lambda'^{(n)}\right|\right) \leq \left(\alpha \int_{[0,\infty)} |h(t)| dt\right)^n \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}\left(\left|\lambda'^{(1)} - \lambda'^{(0)}\right|\right)$$

fortgesetzt werden ($n \in \mathbb{N}$).

(b) Da ϕ α -Lipschitz-stetig ist, folgt $\lambda'^{(0)}(t) \leq \phi(0) + \alpha \int_{(-\infty,0]} |h(t-s)| N'(ds)$. Dies wiederum

führt nach (AB i) zu

$$\mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\lambda'^{(0)} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda'^{(0)}(t) dt < \infty \quad \text{f.s.},$$

denn $\lambda'^{(0)}(t)$ ist $\mathcal{F}_0^{N'}$ -meßbar.

$$\begin{aligned} (c) \quad & \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(1)} - \lambda'^{(0)} \right| \right) \\ & \leq \frac{\alpha}{T} \int_0^T \mathbf{E} \left(\left| \int_{(-\infty, t)} h(t-s) N'^{(0)}(ds) - \int_{(-\infty, 0]} h(t-s) N'(ds) \right| \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) dt \\ & \leq \frac{\alpha}{T} \int_0^T \mathbf{E} \left(\int_{(0, t)} |h(t-s)| \bar{N} \left(ds \times [0, \lambda'^{(0)}(s)] \right) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) dt \\ & \leq \alpha \int_{[0, \infty)} |h(t)| dt \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\lambda'^{(0)} \right) \\ & < \infty \quad \text{f.s.}, \end{aligned}$$

dabei erfolgt die Ausnutzung der α -Lipschitz-Stetigkeit von ϕ beim ersten Ungleichheitszeichen.

Das dritte Ungleichheitszeichen erhält man analog zu (a), die f.s. Endlichkeit stammt aus (b).

(d) Aus $\mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\lambda'^{(n+1)} \right) \leq \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(n+1)} - \lambda'^{(n)} \right| \right) + \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\lambda'^{(n)} \right)$ folgt einmal mehr induktiv unter Verwendung von (a), (b) und (c)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\lambda'^{(n+1)} \right) & \leq \sum_{k=0}^n \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(t)| dt \right)^k \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(1)} - \lambda'^{(0)} \right| \right) + \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\lambda'^{(0)} \right) \\ & \leq \sum_{k=0}^{n+1} \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(t)| dt \right)^k \frac{1}{T} \int_0^T \lambda'^{(0)}(t) dt \\ & < \infty \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

für alle $n \in \bar{\mathbb{N}}$.

Aus (a) und (c) ergibt sich für alle $k, m \in N$ mit $k \geq m$:

$$\mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(k)} - \lambda'^{(m)} \right| \right) \leq \sum_{j \geq m} \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^j \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(1)} - \lambda'^{(0)} \right| \right) < \infty \quad \text{f.s..}$$

Somit folgt für ein geeignetes $\left(\lambda'^{(\infty)}(t) \right)_{t \in \mathbb{R}}$

$$(10.17) \quad \lambda'^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda'^{(\infty)}$$

bezüglich $\|\cdot\|_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} = \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}(|\cdot|)$ auf $\mathcal{L}_1 \left(\Omega \times \mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{N'} \otimes \mathfrak{B}, \mu_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \right)$ [f.s.].

Außerdem liefert die Markov-Ungleichung zusammen mit (a) noch

$$\begin{aligned} \mu_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(n+1)} - \lambda'^{(n)} \right| > \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^{\frac{n}{2}} \right) \\ & \leq \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^{-\frac{n}{2}} \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(n+1)} - \lambda'^{(n)} \right| \right) \\ & \leq \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^{\frac{n}{2}} \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(1)} - \lambda'^{(0)} \right| \right). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und (c) zeigt dies

$$\sum_{n \geq 0} \mu_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(n+1)} - \lambda'^{(n)} \right| > \left(\alpha \int_{[0, \infty)} |h(s)| ds \right)^{\frac{n}{2}} \right) < \infty \quad \text{f.s..}$$

Nach [Nev65] Prop. II.4.2 (Seite 45) gilt also $\lambda'^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda'^{(\infty)}$ $\mu_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}$ -f.s. [\mathbf{P} -f.s.].

Für jede beschränkte Menge $C \in \mathfrak{B}^+$, $C \subset (0, T]$, gilt gemäß (a) und (c)

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\int_C \left| N'^{(n+1)} - N'^{(n)} \right| (ds) \neq 0 \right) &\leq \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| N'^{(n+1)} - N'^{(n)} \right| (C) \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\int_C \left| \lambda'^{(n+1)}(t) - \lambda'^{(n)}(t) \right| dt \right) \leq T \sum_{n \geq 0} \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(n+1)} - \lambda'^{(n)} \right| \right) \\ &< \infty \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Nach dem Borel-Cantelli-Lemma folgt

$$\mathbf{P}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| N'^{(n+1)} - N'^{(n)} \right| (C) \neq 0 \right\} \right) = 0 \quad \text{f.s.,}$$

d.h. $N'^{(n+1)}$ und $N'^{(n)}$ stimmen $\mathbf{P}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}}$ -f.s. auf C für hinreichend große n überein [\mathbf{P} -f.s.]. Wir definieren also $N'^{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N'^{(n)}$. Für alle $C \in \mathfrak{B}$, $C \subset (0, T]$, erhalten wir nach zweifacher Anwendung des Lemmas von Fatou und unter Beachtung von (a)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\int_C \left| N'^{(\infty)}(ds) - \bar{N} \left(ds \times [0, \lambda'^{(\infty)}(s)] \right) \right| \right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\int_C \left| \lambda'^{(n)}(s) - \lambda'^{(\infty)}(s) \right| ds \right) \\ &\leq T \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(n)} - \lambda'^{(\infty)} \right| \right) = 0 \quad \mathbf{P}\text{-f.s..} \end{aligned}$$

Dies zeigt $N'^{(\infty)}(\cdot) = \int \bar{N} \left(ds \times [0, \lambda'^{(\infty)}(s)] \right)$ $\mathbf{P}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}}$ -f.s. [\mathbf{P} -f.s.].

Wir rechnen nun nach, daß $(\lambda'^{(\infty)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ von der Form (D1) ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(\infty)} - \phi \left(\int_{(-\infty, \cdot)} h(\cdot - s) N'^{(\infty)}(ds) \right) \right| \right) &\leq \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(\infty)} - \lambda'^{(n+1)} \right| \right) + \frac{\alpha}{T} \mathbf{E}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\int_0^T \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| \left| N'^{(n)} - N'^{(\infty)} \right| (ds) dt \right) \\ &\leq \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(\infty)} - \lambda'^{(n+1)} \right| \right) + \frac{\alpha}{T} \mathbf{E}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\int_0^T \int_{(0, t)} |h(t-s)| \left| N'^{(n)} - N'^{(\infty)} \right| (ds) dt \right) \\ &\leq \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(\infty)} - \lambda'^{(n+1)} \right| \right) + \frac{\alpha}{T} \int_{[0, \infty)} |h(t)| dt \mathbf{E}^{\cdot | \mathcal{F}_0^{N'}} \left(\int_0^T \left| \lambda'^{(n)}(s) - \lambda'^{(\infty)}(s) \right| ds \right) \\ &\leq \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(\infty)} - \lambda'^{(n+1)} \right| \right) + \alpha \int_{[0, \infty)} |h(t)| dt \mathbf{E}_T^{\mathcal{F}_0^{N'}} \left(\left| \lambda'^{(n)} - \lambda'^{(\infty)} \right| \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

nach (10.17) [\mathbf{P} -f.s.], d.h. $(\lambda'^{(\infty)}(t))_{t \in \mathbb{R}} = \left(\phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N'^{(\infty)}(ds) \right) \right)_{t \in \mathbb{R}}$ $\mu_T^{\mathcal{F}_0^{N'}}$ -f.s. [\mathbf{P} -f.s.].

\bar{N} wurde weiter vorne wie in 6.14 aus N'^+ konstruiert, d.h. ($\lambda'_+(t) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t) \lambda'(t)$)

$$\bar{N}((a,b] \times L) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(a,b]}(T_n) \mathbb{1}_L(\lambda'_+(T_n) U_n) + \int_{(a,b]} \int_{L \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}(dt \times dz)$$

mit

- $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ u.i.v. Zufallsgrößen, unabhängig von $\mathcal{F}_\infty^{N'}$, $U_n \sim \text{R}[0,1]$ ($n \in \mathbb{Z}$)
- \hat{N} homogener Poisson-Prozeß der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 , unabhängig von $\sigma(\mathcal{F}_\infty^{N'}, \mathcal{F}_\infty^U)$.

Durch einsetzen erhalten wir $N'(C) = \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda'(t)])$ für alle $C \in \mathfrak{B}^+$.

Gezeigt wird nun, daß $N'^+ = N'^{(\infty)+}$. Dazu definieren wir $\tilde{N} \stackrel{\text{def}}{=} |N' - N'^{(\infty)}|$. Bezeichne $(\nu(|N' - N'^{(\infty)}|, t))_{t \in \mathbb{R}}$ die $\mathcal{F}_t^{\tilde{N}}$ -vorhersagbare Version der $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{N'^{(\infty)}})$ -Intensität von \tilde{N} (die Existenz sichert [Bré81] II.4., Theorem T14, die verwendete Darstellung stammt aus Satz 2.4). Für diese gilt wegen der α -Lipschitz-Stetigkeit von ϕ

$$\begin{aligned} \nu(|N' - N'^{(\infty)}|, t) &\leq \alpha \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| |N' - N'^{(\infty)}|(ds) \\ &= \alpha \int_{(0, t)} |h(t-s)| |N' - N'^{(\infty)}|(ds), \end{aligned}$$

denn nach Konstruktion gilt $N'^- = N'^{(\infty)-}$. Aufgrund der weiter oben genannten Unabhängigkeiten sowie der Darstellung von N' und $N'^{(\infty)}$ auf $(0, \infty)$ mittels \bar{N} können wir zu jedem $\omega \in \Omega$ ein $\tilde{\omega} \in \Omega$ mit $0 = |N' - N'^{(\infty)}|^- (\omega, \cdot) = |N' - N'^{(\infty)}|^- (\tilde{\omega}, \cdot) = |N' - N'^{(\infty)}|^- (\tilde{\omega}, \cdot \cap (-\infty, t])$ finden. Somit gilt

$$\begin{aligned} \nu(|N' - N'^{(\infty)}|^- (\omega, \cdot), t) &= \nu(|N' - N'^{(\infty)}| (\tilde{\omega}, \cdot \cap (-\infty, t]), t) \\ &\leq \alpha \int_{(0, t)} |h(t-s)| |N' - N'^{(\infty)}| (\tilde{\omega}, ds) = 0, \end{aligned}$$

also $\nu(\tilde{N}^-, t) \leq 0$ f.s..

Nach 5.5 liefert dies für alle $t > 0$

$$\mathbf{P}\left(\tilde{N}((0, t]) = 0 \mid \mathcal{F}_0^{\tilde{N}}\right) = \exp\left(-\int_0^t \nu(\tilde{N}^-, s) ds\right) \geq 1,$$

so daß sich $\tilde{N} = \emptyset$ f.s. und damit $N' = N'^{(\infty)}$ f.s. auf $[0, \infty)$ ergibt. Es gilt also (beachte erneut die Unabhängigkeit von $\mathcal{F}_0^{N'}$ und $\mathcal{F}_0^{\tilde{N}}$)

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{E}\left(\lambda'(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) dt &= \mathbf{E}\left(N'((0, T]) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) = \mathbf{E}\left(N'^{(\infty)}((0, T]) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) \\ &= \int_0^T \mathbf{E}\left(\lambda'^{(\infty)}(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}\right) dt \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Schließlich führt (d) nun zu

$$\int_0^T \mathbf{E} \left(\lambda'^{(\infty)}(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'} \right) dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha \int_{[0,\infty)} |h(t)| dt \right)^k \int_0^T \lambda'^{(0)}(t) dt < \infty \quad \text{f.s.},$$

was insgesamt $\int_0^T \mathbf{E} \left(\lambda'(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'} \right) dt < \infty$ f.s. und damit die Behauptung zeigt. \diamond

In der vorstehenden Begründung waren wir von der Gültigkeit von Anfangsbedingung (AB i) ausgegangen, wir haben jedoch nur den ersten Teil dieser Bedingung benötigt (siehe (b)). Die noch fehlenden Betrachtungen führen wir auf diesen Fall zurück und nutzen dabei die zuvor verwendeten Bezeichnungen:

- Gelte zunächst *Anfangsbedingung (AB ii)*. In diesem Fall liefert

$$\mathbf{E} \left(\int_0^T \int_{(-\infty,0]} |h(t-s)| N'(ds) dt \right) < \infty$$

für alle $T > 0$ die f.s. Endlichkeit von $\int_0^T \int_{(-\infty,0]} |h(t-s)| N'(ds) dt$. Dies ist für die obige Begründung ausreichend.

- Im Fall von *Anfangsbedingung (AB iii)* gilt $\int_{[0,\infty)} |h(t)| N([-t,0]) dt < \infty$ f.s.. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon'_a(t) &= \int_{(t-a)\vee 0}^{t\wedge 0} \int_{(-\infty,0]} |h(s-u)| N'(du) ds \leq \int_{[0,\infty)} \int_{(-\infty,0]} |h(s-u)| N'(du) ds \\ &= \int_{[0,\infty)} \int_{[s,\infty)} |h(t)| N'(s-dt) ds = \int_{[0,\infty)} |h(x)| N'([-x,0]) dx \\ &\leq \int_{[0,\infty)} |h(x)| N'([-x,0]) dx + \int_{[0,\infty)} |h(x)| dx < \infty \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

für alle $a, t \in [0, \infty)$. Hieraus lässt sich sogar die Gültigkeit beider Bedingungen von (AB i) ablesen.

11. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – beschränkte Dynamiken

Fordern wir im Fall α -Lipschitz-stetiger Anregungsfunktionen ϕ zusätzlich die Beschränktheit dieser Funktion, so können wir die Beschränkung des Wertes von $\alpha \int |h(t)| dt$ aus Abschnitt 10 fallen lassen. Es gelte für den aktuellen Abschnitt die

Voraussetzung 4. Gegeben sei eine meßbare Funktion ϕ , die α -Lipschitz-stetig für ein $\alpha > 0$ und beschränkt durch ein $\Lambda > 0$ ist. Bezeichne h eine meßbare Funktion mit

$$(11.1) \quad \int_{[0,\infty)} |h(t)| dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_{[0,\infty)} t |h(t)| dt < \infty.$$

Ziel dieses Abschnitts wird erneut eine Existenz- und Stabilitätsaussage unter dieser Voraussetzung sein, die in Satz 11.6 und 11.8 zu finden sind.

1) Existenz. Wie im Beweis von 8.5 sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ der kanonische Raum der Punkt-Prozesse auf \mathbb{R} mit $[0, 1]$ -wertigen Marken. Dabei sei $S_t = \theta_t$, $t \in \mathbb{R}$, und \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbf{P} \circ S_t = \mathbf{P}$, unter dem $\bar{N} = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\bar{N}(\omega, \cdot) = \omega$, ein markierter Poisson-Prozeß der Intensität Λ mit Markenfolge $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ unabhängiger, identisch $\mathbb{R}[0, 1]$ -verteilter Zufallsgrößen, unabhängig von $\bar{N}(\cdot \times [0, 1])$ ist.

Definiere die nach 7.1 $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptierten Punkt-Prozesse $N^{(n)}$ und $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbaren Prozesse $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, ähnlich wie im Beweis von 9.1 durch

$$\begin{aligned} N^{(n)}(C) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C \bar{N} \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda^{(n)}(s)}{\Lambda} \right] \right), & C \in \mathfrak{B}, \\ \lambda^{(n+1)}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi \left(\int_{(-\infty, t)} h(t-s) N^{(n)}(ds) \right), & t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei $\lambda^{(0)}(t) \equiv 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte. Nach 7.1 ist $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zunächst zeigen wir die Existenz des Grenzprozesses $N \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}$. Dazu sei

$$(11.2) \quad \tilde{N}(\{t\}) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(\{t\}) - \liminf_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(\{t\}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der Punkt-Prozeß N existiert also, wenn der Prozeß \tilde{N} f.s. mit dem Punkt-Prozeß \emptyset , der keinen Punkt auf der reellen Achse besitzt, übereinstimmt. Setze

$$\tilde{\lambda}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt aufgrund der Beschränktheit von ϕ für alle $t \in \mathbb{R}$: $0 \leq \tilde{\lambda}(t) \leq \Lambda$.

11.1. Lemma. Der Punkt-Prozeß $\limsup_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}$ lässt $(\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ als $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität zu. Entsprechend ist $(\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $\liminf_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}$.

BEWEIS: Gezeigt wird nur die erste Behauptung, der zweite Nachweis lässt sich analog führen. Offensichtlich gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \int_C \bar{N} \left(dt \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) \right] \right) &\leq \int_C \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{N} \left(dt \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \lambda^{(n)}(t) \right] \right) \\ &\leq \int_C \bar{N} \left(dt \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) \right] \right), \end{aligned}$$

$C \in \mathfrak{B}$. Die gleiche Argumentation wie im Beweis zu 6.11 führt für $(a, b] \subset \mathbb{R}$ zu

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\int_{(a,b]} \bar{N}\left(dt \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t)\right]\right) \middle| \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_{(a,b] \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{\left[0, \frac{1}{\Lambda} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t)\right]}(z) \bar{N}(dt \times dz) \middle| \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_{(a,b] \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{\left[0, \frac{1}{\Lambda} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t)\right]}(z) \Lambda \mathbb{X}((dt \times dz)) \middle| \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_{(a,b]} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) dt \middle| \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right). \end{aligned}$$

Analoges gilt für das Intervall, welches an der rechten Seite abgeschlossen ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\int_{(a,b]} \limsup_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(dt) \middle| \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) &= \mathbf{E}\left(\int_{(a,b]} \limsup_{n \rightarrow \infty} \bar{N}\left(dt \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \lambda^{(n)}(t)\right]\right) \middle| \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_{(a,b]} \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) dt \middle| \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right). \end{aligned}$$

□

Lemma 11.1 zeigt gemeinsam mit 6.15, daß \tilde{N} die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\tilde{\lambda}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ besitzt.

11.2. Lemma. *In der geschilderten Situation gilt die Ungleichung*

$$(11.3) \quad \tilde{\lambda}(t) \leq \alpha \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| \tilde{N}(ds) \quad f.s.$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

BEWEIS: Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir können $\tilde{\lambda}(t)$ umschreiben zu

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(t) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda^{(n)}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \lambda^{(k)}(t) - \inf_{k \geq n} \lambda^{(k)}(t) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i,j \geq n} (\lambda^{(i)}(t) - \lambda^{(j)}(t)). \end{aligned}$$

Aus der Lipschitz-Stetigkeit von ϕ folgt für beliebige $a \in (0, \infty)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(t) &\leq \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i,j \geq n} \left(\int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| N^{(i)}(ds) - \int_{(-\infty, t)} |h(t-s)| N^{(j)}(ds) \right) \\ &\leq \alpha \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \int_{(-\infty, t-a)} |h(t-s)| N^{(k)}(ds) - \inf_{k \geq n} \int_{(-\infty, t-a)} |h(t-s)| N^{(k)}(ds) \right) \right)}_{=\Delta_1(a)} \\ &\quad + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \int_{[t-a, t)} |h(t-s)| N^{(k)}(ds) - \inf_{k \geq n} \int_{[t-a, t)} |h(t-s)| N^{(k)}(ds) \right)}_{=\Delta_2(a)} \\ &= \alpha \Delta_1(a) + \alpha \Delta_2(a). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\Delta_2(a) \leq \int_{[t-a,t)} |h(t-s)| \bar{N}(ds \times [0,1]) < \infty$ f.s.. Da $\bar{N}(\cdot \times [0,1])$ im Intervall $[t-a, a)$ f.s. nur endlich viele Punkte besitzt, erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta_2(a) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{[t-a,t)} |h(t-s)| \sup_{i \geq n} N^{(i)}(ds) - \int_{[t-a,t)} |h(t-s)| \inf_{i \geq n} N^{(i)}(ds) \right) \\ &\leq \int_{[t-a,t)} |h(t-s)| \tilde{N}(ds) \quad \text{f.s.}\end{aligned}$$

Für $\Delta_1(a)$ gilt wegen

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \left(\int_{(-\infty,t-a)} |h(t-s)| \bar{N}(ds \times [0,1]) \right) &= \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty,t-a)} |h(t-s)| \Lambda ds \right) \\ &\leq \Lambda \int_{(-\infty,t)} |h(t-s)| ds < \infty\end{aligned}$$

die Abschätzung $\Delta_1(a) \leq \int_{(-\infty,t-a)} |h(t-s)| \bar{N}(ds \times [0,1]) < \infty$ f.s. und damit $\lim_{a \rightarrow \infty} \Delta_1(a) = 0$ f.s.. Insgesamt zeigt der Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ wegen $\tilde{\lambda}(t) \leq \alpha \Delta_1(a) + \alpha \Delta_2(a)$ für alle $a \in (0, \infty)$ die Ungleichung (11.3). \square

Nach 2.4 besitzt die $\mathcal{F}_t^{\tilde{N}}$ -vorhersagbare Version der $\mathcal{F}_t^{\tilde{N}}$ -Intensität von \tilde{N} die Darstellung $(\nu(\tilde{N}, t))_{t \in \mathbb{R}}$ (existiert nach [Bré81] II.4.T14) und $\nu(\tilde{N}, t) \leq \alpha \int_{(-\infty,t)} |h(t-s)| \tilde{N}(ds)$ f.s..

11.3. Lemma. *Wird in der unmittelbar zuvor angegebenen Ungleichung \tilde{N} auf der linken Seite durch die Einschränkung von \tilde{N} auf $(-\infty, 0]$ ersetzt, also durch \tilde{N}^- , so besitzt diese weiterhin Gültigkeit, falls diese Einschränkung auch auf der rechten Seite vorgenommen wird:*

$$(11.4) \quad \nu(\tilde{N}^-, t) \leq \alpha \int_{(-\infty,0]} |h(t-s)| \tilde{N}(ds) \quad \text{f.s.}$$

Beweis: Betrachten wir den Beweis von 11.2, so erkennt man, daß (11.3) auf der Menge

$$\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \bar{N}(\cdot \times [0,1]) \text{ nichtexplodierend} \} \cap \left\{ \int_{(-\infty,t)} |h(t-s)| \bar{N}(ds \times [0,1]) < \infty \right\}$$

gilt und $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$. Sei $\omega_0 \in \Omega_0$. Da $\bar{N}(\cdot \times [0,1])$ ein Poisson-Prozeß endlicher Intensität ist, gibt es ein $\omega \in \Omega_0$, so daß $\tilde{N}^-(\omega, \cdot) = \tilde{N}^-(\omega_0, \cdot)$ und $\tilde{N}(\omega, (0, t]) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\nu(\tilde{N}^-(\omega_0, \cdot), t) &= \nu(\tilde{N}(\omega, \cdot \cap (-\infty, t]), t) \leq \alpha \int_{(-\infty,t)} |h(t-s)| \tilde{N}(\omega, ds) \\ &= \alpha \int_{(-\infty,0]} |h(t-s)| \tilde{N}^-(\omega_0, ds)\end{aligned}$$

unter Beachtung von 2.6. \square

11.4. Lemma. *Der Prozeß \tilde{N} besitzt mit positiver Wahrscheinlichkeit keinen Punkt auf $(0, \infty)$, d.h.*

$$(11.5) \quad \mathbf{P}(\tilde{N}((0, \infty)) = 0) > 0.$$

BEWEIS: Es zeigt einmal mehr der Satz von Fubini, daß

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\int_{(0,\infty)} \int_{(-\infty,0]} |h(u-s)| \bar{N}(ds \times [0,1]) du\right) &= \int_{(0,\infty)} \mathbf{E}\left(\int_{(-\infty,0]} |h(u-s)| \Lambda ds\right) du \\ &= \Lambda \int_{(0,\infty)} \int_u^\infty |h(s)| ds du = \Lambda \int_{(0,\infty)} u |h(u)| du < \infty, \end{aligned}$$

also ist $\int_{(0,\infty)} \int_{(-\infty,0]} |h(u-s)| \bar{N}(ds \times [0,1]) du$ f.s. endlich. Gemeinsam mit diesen Überlegungen erhalten wir aus Satz 5.5 und Lemma 11.3

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\tilde{N}((0,\infty)) = 0 \mid \mathcal{F}_0^{\tilde{N}}\right) &= \exp\left(-\int_0^\infty \nu(\tilde{N}^-, t) dt\right) \\ &\geq \exp\left(-\alpha \int_0^\infty \int_{(-\infty,0]} |h(t-s)| \tilde{N}(ds) dt\right) \\ &\geq \exp\left(-\alpha \int_0^\infty \int_{(-\infty,0]} |h(t-s)| \bar{N}(ds \times [0,1]) dt\right) \\ &> 0 \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Damit folgt $\mathbf{P}\left(\tilde{N}((0,\infty)) = 0\right) = \int \mathbf{P}\left(\tilde{N}((0,\infty)) = 0 \mid \mathcal{F}_0^{\tilde{N}}\right) d\mathbf{P} > 0$. □

Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbf{P} ist bezüglich des Shiftes $(\theta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ergodisch, siehe 6.6. Nach 7.1(i) sind die Prozesse $N^{(n)}$ und $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ θ_t -kompatibel, was zur θ_t -Kompatibilität von \tilde{N} führt. Durch \tilde{N} wird gemäß 5.7 ein stationärer Punkt-Prozeß (bezüglich $(\mathbf{P}, (\theta_t)_{t \in \mathbb{R}})$ im Sinne von [BB94]) gegeben und [BB94] Kapitel 1 (1.4.2) besagt, daß dann $\mathbf{P}(\Omega_1) = 1$ für die Menge $\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{N(\mathbb{R}) = 0\} \cup \{N((0,\infty)) = N((-\infty,0)) = \infty\}$ gilt. Hiermit folgt $\theta_t \left\{ \omega \in \Omega_1; \tilde{N}(\omega, (0,\infty)) = 0 \right\} = \left\{ \omega \in \Omega_1; \tilde{N}(\omega, (0,\infty)) = 0 \right\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also

$$\mathbf{P}\left(\tilde{N}((0,\infty)) = 0\right) = \mathbf{P}\left(\left\{ \omega \in \Omega_1; \tilde{N}(\omega, (0,\infty)) = 0 \right\}\right) = 1$$

aufgrund der Ergodizität. Somit muß \tilde{N} wegen 11.4 f.s. dem Punkt-Prozeß ohne einen einzigen Punkt auf \mathbb{R} entsprechen, also $\tilde{N} = \emptyset$ f.s.. Nach Definition von \tilde{N} sind die Punkt-Prozesse $\limsup_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}$ auf \mathbb{R} f.s. gleich. Dies zeigt für alle beschränkten Borel-Mengen C

$$(11.6) \quad \mathbf{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}^{\geq k}: |N^{(n)} - N^{(n+1)}|(C) = 0\right) = 1$$

und wir können den Punkt-Prozeß N durch die Festlegung $N(\{t\}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(\{t\})$ definieren.

11.5. Lemma. *Der durch $N = \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}$ definierte Punkt-Prozeß erfüllt*

(i) N ist θ_t -kompatibel

(ii) N besitzt die Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$, $\lambda(t) = \phi\left(\int_{(-\infty,t)} |h(t-s)| N(ds)\right)$

Beweis: zu (i). Für alle $C \in \mathfrak{B}$, $t \in \mathbb{R}$ gilt nach 7.1(i)

$$S_t N(C) = N(t + C) = \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(t + C) = \lim_{n \rightarrow \infty} N^{(n)}(\theta_t \cdot, C) = N(\theta_t \cdot, C) \quad \text{f.s..}$$

zu (ii). Wir können $(\lambda^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ als $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N^{(n)}$ identifizieren ($n \in \mathbb{N}$), siehe 7.1(ii). Der durch $\left(\int_C \bar{N} \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda(s)}{\Lambda} \right] \right) \right)_{C \in \mathfrak{B}}$ festgelegte Punkt-Prozeß besitzt die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$, siehe 6.11. Daher besitzt

$$\left(\int_C \left| N^{(n)}(ds) - \bar{N} \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda(s)}{\Lambda} \right] \right) \right| \right)_{C \in \mathfrak{B}}$$

nach 6.15 die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(|\lambda^{(n)}(t) - \lambda(t)|)_{t \in \mathbb{R}}$. Für beliebige beschränkte Mengen $C \in \mathfrak{B}$ gilt daher aufgrund des Lemmas von Fatou

$$\begin{aligned} (11.7) \quad & \mathbf{E} \left(\int_C \left| N(ds) - \bar{N} \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda(s)}{\Lambda} \right] \right) \right| \right) \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\int_C \left| N^{(n)}(ds) - \bar{N} \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda(s)}{\Lambda} \right] \right) \right| \right) \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C \mathbf{E}(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda(0)|) \, ds \\ & = \lambda(C) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda(0)|), \end{aligned}$$

denn $\lambda^{(n)}(t)$ und $\lambda(t)$ sind θ_t -kompatibel. Die α -Lipschitz-Stetigkeit führt zu

$$\begin{aligned} |\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda(0)| &= \left| \phi \left(\int_{(-\infty, 0)} h(0-s) N^{(n)}(ds) \right) - \phi \left(\int_{(-\infty, 0)} h(0-s) N(ds) \right) \right| \\ &\leq \alpha \left| \int_{(-\infty, 0)} h(-s) N^{(n)}(ds) - \int_{(-\infty, 0)} h(-s) N(ds) \right| \\ &\leq \alpha \int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| |N^{(n)} - N|(ds). \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0) \times [0, 1]} |h(-s)| \bar{N}(ds \times dz) \right) &= \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| \Lambda \, ds \right) \\ &= \Lambda \int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| \, ds < \infty \end{aligned}$$

gilt, ist auch $\int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| |N^{(n)} - N|(ds) \leq \int_{(-\infty, 0)} |h(-s)| \bar{N}(ds \times [0, 1]) < \infty$ f.s.. Nach Definition konvergiert $N^{(n)}$ f.s. gegen N für $n \rightarrow \infty$. Gleichung (11.6) gilt insbesondere für $C = [-t, 0)$, $t \in [0, \infty)$ beliebig, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda^{(n)}(0) - \lambda(0)| = 0 \quad \text{f.s.}$$

folgt. Dominierte Konvergenz $(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda(0)| \leq \Lambda$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$) und (11.7) zeigen

$$\mathbf{E} \left(\int_C \left| N(ds) - \bar{N} \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda(s)}{\Lambda} \right] \right) \right| \right) = 0,$$

d.h. N und $\left(\int_C \bar{N} \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda(s)}{\Lambda}\right]\right)\right)_{C \in \mathfrak{B}}$ stimmen f.s. überein; also ist $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität des Punkt-Prozesses \bar{N} , die – wie gewünscht – von der Form (D1) ist. \square

Aus 11.5 und 5.7 folgt die Stationarität von \bar{N} , und wir erhalten insgesamt den

11.6. Satz (Beschränkte Lipschitz-Dynamik I). *In der Situation von Voraussetzung 4 existiert ein eindeutiger stationärer Punkt-Prozeß N mit Dynamik der Form (D1).*

Die Eindeutigkeit werden wir wieder im Anschluß an den Stabilitätsbeweis nachliefern, siehe 11.12.

2) Stabilität in Variation. Als Vorbereitung auf den Nachweis von Stabilität bezüglich einer geeigneten Anfangsbedingung dient die folgende Kopplungsaussage:

11.7. Satz (Kopplung). *Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sei versehen mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$, und X und Y seien stochastische Prozesse, so daß*

$$(11.8) \quad A_s \stackrel{\text{def}}{=} \{X \equiv Y \text{ auf } (s, \infty)\} \in \mathcal{F}_\infty.$$

Dies gilt insbesondere für \mathcal{F}_t -adaptierte Prozesse. Für alle $s \in [0, \infty)$ gelte

$$(11.9) \quad \mathbf{P}(A_s | \mathcal{F}_s) \geq Z(s) - \epsilon(s)$$

für einen reellwertigen Prozeß ϵ mit $\lim_{s \rightarrow \infty} \epsilon(s) = 0$ f.s. und einen reellwertigen Prozeß Z mit

$$(11.10) \quad \mathbf{P}(Z(s) \geq \beta) \geq \beta \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(Z(u)) du = \mathbf{P}(Z(s) \geq \beta)$$

f.s. für ein $\beta \in (0, \infty)$. Dann koppeln die Prozesse X und Y f.s. in endlicher Zeit.

BEWEIS: Wähle $\beta \in \mathbb{R}$ gemäß (11.10). Das Ereignis „ X und Y koppeln“ ist der monotone Grenzwert der A_s :

$$A_s \uparrow_{s \uparrow \infty} A_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{X \text{ und } Y \text{ koppeln}\} \in \mathcal{F}_\infty.$$

Nach (11.9) gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_s) &\geq \mathbf{P}(A_s | \mathcal{F}_s) \\ &\geq (Z(s) - \epsilon(s)) \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(Z(s)) \mathbb{1}_{(-\infty, \frac{\beta}{2}]}(\epsilon(s)) \\ &\geq \frac{\beta}{2} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(Z(s)) \mathbb{1}_{(-\infty, \frac{\beta}{2}]}(\epsilon(s)). \end{aligned}$$

Für $s, t > 0$ liefert dies

$$\begin{aligned} (11.11) \quad \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_u) du &\geq \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \frac{\beta}{2} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(Z(u)) \mathbb{1}_{(-\infty, \frac{\beta}{2}]}(\epsilon(u)) du \\ &\geq \frac{\beta}{2} \mathbb{1}_{(-\infty, \frac{\beta}{2}]} \left(\sup_{u \geq s} \epsilon(u) \right) \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(Z(u)) du. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_t)$, $t \in \mathbb{R}$, ein \mathcal{F}_t -Martingal, welches sogar gleichgradig integrierbar ist:

$$0 \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{\{\mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_t) > a\}} \mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_t) d\mathbf{P} \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(\mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_t) > a) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Nach [Als96] 17.3 (oder auch [Nev65] Prop. 4.5.6 (Seite 134)) gilt $\mathbb{1}_{A_\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbb{1}_{A_\infty} | \mathcal{F}_t)$ f.s., was zu $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \mathbf{P}(A_\infty | \mathcal{F}_u) du = \mathbb{1}_{A_\infty}$ f.s. führt, siehe A2.2. Der Prozeß Z erfüllt nach (11.10)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(Z(u)) du = \mathbf{P}(Z(s) \geq \beta) \geq \beta \quad \text{f.s.}$$

Die Wahl von ϵ sichert $\lim_{s \rightarrow \infty} \sup_{u \geq s} \epsilon(u) = 0$ f.s.. Wir erhalten insgesamt aus (11.11)

$$\mathbb{1}_{A_\infty} \geq \frac{\beta^2}{2} \mathbb{1}_{(-\infty, \frac{\beta}{2}]} \left(\sup_{u \geq s} \epsilon(u) \right) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{\beta^2}{2} > 0 \quad \text{f.s.},$$

d.h. $\mathbb{1}_{A_\infty} = 1$ f.s. und schließlich $\mathbf{P}(A_\infty) = 1$. \square

Das Ziel dieses Abschnitts ist der

11.8. Satz (Beschränkte Lipschitz-Dynamik II). *Gegeben sei Voraussetzung 4. Dann ist die Dynamik (D1) stabil in Variation bezüglich der Anfangsbedingung*

$$(11.12) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| N(du) ds = 0 \quad \text{f.s.}$$

Die hier verwendete Anfangsbedingung, die zur Stationarität führt, ist stärker als Anfangsbedingung (AB i) des Abschnitts 10, aber schwächer als Bedingung (AB iii) und fordert ebenfalls, daß die Nachwirkung von N^- verschwindet.

Zum **Beweis** von 11.8 wählen wir einen Punkt-Prozeß $N' = (T'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit Anfangsbedingung (11.12) und $\mathcal{F}_t^{N'}$ -Intensität $(\lambda'(t))_{t \in [0, \infty)}$ der Form (D1) auf \mathbb{R} . Da ϕ beschränkt durch Λ ist, gilt dies auch für $\lambda'(t)$ auf $[0, \infty)$. Somit ist N' auf $[0, \infty)$ nichtexplodierend. Nach 6.14 stellt

$$\bar{N}((a, b] \times L) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T'_n) \mathbb{1}_L(\lambda'_+(T'_n) U'_n) + \int_{(a, b]} \int_{L \setminus (0, \lambda'_+(t)]} \hat{N}'(dt \times dz)$$

einen $\sigma(\mathcal{F}_s^{N'}, \mathcal{F}_s^{\bar{N}})$ -Poisson-Prozeß der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 dar ($(U'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, \hat{N}' wie in 6.14 benötigt, $\lambda'_+(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(\lambda'(t))$). Für beliebige Borel-Mengen $C \subset (0, \infty)$ gilt $N'(C) = \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda'(t)])$. Konstruiere N wie im vorherigen Unterabschnitt aus \bar{N} , beachte Bemerkung 8.6, d.h.

$$N(C) = \int_C \bar{N}(dt \times [0, \lambda(t)]),$$

$C \in \mathfrak{B}$. Nach 6.12 ist $(\lambda'(t))_{t \in [0, \infty)}$ eine \mathcal{F}_t -Intensität von N' auf $[0, \infty)$, dies gilt ebenso für $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ und N , $\mathcal{F}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}})$. Gemäß 6.15 läßt $|N - N'|$ auf $[0, \infty)$ die \mathcal{F}_t -Intensität $(|\lambda(t) - \lambda'(t)|)_{t \in [0, \infty)}$ zu.

Wir dehnen nun den Begriff des Shiftes auf Filtrationen und stochastische Prozesse wie folgt aus: $S_s \mathcal{F}_t^N \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{s+t}^N$ und $S_s \lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(s+t)$, $s, t \in \mathbb{R}$. Hiermit erhalten wir:

11.9. Lemma. Für alle $s \in \mathbb{R}$ besitzt der Punkt-Prozeß $S_s N$ die $S_s \mathcal{F}_t$ -Intensität $(S_s \lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

BEWEIS: Für die interne Filtration von N gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t^{S_s N} &= \sigma(S_s N(C); C \in \mathfrak{B}((-\infty, t])) \\ &= \sigma(N(C); C \in \mathfrak{B}((-\infty, s+t])) = \mathcal{F}_{s+t}^N = S_s \mathcal{F}_t^N,\end{aligned}$$

und da $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ \mathcal{F}_t^N -vorhersagbar ist, ist der Prozeß $(S_s \lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ $S_s \mathcal{F}_t^N$ -vorhersagbar, also auch $S_s \mathcal{F}_t$ -vorhersagbar. Ähnlich wie für die interne Filtration erkennt man $S_s \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{s+t}$. Es folgt für $(a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_s N((a, b]) | S_s \mathcal{F}_a) &= \mathbf{E}(N((s+a, s+b]) | \mathcal{F}_{s+a}) = \mathbf{E}\left(\int_{s+a}^{s+b} \lambda(t) dt \mid \mathcal{F}_{s+a}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\int_a^b S_s \lambda(t) dt \mid S_s \mathcal{F}_a\right).\end{aligned}$$

□

Lemma 11.9 lässt sich analog auf den Prozeß $S_s N'$ übertragen. $(S_s \lambda'(t))_{t \in [-s, \infty)}$ ist auf $[-s, \infty)$ eine $S_s \mathcal{F}_t$ -Intensität. Es folgt, daß der Punkt-Prozeß $S_s |N - N'|$ auf $[-s, \infty)$ die $S_s \mathcal{F}_t$ -Intensität $(S_s |\lambda(t) - \lambda'(t)|)_{t \in [-s, \infty)}$ zuläßt.

Sei $s \in (0, \infty)$ beliebig. Für alle $u \in [s, \infty)$ setzen wir

$$g_s(u) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \left(\int_{(-\infty, s]} |h(u-v)| \bar{N}(dv \times [0, \Lambda]) + \int_{(-\infty, 0]} |h(u-v)| N'(dv) \right).$$

11.10. Lemma. Für alle $t \in [0, \infty]$ sei $f_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}(|N - N'|((s, s+t]) = 0 | \mathcal{F}_s^{|N-N'|})$. Hierfür gilt die Abschätzung

$$f_s(t) = \mathbf{P}(|N - N'|((s, s+t]) = 0 | \mathcal{F}_s^{|N-N'|}) \geq \exp\left(- \int_s^{s+t} g_s(u) du\right).$$

BEWEIS: Die α -Lipschitz-Stetigkeit von ϕ liefert für $t > 0$

$$\begin{aligned}S_s |\lambda(t) - \lambda'(t)| &= |\lambda(s+t) - \lambda'(s+t)| \\ &\leq \alpha \left| \int_{(-\infty, s+t)} h(s+t-u) N(du) - \int_{(-\infty, s+t)} h(s+t-u) N'(du) \right| \\ &= \alpha \left| \int_{(-\infty, t)} h(t-u) S_s N(du) - \int_{(-\infty, t)} h(t-u) S_s N'(du) \right| \\ &\leq \alpha \int_{(-\infty, t)} |h(t-u)| S_s |N - N'|(du).\end{aligned}$$

Außerdem gilt für die kanonische Filtration des Prozesses der verschiedenen Punkte von N und N' : $S_s \mathcal{F}_t^{|N-N'|} \subset S_s \mathcal{F}_t$. Gemäß [Bré81] II. 4., Theorem T14, existiert eine $S_s \mathcal{F}_t^{|N-N'|}$ -Intensität

$(\mu_s(t))_{t \in [-s, \infty)}$ von $S_s |N - N'|$ auf $[-s, \infty)$ der Form $\nu_s(S_s |N - N'|, t)$ (nach 2.4), diese erfüllt nach obiger Abschätzung

$$\nu_s(S_s |N - N'|, t) \leq \alpha \int_{(-\infty, t)} |h(t-u)| S_s |N - N'| (du).$$

Zu jeder Realisation $S_s |N - N'|(\omega_0, \cdot)$ des Punkt-Prozesses können wir aufgrund der Unabhängigkeitsbeziehungen, die zwischen N' , $(U'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und \hat{N}' gelten, ein $\omega \in \Omega$ finden, so daß

- $N'(\omega_0, \cdot) = N'(\omega, \cdot)$
- $U'_n(\omega_0) = U'_n(\omega)$ falls $T'_n(\omega_0) - s \leq 0$ und $0 \leq \lambda'_+(T'_n(\omega)) U'_n(\omega) \leq \lambda(T'_n(\omega))$ sonst
- $S_s \hat{N}'(\omega_0, \cdot \cap (-\infty, 0]) = S_s \hat{N}'(\omega, \cdot \cap (-\infty, 0])$ und $S_s \hat{N}'(\omega, (0, t] \times [0, \Lambda]) = 0$.

Dann gilt $S_s |N - N'|(\omega_0, \cdot \cap (-\infty, 0]) = S_s |N - N'|(\omega, \cdot \cap (-\infty, t])$, denn nach Wahl von ω erhalten wir $S_s N^-(\omega_0, \cdot) = S_s N^-(\omega, \cdot)$ und $S_s N(\omega, \cdot \cap (0, t]) = S_s N'(\omega, \cdot \cap (0, t])$.

Es folgt aus 2.6

$$\begin{aligned} \nu_s(S_s |N - N'|(\omega_0, \cdot \cap (-\infty, 0]), t) &= \nu_s(S_s |N - N'|(\omega, \cdot \cap (-\infty, t]), t) \\ &\leq \alpha \int_{(-\infty, t)} |h(t-u)| S_s |N - N'|(\omega, du) \\ &\leq \alpha \int_{(-\infty, 0]} |h(t-u)| S_s |N - N'|(\omega_0, du). \end{aligned}$$

Für $v \leq 0$ gilt $|N - N'|(\{v\}) \leq N(\{v\}) + N'(\{v\}) \leq \bar{N}(\{v\} \times [0, \Lambda]) + N'(\{v\})$, und im Fall $v > 0$ gilt nach Konstruktion $|N - N'|(\{v\}) \leq \bar{N}(\{v\} \times [0, \Lambda])$. Die vorherige Abschätzung führt für $t \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ zu

$$\begin{aligned} \int_0^t \nu_s(S_s |N - N'|(\cdot \cap (-\infty, 0]), u) du &\leq \alpha \int_0^t \int_{(-\infty, 0]} |h(u-v)| S_s |N - N'| (dv) du \\ &= \alpha \int_0^t \int_{(-\infty, s]} |h(s+u-v)| |N - N'| (dv) du \\ &= \alpha \int_s^{s+t} \int_{(-\infty, s]} |h(u-v)| |N - N'| (dv) du \\ &\leq \alpha \int_s^{s+t} \int_{(-\infty, 0]} |h(u-v)| N'(dv) du + \alpha \int_s^{s+t} \int_{(-\infty, s]} |h(u-v)| \bar{N}(dv \times [0, \Lambda]) du \\ &= \int_s^{s+t} g_s(u) du. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir auf der Menge $\left\{ \int_s^{s+t} g_s(u) du < \infty \right\}$ mit Satz 5.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(|N - N'|((s, s+t]) = 0 \mid \mathcal{F}_s^{|N - N'|}\right) &= \mathbf{P}\left(S_s |N - N'|((0, t]) = 0 \mid \mathcal{F}_0^{S_s |N - N'|}\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \nu_s(S_s |N - N'|(\cdot \cap (-\infty, 0]), u) du\right) \geq \exp\left(-\int_s^{s+t} g_s(u) du\right). \end{aligned}$$

Diese besitzt wegen $\exp\left(-\int_s^{s+t} g_s(u) du\right) = 0$ auf $\left\{ \int_s^{s+t} g_s(u) du < \infty \right\}^C$ überall Gültigkeit. \square

11.11. Lemma. *Die Punkt-Prozesse N und N' koppeln f.s. in endlicher Zeit.*

BEWEIS: Wir rechnen die Bedingungen von Satz 11.7 nach. Definiere dazu für $s \in (0, \infty)$ die stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned} Z(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \exp \left(-\alpha \int_s^\infty \int_{(-\infty, s]} |h(u-v)| \bar{N}(dv \times [0, \Lambda]) du \right) \\ \epsilon(s) &\stackrel{\text{def}}{=} Z(s) - \exp \left(- \int_s^\infty g_s(u) du \right). \end{aligned}$$

Diese Prozesse erfüllen $\mathbf{P}(|N - N'|((s, \infty)) = 0 | \mathcal{F}_s^{|N-N'|}) \geq Z(s) - \epsilon(s)$ und die Bedingungen, die in Satz 11.7 an die gleichnamigen Prozesse gestellt werden:

Nach Voraussetzung (11.12) des Satzes 11.8 gilt wegen $0 \leq Z(s) \leq 1$ f.s.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \epsilon(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(Z(s) \left(1 - \exp \left(-\alpha \int_s^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h(u-v)| N'(dv) du \right) \right) \right) = 0 \quad \text{f.s.}$$

und (11.1) sichert

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\int_s^\infty \int_{(-\infty, s]} |h(u-v)| \bar{N}(dv \times [0, \Lambda]) du \right) \\ = \int_s^\infty \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, s]} |h(u-v)| \bar{N}(dv \times [0, \Lambda]) \right) du \\ = \Lambda \int_s^\infty \int_{(-\infty, s]} |h(u-v)| dv du \\ = \Lambda \int_s^\infty \int_{[u-s, \infty)} |h(v)| dv du \\ \leq \Lambda \int_{[0, \infty)} u |h(u)| du < \infty, \end{aligned}$$

wonach also $Z(s) > 0$ f.s. gilt. Es existiert also ein $\beta \in (0, \infty)$ mit $\mathbf{P}(Z(s) \geq \beta) \geq \beta$. Nach 6.6 ist $(\mathbf{P}^{\bar{N}}, (S_t)_{t \in \mathbb{R}})$ ergodisch, und für alle $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Z(t)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp \left(-\alpha \int_t^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h(u-t-v)| \bar{N}(t+dv \times [0, \Lambda]) du \right) \\ &= \exp \left(-\alpha \int_0^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h(u-v)| S_t \bar{N}(dv \times [0, \Lambda]) du \right) = f(S_t \bar{N}) \end{aligned}$$

für eine geeignete Funktion $f : M \rightarrow [0, \infty)$. Gemäß [BFL90] Theorem 3.6.2 ist auch die zweite in 11.7 an $Z(s)$ gestellte Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)} (f(S_u \bar{N})) du &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{[\beta, \infty)} (f(S_u (S_s \bar{N}))) du \\ &= \int \mathbb{1}_{[\beta, \infty)} (f(S_s \bar{N})) d\mathbf{P} = \mathbf{P}(Z(s) \geq \beta) \quad \text{f.s..} \end{aligned}$$

Satz 11.7 zeigt die f.s. Kopplung von N und N' in endlicher Zeit. \square

Die Stabilitätsaussage 11.8 ist nun eine Konsequenz aus 4.6.

11.12. Lemma. *Die im Satz 11.6 noch fehlende Eindeutigkeit erhalten wir durch nachrechnen der Anfangsbedingung (11.12) aus Satz 11.8.*

BEWEIS: Gegeben sei ein stationärer Punkt-Prozeß N mit Dynamik (D1) auf \mathbb{R} , welcher (11.1) erfüllt. Für $t \in (0, \infty)$ gilt aufgrund der Beschränktheit von ϕ und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{E} \left(\int_t^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| N(du) ds \right) \leq \int_t^\infty \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| \Lambda du \right) ds \\ &= \Lambda \int_t^\infty \int_s^\infty |h(u)| du ds \leq \Lambda \int_t^\infty s |h(s)| ds, \end{aligned}$$

so daß (11.1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h(s-u)| N(du) ds = 0$ f.s. liefert. \square

Kapitel III.

Der K -variante Fall – Existenz und Stabilität nichtlinearer Hawkes-Prozesse

Ziel des folgenden Kapitels wird sein, die Ergebnisse des Falls univariater Punkt-Prozesse auf den K -variaten Fall ($K > 0$) zu erweitern. Die Voraussetzungen werden an diese Situation angepaßt, so daß die Techniken zum Beweis denen aus dem vorherigen Kapitel entsprechen oder zumindest ähneln. Wir werden daher einige Beweisteile kurz halten, die Details können dann im entsprechenden Abschnitt für univariate Prozesse nachgelesen und mit geringen Modifikationen im vorliegenden Fall verwendet werden.

Wir erinnern daran, daß für einen K -variaten Punkt-Prozeß $N = (N_1, \dots, N_K)$ die einzelnen Punkt-Prozesse N_1, \dots, N_K einfache Prozesse bilden und keine gemeinsamen Punkte besitzen sollen. Eine Filtration für N und jeden der K Prozesse wird gegeben durch $\mathcal{F}_t \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{N_i}; 1 \leq i \leq K)$. Dabei soll jeder Punkt-Prozeß N_i eine \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ gemäß (D2) besitzen.

12. Stabilität bei Intensitäten mit beschränktem Speicher

Zunächst wird der Begriff der Abbildung und Intensität mit beschränktem Speicher auf die vorliegende Situation erweitert:

12.1. Definition. Sei $\psi : (M^K, \mathcal{M}^K) \rightarrow ([0, \infty), \mathfrak{B}^+)$. Die Abbildung ψ besitzt einen *beschränkten Speicher* (bzw. *Gedächtnis*) der Länge $A \in (0, \infty)$, wenn für $m_i, m'_i \in M$ aus der Gleichheit von m_i und m'_i auf $[-A, 0]$ für alle $1 \leq i \leq K$ immer $\psi(m_1, \dots, m_K) = \psi(m'_1, \dots, m'_K)$ folgt. Analog zur Definition 8.1 besitzt der K -variante Punkt-Prozeß (N_1, \dots, N_K) eine \mathcal{F}_t -Intensität $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t))_{t \in \mathbb{R}}$ mit beschränktem Speicher der Länge $A \in (0, \infty)$, falls für alle Elemente $i \in \{1, \dots, K\}$

$$(12.1) \quad \lambda_i(t) = \psi_i(S_t N_1, \dots, S_t N_K)$$

mit einer meßbaren Abbildung $\psi_i : M^K \rightarrow [0, \infty)$ mit beschränktem Speicher der Länge A gilt.

Die Verallgemeinerung der Sätze 8.5 und 8.7 auf K -variate Punkt-Prozesse stellt der nachfolgende Satz dar:

12.2. Satz (K -variate Dynamiken mit beschränktem Speicher). *Die Abbildungen*

$$(12.2) \quad \psi_i : (M^K, \mathcal{M}^K) \rightarrow ([0, \infty), \mathfrak{B}^+) , \quad 1 \leq i \leq K,$$

seien durch ein $\Lambda \in (0, \infty)$ beschränkt und besitzen einen beschränkten Speicher der Länge $A \in (0, \infty)$.

Es gibt dann ein eindeutiges stationäres Verteilungsgesetz des multivariaten Punkt-Prozesses $N = (N_1, \dots, N_K)$, so daß die einzelnen Punkt-Prozesse N_i den stochastischen Prozeß $\lambda_i(t) = \psi_i(S_t N_1, \dots, S_t N_K)$, $t \in \mathbb{R}$, als \mathcal{F}_t^N -Intensität zulassen, wobei die gemeinsame Filtration $(\mathcal{F}_t^N)_{t \in \mathbb{R}}$ durch $\mathcal{F}_t^N \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{N_k}; 1 \leq k \leq K)$ gegeben wird. Die Prozesse N_i , $1 \leq i \leq K$, besitzen keine gemeinsamen Punkte.

Die Dynamik $(\psi_1(S_t N_1, \dots, S_t N_K), \dots, \psi_K(S_t N_1, \dots, S_t N_K))_{t \in \mathbb{R}}$ ist auch hier, unabhängig von der Anfangsbedingung, stabil in Variation, und die auftretende Konvergenz in Variation ist exponentiell schnell.

Da der Nachweis von 12.2 dem von 8.5 und 8.7 ähnelt, wird im nun folgenden Beweis an einigen Stellen auf eine detaillierte Ausführung einzelner Schritte verzichtet. Diese können aus den Beweisen von 8.5 bzw. 8.7 übernommen werden.

BEWEIS (VON 12.2): Wenden wir uns als erstes dem Existenzbeweis zu. Es sei (Ω, \mathcal{F}) der kanonische Raum der markierten Punkt-Prozesse auf \mathbb{R} mit Marken in $[0, 1]$ (oder, gegebenenfalls das K -fache Produkt dieser Räume) und $\theta_t = S_t$. Mit \mathbf{P} wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) bezeichnet, welches $\mathbf{P} \circ \theta_t = \mathbf{P}$ erfüllt.

Zunächst befassen wir uns mit der *Konstruktion* eines stationären Punkt-Prozesses: Die Punkt-Prozesse $\bar{N}_i = (T_{i,n}, U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ($1 \leq i \leq K$) seien untereinander unabhängig und

- $(T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ sei ein homogener Poisson-Prozeß mit $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $\Lambda \in (0, \infty)$
- $(U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ sei eine Folge unabhängiger, identisch $\mathbb{R}[0, 1]$ -verteilter Zufallsvariablen
- $(T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ seien stochastisch unabhängig

für alle $i \in \{1, \dots, K\}$, $\bar{N}_i(\omega, \cdot) = \omega(\cdot)$ (oder, falls das K -fache Produkt des kanonischen Raums betrachtet wird: $\bar{N}_i((\omega_1, \dots, \omega_K), \cdot) = \omega_i(\cdot)$). Durch $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{\bar{N}_i}; 1 \leq i \leq K)$ wird eine Filtration der obigen Punkt-Prozesse gegeben.

Nach dem Disjunktheits-Lemma besitzen die Prozesse \bar{N}_i , $1 \leq i \leq K$, keine gemeinsamen Punkte, und das Superpositions-Theorem zeigt, daß

$$\bar{N}_0 = ((T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}})_{1 \leq i \leq K}$$

ein Poisson-Prozeß mit $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $K\Lambda < \infty$ ist (vergleiche dazu [Kin93] 2.2). Die in üblicher Weise angeordneten Punkte von \bar{N}_0 werden mit $(T_{0,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ bezeichnet.

Konstruiere nun den Punkt-Prozeß R aus \bar{N}_0 , der auch hier die Startpunkte für die Konstruktion der stationären Punkt-Prozesse N_i beinhaltet: $T_{0,n}$ ist ein Punkt des Punkt-Prozesses R , falls $T_{0,n} - T_{0,n-1} > A$. Da die \bar{N}_i nach Vorgabe θ_t -kompatibel sind, folgt dies auch für den Punkt-Prozeß R (vergleiche Beweis von 8.5).

Setze für $C \in \mathfrak{B}$

$$N_i(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int_C \bar{N}_i \left(dt \times \left[0, \frac{\psi_i(S_t N_1, \dots, S_t N_K)}{\Lambda} \right] \right),$$

$1 \leq i \leq K$. Wie wir später sehen werden, ist diese Festlegung auch hier sinnvoll.

BEHAUPTUNG 1. Falls die Punkt-Prozesse N_1, \dots, N_K konstruierbar sind, lassen sie sich auf $[R_k, \infty)$ ohne Kenntnis von N_1, \dots, N_K auf $(-\infty, R_k)$ konstruieren.

BEGRÜNDUNG: Nach Wahl der R_k gilt

$$0 \leq N_i([R_k - A, R_k]) \leq \int_{[R_k - A, R_k]} \bar{N}_i(dt \times [0, 1]) = 0.$$

Für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in [R_k(\omega), \infty)$ zeigt sich damit wie gewünscht für alle $i \in \{1, \dots, K\}$

$$(12.3) \quad \begin{aligned} \lambda_i(\omega, t) &= \psi_i(S_t N_1(\omega, \cdot), \dots, S_t N_K(\omega, \cdot)) \\ &= \psi_i(N_l(\omega, (\cdot + t) \cap [t - A, t] \cap [R_k(\omega), \infty)), 1 \leq l \leq K) \end{aligned}$$

aufgrund des beschränkten Speichers der Abbildungen ψ_1, \dots, ψ_K . \diamond

Da $\lim_{k \rightarrow -\infty} R_k = -\infty$ (nach 6.3) ergibt sich die folgende

BEHAUPTUNG 2. Für $i \in \{1, \dots, K\}$ ist N_i auf ganz \mathbb{R} konstruierbar.

BEGRÜNDUNG: Geeignete Punkt-Prozesse für eine induktive Konstruktion für den Fall $K = 1$ werden durch Gleichung (8.3) angegeben. Für den Fall $K > 1$ wird die Konstruktion analog durchgeführt:

Definiere zu festem $k \in \mathbb{Z}$ induktiv die Punkt-Prozesse

$$\begin{aligned} N_i^{(k,0)} &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{N}_i \left(\cdot \cap \{T_{0,\tau_k}\} \times \left[0, \frac{\psi_i(\emptyset, \dots, \emptyset)}{\Lambda} \right] \right) \\ N_i^{(k,n)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\cdot \cap [T_{0,\tau_k}, T_{0,\tau_k+n}]} \bar{N}_i \left(dr \times \left[0, \frac{1}{\Lambda} \psi_i(S_r N_j^{(k,n-1)}; 1 \leq j \leq K) \right] \right), \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq K$, $n \in \mathbb{N}$, mit τ_k wie vor 8.4 definiert. Wir können induktiv entscheiden, ob der Punkt T_{0,τ_k+n} zu einem der Prozesse $N_i^{(k,n)}$ gehört, $1 \leq i \leq K$. Damit ist festgelegt, ob dieser Punkt zu N_i gehört:

$$N_i(\cdot \cap [T_{0,\tau_k}, T_{0,\tau_k+n}]) = N_i^{(k,n)},$$

$1 \leq i \leq K$. \diamond

Die θ_t -Kompatibilität der Prozesse N_1, \dots, N_K ist auch im multivariaten Fall eine direkte Folge der θ_t -Kompatibilität der Prozesse $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_K$ und R .

Analog zu A1.8 läßt sich die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Adaptiertheit von N_1, \dots, N_K zeigen. Dabei ist die Meßbarkeit der Prozesse $N_{i,t}^{(n)}$ der Form (A1.10), die jeweils aus den Punkt-Prozessen \bar{N}_i entstehen, parallel zu betrachten, da sie voneinander abhängen. Diese Konstruktion wird induktiv für alle $k \in \mathbb{N}$ jeweils auf den Mengen $\{\exists n \in \mathbb{Z} : T_{i,n} = T_k^-(s)\}$ durchgeführt, $T_k^-(s)$ wird wie in (A1.7) aus $\bar{N}_0 = (T_{0,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ gebildet ($1 \leq i \leq K$).

Lemma 6.8 zeigt die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Vorhersagbarkeit von $\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j(ds)$, woraus die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Vorhersagbarkeit von $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ folgt ($1 \leq i \leq K$).

Nach 6.11 läßt N_i die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ zu. Da \mathcal{F}_t eine Unter- σ -Algebra von $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist, stellt $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ebenfalls eine \mathcal{F}_t -Intensität von N_i dar ($1 \leq i \leq K$).

Die Stationarität von N ist eine Folge von $\mathbf{P} \circ \theta_t = \mathbf{P}$ und der θ_t -Kompatibilität von N_1, \dots, N_K , vergleiche 5.7.

Nun zur *Stabilität* von N . Da der Prozeß der „Regenerationspunkte“ sämtliche Punkte der Prozesse N_1, \dots, N_K berücksichtigt, läßt sich die Kopplungszeit T , hier definiert unter Nutzung der Punkte des Prozesses \bar{N}_0 , und somit der Beweis zu 8.7 übernehmen.

Lemma 4.7 zeigt sodann die *Eindeutigkeit* des stationären Punkt-Prozesses. □

13. Existenz im Fall nichtfallender Anregungsfunktionen

Die Erweiterung von Satz 9.1 ist weniger kanonisch. Wir zeigen hier die Version für bivariate Punkt-Prozesse. Die Beschränkung des Wachstums von ϕ , siehe Gleichung (9.1), muß der Beschränktheit (13.3) weichen.

13.1. Satz (Wachsende Anregungsfunktionen). *Gegeben seien zwei nichtnegative meßbare Funktionen h_{11}, h_{22} auf $[0, \infty)$ mit*

$$(13.1) \quad \int_{[0, \infty)} h_{11}(x) dx < \infty \quad \text{und} \quad \int_{[0, \infty)} h_{22}(x) dx < \infty.$$

Ferner seien h_{12} und h_{21} nichtnegative (oder beide nichtpositive) meßbare Funktionen auf $[0, \infty)$, die

$$(13.2) \quad -\infty < \int_{[0, \infty)} h_{12}(x) dx < \infty \quad \text{und} \quad -\infty < \int_{[0, \infty)} h_{21}(x) dx < \infty$$

erfüllen. Für die nichtnegativen, nichtfallenden Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 , definiert auf \mathbb{R} , gelte

$$(13.3) \quad \phi_1(x) \leq \Lambda \quad \text{und} \quad \phi_2(x) \leq \Lambda \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und ein $\Lambda > 0$. Außerdem sei ϕ_1 linksseitig stetig. Sind $h_{12}, h_{21} \geq 0$, so sei ϕ_2 ebenfalls linksseitig stetig, im Fall $h_{12}, h_{21} \leq 0$ rechtsseitig stetig.

In dieser Situation existiert ein stationäres Verteilungsgesetz für den bivariaten Punkt-Prozeß $N = (N_1, N_2)$ mit der Dynamik (D2).

BEWEIS: Es bezeichne (Ω, \mathcal{F}) den kanonischen Raum der Punkt-Prozesse auf \mathbb{R} mit $[0, 1]$ -wertigen Marken (bzw. das zweifache Produkt dieses Raumes). Auf (Ω, \mathcal{F}) seien zwei untereinander unabhängige Punkt-Prozesse $\bar{N}_1 = (T_{1,n}, U_{1,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ und $\bar{N}_2 = (T_{2,n}, U_{2,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ definiert, für die

- $(T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ein Poisson-Prozeß mit Intensität $\Lambda \in [0, \infty)$ ist
- $(U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ unabhängige identisch $R[0, 1]$ -verteilte Zufallsgrößen sind
- $(T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ unabhängig sind,

$i = 1, 2$. Die Konstruktion des gewünschten bivariaten Punkt-Prozesses wird erneut induktiv durchgeführt. Setze $\lambda_1^{(0)}(t) \equiv 0$ und

$$\lambda_2^{(0)}(t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{falls } h_{12}, h_{21} \text{ nichtnegativ} \\ \Lambda & \text{falls } h_{12}, h_{21} \text{ nichtpositiv} \end{cases}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird der bivariate Punkt-Prozeß $N^{(n)}(C) = (N_1^{(n)}(C), N_2^{(n)}(C))$, $C \in \mathfrak{B}$, und der bivariate stochastische Prozeß $\lambda^{(n+1)}(t) = (\lambda_1^{(n+1)}(t), \lambda_2^{(n+1)}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, definiert durch die Komponenten

$$(13.4) \quad \begin{aligned} N_i^{(n)}(C) &= \int_C \bar{N}_i \left(dt \times \left[0, \frac{\lambda_i^{(n)}(t)}{\Lambda} \right] \right) \\ \lambda_i^{(n+1)}(t) &= \phi_i \left(\sum_{j=1}^2 \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j^{(n)}(ds) \right) \end{aligned}$$

$i = 1, 2$. Analog zu 7.1 können wie die θ_t -Kompatibilität von $N_i^{(n)}$ und $(\lambda_i^{(n)})_{t \in \mathbb{R}}$, $i = 1, 2$, und somit mittels 5.7 bei gleichem Vorgehen wie in 8.4 die Stationarität zeigen.

Definiere eine gemeinsame Filtration von \bar{N}_1 und \bar{N}_2 durch $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{\bar{N}_1}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}_2})$.

BEHAUPTUNG 1. Die Punkt-Prozesse $N_1^{(n)}$ und $N_2^{(n)}$ sind $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptiert, und der stochastische Prozeß $(\lambda_i^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N_i^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ($i = 1, 2$).

BEGRÜNDUNG: Eine Induktion zeigt das Gewünschte. Sei $C \in \mathfrak{B}((-\infty, t])$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Im Fall $n = 0$ ist $\lambda_i^{(0)}(t) \in \{0, \Lambda\}$ und

$$N_i^{(0)}(C) = \int_C \bar{N}_i \left(dt \times \left[0, \frac{\lambda_i^{(0)}(t)}{\Lambda} \right] \right) = \bar{N}_i \left(C \times \left[0, \frac{\lambda_i^{(0)}(t)}{\Lambda} \right] \right)$$

$\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbar. Nach 6.11 stellt $\lambda_i^{(0)}(t)$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N_i^{(0)}$ dar ($i = 1, 2$).

Gelte Behauptung 1 für $n \in \mathbb{N}$. Dann zeigt 6.8, daß durch $\left(\int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j^{(n)}(ds)\right)_{t \in \mathbb{R}}$ ein $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbarer Prozeß definiert wird. Daher gilt dies auch für $\left(\lambda_i^{(n+1)}(t)\right)_{t \in \mathbb{R}}$, woraus nach 6.9 die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Adaptiertheit von $N_i^{(n+1)}$ resultiert. Erneut zeigt Satz 6.11, daß $\left(\lambda_i^{(n+1)}(t)\right)_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N_i^{(n)}$ darstellt ($i = 1, 2$). \diamond

- Wir betrachten zunächst den Fall, daß h_{12} und h_{21} nichtnegativ sind, also ϕ_2 linksseitig stetig ist.

BEHAUPTUNG 2. Für alle $t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathfrak{B}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(13.5) \quad \lambda_i^{(n-1)}(t) \leq \lambda_i^{(n)}(t) \quad \text{und} \quad N_i^{(n-1)}(C) \leq N_i^{(n)}(C),$$

d.h. die Zufallsvariablen $\lambda_i^{(n)}(t)$ und $N_i^{(n)}(C)$ sind monoton wachsend in n ($i = 1, 2$).

BEGRÜNDUNG: Auch hier kommt eine Induktion nach n zum Einsatz. Der Induktionsanfang ist klar: Da ϕ_i nichtnegativ ist, folgt $\lambda_i^{(0)}(t) \equiv 0 \leq \lambda_i^{(1)}(t)$, was zu

$$N_i^{(0)}(C) = \bar{N}_i(C \times \{0\}) \leq \int_C \bar{N}_i \left(dr \times \left[0, \frac{\lambda_i^{(1)}(r)}{\Lambda} \right] \right) = N_i^{(1)}(C)$$

führt, $i = 1, 2$.

Gelte (13.5) für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, 2$. Nach Voraussetzung gilt $h_{ji} \geq 0$ ($i, j \in \{1, 2\}$). Hieraus ergibt sich

$$\int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j^{(n-1)}(ds) \leq \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j^{(n)}(ds),$$

was unmittelbar nach Definition zu $\lambda_i^{(n)}(t) \leq \lambda_i^{(n+1)}(t)$ aufgrund der Monotonie von ϕ_i führt, $i = 1, 2$. Damit folgt außerdem

$$N_i^{(n)}(C) = \int_C \bar{N}_i \left(dr \times \left[0, \frac{\lambda_i^{(n)}(r)}{\Lambda} \right] \right) \leq \int_C \bar{N}_i \left(dr \times \left[0, \frac{\lambda_i^{(n+1)}(r)}{\Lambda} \right] \right) = N_i^{(n+1)}(C),$$

wie gewünscht ($i = 1, 2$). \diamond

Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathfrak{B}$ existiert $\lambda_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(t)$ und $N_i(C) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)}(C)$, jedoch kann $N_i(C)$ auch den Wert „ ∞ “ annehmen.

Der Satz von der monotonen Konvergenz zeigt

$$\begin{aligned} \int_C \mathbb{1}_{\left[0, \frac{\lambda_i(t)}{\Lambda}\right]}(z) \bar{N}_i(dt \times dz) &\leq N_i(C) = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\left[0, \frac{\lambda_i^{(n)}(t)}{\Lambda}\right]}(z) \bar{N}_i(dt \times dz) \\ &\leq \int_C \mathbb{1}_{\left[0, \frac{\lambda_i(t)}{\Lambda}\right]}(z) \bar{N}_i(dt \times dz). \end{aligned}$$

Wir können analog zu 6.11 zeigen, daß durch $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität des Punkt-Prozesses $\left(\int_C \mathbb{1}_{\left[0, \frac{\lambda_i(t)}{\Lambda}\right]}(z) \bar{N}_i(dt \times dz)\right)_{C \in \mathfrak{B}}$ gegeben wird. Dies gilt ebenso für den Punkt-Prozeß, der wie

zuvor, jedoch mit dem rechts abgeschlossenen Intervall, definiert wird. Damit erkennen wir, daß N_i die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ zuläßt, vergleiche dazu auch Lemma 11.1.

BEHAUPTUNG 3. *Die Intensität $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist von der gewünschten Form (D2) ($i = 1, 2$).*

BEGRÜNDUNG: Nach oben kann die Folge $(\lambda_i^{(n)}(t))_{n \in \mathbb{N}}$ wegen $N_i^{(n)}(C) \uparrow_{n \rightarrow \infty} N_i(C)$ und $h_{ji} \geq 0$ ($j \in \{1, 2\}$) abgeschätzt werden durch

$$\lambda_i^{(n)}(t) \leq \phi_i \left(\sum_{j=1}^2 \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j(ds) \right),$$

da ϕ_i monoton wachsend ist. Andererseits ist $\lambda_i(t)$ eine obere Schranke von

$$\phi_i \left(\sum_{j=1}^2 \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j^{(n)}(ds) \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

denn $\lambda_i^{(n)}(t) \uparrow_{n \rightarrow \infty} \lambda_i(t)$, was im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aufgrund der linksseitigen Stetigkeit von ϕ_i Behauptung 3 zeigt. Wir haben also einen Punkt-Prozeß mit der gewünschten Dynamik erhalten. Beachtet man die Überlegungen vor Behauptung 1, so ist klar, daß N θ_t -kompatibel ist, woraus wie üblich die Stationarität folgt. \diamond

- Gelte $h_{12}, h_{21} \leq 0$, also ist ϕ_2 rechtsseitig stetig und $\lambda_2^{(0)}(t) \equiv \Lambda$. Es werden vergleichbare Aussagen wie zuvor nachgerechnet.

BEHAUPTUNG 4. *Für $i = 1$ bleiben unter den geänderten Voraussetzungen die Zuvallsvariablen $\lambda_i^{(n)}(t)$ und $N_i^{(n)}(C)$ monoton wachsend für alle $t \in \mathbb{R}$ und $C \in \mathfrak{B}$, d.h. es gilt (13.5), für $i = 2$ sind sie monoton fallend:*

$$(13.6) \quad \lambda_2^{(n-1)}(t) \geq \lambda_2^{(n)}(t) \quad \text{und} \quad N_2^{(n-1)}(C) \geq N_2^{(n)}(C)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathfrak{B}$ und $n \in \mathbb{N}$.

BEGRÜNDUNG: Der Induktionsanfang folgt sofort aus $0 \leq \phi_i \leq \Lambda$, $i = 1, 2$. Gelten nun (13.5) und (13.6) für ein $n \in \mathbb{N}$. Dies liefert gemeinsam mit $h_{11} \geq 0$ und $h_{21} \leq 0$

$$\int_{(-\infty, t)} h_{j1}(t-s) N_j^{(n-1)}(ds) \leq \int_{(-\infty, t)} h_{j1}(t-s) N_j^{(n)}(ds)$$

für $j = 1, 2$. Nach Definition führen diese Überlegungen zu $\lambda_1^{(n)}(t) \leq \lambda_1^{(n+1)}(t)$. Wie in Behauptung 2 schließt man hieraus $N_1^{(n)}(C) \leq N_1^{(n+1)}(C)$. Da $h_{12} \leq 0$ und $h_{22} \geq 0$, gilt

$$\int_{(-\infty, t)} h_{j2}(t-s) N_j^{(n-1)}(ds) \geq \int_{(-\infty, t)} h_{j2}(t-s) N_j^{(n)}(ds),$$

$j = 1, 2$, woraus $\lambda_2^{(n)}(t) \geq \lambda_2^{(n+1)}(t)$ und schließlich $N_2^{(n)}(C) \geq N_2^{(n+1)}(C)$ folgt. \diamond

Auch in diesem Fall existiert also $\lambda_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(t)$ wie auch $N_i(C) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)}(C)$ für $t \in \mathbb{R}$, $C \in \mathfrak{B}$, und erfüllt die gewünschten Meßbarkeitseigenschaften ($i = 1, 2$).

Sei $(a, b] \subset \mathbb{R}$. Nach Wahl von \bar{N} besitzt $\bar{N}((a, b] \times [0, 1])$ eine $\text{Poi}(\Lambda(b - a))$ -Verteilung, also $E(\bar{N}((a, b] \times [0, 1])) = \Lambda(b - a)$. Majorisierte Konvergenz im bedingten Fall zeigt

$$\begin{aligned} E\left(N_i((a, b]) \mid \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(N_i^{(n)}((a, b]) \mid \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\int_{(a, b]} \lambda_i^{(n)}(t) dt \mid \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right) = E\left(\int_{(a, b]} \lambda_i(t) dt \mid \mathcal{F}_a^{\bar{N}}\right), \end{aligned}$$

d.h. $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von N_i ($i = 1, 2$).

Wir können in dieser Situation Behauptung 3 abschreiben:

BEHAUPTUNG 5. *Die Intensität $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist von der gewünschten Form (D2) ($i = 1, 2$).*

BEGRÜNDUNG: Im Fall $i = 1$ führt die gleiche Argumentation wie im Nachweis von Behauptung 3 zum Ziel. Für $\lambda_2(t)$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(n)}(t) &\geq \phi_2 \left(\sum_{j=1}^2 \int_{(-\infty, t)} h_{j2}(t-s) N_j(ds) \right) \\ \lambda_2(t) &\leq \phi_2 \left(\sum_{j=1}^2 \int_{(-\infty, t)} h_{j2}(t-s) N_j^{(n)}(ds) \right). \end{aligned}$$

Die rechtsseitige Stetigkeit von ϕ_2 zeigt im Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ das Gewünschte, denn $N^{(n)} \downarrow_{n \rightarrow \infty} N$. \diamond

Wir haben gesehen, daß $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ in beiden Fällen eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von N_i darstellt. Nach Konstruktion gilt $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ und $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ist ein \mathcal{F}_t -vorhersagbarer stochastischer Prozeß, woraus folgt, daß $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ auch eine \mathcal{F}_t -Intensität von N_i ist ($i = 1, 2$). \square

14. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – der unbeschränkte Fall

Die Übertragung der Aussagen der Sätze 10.5, 10.10 und 10.12 auf den K -variablen Fall findet sich wieder im

14.1. Satz (unbeschränkte Lipschitz-Dynamik). *Gegeben seien ein $K \in \mathbb{N}$ und α_i -Lipschitz-stetige Funktionen $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $1 \leq i \leq K$. Die Funktionen $h_{ji} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seien so gewählt, daß die Matrix*

$$(14.1) \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, K \\ j=1, \dots, K}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\alpha_i \int_0^\infty |h_{ji}(t)| dt \right)_{\substack{i=1, \dots, K \\ j=1, \dots, K}}$$

endliche Einträge und einen Spektral-Radius echt kleiner 1 besitzt. Dann gilt:

(i) Es gibt ein eindeutiges stationäres Verteilungsgesetz $N = (N_1, \dots, N_K)$ mit Dynamik (D2) und endlichen durchschnittlichen Intensitäten $\lambda_i = \mathbf{E}(N_i((0, 1]))$, $1 \leq i \leq K$.

(ii) Sei \mathcal{N}_0^K die Menge aller K -variaten Punkt-Prozesse $N = (N_1, \dots, N_K)$ mit Intensität $(\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t))_{t \in [0, \infty)}$ auf $[0, \infty)$, für die die Abbildung $t \mapsto \mathbf{E}(\lambda_i(t) | \mathcal{F}_0^N)$ f.s. lokal integrierbar auf $[0, \infty)$ ist, $1 \leq i \leq K$. Für $t \in \mathbb{R}$ und $a \in (0, \infty)$ sei

$$(14.2) \quad \varepsilon_a(t) = \sum_{\substack{i=1, \dots, K \\ j=1, \dots, K}} \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(s-u)| N_j(du) ds.$$

In der Menge \mathcal{N}_0^K ist die Dynamik (D2) stabil in Verteilung bezüglich jeder der folgenden Anfangsbedingungen

(AB i') $\sup_{t \geq 0} \varepsilon_a(t) < \infty$ f.s. und $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_a(t) = 0$ f.s. für alle $a > 0$

(AB ii') $\sup_{t \geq 0} \mathbf{E}(\varepsilon_a(t)) < \infty$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\varepsilon_a(t)) = 0$ für alle $a > 0$.

(iii) Gelte in der Situation von (ii) zusätzlich $\int_0^\infty t |h_{ji}(t)| dt < \infty$ für $i, j \in \{1, \dots, K\}$, dann ist (D2) auf \mathcal{N}_0^K stabil in Variation bezüglich der Anfangsbedingung

(AB iii') $\sum_{\substack{i=1, \dots, K \\ j=1, \dots, K}} \int_0^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-s)| N_j(ds) dt < \infty$ f.s..

BEWEIS (Satz 14.1(i)): Um die Existenz eines stationären Verteilungsgesetzes zu beweisen, bedienen wir uns erneut einer induktiven Konstruktion: Sei (Ω, \mathcal{F}) der kanonische Raum der Punkt-Prozesse auf \mathbb{R}^2 (ggf. das K -fache Produkt dieses Raumes) und \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbf{P} \circ \theta_t = \mathbf{P}$. $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_K$ bezeichnen K bivariate θ_t -kompatible Poisson-Prozesse auf \mathbb{R}^2 der Intensität 1, die stochastisch unabhängig sind. Falls $(\Omega, \mathcal{F}) = \bigotimes_{i=1}^K (M'_2, \mathcal{M}'_2)$ gelte $\bar{N}_i((\omega_1, \dots, \omega_K), \cdot) = \omega_i(\cdot)$, ansonsten $\bar{N}_i(\omega, \cdot) = \omega(\cdot)$. Eine gemeinsame Filtration dieser Prozesse ist $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{F}_t^{\bar{N}_i}; 1 \leq i \leq K)$. Setze $\lambda_i^{(0)} \equiv 0$ ($1 \leq i \leq K$) und definiere induktiv

$$\begin{aligned} N_i^{(n)}(C) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C \bar{N}_i \left(dt \times \left[0, \lambda_i^{(n)}(t) \right] \right), & C \in \mathfrak{B}, \\ \lambda_i^{(n+1)}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_i \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j^{(n)}(ds) \right), & t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq K$.

(a) Nach Voraussetzung ist ϕ_i eine α_i -Lipschitz-stetige Funktion. Analog zu 7.1 können wir zeigen, daß $(\lambda_i^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -vorhersagbar und eine θ_t -kompatible $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N_i^{(n)}$ ist. Außerdem ist $N^{(n)}$ $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptiert und θ_t -kompatibel. Mit Hilfe von 6.15 und dem Satz von Fubini erhalten wir die Ungleichung

$$\mathbf{E} \left(\left| \lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i^{(n)}(0) \right| \right) \leq \alpha_i \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(-s)| \left| N_j^{(n)} - N_j^{(n-1)} \right|(ds) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_i \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(-s)| \left| \lambda_j^{(n)}(s) - \lambda_j^{(n-1)}(s) \right| ds \right) \\
&= \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(-s)| ds \mathbf{E} \left(\left| \lambda_j^{(n)}(0) - \lambda_j^{(n-1)}(0) \right| \right).
\end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit wurde $\mathbf{P} \circ \theta_t = \mathbf{P}$ und die θ_t -Kompatibilität der Punkt-Prozesse $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_K$ genutzt, die dazu führt, daß die Prozesse $(\lambda_i^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ und N_i ebenfalls θ_t -kompatibel sind (analog zu 7.1(i)). Zu $n \in \mathbb{N}$ folgt für den „Intensitätenvektor“ $|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|) &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}(|\lambda_1^{(n+1)}(0) - \lambda_1^{(n)}(0)|) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(|\lambda_K^{(n+1)}(0) - \lambda_K^{(n)}(0)|) \end{pmatrix} \\
&\leq \begin{pmatrix} \alpha_1 \sum_{j=1}^K \int_{[0, \infty)} h_{j1}(s) ds \mathbf{E}(|\lambda_j^{(n)}(0) - \lambda_j^{(n-1)}(0)|) \\ \vdots \\ \alpha_K \sum_{j=1}^K \int_{[0, \infty)} h_{jK}(s) ds \mathbf{E}(|\lambda_j^{(n)}(0) - \lambda_j^{(n-1)}(0)|) \end{pmatrix} \\
&= A \mathbf{E}(|\lambda^{(n)}(0) - \lambda^{(n-1)}(0)|),
\end{aligned}$$

die Ungleichung ist komponentenweise zu lesen. Induktiv gelangt man hiermit unter Verwendung von $N_j^{(0)} = \bar{N}_j(\cdot \times \{0\}) \sim \text{Poi}(0)$ zur Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|)\| &\leq \|A^n \mathbf{E}(|\lambda^{(1)}(0) - \lambda^{(0)}(0)|)\| \\
&= \|A^n \mathbf{E}(|\lambda^{(1)}(0)|)\| = \left\| A^n \begin{pmatrix} \mathbf{E}(|\phi_1(0)|) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(|\phi_K(0)|) \end{pmatrix} \right\| \leq K \max_{1 \leq i \leq K} \phi_i(0) \|A^n\|.
\end{aligned}$$

Nach [Asm87] Kapitel X 1. Lemma 1.1 (iv) gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$, so daß sich A^n für $n \rightarrow \infty$ mit geeignetem k wie $n^k \rho^n$ verhält, ρ bezeichne den Spektralradius von A . Unter Ausnutzung des Quotientenkriteriums (z.B. [For76] §7 Satz 7) folgt

$$K \max_{1 \leq i \leq K} \phi_i(0) \sum_{n=0}^{\infty} n^k \rho^n < \infty,$$

denn $\rho < 1$. Insgesamt können wir aus diesen Abschätzungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|)\| < \infty$$

schließen. Bezuglich der (Halb-)Norm $\|\cdot\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} |\cdot|$ auf dem Raum $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ gilt für $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|\lambda_i^{(k+m)}(0) - \lambda_i^{(k)}(0)\|_1 &\leq \|\mathbf{E}(|\lambda^{(k+m)}(0) - \lambda^{(k)}(0)|)\| \\
&\leq \sum_{n=k}^{\infty} \|\mathbf{E}(|\lambda^{(n+1)}(0) - \lambda^{(n)}(0)|)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

d.h. $\lambda_i^{(n)}(0)$ konvergiert im $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ -Sinn gegen ein passendes $\lambda_i(0)$ für $n \rightarrow \infty$. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiere $\lambda_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i(\theta_t \cdot, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(\theta_t \cdot, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(t)$.

Der weitere Beweis wird nicht in allen Details durchgeführt, denn ab nun können wir die Beweisschritte zu Satz 10.5 übernehmen. Aus

$$\mathbf{P}\left(\left|\lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i^{(n)}(0)\right| > \|A^{\frac{n}{2}}\|\right) \leq K \max_{1 \leq i \leq K} \phi_i(0) \|A^{\frac{n}{2}}\|$$

folgt die f.s. Gültigkeit von $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(0) = \lambda_i(0)$.

(b) Die Endlichkeit von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\int_C \left|N_i^{(n+1)} - N_i^{(n)}\right|(ds) \neq 0\right) \leq \mathbb{A}(C) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\left|\lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i^{(n)}(0)\right|\right) < \infty$$

bei vorliegen beschränkten Mengen $C \in \mathfrak{B}$ zeigt nach Borel-Cantelli

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{\int_C \left|N_i^{(n+1)} - N_i^{(n)}\right|(ds) \neq 0\right\}\right) = 0,$$

d.h. die Lage der Punkte von $N_i^{(n+1)}$ und $N_i^{(n)}$ auf C stimmen f.s. ab einem genügend großen n überein. Somit gibt es einen Punkt-Prozeß \bar{N}_i mit $\bar{N}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)}$ f.s., $1 \leq i \leq K$. Nach Konstruktion ist \bar{N}_i θ_t -kompatibel, hieraus folgt mit $\mathbf{P} \circ \theta_t = \mathbf{P}$ wie üblich die Stationarität.

Für alle $1 \leq i \leq K$ stimmt \bar{N}_i mit $(\int_C \bar{N}_i(ds \times [0, \lambda_i(s)]))_{C \in \mathfrak{B}}$ f.s. überein: Erneut lässt sich für beschränkte Mengen $C \in \mathfrak{B}$ eine Abschätzung finden:

$$\mathbf{E}\left(\int_C \left|N_i(ds) - \bar{N}_i(ds \times [0, \lambda_i(s)])\right|\right) \leq \mathbb{A}(C) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}\left(\left|\lambda_i^{(n)}(0) - \lambda_i(0)\right|\right) = 0.$$

Der Prozeß \bar{N}_i hat also die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda_i(s))_{s \in \mathbb{R}}$.

(c) Um die Darstellung der $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität in der Form (D2) zu erhalten, betrachten wir zunächst $\lambda_i(0)$. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\left|\lambda_i(0) - \phi_i\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} h_{ji}(-s) N_j(ds)\right)\right|\right) \\ & \leq \mathbf{E}\left(\left|\lambda_i(0) - \lambda_i^{(n+1)}(0)\right|\right) \\ & \quad + \mathbf{E}\left(\left|\phi_i\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} h_{ji}(-s) N_j^{(n)}(ds)\right) - \phi_i\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} h_{ji}(-s) N_j(ds)\right)\right|\right) \\ & \leq \mathbf{E}\left(\left|\lambda_i(0) - \lambda_i^{(n+1)}(0)\right|\right) + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(-s)| ds \mathbf{E}\left(\left|\lambda_j^{(n)}(0) - \lambda_j(0)\right|\right) \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

somit ist $\lambda_i(0) = \phi_i\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} h_{ji}(-s) N_j(ds)\right)$ f.s.. Dies sorgt gemeinsam mit der θ_t -Kompatibilität für die Gleichheit

$$\lambda_i(t) = \lambda_i(\theta_t \cdot, 0) = \phi_i\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j(ds)\right).$$

Nach Konstruktion wird durch $(\lambda_i(s))_{s \in \mathbb{R}}$ ebenfalls eine \mathcal{F}_t^N -Intensität von N_i gegeben, denn $(\lambda_i(s))_{s \in \mathbb{R}}$ ist aufgrund der vorhergehenden Darstellung \mathcal{F}_t^N -vorhersagbar, dabei gilt $\mathcal{F}_t^N = \sigma(\mathcal{F}_t^{N_i}; 1 \leq i \leq K) \subset \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$.

(d) Um den Existenzbeweis abzuschließen, wird noch die Endlichkeit von $\mathbf{E}(N_i((0, 1]))$ benötigt. Hierfür besteht aufgrund der α_i -Lipschitz-Stetigkeit der ϕ_i die komponentenweise Abschätzung

$$(14.3) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{j1}(t-s)| N_j^{(n)}(ds)\right) \\ \vdots \\ \alpha_K \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{jK}(t-s)| N_j^{(n)}(ds)\right) \end{pmatrix} \leq \sum_{k=1}^n A^k \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Den Nachweis führen wir durch eine Induktion nach n .

BEGRÜNDUNG: Der Fall $n = 0$ ist nach Definition der Prozesse $N_1^{(0)}, \dots, N_K^{(0)}$ klar. Gelte (14.3) für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Für die i -te Komponente gilt aufgrund der α_j -Lipschitz-Stetigkeit von ϕ_j ($1 \leq j \leq K$) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \alpha_i \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| N_j^{(n+1)}(ds)\right) \\ & \leq \alpha_i \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| \phi_j(0) ds\right) \\ & \quad + \alpha_i \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| \sum_{l=1}^K \alpha_j \int_{(-\infty, s)} |h_{lj}(s-u)| N_l^{(n)}(du) ds\right) \\ & = \left(A \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix}\right)_i \\ & \quad + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| \alpha_j \mathbf{E}\left(\sum_{l=1}^K \int_{(-\infty, s)} |h_{lj}(s-u)| N_l^{(n)}(du)\right) ds. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_i \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| N_j^{(n+1)}(ds)\right)\right)_{1 \leq i \leq K} \\ & \leq A \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} + \left(\alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| \left(\sum_{k=1}^n A^k \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix}\right)_j ds\right)_{1 \leq i \leq K} \\ & = A \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} + A \sum_{k=1}^n A^k \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} A^k \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix}.$$

◊

Wie bereits in (a) gesehen, bleibt die rechte Seite von Abschätzung (14.3) auch nach dem Übergang zu $n \rightarrow \infty$ endlich, dies sichert die geforderte Endlichkeit, denn aus (ϕ_i ist α_i -Lipschitzstetig)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathbf{E}(N_1((0, 1])) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(N_K((0, 1])) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\lambda_1(0)) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\lambda_K(0)) \end{pmatrix} \\ & \leq \begin{pmatrix} \mathbf{E}(|\lambda_1(0) - \lambda_1^{(n+1)}(0)|) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(|\lambda_K(0) - \lambda_K^{(n+1)}(0)|) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\lambda_1^{(n+1)}(0)) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\lambda_K^{(n+1)}(0)) \end{pmatrix} \\ & \leq \begin{pmatrix} \mathbf{E}(|\lambda_1(0) - \lambda_1^{(n+1)}(0)|) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(|\lambda_K(0) - \lambda_K^{(n+1)}(0)|) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} \\ & \quad + \begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{j1}(t-s)| N_j^{(n)}(ds)\right) \\ \vdots \\ \alpha_K \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{jK}(t-s)| N_j^{(n)}(ds)\right) \end{pmatrix} \\ & \leq \begin{pmatrix} \mathbf{E}(|\lambda_1(0) - \lambda_1^{(n+1)}(0)|) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(|\lambda_K(0) - \lambda_K^{(n+1)}(0)|) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^n A^k \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\begin{pmatrix} \mathbf{E}(N_1((0, 1])) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(N_K((0, 1))) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \vdots \\ \phi_K(0) \end{pmatrix} < \infty$.

(e) Der Beweis der Eindeutigkeit des stationären Prozesses nutzt die noch nachzuweisende Aussage (ii) des Satzes. Wir rechnen Voraussetzung (AB ii') nach: Bezeichne $\tilde{N} = (\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_K)$ einen stationären Punkt-Prozeß mit $\mathcal{F}_t^{\tilde{N}}$ -Intensität $(\tilde{\lambda}(t))_{t \in \mathbb{R}}$, $\tilde{\lambda}(t) = (\tilde{\lambda}_1(t), \dots, \tilde{\lambda}_K(t))$. Sei $\tilde{\lambda}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(\tilde{N}_i((0, 1])) < \infty$, $a \in [0, \infty)$ und $t \in \mathbb{R}$. $\tilde{\varepsilon}_a$ werde gemäß (14.2) mit \tilde{N} anstelle von N definiert. Voraussetzung (AB ii') folgt mit dem Satz von Fubini und 5.8 aus

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{\varepsilon}_a(t)) &= \sum_{i,j=1}^K \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} \mathbf{E}\left(\tilde{\lambda}_j \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(s-u)| du\right) ds \\ &= \sum_{i,j=1}^K \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} \tilde{\lambda}_j \int_s^\infty |h_{ji}(u)| du ds \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^K a \tilde{\lambda}_j \int_{(t-a) \vee 0}^{\infty} |h_{ji}(u)| du.$$

Hiervon liest man ab:

- $\sup_{t \geq 0} E(\tilde{\varepsilon}_a(t)) \leq a \sum_{i,j=1}^K \tilde{\lambda}_j \int_0^{\infty} |h_{ji}(u)| du < \infty$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} E(\tilde{\varepsilon}_a(t)) = 0$.

□

Der Nachweis von (ii) und (iii) verläuft zu Beginn wieder parallel:

BEWEIS (SATZ 14.1(ii) UND (iii)): Sei $N' = (N'_1, \dots, N'_K) \in \mathcal{N}_0^K$ ein transienter Punkt-Prozeß auf dem meßbaren Raum (Ω, \mathcal{F}) , welcher eine $\mathcal{F}_t^{N'}$ -Intensität

$$(\lambda'(t))_{t \in \mathbb{R}} = ((\lambda'_1(t), \dots, \lambda'_K(t)))_{t \in \mathbb{R}}$$

der Form (D2) auf $[0, \infty)$ besitzt, und außerdem eine der Anfangsbedingungen (AB i'), (AB ii') oder (AB iii') erfüllt. Es bezeichne \mathbf{P} die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Da $N_i = (T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{N}_0$ gilt, ist N_i nichtexplodierend auf $[0, \infty)$ ($1 \leq i \leq K$). Somit lassen sich gemäß 6.14 durch

$$\bar{N}_i(C \times L) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_C(T'_{i,n}) \mathbb{1}_L(\lambda'_{i+}(T'_{i,n}) U'_{i,n}) + \int_C \int_{L \setminus (0, \lambda'_{i+}(t)]} \hat{N}'_i(dt \times dz)$$

homogene $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}_i})$ -Poisson-Prozesse \bar{N}_i der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 mit $\lambda'_{i+}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t) \lambda'_i(t)$ und geeigneten Folgen $(U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ und Punkt-Prozessen \hat{N}'_i wie in 6.14 konstruieren, $1 \leq i \leq K$. Es sei angenommen, daß die nach 6.14 zur Konstruktion benötigten Prozesse sämtlich voneinander unabhängig sind, so daß \bar{N}_i einen $\sigma(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}})$ -Poisson-Prozeß bildet. Wir können sofort nachrechnen, daß

$$N'_i(C) = \int_C \bar{N}_i(dt \times [0, \lambda'_i(t)])$$

für alle $C \in \mathfrak{B}$ gilt. Wie im ersten Beweisteil konstruiere den stationären Punkt-Prozeß $N = (N_1, \dots, N_K)$ mit Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ aus $\bar{N} = (\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_K)$, wobei $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t))$.

Definiere für $i \in \{1, \dots, K\}$ die Funktion

$$f_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} E(|\lambda_i(t) - \lambda'_i(t)| \mid \mathcal{F}_0^{N'}) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Nach Wahl von N' ist $E(\lambda'_i(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'})$ f.s. lokal integrierbar auf $[0, \infty)$, dies überträgt sich auf f_i , vergleiche (10.7):

$$(14.4) \quad \int_a^b f_i(t) dt \leq \int_{a \vee 0}^{b \vee 0} E(\lambda_i(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}) dt + \int_{a \vee 0}^{b \vee 0} E(\lambda'_i(t) \mid \mathcal{F}_0^{N'}) dt < \infty \quad \text{f.s.,}$$

$a, b \in \mathbb{R}$. Ferner genügt $f_i(t)$ für alle $t \geq 0$ aufgrund der α_i -Lipschitz-Stetigkeit von ϕ_i , der nach Konstruktion gültigen Unabhängigkeit von $\mathcal{F}_0^{N'}$ und $\mathcal{F}_0^{\hat{N}'}$ sowie der $\mathcal{F}_0^{N'}$ -Meßbarkeit von N' auf $(-\infty, 0)$ der Abschätzung

$$\begin{aligned}
(14.5) \quad f_i(t) &\leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \left(\mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(t-s)| N'_j(ds) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \right. \\
&\quad + \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(t-s)| N_j(ds) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\
&\quad \left. + \mathbf{E} \left(\int_{[0, t)} |h_{ji}(t-s)| |N'_j - N_j|(ds) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \right) \\
&= \alpha_i \sum_{j=1}^K \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(t-s)| N'_j(ds) + \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(t-s)| \lambda_j(s) ds \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{E} \left(\int_{[0, t)} |h_{ji}(t-s)| |\lambda'_j(s) - \lambda_j(s)| ds \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \right) \\
&= \alpha_i \sum_{j=1}^K \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(t-s)| N'_j(ds) + \lambda_j \int_{(t, \infty)} |h_{ji}(s)| ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{[0, t)} |h_{ji}(t-s)| f_j(s) ds \right).
\end{aligned}$$

Sei nun $a > 0$ fest und definiere dazu $F_{a,i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t-a}^t f_i(s) ds = \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} f_i(s) ds$. Die vorherige Ungleichung zeigt für $t \geq 0$ mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
(14.6) \quad F_{a,i}(t) &\leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(u-s)| N'_j(ds) + \lambda_j \int_u^\infty |h_{ji}(s)| ds \right) du \\
&\quad + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} \int_{[0, u)} |h_{ji}(u-s)| f_j(s) ds du \\
&\leq \bar{\varepsilon}_{a,i}(t) + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{[0, t)} \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} f_j(u-s) du |h_{ji}(s)| ds \\
&= \bar{\varepsilon}_{a,i}(t) + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{[0, t)} \int_{(t-s-a) \vee 0}^{(t-s) \vee 0} f_j(u) du |h_{ji}(s)| ds \\
&= \bar{\varepsilon}_{a,i}(t) + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{[0, t)} F_{a,j}(s) |h_{ji}(t-s)| ds
\end{aligned}$$

unter Ausnutzung der Definition

$$\bar{\varepsilon}_{a,i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(u-s)| N'_j(ds) + \lambda_j \int_u^\infty |h_{ji}(s)| ds \right) du & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Für jedes endliche Intervall $I \subset [x, y] \subset \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt nach (14.4)

$$F_{a,i}(t) = \int_{(t-a)\vee 0}^{t\vee 0} f_i(s) ds \leq \int_{(x-a)\vee 0}^{y\vee 0} f_i(s) ds < \infty \quad \text{f.s.},$$

d.h. $F_{a,i}$ ist auf jeder beschränkten Menge f.s. beschränkt. Aus Gleichung (14.6) folgt mit den Festlegungen $g_{ij}^{(0)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1}_{\{i=j\}} \delta_0(t)$ und

$$g_{ij}^{(n+1)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \sum_{k=1}^K \int_0^t |h_{ki}(t-s)| g_{kj}^{(n)}(s) ds,$$

$n \in \mathbb{N}_0$, die Abschätzung

$$(14.7) \quad F_{a,i}(t) \leq G_{a,i}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^K \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{ij}^{(k)}(s) ds.$$

Dazu zeigt man zunächst die folgende Behauptung, wovon wir im weiteren Beweis nur Ungleichung (14.10) benötigen werden.

BEHAUPTUNG 1. Sei $M_{t,i} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \in [0,t]} F_{a,i}(s)$ ($< \infty$ f.s.). Dann gilt für alle $t \in [0, \infty)$ die Gleichung und die Ungleichungen

$$(14.8) \quad \begin{aligned} & \sum_{j_1, \dots, j_{n+1}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_{j_1} |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \\ & \quad \int_{[0,s_n)} \alpha_{j_n} |h_{j_{n+1} j_n}(s_n-s_{n+1})| \bar{\varepsilon}_{a,j_{n+1}}(s_{n+1}) ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 \\ & = \sum_{j=1}^K \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{i,j}^{(n+1)}(s) ds, \end{aligned}$$

$$(14.9) \quad \begin{aligned} & \left(\sum_{j_1, \dots, j_{n+1}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_{j_1} |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \right. \\ & \quad \left. \int_{[0,s_n)} \alpha_{j_n} |h_{j_{n+1} j_n}(s_n-s_{n+1})| F_{a,j_{n+1}}(s_{n+1}) ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 \right)_{1 \leq i \leq K} \\ & \leq A^{n+1} \begin{pmatrix} M_{t,1} \\ \vdots \\ M_{t,K} \end{pmatrix} \quad \text{f.s. (komponentenweise)}, \end{aligned}$$

$$(14.10) \quad \begin{aligned} F_{a,i}(t) & \leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^K \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{i,j}^{(k)}(s) ds \\ & + \sum_{j_1, \dots, j_{n+1}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_{j_1} |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \\ & \quad \int_{[0,s_n)} \alpha_{j_n} |h_{j_{n+1} j_n}(s_n-s_{n+1})| F_{a,j_{n+1}}(s_{n+1}) ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1, \end{aligned}$$

für alle $i \in \{1, \dots, K\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

BEGRÜNDUNG: Wir nutzen jeweils eine Induktion zum Nachweis.
zu (14.8). Im Fall $n = 0$ sehen wir sofort

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \bar{\varepsilon}_{a,j_1}(s_1) ds_1 \\ &= \sum_{j_1=1}^K \int_{[0,t)} \bar{\varepsilon}_{a,j_1}(t-s_1) \sum_{j=1}^K \alpha_i \int_0^{s_1} |h_{j i}(s_1-s)| \mathbb{1}_{\{j_1=j\}} \delta_0(s) ds ds_1 \\ &= \sum_{j_1=1}^K \int_{[0,t)} \bar{\varepsilon}_{a,j_1}(t-s_1) g_{ij_1}^{(1)}(s_1) ds_1. \end{aligned}$$

Falls (14.8) für $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist, gilt unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung bei der ersten Gleichheit

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1, \dots, j_{n+2}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \\ & \quad \int_{[0,s_{n+1})} \alpha_{j_{n+1}} |h_{j_{n+2} j_{n+1}}(s_{n+1}-s_{n+2})| \bar{\varepsilon}_{a,j_{n+2}}(s_{n+2}) ds_{n+2} \dots ds_2 ds_1 \\ &= \sum_{j_1=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \sum_{j=1}^K \int_0^{s_1} \bar{\varepsilon}_{a,j}(s_1-s) g_{j_1,j}^{(n+1)}(s) ds ds_1 \\ &= \sum_{j,j_1=1}^K \int_0^t \int_0^t \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s-s_1)| \bar{\varepsilon}_{a,j}(s_1) g_{j_1,j}^{(n+1)}(s) ds ds_1 \\ &= \sum_{j=1}^K \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(s_1) g_{ij}^{(n+2)}(t-s_1) ds_1 = \sum_{j=1}^K \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s_1) g_{ij}^{(n+2)}(s_1) ds_1. \end{aligned}$$

zu (14.9). Es ist „ $n = 0$ “ nach Definition der $M_{t,i}$ klar. Gelte (14.9) für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dies liefert

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j_1, \dots, j_{n+2}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \right. \\ & \quad \left. \int_{[0,s_{n+1})} \alpha_{j_{n+1}} |h_{j_{n+2} j_{n+1}}(s_{n+1}-s_{n+2})| F_{a,j_{n+2}}(s_{n+2}) ds_{n+2} \dots ds_2 ds_1 \right)_{1 \leq i \leq K} \\ & \leq \left(\sum_{j_1=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \begin{pmatrix} M_{s_1,1} \\ \vdots \\ M_{s_1,K} \end{pmatrix}_{j_1} \right)_{1 \leq i \leq K} \\ & \leq A^{n+2} \begin{pmatrix} M_{t,1} \\ \vdots \\ M_{t,K} \end{pmatrix} \text{ f.s.,} \end{aligned}$$

dabei Anwendung der Induktionsvoraussetzung beim ersten, $M_{s_1,i} \leq M_{t,i}$ für alle $s_1 \in [0, t]$ beim zweiten Ungleichheitszeichen.

zu (14.10). Aus Gleichung (14.6) und $g_{ij}^{(0)}(t) = \mathbb{1}_{\{i=j\}}\delta_0(t)$ erhalten wir den Fall $n = 0$. Nutzung von (14.10) und einsetzen des Falls $n = 0$ liefert:

$$\begin{aligned}
F_{a,i}(t) &\leq \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^K \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{i,j}^{(k)}(s) ds \\
&+ \sum_{j_1, \dots, j_{n+1}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \\
&\quad \int_{[0,s_n)} \alpha_{j_n} |h_{j_{n+1} j_n}(s_n-s_{n+1})| \bar{\varepsilon}_{a,j_{n+1}}(s_{n+1}) ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 \\
&+ \sum_{j_1, \dots, j_{n+1}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \\
&\quad \int_{[0,s_n)} \alpha_{j_n} |h_{j_{n+1} j_n}(s_n-s_{n+1})| \\
&\quad \sum_{j_{n+2}=1}^K \int_{[0,s_{n+1})} \alpha_{j_{n+1}} |h_{j_{n+2} j_{n+1}}(s_{n+1}-s_{n+2})| F_{a,j_{n+2}}(s_{n+2}) ds_{n+2} \\
&\quad ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \sum_{j=1}^K \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{i,j}^{(k)}(s) ds \\
&+ \sum_{j_1, \dots, j_{n+1}=1}^K \int_{[0,t)} \alpha_i |h_{j_1 i}(t-s_1)| \int_{[0,s_1)} \alpha_{j_1} |h_{j_2 j_1}(s_1-s_2)| \dots \\
&\quad \int_{[0,s_n)} \alpha_{j_n} |h_{j_{n+1} j_n}(s_n-s_{n+1})| \\
&\quad \sum_{j_{n+2}=1}^K \int_{[0,s_{n+1})} \alpha_{j_{n+1}} |h_{j_{n+2} j_{n+1}}(s_{n+1}-s_{n+2})| F_{a,j_{n+2}}(s_{n+2}) ds_{n+2} \\
&\quad ds_{n+1} \dots ds_2 ds_1,
\end{aligned}$$

benutze (14.8). \diamond

Da der Spektralradius von A echt kleiner als 1 ist, konvergiert die rechte Seite von (14.9) für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Somit gilt also $F_{a,i}(t) \leq G_{a,i}(t)$ nach (14.10) (Grenzübergang $n \rightarrow \infty$).

Unser weiteres Vorgehen hängt von der gewählten Anfangsbedingung ab, also:

- Erfülle N' ab jetzt Anfangsbedingung (AB i'). Nach Anfangsbedingung (AB i') folgt gemeinsam mit der fast sicheren Endlichkeit von $\lambda_j a \int_0^\infty |h_{ji}(s)| ds$ die fast sichere Endlichkeit von $\sup_{t \in [0, \infty)} \bar{\varepsilon}_{a,j}(t)$, damit ist $\bar{\varepsilon}_{a,i}(t)$ f.s. beschränkt auf \mathbb{R}
Es ist $G_{a,i}(t) < \infty$ f.s., $t \in [0, \infty)$, falls wir zeigen können:

BEHAUPTUNG 2. Für $t \in \mathbb{R}$ und $i \in \{1, \dots, K\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^K \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{ij}^{(k)}(s) ds < \infty \quad f.s..$$

BEGRÜNDUNG: Setze $\beta_{a,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \in [0, \infty)} \bar{\varepsilon}_{a,j}(t) < \infty$ f.s.. Wir zeigen durch eine Induktion nach k die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^K \beta_{a,j} \int_0^t g_{ij}^{(k)}(s) ds \leq \left(A^k \begin{pmatrix} \beta_{a,1} \\ \vdots \\ \beta_{a,K} \end{pmatrix} \right)_i \quad \text{f.s.}$$

Es ist „ $n = 0$ “ einmal mehr klar. Den Induktionsschritt zeigt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^K \beta_{a,j} \int_0^t g_{ij}^{(k+1)}(s) ds &= \sum_{j=1}^K \beta_{a,j} \int_0^t \sum_{l=1}^K \alpha_i \int_0^t \mathbb{1}_{[0,s]}(s_1) |h_{li}(s-s_1)| g_{lj}^{(k)}(s_1) ds_1 ds \\ &= \sum_{l=1}^K \alpha_i \int_0^t |h_{li}(s_1)| \sum_{j=1}^K \beta_{a,j} \int_0^t \mathbb{1}_{[s_1, \infty)}(s) g_{lj}^{(k)}(s-s_1) ds ds_1 \\ &\leq \sum_{l=1}^K \alpha_i \int_0^t |h_{li}(s_1)| \left(A^k \begin{pmatrix} \beta_{a,1} \\ \vdots \\ \beta_{a,K} \end{pmatrix} \right)_l ds_1 \leq \left(A^{k+1} \begin{pmatrix} \beta_{a,1} \\ \vdots \\ \beta_{a,K} \end{pmatrix} \right)_i \quad \text{f.s.}, \end{aligned}$$

Nutzung der Induktionsvoraussetzung bei der ersten Ungleichheit. Hieraus können wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^K \begin{pmatrix} \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{1j}^{(k)}(s) ds \\ \vdots \\ \int_0^t \bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s) g_{Kj}^{(k)}(s) ds \end{pmatrix} \leq \sum_{k=0}^{\infty} A^k \begin{pmatrix} \beta_{a,1} \\ \vdots \\ \beta_{a,K} \end{pmatrix} < \infty \quad \text{f.s.}$$

folgern. \diamond

Nach Anfangsbedingung (AB i') und wegen $\int_{(t-a) \vee 0}^{\infty} |h_{ji}(s)| ds < \infty$ konvergiert $\bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, dominierte Konvergenz sichert damit $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{a,i}(t) = 0$ f.s.. Ab nun können wir der Argumentation von Abschnitt 10.2 folgen. Nach Definition von $F_{a,i}(t)$ gilt

$$\begin{aligned} F_{a,i}(t) &= \mathbf{E} \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |N_i - N'_i| (du) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &\geq \sum_{k>0} \mathbf{P} \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |N_i - N'_i| (du) = k \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &= 1 - \mathbf{P} \left(\int_{(t-a) \vee 0}^{t \vee 0} |N_i - N'_i| (du) = 0 \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &= 1 - \mathbf{P} \left(N_i \equiv N'_i \text{ auf } ((t-a) \vee 0, t \vee 0] \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right), \end{aligned}$$

so daß nach den vorangegangenen Überlegungen – wie bereits im Beweis von 10.8 – mit dem Lemma von Fatou $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(N_i \equiv N'_i \text{ auf } ((t-a) \vee 0, t \vee 0] \mid \mathcal{F}_0^{N'}) = 1$ geschlossen werden kann. Schließlich gilt die schwache Konvergenz von $S_t N_i^+$ gegen N_i^+ für $t \rightarrow \infty$, siehe 10.9 und die daran anschließende Anmerkung.

- Genügt N' Anfangsbedingung (AB ii'), liefert Erwartungswertbildung bei Gleichung (14.7) mit dem Satz von Fubini

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(F_{a,1}(t)) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(F_{a,K}(t)) \end{pmatrix} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^K \begin{pmatrix} \int_0^t \mathbf{E}(\bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s)) g_{1j}^{(k)}(s) ds \\ \vdots \\ \int_0^t \mathbf{E}(\bar{\varepsilon}_{a,j}(t-s)) g_{Kj}^{(k)}(s) ds \end{pmatrix}.$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz zeigt aufgrund der Beschränktheit jeder Komponente der rechten Seite nach Anfangsbedingung (AB ii') $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}(F_{a,i}(t)) = 0$, $1 \leq i \leq K$, woraus wir schließlich die schwache Konvergenz von $S_t N'^+$ gegen N^+ folgern können.

- Besitze N' Anfangsbedingung (AB iii') und gelte zusätzlich $\int_0^\infty t |h_{ji}(t)| dt < \infty$, $1 \leq i, j \leq K$. Wir haben jetzt (iii) zu zeigen. Aus (14.5) folgt durch Integration zwischen 0 und $T > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^T f_i(t) dt &\leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_0^T \left(\int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-s)| N'_j(ds) + \lambda_j \int_t^\infty |h_{ji}(s)| ds \right) dt \\ &\quad + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_0^T \int_{[0, t)} |h_{ji}(t-s)| f_j(s) ds dt \\ &\leq \bar{\varepsilon}_i + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{[0, T)} \int_0^T |h_{ji}(t-s)| dt f_j(s) ds \\ &\leq \bar{\varepsilon}_i + \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_0^\infty |h_{ji}(t)| dt \int_0^T f_j(s) ds, \end{aligned}$$

dabei wird $\bar{\varepsilon}_i$ definiert als

$$\bar{\varepsilon}_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i \sum_{j=1}^K \left(\int_0^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-s)| N'_j(ds) dt + \lambda_j \int_0^\infty t |h_{ji}(t)| dt \right).$$

Nach Voraussetzung (AB iii') und der zusätzlichen Bedingung an h_{ji} ist $\bar{\varepsilon}_i < \infty$ f.s., es gilt ebenso $\int_0^T f_i(t) dt < \infty$ f.s. (vergleiche Beweis zu 10.12 Gleichung (10.16)). Obige Ungleichung lässt sich als komponentenweise Ungleichung im \mathbb{R}^K schreiben:

$$\int_0^T f(t) dt = \begin{pmatrix} \int_0^T f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^T f_K(t) dt \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_K \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \int_0^T f_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^T f_K(t) dt \end{pmatrix} = \bar{\varepsilon} + A \int_0^T f(t) dt.$$

Durch Iteration zeigt dies $\int_0^T f(t) dt \leq \sum_{n=0}^k A^n \bar{\varepsilon} + A^{k+1} \int_0^T f(t) dt$ für $k \in \mathbb{N}$, was wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{k+1} = 0$ zu $\int_0^T f(t) dt \leq \sum_{n=0}^\infty A^n \bar{\varepsilon}$ f.s. für alle $T \in (0, \infty)$ führt. Die rechte Seite dieses Ausdrückes ist, unabhängig von T , f.s. endlich, denn der Spektralradius von A ist echt kleiner 1. Also gilt $\int_0^\infty f(t) dt < \infty$ f.s.. Aus

$$\begin{aligned} \infty > \int_0^\infty f_i(t) dt &= \mathbf{E} \left(\int_0^\infty |\lambda_i(t) - \lambda'_i(t)| dt \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\int_0^\infty |N_i - N'_i|(dt) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \geq \mathbf{E} \left(|N_i - N'_i|((0, \infty)) \middle| \mathcal{F}_0^{N'} \right) \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

ergibt sich $|N_i - N'_i|([0, \infty)) < \infty$ f.s., d.h. N_i und N'_i und somit N und N' koppeln f.s. in endlicher Zeit auf der positiven reellen Achse, woraus wie im Beweis von 10.12 die Stabilität in Variation folgt. \square

Wie bereits im univariaten Fall erweist sich auch hier die Einschränkung auf die Menge \mathcal{N}_0^K als unnötig. Wir können die Argumentation der Begründung von Bemerkung 10.14 auf den K -variablen Fall übertragen, führen jedoch die Details an dieser Stelle nicht aus.

15. Lipschitz-stetige Anregungsfunktionen – der beschränkte Fall

Wenden wir uns nun schließlich der Verallgemeinerung der Sätze 11.6 und 11.8 zu.

15.1. Satz. Gegeben seien $K \in \mathbb{N}$ und α_i -Lipschitz-stetige Funktionen $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, welche jeweils durch ein $\Lambda_i > 0$ beschränkt sind, $1 \leq i \leq K$. Für die messbaren Funktionen $h_{ji} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$(15.1) \quad \int_{[0, \infty)} |h_{ji}(t)| dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_{[0, \infty)} t |h_{ji}(t)| dt < \infty,$$

$1 \leq i, j \leq K$. In dieser Situation existiert ein eindeutiges stationäres Verteilungsgesetz für den Punkt-Prozeß $N = (N_1, \dots, N_K)$ mit Dynamik (D2), und (D2) ist stabil in Variation bezüglich der Anfangsbedingung

$$(15.2) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_s^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(u - v)| N_j(dv) du = 0 \quad \text{f.s.}$$

$(1 \leq i, j \leq K)$.

BEWEIS: (i) Existenz eines stationären Punkt-Prozesses. Sei (Ω, \mathcal{F}) der kanonische Raum der markierten Punkt-Prozesse mit $[0, 1]$ -wertigen Marken (oder das K -fache Produkt dieses Raumes), $\theta_t = S_t$ und \mathbf{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) mit $\mathbf{P} \circ \theta_t = \mathbf{P}$. Es bezeichne $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_K$ stochastisch unabhängige, markierte Punkt-Prozesse mit

- $\bar{N}_i = (T_{i,n}, U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$
- $(T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ist ein Poisson-Prozeß mit $\mathcal{F}_t^{\bar{N}_i}$ -Intensität Λ_i
- $(U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ist eine Folge u.i.v. Zufallsgrößen, jeweils $\mathbb{R}[0, 1]$ -verteilt
- $(T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(U_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ sind stochastisch unabhängig

für $1 \leq i \leq K$. Für $\omega \in \Omega$ gelte $\bar{N}_i(\omega, \cdot) = \omega(\cdot)$ (bzw. $\bar{N}_i((\omega_1, \dots, \omega_K), \cdot) = \omega_i(\cdot)$). Durch $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} = \sigma(\mathcal{F}_t^{\bar{N}_i}; 1 \leq i \leq K)$ wird eine gemeinsame Filtration dieser markierten Poisson-Prozesse gegeben.

Der gesuchte stationäre Punkt-Prozeß wird einmal mehr das Ergebnis einer induktiven Konstruktion sein: Definiere Punkt-Prozesse und stochastische Prozesse durch $\lambda_i^{(0)}(t) \equiv 0$ und

$$\begin{aligned} N_i^{(n)}(C) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_C \bar{N}_i \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda_i^{(n)}(s)}{\Lambda_i} \right] \right), & C \in \mathfrak{B}, \\ \lambda_i^{(n+1)}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \phi_i \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} h_{ji}(t-s) N_j^{(n)}(ds) \right), & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wie in 7.1 können wir zeigen, daß $(\lambda_i^{(n)}(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von $N_i^{(n)}$ darstellt, und auch die übrigen Ergebnisse aus 7.1 können übernommen werden.

Mittels der Hilfsprozesse

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i(\{t\}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)}(\{t\}) - \liminf_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)}(\{t\}) \\ \tilde{\lambda}_i(t) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(t) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}(t), \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$, werden wir folgern, daß der Grenzwert $N_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)}$ existiert. Dazu weisen wir nach, daß \tilde{N}_i dem Punkt-Prozeß ohne einen einzigen Punkt auf der reellen Achse entspricht.

(a) Wie im Beweis von 11.6 (vergleiche ab Lemma 11.1) sieht man, daß $(\tilde{\lambda}_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität von \tilde{N}_i ist. Für diese Intensitäten gilt die Ungleichung $\tilde{\lambda}_i(t) \leq \alpha_i \Delta_{i1}(a) + \alpha_i \Delta_{i2}(a)$ mit den Festlegungen

$$\begin{aligned} \Delta_{i1}(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t-a)} |h_{ji}(t-s)| N_j^{(k)}(ds) - \inf_{k \geq n} \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t-a)} |h_{ji}(t-s)| N_j^{(k)}(ds) \right) \\ \Delta_{i2}(a) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \sum_{j=1}^K \int_{[t-a, t)} |h_{ji}(t-s)| N_j^{(k)}(ds) - \inf_{k \geq n} \sum_{j=1}^K \int_{[t-a, t)} |h_{ji}(t-s)| N_j^{(k)}(ds) \right). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion der beteiligten Prozesse ist $\Delta_{i2}(a) \leq \sum_{j=1}^K \int_{[t-a, t)} |h_{ji}(t-s)| \bar{N}_j(ds \times [0, 1])$ klar und daher $\Delta_{i2}(a) < \infty$ f.s.. Außerdem erfüllt $\Delta_{i2}(a)$

$$\begin{aligned} \Delta_{i2}(a) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^K \int_{[t-a, t)} |h_{ji}(t-s)| \left(\sup_{k \geq n} N_j^{(k)} - \inf_{k \geq n} N_j^{(k)} \right) (ds) \\ &\leq \sum_{j=1}^K \int_{[t-a, t)} |h_{ji}(t-s)| \tilde{N}_j(ds) \text{ f.s..} \end{aligned}$$

Für $\Delta_{i1}(a)$ gilt $\Delta_{i1}(a) < \infty$ f.s. und $\lim_{a \rightarrow \infty} \Delta_{i1}(a) = 0$ f.s., was eine Folgerung aus

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Delta_{i1}(a)) &\leq \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t-a)} |h_{ji}(t-s)| \bar{N}_j(ds \times [0, 1]) \right) \\ &= \sum_{j=1}^K \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, t-a)} |h_{ji}(t-s)| \Lambda_j ds \right) < \infty \end{aligned}$$

ist. Insgesamt gilt im Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ also

$$\tilde{\lambda}_i(t) \leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| \tilde{N}_j(ds) \quad \text{f.s..}$$

(b) Die Aussagen 2.4 und 2.6 lassen sich ohne größere Modifikationen auf den Fall K -variater Punkt-Prozesse erweitern, d.h. die nach [Bré81] II.4., Theorem 14, existierende $\mathcal{F}_t^{\tilde{N}}$ -vorhersagbare Version der $\mathcal{F}_t^{\tilde{N}}$ -Intensität $(\tilde{\lambda}_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ von \tilde{N}_i besitzt eine Darstellung der Form $(\nu_i(\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_K, t))_{t \in \mathbb{R}}$. Wie in Lemma 11.3 erhalten wir das Analogon zu (11.4) für den vorliegenden Fall:

$$(15.3) \quad \nu_i(\tilde{N}_1^-, \dots, \tilde{N}_K^-, t) \leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-s)| \tilde{N}_j(ds) \quad \text{f.s..}$$

Wird die rechte Seite dieses Ausdrucks noch bezüglich t über $[0, \infty)$ integriert, bleibt der entstehende Ausdruck f.s. endlich, denn aus (15.1) folgt

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left(\int_{(0, \infty)} \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-s)| \bar{N}_j(ds \times [0, 1]) dt \right) \\ &= \sum_{j=1}^K \mathbf{E} \left(\int_{(0, \infty)} \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-s)| \Lambda_j ds dt \right) = \sum_{j=1}^K \Lambda_j \int_{(0, \infty)} t |h_{ji}(t)| dt < \infty \end{aligned}$$

unter Nutzung des Satzes von Fubini. Gleichung (15.3) und Korollar 5.6 zeigen (beachte das Disjunktheitslemma in [Kin93] 2.2)

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\tilde{N}_i((0, \infty)) = 0 \mid \mathcal{F}_0^{\tilde{N}} \right) \geq \mathbf{P} \left(\tilde{N}((0, \infty) \times \{1, \dots, K\}) = 0 \mid \mathcal{F}_0^{\tilde{N}} \right) \\ & \geq \prod_{i=1}^K \exp \left(- \int_{(0, \infty)} \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-s)| \bar{N}_j(ds \times [0, 1]) dt \right) \\ & > 0 \quad \text{f.s.,} \end{aligned}$$

dies führt zu $\mathbf{P}(\tilde{N}_i((0, \infty)) = 0) = 1$ (vergleiche Überlegungen im Anschluß an 11.4). Damit wird die Festlegung $N_i \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} N_i^{(n)}$ sinnvoll, denn für beschränkte Mengen $C \in \mathfrak{B}$ stimmen die Punkte von $N_i^{(n)}$ und $N_i^{(n+1)}$ auf C ab einem genügend großen n f.s. überein. Nach Konstruktion ist die θ_t -Kompatibilität von N_i klar, dies liefert die Stationarität von N_i .

(c) Sei $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ von der Form (D2), dieser Prozeß ist eine \mathcal{F}_t^N -Intensität von N_i : Für beschränkte Mengen $C \in \mathfrak{B}$ gilt aufgrund der θ_t -Kompatibilität, des Lemma's von Fatou und 6.15

$$\mathbf{E} \left(\int_C \left| N_i(ds) - \bar{N}_i \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda_i(s)}{\Lambda_i} \right] \right) \right| \right) \leq \mathbb{X}(C) \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\left| \lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i(0) \right| \right).$$

Aus der Endlichkeit von $\mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(-s)| \bar{N}_j(ds \times [0, 1]) \right) = \Lambda_j \int_{[0, \infty)} |h_{ji}(s)| ds$ folgt die fast sichere Endlichkeit von $\int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(-s)| \left| N_j^{(n)} - N_j \right|(ds)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $N_i^{(n)}$ auf jedem

beschränkten Intervall schließlich mit N_i übereinstimmt, zeigt die aus der Lipschitz-Stetigkeit resultierende Abschätzung

$$\left| \lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i(0) \right| \leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0)} |h_{ji}(-s)| \left| N_j^{(n)} - N_j \right| (ds)$$

die f.s. Konvergenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i(0) \right|$ gegen 0. Der Satz von der dominierten Konvergenz sichert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left(\left| \lambda_i^{(n+1)}(0) - \lambda_i(0) \right| \right) = 0,$$

d.h. N_i stimmt auf jeder beschränkten Borel-Menge schließlich mit $\left(\int_C \bar{N}_i \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda_i(s)}{\Lambda_i} \right] \right) \right)_{C \in \mathfrak{B}}$ überein, also $N_i = \left(\int_C \bar{N}_i \left(ds \times \left[0, \frac{\lambda_i(s)}{\Lambda_i} \right] \right) \right)_{C \in \mathfrak{B}}$ f.s..

Den Nachweis der Eindeutigkeit erbringen wir im Anschluß an den Beweis der Stabilität.

(ii) *Stabilität in Variation.* Sei $N' = (N'_1, \dots, N'_K)$ ein K -variater Punkt-Prozeß, der der Anfangsbedingung (15.2) genügt und auf $[0, \infty)$ die $\mathcal{F}_t^{N'}$ -Intensität $(\lambda'(t))_{t \in [0, \infty)}$ von der Form (D2) zuläßt, dabei ist $\mathcal{F}_t^{N'} = \sigma \left(\mathcal{F}_t^{N'_i}; 1 \leq i \leq K \right)$ und $\lambda'(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda'_1(t), \dots, \lambda'_K(t))$ auf $[0, \infty)$. Die Funktionen ϕ_1, \dots, ϕ_K sind beschränkt und daher die Prozesse N_1, \dots, N_K auf $[0, \infty)$ nichtexplodierend.

Im Hinblick auf die Anwendung von 6.14 wählen wir eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen $U'_i \stackrel{\text{def}}{=} (U'_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ($U'_{i,n} \sim R[0, 1]$) unabhängig von $\mathcal{F}_\infty^{N'}$ sowie einen homogenen Poisson-Prozeß \hat{N}'_i auf \mathbb{R}^2 der Intensität 1 unabhängig von \mathcal{F}_∞^U und $\mathcal{F}_\infty^{N'}$, so daß der durch

$$\bar{N}_i((a, b] \times L) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{(a, b]}(T'_{i,n}) \mathbb{1}_L(\lambda'_{i+}(T'_{i,n}) U'_{i,n}) + \int_{(a, b]} \int_{L \setminus (0, \lambda'_{i+}(t)]} \hat{N}'_i(dt \times dz),$$

$(a, b] \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathfrak{B}$, definierte Punkt-Prozeß ein homogener $\bar{\mathcal{F}}_{i,t}$ -Poisson-Prozeß der Intensität 1 auf $[0, \infty)$ ist. Dabei sei $\bar{\mathcal{F}}_{i,t} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \left(\mathcal{F}_t^{N'}, \mathcal{F}_t^{\bar{N}_i} \right)$, $N_i'^+ = (T'_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $\lambda'_{i+}(t) = \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \lambda'_i(t)$ ($1 \leq i \leq K$). Die Folgen und Punkt-Prozesse $U'_1, \dots, U'_K, \hat{N}'_1, \dots, \hat{N}'_K$ sollen unabhängig voneinander sein. In diesem Fall ist dann \bar{N}_i ein homogener \mathcal{F}_t -Poisson-Prozeß, $\mathcal{F}_t = \sigma \left(\bar{\mathcal{F}}_{i,t}; 1 \leq i \leq K \right)$.

Durch $\bar{N}_i(\cdot \times [0, \Lambda_i]) = (T_{i,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ wird ein $\bar{\mathcal{F}}_{i,t}$ -Poisson-Prozeß der Intensität Λ_i auf \mathbb{R} definiert.

Nach Konstruktion gilt auf $[0, \infty)$ die Identität $N'_i(C) = \int_C \bar{N}_i(dt \times [0, \lambda'_i(t)])$, $C \in \mathfrak{B}((0, \infty))$.

Wie im Existenzbeweis können wir den stationären Punkt-Prozeß

$$N_i(C) = \int_C \bar{N}_i(dt \times [0, \lambda_i(t)])$$

mit $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Intensität $(\lambda_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ der Form (D2) konstruieren (beachte 8.6). Diese Intensität ist gemäß 6.12 auch eine \mathcal{F}_t -Intensität von N_i . Ferner stellt $(\lambda'_i(t))_{t \in \mathbb{R}}$ eine \mathcal{F}_t -Intensität von N'_i auf $[0, \infty)$ dar, beachte $\bar{\mathcal{F}}_{i,t} \subset \mathcal{F}_t \subset \sigma \left(\bar{\mathcal{F}}_{i,t}, \mathcal{F}_t^{\hat{N}'_j}, \mathcal{F}_\infty^{U'_j}; j \in \{1, \dots, K\} \setminus \{i\} \right)$ und die gegebenen Unabhängigkeiten zur Anwendung von 5.4. Auf $[0, \infty)$ ist $(|\lambda_i(t) - \lambda'_i(t)|)_{t \in [0, \infty)}$ eine \mathcal{F}_t -Intensität von $|N_i - N'_i|$. Diese genügt aufgrund der α_i -Lipschitz-Stetigkeit von ϕ_i der Abschätzung

$$|\lambda_i(t) - \lambda'_i(t)| \leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, t)} |h_{ji}(t-s)| |N_j - N'_j| (ds).$$

Da $\mathcal{F}_t^{|N-N'|} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_t^{|N_i-N'_i|}; 1 \leq i \leq K\right) \subset \mathcal{F}_t$ für alle $t \in [0, \infty)$ gilt, folgt für die $\mathcal{F}_t^{|N-N'|}$ -vorhersagbare Version der $\mathcal{F}_t^{|N-N'|}$ -Intensität von $|N_i - N'_i|$:

$$\nu_i(S_s |N_j - N'_j| (\cdot \cap (-\infty, 0]), 1 \leq j \leq K; t) \leq \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(t-u)| S_s |N_j - N'_j| (du).$$

Wie im Beweis von 11.8 ist das Ziel unserer Bemühungen die Kopplung von N und N' . Korollar 5.6 zeigt

$$\begin{aligned} & P(|N - N'|((s, s+t]) = 0 | \mathcal{F}_s^{|N-N'|}) \\ & \geq \prod_{i=1}^K \exp \left(-\alpha_i \int_0^t \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(u-v)| S_s |N_j - N'_j| (dv) du \right) \\ & = \prod_{i=1}^K \exp \left(-\alpha_i \int_s^{s+t} \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, s]} |h_{ji}(u-v)| |N_j - N'_j| (dv) du \right) \\ & \geq \prod_{i=1}^K \exp \left(- \int_s^\infty g_{i,s}(u) du \right) = \exp \left(- \int_s^\infty g_s(u) du \right) \end{aligned}$$

mit den Festlegungen $g_s(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^K g_{i,s}(u)$ und

$$g_{i,s}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_i \sum_{j=1}^K \left(\int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(u-v)| N'_j(dv) + \int_{(-\infty, s]} |h_{ji}(u-v)| \bar{N}_j(dv \times [0, \Lambda_j]) \right) du.$$

Wir prüfen für die Prozesse

$$\begin{aligned} Z(s) & \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left(- \sum_{i=1}^K \alpha_i \int_s^\infty \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, s]} |h_{ji}(u-v)| \bar{N}_j(dv \times [0, \Lambda_j]) du \right) \\ \epsilon(s) & \stackrel{\text{def}}{=} Z(s) - \exp \left(- \int_s^\infty g_s(u) du \right) \\ & = Z(s) \left(1 - \exp \left(- \sum_{i=1}^K \alpha_i \int_s^\infty \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(u-v)| N'_j(dv) du \right) \right), \end{aligned}$$

$s \in [0, \infty)$, die Voraussetzungen von 11.7 und folgen dafür der Argumentation aus dem Beweis von 11.8. Da $0 \leq Z(s) \leq 1$ gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} \epsilon(s) = 0$ f.s., siehe Voraussetzung (15.2), und die Darstellung $Z(s) = f(S_s \bar{N})$ führt aufgrund der Ergodizität von $(P^{\bar{N}}, (S_t)_{t \in \mathbb{R}})$ zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \mathbb{1}_{[\beta, \infty)}(f(S_u \bar{N})) du = P(Z(s) \geq \beta) \quad \text{f.s.}$$

für alle $\beta \in (0, \infty)$. Die Gültigkeit von $P(Z(s) \geq \beta) \geq \beta$ wird bewiesen durch die Endlichkeit

von

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^K \alpha_i \int_s^\infty \sum_{j=1}^K \int_{(-\infty, s]} |h_{ji}(u-v)| \bar{N}_j(dv \times [0, \Lambda_j]) du \right) \\
&= \sum_{i=1}^K \alpha_i \int_s^\infty \sum_{j=1}^K \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, s]} |h_{ji}(u-v)| \bar{N}_j(dv \times [0, \Lambda_j]) \right) du \\
&= \sum_{i=1}^K \alpha_i \sum_{j=1}^K \int_s^\infty \int_{(-\infty, s]} |h_{ji}(u-v)| \Lambda_j dv du \\
&= \sum_{i=1}^K \alpha_i \sum_{j=1}^K \Lambda_j \int_{[0, \infty)} u |h_{ji}(u)| du.
\end{aligned}$$

Satz 11.7 zeigt nun die Kopplung von N und N' in endlicher Zeit.

(iii) *Eindeutigkeit des stationären Punkt-Prozesses.* Gegeben sei ein stationärer Punkt-Prozeß $N = (N_1, \dots, N_K)$ mit Dynamik (D2) auf \mathbb{R} , welcher (15.1) erfüllt. Die Funktion ϕ_j ist beschränkt durch Λ_j . Damit folgt aus

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbf{E} \left(\int_s^\infty \int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(u-v)| N_j(dv) du \right) \leq \int_s^\infty \mathbf{E} \left(\int_{(-\infty, 0]} |h_{ji}(u-v)| \Lambda_j dv \right) du \\
&= \Lambda_j \int_s^\infty (u-s) |h_{ji}(u)| du < \infty
\end{aligned}$$

die Gültigkeit von Anfangsbedingung (15.2). □

Kapitel IV.

Anhang

A1. Meßbarkeit

1) Einige Mengenidentitäten. Wir listen hier nun einige Mengenidentitäten auf, die in den eigentlichen Beweisen im vorangegangenen Teil der Arbeit nur von untergeordnetem Interesse sind und der Vollständigkeit halber angegeben werden.

Für den gesamten Abschnitt sei $N = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ein (einfacher) Punkt-Prozeß, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration von N und $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$ ein \mathcal{F}_t -vorhersagbarer Prozeß.

A1.1. Lemma. *In der zuvor beschriebenen Situation gilt die Gleichheit*

$$(A1.1) \quad \{(\omega, s) \in \Omega \times (0, \infty); T_1(\omega) \geq s > 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{b \in \mathbb{Q}^{\geq 0}} \{T_1 \geq b\} \times \left(b, b + \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t).$$

BEWEIS: Sei zunächst $T_1(\omega) \geq s > 0$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, so daß $T_1(\omega) \geq b_n$ und $s \in (b_n, b_n + \frac{1}{n}]$.

Gebe es zu (ω, s) für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n \in \mathbb{Q}^{\geq 0}$, so daß $T_1(\omega) \geq b_n$ und $s \in (b_n, b_n + \frac{1}{n}]$. Offensichtlich gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s$ und somit $T_1(\omega) \geq s > 0$. \square

A1.2. Lemma. *Sei $(a, b] \subset \mathbb{R}$. Die Menge $\{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}; N(\omega, [t - b, t - a]) = n\}$ läßt sich für jedes fest vorgegebene $n \in \mathbb{N}$ darstellen als*

$$(A1.2) \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \left\{ \omega \in \Omega; N\left(\omega, \left[t - \frac{1}{k} - b, t - \frac{1}{k} - a\right]\right) = n \right\} \times \left(t - \frac{1}{k}, t\right].$$

BEWEIS: „ \subset “ Gelte $N(\omega_0, [t_0 - b, t_0 - a]) = n$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $t \in \mathbb{Q}$ mit $t - \frac{1}{k} < t_0 \leq t$ und $N(\omega_0, [t - \frac{1}{k} - b, t - \frac{1}{k} - a]) = n$.

„ \supset “ Existiert andererseits zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in \mathbb{Q}$ mit $t_k - \frac{1}{k} < t_0 \leq t_k$ und $N(\omega_0, [t_k - \frac{1}{k} - b, t_k - \frac{1}{k} - a]) = n$, so folgt wegen $\lambda((t_k - \frac{1}{k}, t_k]) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, daß $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$. Da $t_k - \frac{1}{k} < t_0$, folgt ebenfalls $\omega_0 \in \{\omega \in \Omega; N(\omega, [t_0 - b, t_0 - a]) = n\}$. \square

A1.3. Lemma. In der gegebenen Situation gilt die Gleichheit:

$$(A1.3) \quad \begin{aligned} & \{(\omega, s, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{1}_{[0, \lambda(\omega, s)]}(z) = 1\} \\ &= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{t \in \mathbb{Q} \geq 0} \left\{ (\omega, s) \in \Omega \times \mathbb{R}; t \leq \lambda(\omega, s) \leq t + \frac{1}{k} \right\} \times \left[0, t + \frac{1}{k} \right] \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathfrak{B} \end{aligned}$$

BEWEIS: Zum Nachweis von „ \subset “ gelte $\mathbb{1}_{[0, \lambda(\omega_0, s_0)]}(z_0) = 1$ für ein Tupel (ω_0, s_0, z_0) aus $\Omega \times \mathbb{R}^2$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es somit ein $t \in \mathbb{Q} \geq 0$ mit $z_0 \in [0, \lambda(\omega_0, s_0)] \subset [0, t + \frac{1}{k}]$ und $t \leq \lambda(\omega_0, s_0) \leq t + \frac{1}{k}$, was die erste Inklusion zeigt.

Gebe es andererseits für das Tupel $(\omega_0, s_0, z_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in \mathbb{Q} \geq 0$ mit $z_0 \in [0, t_k + \frac{1}{k}]$ und $t_k \leq \lambda(\omega_0, s_0) \leq t_k + \frac{1}{k}$. Dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} (t_k + \frac{1}{k}) = \lambda(\omega_0, s_0)$ und daher $z_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [0, t_k + \frac{1}{k}] = [0, \lambda(\omega_0, s_0)]$, so daß auch „ \supset “ gezeigt ist. \square

A1.4. Lemma. Ist N ein homogener Poisson-Prozeß der Intensität $\Lambda \in (0, \infty)$, $R = (R_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ der Prozeß der Punkte T_n von N , die $T_n - T_{n-1} > A$ erfüllen ($A \in (0, \infty)$), und $R^-(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{R_k \leq s; k \in \mathbb{Z}\}$. Dann gilt

$$(A1.4) \quad \{R^-(s) > x\} = \bigcup_{\substack{t \in \mathbb{Q} \cup \{s\} \\ x < t \leq s}} \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x < t - \frac{1}{n}}} \left\{ N \left(\left[t - \frac{1}{n} - A, t - \frac{1}{n} \right] \right) = 0, N \left(\left[t - \frac{1}{n}, t \right] \right) > 0 \right\}.$$

für alle $s, x \in \mathbb{R}$.

BEWEIS: Zu „ \subset “: Gilt $R^-(s)(\omega) > x$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $x < R^-(s)(\omega) = R_k(\omega) \leq s$. Aus $R_k(\omega) > R_{k-1}(\omega) + A$ folgt die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$, das $R_k(\omega) - \frac{1}{n} - A > R_{k-1}(\omega)$ erfüllt. Nun läßt sich n so groß wählen, daß ein $t \in \mathbb{Q} \cup \{s\}$ mit $x < t - \frac{1}{n} < t \leq s$ existiert, welches außerdem auch $t - \frac{1}{n} \leq R_k(\omega) \leq t$ erfüllt. Also gilt

$$(A1.5) \quad N \left(\omega, \left[t - \frac{1}{n}, t \right] \right) > 0 \quad \text{und} \quad N \left(\omega, \left[t - \frac{1}{n} - A, t - \frac{1}{n} \right] \right) = 0.$$

Um „ \supset “ zu zeigen, gebe es ein $t \in \mathbb{Q} \cup \{s\}$, $x < t \leq s$ und ein $n \in \mathbb{N}$, $x < t - \frac{1}{n}$, die (A1.5) erfüllen. Da N endliche Intensität Λ besitzt, ist N nichtexplodierend, und es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$, für das $x < t - \frac{1}{n} \leq R_k(\omega) \leq t \leq s$, d.h. $R^-(s)(\omega) > x$, gilt. \square

2) markierte Punkt-Prozesse auf \mathbb{R} und Poisson-Prozesse auf \mathbb{R}^2 mit zufälliger Punkt-Auswahlbedingung. Wir widmen uns in diesem Abschnitt der Frage, unter welchen Voraussetzungen bei zufälliger Auswahl von Punkten eines markierten Punkt-Prozesses auf \mathbb{R} (oder Poisson-Prozesses auf \mathbb{R}^2) eine Adaptiertheit bezüglich einer geeigneten Filtration erhalten bleibt. Die nachfolgenden Überlegungen dienen besonders Abschnitt 8.

A1.5. Lemma. Sei \bar{N} ein markierter Punkt-Prozeß auf \mathbb{R} mit Marken in \mathbb{R} oder ein Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 . Es bezeichne $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration von \bar{N} und $Y(t)$ eine \mathcal{F}_t -meßbare Zufallsvariable für alle $t \in \mathbb{R}$.

Für alle $(a, b] \subset (-\infty, t]$ ist dann $\bar{N}((a, b] \times [0, Y(t)])$ eine \mathcal{F}_t -meßbare Abbildung.

BEWEIS: Sei $(a, b] \subset (-\infty, t]$. Es reicht, für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} & \{\bar{N}((a, b] \times [0, Y(t)]) \geq k\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{y \in \mathbb{Q} \\ y - \frac{1}{n} \geq 0}} \left\{ Y(t) \in \left[y - \frac{1}{n}, y \right] \right\} \cap \{\bar{N}((a, b] \times [0, y]) \geq k\} \end{aligned}$$

nachzurechnen:

Zunächst „ \subset “: Aus $\bar{N}(\omega, (a, b] \times [0, Y(t)(\omega)]) \geq k$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines $y_n \in \mathbb{Q}$ mit $y_n - \frac{1}{n} \geq 0$, so daß

$$y_n - \frac{1}{n} \leq Y(t)(\omega) \leq y_n \quad \text{und} \quad \bar{N}(\omega, (a, b] \times [0, y_n]) \geq k.$$

Nun zu „ \supset “. Es gebe also zu $n \in \mathbb{N}$ stets Zahlen $y_n \in \mathbb{Q}$, $y_n - \frac{1}{n} \geq 0$, mit

$$Y(t)(\omega) \in \left[y_n - \frac{1}{n}, y_n \right] \quad \text{und} \quad \bar{N}(\omega, (a, b] \times [0, y_n]) \geq k.$$

Daraus ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y(t)(\omega)$ und somit $\bar{N}(\omega, (a, b] \times [0, Y(t)(\omega)]) \geq k$. \square

A1.6. Bemerkung. Es sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Filtration und N ein Punkt-Prozeß, so daß für alle $C \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} (A1.6) \quad N(C) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto N(\omega, C), \end{aligned}$$

\mathcal{F}_t -meßbar ist. Die Abbildung $N(\cdot) : \Omega \rightarrow M, \omega \mapsto N(\omega, \cdot)$ ist dann ebenfalls \mathcal{F}_t -meßbar.

BEGRÜNDUNG: Sei $A \in \mathcal{M}$. Es genügt, Mengen der Form $A = \{m \in M; m(C) \in B\}$ mit $B, C \in \mathfrak{B}$ zu betrachten. Offensichtlich ist $\{\omega \in \Omega; N(\omega, \cdot) \in A\} = \{\omega \in \Omega; N(\omega, C) \in B\} \in \mathcal{F}_t$, was die Behauptung zeigt. \diamond

A1.7. Satz. Gegeben sei ein $\Lambda \in (0, \infty)$ und einer der folgenden beiden Punkt-Prozesse:

- ein markierter Punkt-Prozeß $\bar{N} = (T_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ auf \mathbb{R} , so daß $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge unabhängiger, identisch $R[0, 1]$ -verteilter Zufallsvariablen ist. Der Punkt-Prozeß $\bar{N}(\cdot \times [0, 1])$ ist ein Poisson-Prozeß mit Intensität Λ unabhängig von $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
- ein Poisson-Prozeß \bar{N} der Intensität 1 auf \mathbb{R}^2 . Dabei sei $\bar{N}(\cdot \times [0, \Lambda]) = (T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Außerdem sei $\psi : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine Abbildung mit beschränktem Speicher (der Länge $A \in (0, \infty)$) und $\sup_{m \in M} \psi(m) = \Lambda$. Im Fall eines markierten Punkt-Prozesses sei $u \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Liegt ein Poisson-Prozeß auf \mathbb{R}^2 vor, so sei $u \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$. Definiere für $s \in \mathbb{R}$

$$(A1.7) \quad \begin{aligned} T_0^-(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup \{t \in (-\infty, s]; \bar{N}([t - A, t] \times [0, u]) = 0, \bar{N}([t - A, t] \times [0, u]) > 0\} \\ T_k^-(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf \{T_n > T_{k-1}^-(s); n \in \mathbb{Z}\}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann gilt für $(s, t] \subset \mathbb{R}$:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $C \in \mathfrak{B}$ ist $\{T_k^-(s) \in C \cap (-\infty, t]\} \in \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ und die Abbildung $T_k^-(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} T_k^-(s)\mathbb{1}_{\{T_k^-(s) \leq t\}} + \infty\mathbb{1}_{\{T_k^-(s) > t\}}$ $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbar.

(ii) Bei gegebenen $k \in \mathbb{N}_0$, $C \in \mathfrak{B}$ und $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbarer Abbildung $Y(t)$ stellt

$$(A1.8) \quad \begin{aligned} X_k(s, t, C) : (\Omega, \mathcal{F}_\infty^{\bar{N}}) &\rightarrow (\{0, 1\}, \mathfrak{P}(\{0, 1\})) \\ \omega &\mapsto \mathbb{1}_{\{T_k^-(s) \leq t\}}(\omega) \bar{N}(\omega, C \cap \{T_k^-(s)(\omega)\} \times [0, Y(t)(\omega)]) \end{aligned}$$

eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbare Abbildung dar.

(iii) Die Zufallsgröße

$$(A1.9) \quad N((s, t]) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(s, t]} \bar{N}\left(dr \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(S_r N)\right]\right)$$

ist $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbar.

BEWEIS: zu (i). Die Meßbarkeit ist für $T_0^-(s)$ nach 6.3 klar. Sei nun die Behauptung für ein $k \in \mathbb{N}$ gültig. Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq s$, gilt nach Definition $\{T_k^-(s) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{F}_x^{\bar{N}} \subset \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$. Falls $x > s$ ist, ergibt sich $\{T_k^-(s) \leq x\} = \{\exists n \in \mathbb{Z} : T_0^-(s) < T_{n+1}^- < T_{n+2}^- < \dots < T_{n+k}^- \leq x\} \in \mathcal{F}_x^{\bar{N}}$, denn $T_0^-(s)$ ist $\mathcal{F}_x^{\bar{N}}$ -meßbar. Für alle $x \leq t$ ist also $\{T_k^-(s) \leq x\} \in \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$, woraus die erste Aussage folgt.

Da $\{T_k^-(s) \leq x\} = \{T_k^-(s, t) \leq x\}$ für alle $x \leq t$ und $\{T_k^-(s, t) \leq x\} = \{T_k^-(s) \leq t\}$ für $x > t$ gilt, folgt auch die zweite Behauptung.

zu (ii). Hier genügt unter Hinweis auf A1.5 der Nachweis der folgenden Gleichheit:

$$\begin{aligned} \{X_k(s, t, C) = 1\} \\ = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{Q} \cup \{t\} \\ x \leq t}} \left\{ T_k^-(s) \in C \cap \left(x - \frac{1}{n}, x\right] \right\} \cap \left\{ \bar{N}\left(\left(x - \frac{1}{n}, x\right] \times [0, Y(t)]\right) \geq 1 \right\}. \end{aligned}$$

„ \subset “ Aus $X_k(s, t, C)(\omega) = 1$ folgt $T_k^-(s)(\omega) \in C \cap (-\infty, t]$ und die Existenz eines $j \in \mathbb{Z}$, so daß $T_j(\omega) = T_k^-(s)(\omega)$ und $\bar{N}(\omega, \{T_j(\omega)\} \times [0, Y(t)(\omega)]) \geq 1$. Daher gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ Elemente $x_n \leq t$ aus $\mathbb{Q} \cup \{t\}$ mit

$$T_j(\omega) = T_k^-(s)(\omega) \in C \cap \left(x_n - \frac{1}{n}, x_n\right] \quad \text{und} \quad \bar{N}(\omega, \{T_j(\omega)\} \times [0, Y(t)(\omega)]) \geq 1$$

für ein passend gewähltes $j \in \mathbb{Z}$. Es gilt also insbesondere

$$\bar{N}\left(\omega, \left(x_n - \frac{1}{n}, x_n\right] \times [0, Y(t)(\omega)]\right) \geq 1.$$

„ \supset “ Gebe es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{Q} \cup \{t\}$, $x_n \leq t$, mit

$$T_k^-(s)(\omega) \in C \cap \left(x_n - \frac{1}{n}, x_n\right] \quad \text{und} \quad \bar{N}\left(\omega, \left(x_n - \frac{1}{n}, x_n\right] \times [0, Y(t)(\omega)]\right) \geq 1.$$

Dann folgt zunächst $T_k^-(s)(\omega) \in (-\infty, t]$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \frac{1}{A}$, die Existenz von $j_n \in \mathbb{N}$ mit $T_{j_n}(\omega) \in (x_n - \frac{1}{n}, x_n]$ und $\bar{N}(\omega, \{T_{j_n}(\omega)\} \times [0, Y(t)(\omega)]) \geq 1$. Außerdem muß $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_k^-(s)(\omega)$ gelten und j_n nach Wahl von \bar{N} (\bar{N} als Poisson-Prozeß nichtexplodierend) für genügend große n konstant bleiben. Somit ist die Existenz eines $j \in \mathbb{N}$ mit

$$T_j(\omega) = T_k^-(s)(\omega) \in C \quad \text{und} \quad \bar{N}(\omega, \{T_j(\omega)\} \times [0, Y(t)(\omega)]) \geq 1$$

gesichert.

zu (iii). Es wird die Meßbarkeit von

$$N([T_0^-(s), t]) = \int_{[T_0^-(s), t]} \bar{N}\left(dr \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(S_r N)\right]\right)$$

nachgewiesen. Dazu definiere induktiv die Punkt-Prozesse ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} N_t^{(n)}(C) &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{N}\left((C \cap \{T_0^-(s)\}) \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(S_{T_0^-(s)} N)\right]\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_{(T_{k-1}^-(s) \wedge t, T_k^-(s) \wedge t] \cap C} \bar{N}\left(dr \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(S_r N)\right]\right) \\ (A1.10) \quad &= \bar{N}\left((C \cap \{T_0^-(s)\}) \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(\emptyset)\right]\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{T_k^-(s) \leq t\}} \bar{N}\left((C \cap \{T_k^-(s)\}) \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(S_{T_k^-(s,t)} N_t^{(k-1)})\right]\right), \end{aligned}$$

$C \in \mathfrak{B}$, wobei das zweite Gleichheitszeichen aufgrund des beschränkten Speichers von ψ gültig ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $C \in \mathfrak{B}$ ist $N_t^{(n)}(C)$ eine $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbare Abbildung, der Nachweis wird durch eine Induktion nach n geführt: im Fall $n = 0$ ist die Behauptung wegen $\psi(S_{T_0^-(s)} N) = \psi(\emptyset)$ und $\{T_0^-(s) \leq t\} = \Omega$ mit (ii) klar.

Gelte die Behauptung für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ und $C \in \mathfrak{B}$. Durch $S : (\mathbb{R} \times M, \mathfrak{B} \otimes \mathcal{M}) \rightarrow (M, \mathcal{M})$, $(t, \mu) \mapsto S_t \mu$ wird eine meßbare Abbildung gegeben. Die Abbildung $\omega \mapsto (T_{k+1}^-(s, t)(\omega), N_t^{(k)}(\omega, \cdot))$ von Ω nach $\mathbb{R} \times M$ ist $\mathcal{F}_t^{\bar{N}} - \mathfrak{B} \otimes \mathcal{M}$ -meßbar, beachte A1.6 und die Induktionsvoraussetzung. Hieraus folgt die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Meßbarkeit von $\omega \mapsto S_{T_{k+1}^-(s,t)(\omega)} N_t^{(k)}(\omega, \cdot)$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$. Nach (ii) ist für $1 \leq k \leq n+1$ und $C \in \mathfrak{B}$

$$\mathbb{1}_{\{T_k^-(s) \leq t\}} \bar{N}\left((C \cap \{T_k^-(s)\}) \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(S_{T_k^-(s,t)} N_t^{(k-1)})\right]\right)$$

$\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbar. Daher ist auch $N_t^{(n+1)}(C)$ für alle $C \in \mathfrak{B}$ $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -meßbar. Es folgt schließlich die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Meßbarkeit von $\omega \mapsto N_t^{(n+1)}(\omega, \cdot)$ (erneut A1.6). Für alle Mengen $C \in \mathfrak{B}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} N_t^{(n)}(C) = N(C \cap [T_0^-(s), t])$. Damit ist das Gewünschte gezeigt worden. Insbesondere zeigt dies die $\mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -Meßbarkeit von

$$N((s, t]) = N([T_0^-(s), t]) - N([T_0^-(s), s]).$$

□

A1.8. Korollar. Gegeben die Situation von A1.7 ist der durch

$$(A1.11) \quad N(C) \stackrel{\text{def}}{=} \int_C \bar{N} \left(dt \times \left[0, \frac{u}{\Lambda} \psi(S_t N) \right] \right), \quad C \in \mathfrak{B},$$

definierte Punkt-Prozeß $N \mathcal{F}_t^{\bar{N}}$ -adaptiert:

Im Fall $C \in \mathfrak{B}((n-1, n])$, $n \in \mathbb{Z}$, liefert Aussage A1.7(iii) gemeinsam mit einem Dynkin-System-Argument das Gewünschte, für $C \in \mathfrak{B}((-\infty, t])$ nutze die Darstellung $C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n-1, n] \cap C$.

A2. Analysis

A2.1. Lemma. Es sei $t_0 > 0$ und $f : (0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $(0, t_0)$ nichtnegative oder integrierbare Funktion. Dann gilt:

$$(A2.1) \quad n \int_0^{t_0} f(t_1) \left(\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \right)^{n-1} dt_1 = \left(\int_0^{t_0} f(t) dt \right)^n$$

und

$$(A2.2) \quad n! \int_0^{t_0} f(t_1) \int_0^{t_1} f(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \dots dt_2 dt_1 = \left(\int_0^{t_0} f(t) dt \right)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Der Beweis von (A2.1) wird durch Induktion über n geführt. Im Fall $n = 1$ ist die Aussage klar. Sei $n = 2$.

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{t_0} f(t_1) \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= \int_0^{t_0} f(t_1) \left(\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 + \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\ &= \int_0^{t_0} f(t_1) \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1 + \int_0^{t_0} f(t_2) \int_{t_2}^{t_0} f(t_1) dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{t_0} f(t_1) \left(\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 + \int_{t_1}^{t_0} f(t_2) dt_2 \right) dt_1 \\ &= \left(\int_0^{t_0} f(t_1) dt_1 \right) \left(\int_0^{t_0} f(t_2) dt_2 \right). \end{aligned}$$

Gelte für $n > 2$ Gleichung (A2.1). Unter Beachtung von

$$\begin{aligned} &\{t = (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; 0 \leq t_1 \leq t_0, t_1 \leq t_2 \leq t_0, 0 \leq t_3, \dots, t_{n+1} \leq t_1\} \\ &= \{t = (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; 0 \leq t_1 \leq t_2, 0 \leq t_2 \leq t_0, 0 \leq t_3, \dots, t_{n+1} \leq t_1\} \end{aligned}$$

zeigt der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} n \int_0^{t_0} f(t_1) \int_{t_1}^{t_0} f(t_2) dt_2 \int_0^{t_1} f(t_3) dt_3 \cdots \int_0^{t_1} f(t_{n+1}) dt_{n+1} dt_1 \\ = n \int_0^{t_0} f(t_2) \int_0^{t_2} f(t_1) \int_0^{t_1} f(t_3) dt_3 \cdots \int_0^{t_1} f(t_{n+1}) dt_{n+1} dt_1 dt_2 \\ = \int_0^{t_0} f(t_2) \left(\int_0^{t_2} f(t) dt \right)^n dt_2 \end{aligned}$$

unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung (A2.1) beim letzten Gleichheitszeichen. Wir können durch erneute Anwendung von (A2.1), diesmal beim 2. Gleichheitszeichen,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{t_0} f(t) dt \right)^{n+1} &= \int_0^{t_0} f(t) dt \left(\int_0^{t_0} f(t) dt \right)^n \\ &= \int_0^{t_0} f(t) dt n \int_0^{t_0} f(t_1) \left(\int_0^{t_1} f(t) dt \right)^{n-1} dt_1 \\ &= n \int_0^{t_0} f(t_1) \left(\int_0^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_0} f(t) dt \right) \left(\int_0^{t_1} f(t) dt \right)^{n-1} dt_1 \\ &= n \int_0^{t_0} f(t_1) \left(\int_0^{t_1} f(t) dt \right)^n dt_1 \\ &\quad + n \int_0^{t_0} f(t_1) \int_{t_1}^{t_0} f(t) dt \left(\int_0^{t_1} f(t) dt \right)^{n-1} dt_1 \\ &= (n+1) \int_0^{t_0} f(t_1) \left(\int_0^{t_1} f(t) dt \right)^n dt_1 \end{aligned}$$

schließen. Der Nachweis von (A2.2) lässt sich ebenfalls leicht durch Induktion führen, wenn (A2.1) genutzt wird. \square

A2.2. Satz. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ und $|f(x) - a|$ lokal integrierbar. Dann gilt ebenfalls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_s^{s+x} f(u) du = a$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

BEWEIS: Sei $s \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x_1 \in [0, \infty)$, so daß $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \geq x_1$. Die lokale Integrierbarkeit sichert die Existenz eines $x_2 \in [0, \infty)$ mit

$$\frac{1}{x} \int_s^{s+x_1} |f(u) - a| du < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $x \geq x_2$. Ist nun $x \geq \max\{x_1, x_2\}$, folgt

$$\left| \frac{1}{x} \int_s^{s+x} f(u) du - a \right| \leq \frac{1}{x} \int_s^{s+x_1} |f(u) - a| du + \frac{1}{x} \int_{s+x_1}^{s+x} |f(u) - a| du < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x - x_1}{x} \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

denn $x_1 \geq 0$.

□

Kapitel V.

Simulation von Punkt-Prozessen mit beschränktem Speicher

A3. Zum Programm

Zunächst eine kurze Übersicht über die Funktionsweise der zugrundeliegenden Berechnungsroutine. Die Basis des Programms bildet der Beweis des Satzes 8.5 über Dynamiken mit beschränktem Speicher.

Das Programm erzeugt eine zufällige positive Zahl mittels einer Exponentialverteilung. Diese Zahl stellt den Abstand des ersten Punktes t_1 eines Poisson-Prozesses zur 0 dar. Wie zuvor wird eine weitere positive Zahl erzeugt, die nun den Abstand des ersten Punktes t_1 zum nächsten Punkt t_2 angibt. Diese Konstruktion wird nun weitergeführt, bis eine vorgegebene Anzahl von Punkten erzeugt wurde oder die Position eines Punktes einen vorgegebenen Wert überschreitet. Wir haben dann die Positionen und Zwischenabstände einer Realisation eines Poisson-Prozesses in einem Ausschnitt der positiven reellen Achse erhalten.

Als nächstes muß induktiv, beginnend mit dem Punkt t_1 , entschieden werden, ob ein Punkt des Poisson-Prozesses zu einem neuen (noch zu konstruierenden) Prozeß mit Dynamik der Form (D1) gehört. Dies geschieht unter Zuhilfenahme von (8.3), wobei zu beachten ist, daß wir Intensitäten der Form (D1) betrachten. Nachdem wir $\lambda(t_1) = \phi(0)$ berechnet haben, erzeugen wir gemäß einer $R[0, 1]$ -Verteilung einen Wert u_1 und prüfen, ob dieser $0 \leq u_1 \leq \frac{\lambda(t_1)}{\Lambda}$ erfüllt. Ist dies der Fall, so ist t_1 ein Punkt der zu konstruierenden Realisation des neuen Prozesses und die zugehörige Marke wird gleich 1 gesetzt, ansonsten gleich 0.

Ist bis zu einem Punkt t_k die zugehörige Marke bestimmt worden, so ist nun die Marke zu t_{k+1} festzulegen. Dazu berechnen wir

$$\lambda(t_{k+1}) = \phi \left(\int_{(0, t_{k+1})} h(t_{k+1} - s) n_k(ds) \right) = \phi \left(\int_{(0, t_k]} h(t_{k+1} - s) n_k(ds) \right),$$

wobei n_k die bereits erzeugte Realisation des neuen Prozesses im Intervall $[t_1, t_k]$ ist. Wir erzeugen wieder einen $R[0, 1]$ -verteilten Wert u_{k+1} und testen, ob $0 \leq u_{k+1} \leq \frac{\lambda(t_{k+1})}{\Lambda}$. Die zu t_{k+1} gehörige

Marke wird auf 1 gesetzt, falls dies der Fall ist, sonst auf 0. Dieses Verfahren wird solange angewendet, bis wir zum letzten Punkt des Poisson-Prozesses gelangt sind.

Die erhaltenen Punkte samt Marken werden in eine Datei mit der Endung „.dat“ gespeichert. Aus dieser können sie zur graphischen Darstellung oder Weiterverarbeitung gelesen werden.

1) Installation. Installation des Simulationsprogramms auf einem SUN-Rechner (im Netz des Fachbereichs Mathematik der WWU Münster, Stand: Januar 1999):
Die benötigte Diskette befindet sich auf der letzten Seite dieser Arbeit.

- Der Installationsrechner besitzt ein Diskettenlaufwerk.
 1. Zunächst ein Kommandozeilenfenster öffnen (ein `xterm`, eine `bash` oder ähnliches; falls dies noch nicht geschehen ist).
 2. Diskette einlegen und durch den Befehl `volcheck` im Dateisystem anmelden (üblicherweise läßt sich die Diskette dann unter dem Verzeichnis `/a` ansprechen).
 3. Mittels `cd [Pfad]` in das Verzeichnis wechseln, in welchem das Programm installiert werden soll. Der Aufruf `cd ~` wechselt in das Heimat-(home-)Verzeichnis des aktuellen Benutzers. (ACHTUNG: Der Benutzer muß in dem Ziel-Verzeichnis Schreibrechte besitzen.)
 4. Durch den Aufruf `tar xvf /a/simupp.tar` wird das Programm in das Unterverzeichnis `simuPP` des aktuellen Verzeichnisses installiert (eventuell ist der Befehl `tar xvf /a/SIMUPP.TAR` einzugeben).
 5. Die Diskette kann nun mit `eject` ausgeworfen werden.
 6. Zum Start der Simulation mit dem Befehl `cd [Pfad]/simuPP` bzw. `cd ~/simuPP` in das Programmverzeichnis wechseln und dort `simuPP` eingeben.

- Der Installationsrechner besitzt **kein** Diskettenlaufwerk. Es wird dann ein Rechner im Netz benötigt, der ein solches Laufwerk besitzt. Der Name dieses Rechners wird im folgenden mit `[Rechnername]` bezeichnet.

Das Vorgehen ähnelt dem zuvor beschriebenen Fall, so daß nur die zusätzlichen Schritte erläutert werden.

1. Starte ein Kommandozeilenfenster auf dem Rechner ohne Diskettenlaufwerk. Einlegen der Diskette in das Laufwerk des Rechners `[Rechnername]`. Um Zugriff auf das Laufwerk zu erhalten mittels `rlogin [Rechnername]` auf den Computer mit Laufwerk „einloggen“, heißt der Rechner z.B. `wald`, so ist `rlogin wald` einzugeben.
2. Diskette durch `volcheck` anmelden und ...
3. durch `cd [Pfad]` in das gewünschte Verzeichnis wechseln.
4. Eingabe von `tar xvf /a/simupp.tar` (bzw. `tar xvf /a/SIMUPP.TAR`), um die Installation des Programmes durchzuführen.

5. Auswurf der Diskette mit `eject`.
6. Durch Eingabe von `logout` den Rechner [Rechnername] wieder verlassen.
7. Zum Start der Simulation mit dem Befehl `cd [Pfad]/simuPP` in das Programmverzeichnis wechseln, und dort `simuPP` eingeben.

(HINWEIS: Das Programm sollte ohne größere Modifikationen auch auf Linux-Rechnern benutzt werden können – der Start des Programms auf einem Rechner mit der Linux-Distribution „S.u.S.E. Linux 5.3“ war ohne Änderungen des Quelltextes möglich.)

2) Bedienungshinweise. Nach dem Start des Programms erhält der Benutzer durch anklicken des `Hilfe`-Buttons mit der linken Maustaste die möglichen Hilfethemen aufgelistet. Bewegt man nun die Maus auf eines der fünf Themen, so öffnet ein Klick mit der linken Maustaste ein Fenster mit dem gewünschten Text. Diese Themen haben folgende Inhalte:

1. Bedienung: Gibt Hinweise zur Benutzung der Maus im Simulationsprogramm und bei der Verwendung des Editors (um eigene Funktionsdateien zu erstellen).
2. Aktionen: Erklärt die Aufgaben der im Aktionenfeld angeordneten Buttons.
3. Parameter: Erläutert die Bedeutung der Parameter, die vom Benutzer übergeben werden.
4. Funktionsweise: Gibt die theoretischen Grundlagen des Programms wieder. Weiter wird die Vorgehensweise zur Erzeugung eines Punkt-Prozesses sowie der Darstellung (graphisch/tabellarisch) dargelegt.
5. Definition von Funktionen: Liefert Hinweise für die Erstellung eigener Definitionsdateien von Funktionen.

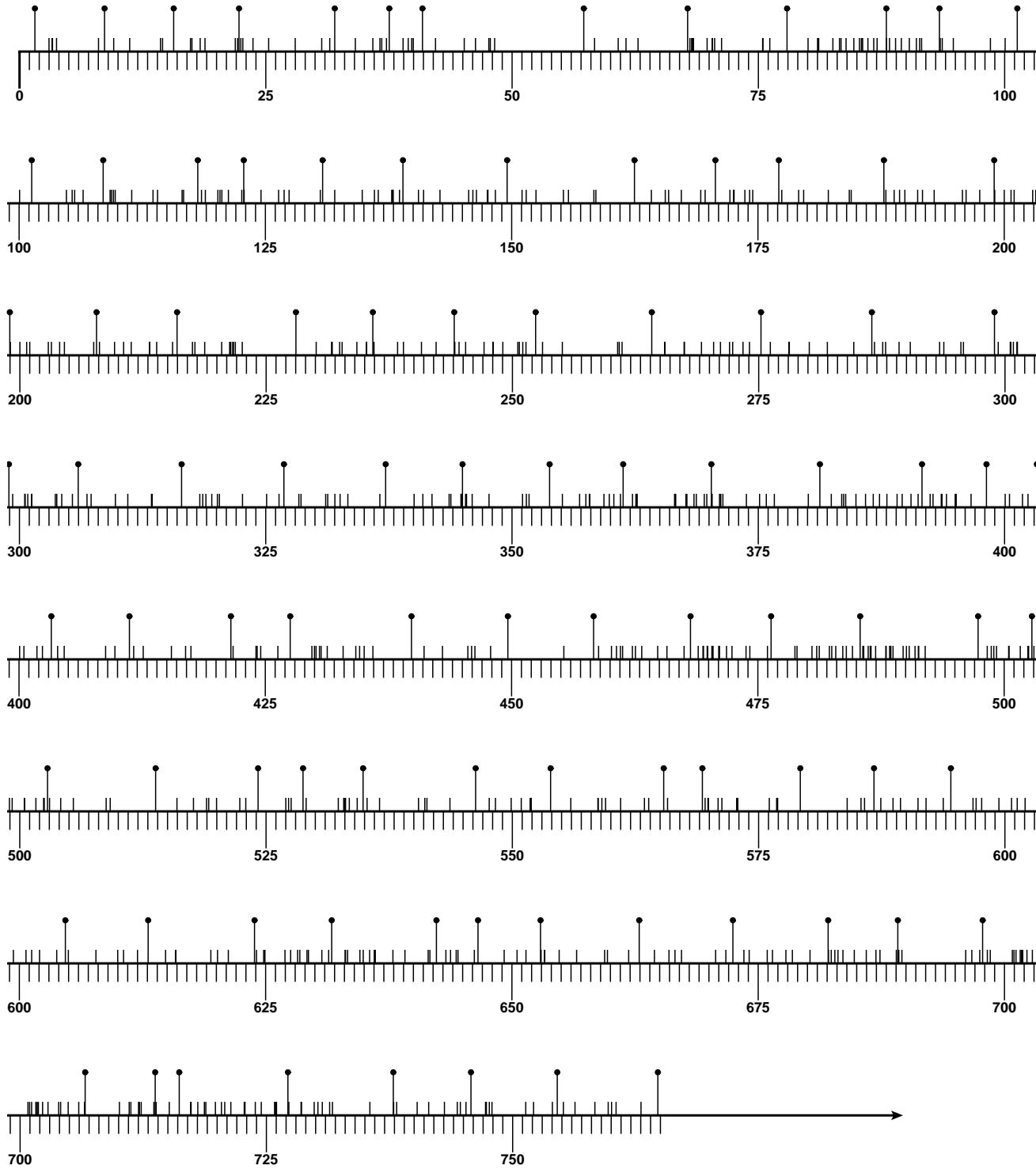
Die Funktionen können in jedem beliebigen Editor erstellt werden. Es ist lediglich zu beachten, daß C-Syntax genutzt wird und die Datei einen Namen der Form `<Name>.fkt` erhält. Ferner muß diese im Verzeichnis `simuPP` gespeichert werden, damit diese Datei genutzt werden kann. Man beachte die Meldungen nach Aufruf des Programms im Kommandozeilenfenster, hier werden auch die verfügbaren Funktionsdateien aufgelistet. Eine aktuelle Übersicht über die verfügbaren Funktionsdateien erhält man durch Eingabe von `ls *.fkt` im Kommandozeilenfenster (Basisverzeichnis: `simuPP`)

Das Programm kann durch Anwahl des Buttons `Ende` beendet werden.

3) Beispiel für die Realisation eines Punkt-Prozesses. Zoomstufe: $\frac{1}{16}$, $\Lambda = 1$, $A = 10$

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-|t|)$$

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp\left(\frac{10-x}{5}\right) & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$$



A4. Quellcodes

1) **C-Programm.** Die benötigten Berechnungen nimmt das folgende C-Programm vor:

```

/* Simulation von Punkt-Prozessen mit beschränktem Speicher.
Dieser Teil erzeugt zufällig die Punkte eines Poisson-Prozesses auf der
positiven reellen Achse und wählt diese nach vorgegebenen Schema aus.
Die so erzeugten Punkte werden in die Datei ??? geschrieben. */
/* C-Programm-Datei: simuPP/progs/simu_bsd.c */
/* Übersetzen mit "gcc -lm -O -W -ansi simu_BSD.c" */

/* Hinzuladen von Funktionen ... */
#include <stdio.h>          /* ... zur Ein-/Ausgabe. */
#include <stdlib.h>          /* ... fuer Datentypen. */
#include <stdio.h>          /* ... fuer Dateioperationen. */
#include <time.h>           /* ... fuer Zeit-/Datumsoperationen. */
#include <math.h>            /* ... fuer mathematische Operationen. */
#include "function.h"        /* Datei mit Definition der Funktionen "phi" und "h",*/
                           /* diese Datei ist eine temporaere Kopie einer      */
                           /* Funktionsdatei [Name].fkt (durch simuPP erstellt).*/

/*----- Strukturen definieren -----*/
typedef struct markPkt    /* Strukturdefinition, die die noetigen Informationen
                           füer Punkte des Poisson-Prozesses beinhaltet. */
{
    double abstand;        /* Abstand zum vorherigen Punkt. */
    unsigned char marke;   /* Marke des Punktes:
                           = 0 -> gehört NICHT zum konstruierten Prozeß
                           > 0 -> gehört zum konstruierten Prozeß. */
    struct markPkt *pre;   /* Zeiger auf vorhergehenden Punkt. */
    struct markPkt *next;  /* Zeiger auf nachfolgenden Punkt. */
} markierterPunkt;         /* Erkläre Typ "markierterPunkt" als Struktur vom Typ
                           "markPkt". */

/* Die folgenden Funktionen sollen dazu dienen, die erste Zufallszahl wirklich
zufällig zu wählen, ohne zusätzliche Initialisierung ist Folge der Zufalls-
zahlen ansonsten stets gleich; hier geschieht dies mit der aktuellen Zeit.*/
int sekunden()             /* Extrahiert Sekunden aus der */
{                           /* aktuellen Systemzeit. */
    long zeitOhneSek, zeitSek;

```

```

zeitOhneSek = (int)(time(&zeitSek)/60);
return(time(&zeitSek)-zeitOhneSek*60);
} /*== ENDE "int sekunden" ==*/



int minuten() /* Extrahiert Minuten aus der */
{ /* aktuellen Systemzeit. */
long zeitOhneMin, zeitMin;

zeitOhneMin = (int)((time(&zeitMin)-sekunden())/60)/60;
return((time(&zeitMin)-sekunden())/60-zeitOhneMin*60);
} /*== ENDE "int minuten" ==*/



int stunden() /* Extrahiert Stunden aus der */
{ /* aktuellen Systemzeit. */
long zeitOhneStd, zeitStd;

zeitOhneStd = (int)((((time(&zeitStd)-sekunden())/60)-minuten())/60)/24;
return(((time(&zeitStd)-sekunden())/60-minuten())/60-zeitOhneStd*24+1);
} /*== ENDE "int stunden" ==*/



/* Funktionen zur Erzeugung eines Punkt-Prozesses durch ausdünnen eines
Poisson-Prozesses der Intensität LAMBDA. */



double exponentialVert() /* Gemäß Statistik-Skript Satz 26.4:
{ /* liefert Exp(LAMBDA)-verteilten Zufallswert.
double Wert; /* Variable zur Zwischenspeicherung des berechneten Wertes. */

Wert = (-1)*log((double) (1-drnd48()))/LAMBDA; /* Berechnung eines gemaess
Exp(LAMBDA)-verteilten
Punktes, schreibe in
Variable "Wert". */
return(Wert); /* bei erreichen dieser Stelle liefert die Funktion
"exponentialVert" den Wert der Variable "Wert" zurueck. */
} /*== ENDE "double exponentialVert" ==*/



double integralN(markierterPunkt *aktuellerPunkt) /* berechnet das Integral */
{ /* über h(t-s) bezüglich */
/* N(ds) in (0,t). */
markierterPunkt *hilfsPunkt; /* bei der Berechnung des Integrals
benoetigter Hilfspunkt. */
double abstandHilfsAktPkt = 0; /* speichere den Abstand des Hilfspunkts
vom aktuellen Punkt in dieser Variable.*/
double hgesamt = 0; /* Variable fuer den Gesamt-Wert des
Integrals. */

hilfsPunkt = aktuellerPunkt; /* setze den aktuellen Punkt als Hilfspunkt.*/

```



```

/* erzeuge solange Punkte, wie die maximale Zahl der bisher erzeugten Punkte
   das gegebene Limit nicht ueberschreitet und die erzeugten Punkte das
   vorgegebene Intervall nicht verlassen. */
if (((aktAnzPkte < maxAnzPkte) || (maxAnzPkte == 0)) &&
    ((*aktPosition < maxPosition) || (maxPosition == 0)))
{
    /* prüfe, ob Speicherplatz zum Erzeugen des nächsten Punktes zur Verfügung
       steht. */
    if ((aktuellerPunkt = (markierterPunkt *) malloc(sizeof(markierterPunkt))) )
        == NULL)
    {
        printf("\nFEHLER: es steht nicht genügend Speicher für diese Zahl
               von Punkten zur Verfügung.\n");
        exit(0);
    }

    /* Zeiger und Variablen initialisieren/ Werte zuordnen. */
    letzterPunkt->next = aktuellerPunkt;           /* der bisher letzte Punkt
                                                       verweist auf den Punkt
                                                       "aktuellerPunkt" als
                                                       nachfolgenden Punkt. */
    aktuellerPunkt->abstand = exponentialVert(); /* erzeuge Abstand des neuen
                                                       Punktes von bisher letzten
                                                       Punkt gemaess Exp(LAMBDA)
                                                       Verteilung. */
    aktuellerPunkt->pre = letzterPunkt;           /* Vorgaenger des neuen
                                                       Punktes ist der bisher
                                                       letzte Punkt. */
    aktuellerPunkt->next = NULL;                  /* der nachfolgende Punkt des
                                                       neuen Punktes existiert
                                                       (noch) nicht. */
    aktuellerPunkt->marke = bestimmeMarke(aktuellerPunkt); /* setzen der Marke
                                                               des aktuellen Punktes. */
    *aktPosition += (long double) aktuellerPunkt->abstand; /* die Position des
                                                               zuletzt erzeugten Punktes
                                                               auf dem Zahlenstrahl ist die
                                                               Position des zuvor erzeugten
                                                               Punktes zuzueglich des
                                                               Abstandes dieser Punkte. */
    aktAnzPkte++;
    printf("%6ld", aktAnzPkte);

    if (aktAnzPkte % 10 == 0)
        printf("\n");
    letzterPunkt = aktuellerPunkt;
}

/* durch (rekursiven) Aufruf von "naechsterPunkt" wird der nachfolgenden
   Punkt konstruiert. */
naechsterPunkt
    (letzterPunkt, aktAnzPkte, maxAnzPkte, aktPosition, maxPosition);
}
} /*==== ENDE "void naechsterPunkt" ===*/

```

```

int schreibePunkt(markierterPunkt *aktuellerPunkt, FILE *datei) /* Speichern
                    der erzeugten Punkte in die Datei "'zieldatei'.dat". */
{
    int tempZustand;           /* temporaere Variable, die den Zustand der
                                Schreiboperation beinhaltet. */
    if ((tempZustand= fprintf(datei, "%1d; %20.8lf\n",
                               aktuellerPunkt->marke, aktuellerPunkt->abstand))
        == -1)                 /* schlaegt die Schreiboperation fehl, */
    return(-1);                /* steige aus Funktion aus; sonst */
    else                      /* rekursiver Aufruf von "schreibePunkt", */
    if (aktuellerPunkt->next != NULL) /* solange noch Punkte vorhanden. */
    {
        tempZustand = schreibePunkt(aktuellerPunkt->next, datei);
        return(tempZustand);
    }
    else
        return(0);
} /*==== ENDE "int schreibePunkt" ===*/
}

int speicherProzess(markierterPunkt *ersterPunkt,      /* Oeffnet die Datei
                    char zieldatei[255],          /* "'zieldatei'.dat", um
                    long double aktPosition)     /* mittels "schreibe Punkt"
                                         /* die einzelnen Punkte
                                         /* darin zu sichern. */
{
    FILE *datei;          /* Variable als Verweis auf die zum Schreiben geoeffnete Datei */
    int tempZustand;       /* wie in Funktion "schreibePunkt". */

    datei = fopen(zieldatei, "w"); /* oeffnen der Datei "'zieldatei'" zum schreiben.*/

    if (datei == NULL)    /* War das Oeffnen der Datei erfolglos, so liefere den Wert */
        return(-1);        /* "-1" zurueck, sonst: */
    else                  /* schreibe Werte in die geoeffnete Datei. */
    {
        if ((tempZustand
              = fprintf(datei, "PUNKT-PROZESS (Marke; Zwischenabstand)\n")) == -1)
            return(-1);        /* Kopfzeile schreiben. */
        else if ((tempZustand = fprintf(datei, "%Lf\n", aktPosition)) == -1)
            return(-1);        /* Schreibe die Position des letzten Punktes in die Datei. */
        else
        {
            tempZustand = schreibePunkt(ersterPunkt, datei); /* schreibe (rekursiv) die */
            if (tempZustand == -1)                            /* Punkte in die Datei. */
                return(tempZustand);
        }

        if ((tempZustand = fprintf(datei, "ENDE\n")) == -1) /* Als Markierung des */
            return(-1);        /* Endes der Datei: "ENDE".*/
    }
}

```

```

fclose(datei);      /* Schliesse die Datei. */          */

return(0); /* die Schreiboperation war erfolgreich, gebe den Wert "0" zurueck. */
}

} /*==== ENDE "int speicherProzess" ===*/
}

/******
***** Hauptprogramm *****/
*****



main(int argc, char *argv[], char *envp[])
{
    /*---- Konstante Vorgaben ----*/
    long double maxPosition = 0; /* (0,maxWert]=Konstr.intervall,=0: bel. lang. */
    long int maxAnzPkte = 0;      /* Zahl der zu konstr. Punkte,=0: bel. viele. */
    char zieldatei[1024] = "";   /* Zieldatei fuer den erzeugten Prozeß. */

    /*---- Varablen Deklaration ----*/
    long double aktPosition = 0; /* Summe der Abstaende. */
    long int aktAnzPkte = 0;     /* Zahl der bisher konstruierten Punkte. */
    markierterPunkt *ersterPunkt; /* Ausgezeichnete Punkte eines Punkt-Prozesses: */
    markierterPunkt *letzterPunkt; /* erster und letzter Punkt. */
    int tempZustand;           /* temporaere Zustandsvariable. */

    /* Folge der Zufallszahlen (mittels Uhrzeit) initialisieren. */
    srand48(stunden()*minuten()*sekunden());

    /* pruefe, ob Speicherplatz zum Erzeugen der Punktliste zu Verfuegung steht. */
    if ((ersterPunkt = (markierterPunkt *) malloc(sizeof(markierterPunkt))) )
        == NULL)
    {
        printf("\nFEHLER: kein Speicher fuer die Punktliste verfuegbar.\n");
        exit(0);
    }

    /* Zeiger und Variablen initialisieren. */
    maxPosition = (long double) atof(argv[1]); /* Position aller konstruierten
                                                zwischen 0 und maxPosition. */
    maxAnzPkte = (long int) atof(argv[2]);    /* erzeuge hoechstens maxAnzPkte
                                                Punkte. */
    strcpy(zieldatei, argv[3]);                /* Ziel fuer die Daten: */
    strcat(zieldatei, ".dat");                 /* ''zieldatei'.dat''. */

    ersterPunkt->abstand = 0;                  /* initialisiere die
                                                Komponenten des ersten
                                                Punktes. */
    ersterPunkt->marke = 0;
    ersterPunkt->pre = NULL;
    ersterPunkt->next = NULL;
    letzterPunkt = ersterPunkt;
}

```

```
/* ersten Punkt konstruieren. */  
ersterPunkt->abstand = exponentialVert();  
ersterPunkt->marke = bestimmeMarke(ersterPunkt);  
aktPosition = (long double) ersterPunkt->abstand;  
aktAnzPkte++;  
printf("%6ld", aktAnzPkte);  
  
/* zweiten Punkt konstruieren, da sich diese Funktion rekursiv wieder aufruft,  
werden durch diesen Aufruf alle weiteren Punkte konstruiert. */  
naechsterPunkt  
(letzterPunkt, aktAnzPkte, maxAnzPkte, &aktPosition, maxPosition);  
  
/* speichern des erzeugten Punkt-Prozesses. */  
if ((tempZustand = speicherProzess(ersterPunkt, zieldatei, aktPosition))  
    == -1)  
    printf("\nSpeicherung der erzeugten Werte in \"%s\" fehlgeschlagen!\n");  
else  
    printf("\nDie erzeugten Werte wurden in die Datei\n  \"%s\"\ngeschrieben.\n",  
          zieldatei);  
  
return(0);  
} /*==== ENDE "main" ====*/
```

2) *Tcl/Tk-Script.* Die Benutzerschnittstelle und Ausgabe der Punkte wurde in der Script-Sprache Tcl/Tk realisiert:

```
#!/bin/sh
##### Tcl/Tk-Script: simuPP/progs/simuPP #####
# starte tcl/tk-Interpreter \
exec wish "$0" "$@"

##### Hauptfenster, von dem alle Funktionen aus angewählt werden #####
eval destroy [winfo child .]
wm title . "Simulation von Punkt-Prozessen"
wm iconname . "Simulation PP"
wm resizable . 0 0

set tk_strictMotif 1
set quelldatei "PktProz"
set einheit 128
set maxAnzPkte 100
set maxPosition 100
set fenster 0
set ausgabe .ausgaben.text

if {$argc == 1} {
    set quelldatei [lindex $argv 0]
}

#---- Aktionen ----#
frame .aktionen -borderwidth 2 -relief groove
pack .aktionen -side left -anchor nw -padx 4m -pady 4m

label .aktionen.kopfzeile -text "AKTIONEN." \
    -font -*-Helvetica-Bold-R-Normal---180-*-*-**-*
pack .aktionen.kopfzeile -side top -anchor nw -padx 4m -pady 4m

label .aktionen.zwtext1 -text ""
button .aktionen.fktBearb -text "Bearbeite\nFunktionen" -width 13 \
    -command {exec textedit $quelldatei.fkt &}
button .aktionen.bspFkt -text "Beispiel für\nFunktionen" -width 13 \
    -command {source [file join hilfe/fktbsp.hlp]}
button .aktionen.uebersetzen -text "Übersetzen" -width 13 \
    -command {$ausgabe configure -state normal
        $ausgabe delete 0.0 end
        if {[file exists $quelldatei.fkt]} {
            $ausgabe insert end "Bereite Erstellung eines Punkt-Prozesses\
                mit den in\n\\ \\ \"$quelldatei.fkt\"\ngegebenen Funktionen\
                vor - bitte warten ..."
            update
            $ausgabe insert end [file copy -force \
                $quelldatei.fkt progs/function.h]
            if {[catch {exec gcc -lm -O -W progs/simu_bsd.c}] == 0} {
                $ausgabe insert end [file delete progs/function.h]
                file rename -force a.out $quelldatei.exe
                exec chmod a+x $quelldatei.exe
            }
        }
    }
```

```

        $ausgabe insert end "\n\nBeendet."
    } else {
        $ausgabe insert end "\n\nBei der Übersetzung ist ein Fehler\
        aufgetreten!\n
        \nPrüfen Sie, ob die Funktionen phi und h korrekt\
        definiert\ nwurden."
    }
    $ausgabe see end
} else {
    $ausgabe insert end "\Übersetzen.\n\
    \nFEHLER: Die Datei \"\$quelledatei.fkt\" existiert nicht!"
}
$ausgabe configure -state disabled}

label .aktionen.zwtext2 -text ""
button .aktionen.werteErzeugen -text "Erzeuge Punkte\ndes Prozesses" -width 13\
-command {$ausgabe configure -state normal
    $ausgabe delete 0.0 end
    if {[string match "" [string trim $maxAnzPkte 0123456789]] &&
        [string match "" [string trim $maxPosition 0123456789]]} {
        if {[string match "" $maxAnzPkte]} {
            set maxAnzPkte 0
        if {[string match "" $maxPosition]} {
            set maxPosition 0
        if {($maxAnzPkte == 0) && ($maxPosition == 0)} {
            $ausgabe insert end "Erzeuge Punkte des Prozesses.\n\
            \nFEHLER: Die maximale Anzahl der Punkte und rechte\
            \nIntervallbegrenzung ist \"0\"."
        } else {
            if {[file exists $quelledatei.exe]} {
                $ausgabe insert end\
                    "Erzeuge Punkt-Prozeß - bitte warten ... \n"
                update
                $ausgabe insert end\
                    [exec $quelledatei.exe $maxPosition $maxAnzPkte $quelledatei]
                $ausgabe insert end "\n\nBeendet."
            } else {
                $ausgabe insert end "Erzeuge Punkt-Prozeß.\n\
                \nFEHLER: Die Datei \"\$quelledatei.exe\" existiert nicht!\\
                \nBenutze \"Übersetzen\", um diese Datei zu erzeugen."
            }
            $ausgabe see end
        }
    } else {
        $ausgabe insert end "Erzeuge Punkte des Prozesses.\n\
        \nFEHLER: Die maximale Anzahl der Punkte und/ oder die rechte\
        \nIntervallbegrenzung ist keine natürliche Zahl."
    }
    $ausgabe configure -state disabled}

label .aktionen.zwtext3 -text "\nAusgabe des\nPunkt-Prozesses" -justify left
button .aktionen.graphisch -text "auf Zahlenstrahl" -width 13\
-command {$ausgabe configure -state normal
    $ausgabe delete 0.0 end
    if {[file exists $quelledatei.dat]} {
        $ausgabe insert end "Ausgabe des Punkt-Prozesses aus\n\

```

```

    \ \ \"$quelldatei.dat\"\
    \n- bitte warten ... \n"
update
graphAusgabe $einheit $quelldatei $ausgabe
$ausgabe insert end "\n\nBeendet."
$ausgabe see end
} else {
$ausgabe insert end \
"Ausgabe des Punkt-Prozesses auf Zahlenstrahl.\n\
\nFEHLER: Die Datei \"$quelldatei.dat\" existiert nicht!"
}
$ausgabe configure -state disabled
button .aktionen.tabelle -text "in Werte-Tabelle" -width 13\
-command {$ausgabe configure -state normal
$ausgabe delete 0.0 end
if {[file exists $quelldatei.dat]} {
$ausgabe insert end "Ausgabe der Werteliste aus\n\
\ \"$quelldatei.dat\"\
\n- bitte warten ..."
update
werteListe $quelldatei $ausgabe
$ausgabe insert end "\n\nBeendet."
$ausgabe see end
} else {
$ausgabe insert end \
"Ausgabe des Punkt-Prozesses in Werte-Tabelle.\n\
\nFEHLER: Die Datei \"$quelldatei.dat\" existiert nicht!"
}
$ausgabe configure -state disabled}
label .aktionen.zwtext4 -text ""
button .aktionen.hilfe -text "Hilfe" -width 13\
-command {hilfe $ausgabe}
pack .aktionen.zwtext1 .aktionen.fktBearb .aktionen.bspFkt\
.aktionen.uebersetzen .aktionen.zwtext2 .aktionen.werteErzeugen\
.aktionen.zwtext3 .aktionen.graphisch .aktionen.tabelle\
.aktionen.zwtext4 .aktionen.hilfe -side top -anchor nw -padx 4m

button .aktionen.ende -text "Ende" -command exit -width 13
pack .aktionen.ende -side top -anchor nw -padx 4m -pady 4m

#-----Parameter -----#
frame .parameter -borderwidth 2 -relief groove
pack .parameter -side top -anchor nw -padx 4m -pady 4m

# Datei und Übersetzung #
frame .parameter.compPar
pack .parameter.compPar -side left -anchor nw -padx 4m -pady 4m

label .parameter.compPar.kopfzeile -text "PARAMETER."\
-fnt -*-Helvetica-Bold-R-Normal---*180-*-*-*-*-*-
label .parameter.compPar.zwtext1 -text ""
label .parameter.compPar.zwtext2\
-text "1. DATEI\nQuelldatei (ohne Endung \".fkt\", \".dat\"): " -justify left
frame .parameter.compPar.bearbDatei

```

```

label .parameter.compPar.zwtext3 -text "\n2. ERZEUGUNG."
frame .parameter.compPar.maxAnzPkte
label .parameter.compPar.zwtext4\
    -text "und beschränke die Konstruktion auf das"
frame .parameter.compPar.konstrIntervall
pack .parameter.compPar.kopfzeile .parameter.compPar.zwtext1\
    .parameter.compPar.zwtext2 .parameter.compPar.bearbDatei\
    .parameter.compPar.zwtext3 .parameter.compPar.maxAnzPkte\
    .parameter.compPar.zwtext4 .parameter.compPar.konstrIntervall\
    -side top -anchor w

entry .parameter.compPar.bearbDatei.wert -width 37 -textvariable quelldatei\
    -justify left -xscrollcommand ".parameter.compPar.bearbDatei.xScroll set"\\
    -highlightthickness 0
scrollbar .parameter.compPar.bearbDatei.xScroll -relief sunken -orient horiz\
    -command ".parameter.compPar.bearbDatei.wert xvview" -width 9
pack .parameter.compPar.bearbDatei.wert .parameter.compPar.bearbDatei.xScroll\
    -side top -fill x

label .parameter.compPar.maxAnzPkte.txt1 -text "Erzeuge maximal"
entry .parameter.compPar.maxAnzPkte.wert -width 13 -textvariable maxAnzPkte\
    -justify right -highlightthickness 0
label .parameter.compPar.maxAnzPkte.txt2 -text "Punkte"
pack .parameter.compPar.maxAnzPkte.txt1 .parameter.compPar.maxAnzPkte.wert\
    .parameter.compPar.maxAnzPkte.txt2 -side left

label .parameter.compPar.konstrIntervall.txt1 -text "Intervall (0,"
entry .parameter.compPar.konstrIntervall.wert -width 13\
    -textvariable maxPosition -justify right -highlightthickness 0
label .parameter.compPar.konstrIntervall.txt2 -text "]."
pack .parameter.compPar.konstrIntervall.txt1\
    .parameter.compPar.konstrIntervall.wert\
    .parameter.compPar.konstrIntervall.txt2 -side left

# Zoomstufe #
frame .parameter.graphAus
pack .parameter.graphAus -anchor nw -padx 4m -pady 4m

label .parameter.graphAus.zwtext1 -text "\n3. AUSGABE."
frame .parameter.graphAus.einheit
pack .parameter.graphAus.zwtext1 .parameter.graphAus.einheit -side top\
    -anchor nw

frame .parameter.graphAus.einheit.links
frame .parameter.graphAus.einheit.rechts
pack .parameter.graphAus.einheit.links .parameter.graphAus.einheit.rechts\
    -side left

label .parameter.graphAus.einheit.links.zoomstufe -text "Zoomstufe:"
pack .parameter.graphAus.einheit.links.zoomstufe -side top

foreach i {64 32 16 8 4 2 1} {
    radiobutton .parameter.graphAus.einheit.links.rb$i\
        -text "[format \"%5s \" 1/[expr (128/$i)]]"\

```

```

-variable einheit -relief flat -value $i
pack .parameter.graphAus.einheit.links.rb$i -side top -anchor center
}
foreach i {128 256 512 1024 2048 4096 8192 16384} {
radiobutton .parameter.graphAus.einheit.rechts.rb$i\
-text "[format \"%3s\" [expr ($i/128)]]"\\
-variable einheit -relief flat -value $i
pack .parameter.graphAus.einheit.rechts.rb$i -side top -anchor center
}

#----- Ausgaben -----#
frame .ausgaben
pack .ausgaben -side top -anchor nw -padx 4m -pady 3m

text .ausgaben.text -width 60 -height 13 -wrap char\
-yscrollcommand ".ausgaben.yscroll set"
scrollbar .ausgaben.yscroll -relief sunken -command ".ausgaben.text yview"\\
-width 13
pack .ausgaben.text .ausgaben.yscroll -fill y -side left

.ausgaben.text tag configure big\
-font -*-Helvetica-Bold-R-Normal---120-*-*-**-**-*
.ausgaben.text insert end\
"Simulation von Punkt-Prozessen mit beschränktem Speicher.\n" big
.ausgaben.text insert end "\n\nDieses Programm entstand im Rahmen der\
Diplomarbeit\
\n\"Existenz und Stabilität nichtlinearer Hawkes-Prozesse\" am\
\nInstitut für Mathematische Statistik der Westfälischen\
\nWilhelms-Universität Münster.\n"
.ausgaben.text insert end "\nBetreuer: Prof. Dr. G. Alsmeyer"
.ausgaben.text insert end "\nErstellt von: Jürgen te Vrugt"
.ausgaben.text insert end "\n\nMünster, 1998/1999."
$ausgabe configure -state disabled

##### graphische Ausgabe des Punkt-Prozesses #####
proc graphAusgabe {einheit quelldatei ausgabe} {
    global fenster

    #---- Fenster zur graphischen Werteausgabe erstellen ----#
    catch {destroy .zeigePunkte$fenster}
    toplevel .zeigePunkte$fenster
    wm title .zeigePunkte$fenster "Graphische Ausgabe der Punkte: $quelldatei"
    wm iconname .zeigePunkte$fenster "Graphik"
    # Linux: ...x250 Sun: ...x280
    wm geometry .zeigePunkte$fenster [winfo screenwidth .]x280

    #---- Variablen ----#
    set zaehler 1
    # für Datei-Operationen #
    set datei [open ${quelldatei}.dat r]
    # für Ausgabe #
    set nummer 0

```

```

set maxPosition 0
set xNullpkt 10
set position 0
set bitteWarten 0
set xScrollIncrement 1p
set aktLinienPos $xNullpkt
set aktZeichenPos $xNullpkt

#---- Datei-Kopf auslesen ----#
gets $datei
set maxPosition [string trim [gets $datei]]
set maxPosition [expr ($maxPosition * $einheit)]

#---- Ausgabefenster initialisieren/ Objekte erzeugen ----#
frame .zeigePunkte$fenster.ausgabe
pack .zeigePunkte$fenster.ausgabe

append hScrollBereich "0p 0p " [expr ($maxPosition+2*$xNullpkt+200)] "p 0p"

# Linux: -height 117 Sun: -height 147
canvas .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse\
-height 147 -width [expr ($maxPosition + 8 * $xNullpkt + 200)] \
-relief sunken -borderwidth 2 \
-xscrollcommand ".zeigePunkte$fenster.ausgabe.hscroll set" \
-scrollregion $hScrollBereich
pack .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse

scrollbar .zeigePunkte$fenster.ausgabe.hscroll -orient horiz \
-command ".zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse xvview"
pack .zeigePunkte$fenster.ausgabe.hscroll -fill x

label .zeigePunkte$fenster.bitteWarten -text "Bitte warten . . ."
pack .zeigePunkte$fenster.bitteWarten

# Zeichne Grundlinie #
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line \
${xNullpkt}p 66p ${xNullpkt}p 96p -width 2
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line \
[expr ($xNullpkt-1)]p 66p \
[expr (int ($maxPosition)+$xNullpkt+200)]p 66p -arrow last -width 2
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create text ${xNullpkt}p 103p \
-text [expr ($zaehler-1)]

#---- Einlesen der Daten, Erzeugung eines Zahlenstrahls, ----#
#---- Ausgabe der Punkte auf diesem Zahlenstrahl -----#
while {! [eof $datei]} {
    # Einlesen der Punkte und Marken in die Arrays "abstand()" und marke() #
    set marke($zaehler) [read $datei 1]
    set abstand($zaehler) [gets $datei]
    set abstand($zaehler) [string trim $abstand($zaehler) " ;"]
    set zeile ""

    append zeile $marke($zaehler) $abstand($zaehler)
    if {[string compare $zeile "ENDE"] == 0} {

```

```

set marke($zaehler) -1
set abstand($zaehler) ""
gets $datei
} else {
    # Punkte auf die Achse zeichnen #
    set aktZeichenPos [expr ($aktZeichenPos + ($abstand($zaehler)*$einheit))]
    .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line \
        ${aktZeichenPos}p 66p \
        ${aktZeichenPos}p [expr (55 - $marke($zaehler) * 22)]p
    if {$marke($zaehler) == 1} {
        .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create oval \
            [expr ($aktZeichenPos-2)]p 29p [expr ($aktZeichenPos+2)]p 33p \
            -fill red
        #.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create text \
        # [expr ($aktZeichenPos+.2)]p 33p -text ""
    }

# Skala auf die reellen Achse zeichnen #
while {$aktLinienPos < $aktZeichenPos} {
    if {$einheit >= 1} {
        if {[expr ($einheit * $nummer)] % 2048 == 0} {
            if {$bitteWarten == 0} {
                .zeigePunkte$fenster.bitteWarten configure \
                    -text "Bitte warten ..."
                set bitteWarten 1
            } else {
                .zeigePunkte$fenster.bitteWarten configure -text ""
                set bitteWarten 0
            }
        }
        if {($einheit >= 128) ||
            (($einheit == 64) && ([expr (($nummer+1) % 2)] == 0)) ||
            (($einheit == 32) && ([expr (($nummer+1) % 5)] == 0)) ||
            (($einheit == 16) && ([expr (($nummer+1) % 10)] == 0)) ||
            (($einheit == 8) && ([expr (($nummer+1) % 25)] == 0)) ||
            (($einheit <= 4) && ([expr (($nummer+1) % 50)] == 0))} {
            .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line \
                [expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 66p \
                [expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 96p
            .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create text \
                [expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 103p -text [expr ($nummer+1)]
            $ausgabe insert end [format "%6s" [expr ($nummer+1)]]
            $ausgabe see end
            update
        } elseif {$einheit == 64} {
            .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line \
                [expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 66p \
                [expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 96p
        } elseif {($einheit >= 8) && ($einheit < 64)} {
            .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line \
                [expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 66p \
                [expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 81p
        } elseif {($einheit >= 1) && ($einheit < 8) && \
            ([expr (($nummer+1) % 5)] == 0)} {
    }
}

```

```

.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line\
[expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 66p\
[expr ($aktLinienPos+$einheit)]p 81p
}
if {$einheit >= 64} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line\
[expr ($aktLinienPos + .5 * $einheit)]p 66p\
[expr ($aktLinienPos + .5 * $einheit)]p 85p
if {$einheit >= 256} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create text\
[expr ($aktLinienPos+.5*$einheit)]p 103p -text $nummer.5
}
if {$einheit >= 128} {
for {set tempzaehler 1} {$tempzaehler < 10} {incr tempzaehler} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line\
[expr ($aktLinienPos + ($tempzaehler*.1)*$einheit)]p 66p\
[expr ($aktLinienPos + ($tempzaehler*.1)*$einheit)]p 79p
if {$einheit >= 1024} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create text\
[expr ($aktLinienPos+$tempzaehler*.1*$einheit)]p 103p\
-text $nummer.$tempzaehler
}
}
if {$einheit >= 256} {
for {set tempzaehler 1} {$tempzaehler <= 10}\
{incr tempzaehler} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line\
[expr ($aktLinienPos + ($tempzaehler*.1-.05)*$einheit)]p\
66p\
[expr ($aktLinienPos + ($tempzaehler*.1-.05)*$einheit)]p\
75p
if {$einheit >= 4096} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create text\
[expr ($aktLinienPos+($tempzaehler*.1-.05)*$einheit)]p\
103p -text [expr ($nummer+$tempzaehler*.1-.05)]
}
}
if {$einheit >= 1024} {
for {set tempzaehler 1} {$tempzaehler < 100}\
{incr tempzaehler} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line\
[expr ($aktLinienPos + ($tempzaehler*.01)*$einheit)]p\
66p\
[expr ($aktLinienPos + ($tempzaehler*.01)*$einheit)]p 72p
if {$einheit >= 16384} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create text\
[expr ($aktLinienPos+$tempzaehler*.01*$einheit)]p 103p\
-text [expr ($nummer+$tempzaehler*.01)]
}
}
if {$einheit >= 4096} {
for {set tempzaehler 1} {$tempzaehler <= 100}\
{incr tempzaehler} {
.zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line\

```

```

        [expr ($aktLinienPos+($tempzaehler*.01-.005)*$einheit)]p\
66p\
        [expr ($aktLinienPos+($tempzaehler*.01-.005)*$einheit)]p\
70p
    }
    if {$einheit >= 16384} {
        for {set tempzaehler 1} {$tempzaehler < 1000}\n
        {incr tempzaehler} {
            .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse create line\
                [expr ($aktLinienPos+($tempzaehler*.001)*$einheit)]p\
66p\
                [expr ($aktLinienPos+($tempzaehler*.001)*$einheit)]p\
68p
        }
    }
}
}
}
}
}
}

set aktLinienPos [expr ($aktLinienPos + $einheit)]

incr nummer
}
}
#
# "zaehler" erhöhen
incr zaehler
}

close $datei

#
destroy .zeigePunkte$fenster.bitteWarten
unset bitteWarten

frame .zeigePunkte$fenster.unten
pack .zeigePunkte$fenster.unten

# Info-Leiste
frame .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste -relief groove -borderwidth 2
pack .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste -side left -padx 7m -pady 3m

if {$einheit >= 128} {
    label .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.auflsg\
        -text "Zoomstufe: [expr ($einheit / 128)]"
} else {
    label .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.auflsg\
        -text "Zoomstufe: 1/[expr (128 / $einheit)]"
}
frame .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte
pack .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.auflsg\
    .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte\

```

```

-side left -padx 17 -anchor w

frame .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1
frame .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2
pack .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1\
     .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2 -side top -anchor w

canvas .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1.symbol\
       -height 38 -width 13
label .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1.zwtext\
      -text "-Punkte des erzeugten Prozesses."
pack .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1.symbol\
     .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1.zwtext\
     -side left -anchor w

.zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1.symbol create line\
  2p 34p 12p 34p
.zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1.symbol create line\
  7p 4p 7p 34p
.zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende1.symbol create oval\
  5p 2p 9p 6p -fill red

canvas .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2.symbol\
       -height 27 -width 13
label .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2.zwtext\
      -text "-nicht ausgewählter Punkt des Poisson-Prozesses."
pack .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2.symbol\
     .zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2.zwtext\
     -side left -anchor w

.zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2.symbol create line\
  2p 19p 12p 19p
.zeigePunkte$fenster.unten.iLeiste.pkte.legende2.symbol create line\
  7p 9p 7p 19p

# Button-Leiste
frame .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste
pack .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste -padx 7m

frame .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.ausgPS
frame .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.befehle
pack .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.ausgPS\
     .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.befehle -side top -padx 5m -pady 1m

button .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.ausgPS.ausschnittPS -width 30\
       -text "Postscript-sichtbarer Bereich"\n
       -command "ausschnittPS .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse\
                  $maxPosition $xNullpkt $quelldatei"
button .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.ausgPS.gesamtPS -width 30\
       -text "Postscript-gesamte Achse"\n
       -command "gesamtPS .zeigePunkte$fenster.ausgabe.reelleAchse $maxPosition\
                  $xNullpkt $quelldatei"

pack .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.ausgPS.ausschnittPS\

```

```

.zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.ausgPS.gesamtPS -side top

button .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.befehle.druckHilfe\
    -text "Postscript Hilfe" -width 14\
    -command "source [file join hilfe/pshilfe.hlp]"
button .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.befehle.fensterSchliessen\
    -text "Schließen" -width 11\
    -command "destroy .zeigePunkte$fenster"
pack .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.befehle.druckHilfe\
    .zeigePunkte$fenster.unten.bLeiste.befehle.fensterSchliessen\
    -side left -padx 1m

incr fenster
}

proc ausschnittPS {canv maxPosition xNullpkt quelldatei} {
    $canv postscript -colormode mono -file $quelldatei.ps\
        -pagewidth 28.0c -pagey 14.85c -rotate 1\
        -width [expr ([lindex [$canv xview] 1]*\
            ($maxPosition+8*$xNullpkt+200)+1)-\
            floor ([lindex [$canv xview] 0]*$maxPosition))]p\
        -x [expr (floor ([lindex [$canv xview] 0]*$maxPosition))]p
    # Parameter fuer:
    # DIN-A4 quer: -pagewidth 28c -pagey 14.85c -rotate 1
    #           -width [...*(...+8*...+200)+1]-...
    # DIN-A4 hoch: -pagewidth 17.2c -pagey 8.6c -rotate 0
    #           -width [...*(...+8*...+200)+1]-...
}

proc gesamtPS {canv maxPosition xNullpkt quelldatei} {
    for {set ausgzaehler 0}\{
        {[expr ($ausgzaehler*1500)] <= [expr ($maxPosition + 8 * $xNullpkt + 200)]}\}
        {incr ausgzaehler} {
            $canv postscript -colormode mono -file $quelldatei.$ausgzaehler.ps\
                -pagewidth 28.0c -pagey 14.85c -rotate 1\
                -width 1536p -x [expr ($ausgzaehler * 1500)]p
    }
    # Parameter fuer:
    # DIN-A4 quer: for {...}{[...*(...*1500)]<=[...*(...+8*...+200)]}
    #           -pagewidth 28c -pagey 14.85c -rotate 1
    #           -width 1536p -x [(...*1500)]p
    # DIN-A4 hoch: for {...}{[...*(...*800)]<=[...*(...+8*...+200)]}
    #           -pagewidth 17.2c -pagey 8.6c -rotate 0
    #           -width 836p -x [(...*800)]p
}

##### Anzeige der einzelnen Werte #####
proc werteListe {quelldatei ausgabe} {
    global fenster

    catch {destroy .liste$fenster}
    toplevel .liste$fenster
    wm title .liste$fenster "Punkte-Liste: $quelldatei"
    wm iconname .liste$fenster "Punkte"
}

```

```
wm positionfrom .liste$fenster program

label .liste$fenster.kopf -anchor w \
    -text "Marke" Position
pack .liste$fenster.kopf

frame .liste$fenster.werte
pack .liste$fenster.werte

text .liste$fenster.werte.text \
    -width 24 -setgrid 1 \
    -yscrollcommand ".liste$fenster.werte.scroll set"
scrollbar .liste$fenster.werte.scroll \
    -command ".liste$fenster.werte.text yview"
pack .liste$fenster.werte.scroll -side right -fill y
pack .liste$fenster.werte.text -fill y

set zaehler 1
set aktPos 0
set datei [open ${quelldatei}.dat r]

gets $datei
gets $datei

while {[eof $datei]} {
    set marke($zaehler) [read $datei 1]
    set abstand($zaehler) [gets $datei]
    set abstand($zaehler) [string trim $abstand($zaehler) " ;"]
    set zeile ""

    append zeile $marke($zaehler) $abstand($zaehler)
    if {[string compare $zeile "ENDE"] == 0} {
        set marke($zaehler) -1
        set abstand($zaehler) ""
        gets $datei
    }

    if {$marke($zaehler) != -1} {
        if {$zaehler > 1} {
            .liste$fenster.werte.text insert end \n
            .liste$fenster.werte.text insert end $marke($zaehler)
            set aktPos [expr ($aktPos + $abstand($zaehler))]
            .liste$fenster.werte.text insert end [format "%22.4f" $aktPos]
        }
    }

    if {($zaehler % 100) == 0} {
        $ausgabe insert end "."
        update
    }

    incr zaehler
}

close $datei
```

```

button .liste$fenster.fensterSchliessen -text "Schließen" \
    -command "destroy .liste$fenster"
pack .liste$fenster.fensterSchliessen

incr fenster
}

#####
# Hilfe #####
proc hilfe {ausgabe} {
    if {[winfo depth $ausgabe] > 1} {
        set bold "-background #43ce80 -relief raised -borderwidth 1"
        set normal "-background {} -relief flat"
    } else {
        set bold "-foreground white -background black"
        set normal "-foreground {} -background {}"
    }

    $ausgabe configure -state normal

    $ausgabe delete 0.0 end
    $ausgabe tag configure big \
        -font -*-Helvetica-Bold-R-Normal---180-*-*-**-*-
    $ausgabe insert end "Hilfe.\n" big
    $ausgabe insert end "Simulation eines Punkt-Prozesses mit beschränktem\
                           Speicher\nauf der positiven reellen Achse.\n\n"
    $ausgabe insert end "1. Bedienung\n" bedienung
    $ausgabe insert end "2. Aktionen\n" action
    $ausgabe insert end "3. Parameter\n" para
    $ausgabe insert end "4. Funktionsweise\n" fktsweise
    $ausgabe insert end "5. Definition von Funktionen\n" fktdef
    $ausgabe insert end "\nAuswahl eines Themas durch anklicken mit der\
                           linken\nMaustaste."
}

foreach tag {bedienung action para fktsweise fktdef} {
    $ausgabe tag bind $tag <Any-Enter> "$ausgabe tag configure $tag $bold"
    $ausgabe tag bind $tag <Any-Leave> "$ausgabe tag configure $tag $normal"
}

$ausgabe tag bind bedienung <1> {source [file join hilfe/bedienng.hlp]}
$ausgabe tag bind action <1> {source [file join hilfe/action.hlp]}
$ausgabe tag bind para <1> {source [file join hilfe/para.hlp]}
$ausgabe tag bind fktsweise <1> {source [file join hilfe/fktsweis.hlp]}
$ausgabe tag bind fktdef <1> {source [file join hilfe/fktdef.hlp]}

$ausgabe configure -state disabled
}

```

3) Beispiel für eine Funktionsdatei. Durch das C-Programm wird eine Funktionsdatei importiert, die die Definitionen von h und ϕ (im Programmtext mit „phi“ bezeichnet) beinhaltet. Hier nun ein Beispiel für eine solche Datei. Da diese durch ein C-Programm verarbeitet wird, muß die Datei dem Formalismus von C-Programmen genügen.

```
double LAMBDA = 1;          /* Wert, durch den die Funktion phi beschränkt wird */

double phi(double x)
{
    double wertvonphi = 0;

    if ((-50 <= x) && (x <= 50))
        wertvonphi = (50 + x)/100;
    else
        wertvonphi = 0;

    return(wertvonphi);
}

double A = 100;             /* Gedächtnis der Länge A: Der Träger von h muß eine
                           Teilmenge von [0, A] sein.
                           A=0: oo-langes Gedächtnis */
```

```
double h(double x)
{
    double wertvonh = 0;

    if (x <= 50)
        wertvonh = exp((50-x)/25);
    else if ((50 < x) && (x <= A))
        wertvonh = -exp((50-x)/25);
    else
        wertvonh = 0;

    return(wertvonh);
}
```

4) Funktionsdateien zum Programm. Es folgt eine Auflistung der Funktionsdateien, die unmittelbar nach Installation des Programms verfügbar und im Verzeichnis `simuPP` zu finden sind.

Zur Erinnerung: $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ und $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (siehe auch Abschnitt 3).

Datei: `bsp01.fkt` $\Lambda = 1, \phi \equiv 1, A = 0, h \equiv 0$ (alle Punkte des Poisson-Prozesses werden mit der Marke 1 versehen)

Datei: `bsp02.fkt` $\Lambda = 1, \phi \equiv 0, A = 0, h \equiv 0$ (alle Punkte des Poisson-Prozesses werden mit der Marke 0 versehen)

Datei: `bsp03.fkt` $\Lambda = 1, \phi(t) = \begin{cases} \exp(t) & \text{für } t \leq 0 \\ \exp(-t) & \text{für } t > 0 \end{cases},$

$$A = 10, h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{10-x}{5}\right) & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$$

Datei: `bsp04.fkt` ($\hat{=} \text{PktProz.fkt}$) $\Lambda = 1, \phi(t) = \begin{cases} \frac{50+t}{100} & \text{für } -50 \leq t \leq 50 \\ 0 & \text{für } t < -50 \text{ oder } t > 50 \end{cases},$

$$A = 50, h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{50-x}{25}\right) & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$$

Datei: `bsp05.fkt` ($\hat{=} \text{beispiel.fkt}$) $\Lambda = 1, \phi(t) = \begin{cases} \frac{50+t}{100} & \text{für } -50 \leq t \leq 50 \\ 0 & \text{für } t < -50 \text{ oder } t > 50 \end{cases},$

$$A = 100, h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{50-x}{25}\right) & \text{für } x \leq 50 \\ -\exp\left(\frac{50-x}{25}\right) & \text{für } 50 < x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$$

Datei: `bsp06.fkt` $\Lambda = 1, \phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 1 \\ 0.1 & \text{für } t < 1 \end{cases},$

$$A = \infty, h(x) = \exp(-x)$$

Datei: `bsp07.fkt` $\Lambda = 1, \phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 50 \\ 0.1 & \text{für } t < 50 \end{cases},$

$$A = 10, h(x) = \begin{cases} 10 - x & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$$

Datei: `bsp08.fkt` $\Lambda = 1, \phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 7 \\ 0.1 & \text{für } t < 7 \end{cases},$

$$A = 10, h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$$

Datei: `bsp09.fkt` $\Lambda = 7.389, \phi(t) = \begin{cases} \exp(|t|) & \text{für } -2 \leq t \leq 2 \\ \exp(2) & \text{für } t < -2 \text{ oder } t > 2 \end{cases},$

$$A = \infty, h(x) = 0.1 \exp(-x)$$

Datei: `bsp10.fkt` $\Lambda = 7.389, \phi(t) = \begin{cases} \exp(|t|) & \text{für } -2 \leq t \leq 2 \\ \exp(2) & \text{für } t < -2 \text{ oder } t > 2 \end{cases},$
 $A = 1, h(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$

Datei: `bsp11.fkt` $\Lambda = 7.389, \phi(t) = \begin{cases} \exp(|t|) & \text{für } -2 \leq t \leq 2 \\ \exp(2) & \text{für } t < -2 \text{ oder } t > 2 \end{cases},$
 $A = 0.1, h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$

Datei: `bsp12.fkt` $\Lambda = 1.5, \phi(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{für } t \leq 0.1 \\ t & \text{für } 0.1 < t \leq 1.5 \\ 1.5 & \text{für } t > 1.5 \end{cases},$
 $A = \infty, h(x) = \exp(-x)$

Datei: `bsp13.fkt` $\Lambda = 1.5, \phi(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{für } t \leq 0.1 \\ t & \text{für } 0.1 < t \leq 1.5 \\ 1.5 & \text{für } t > 1.5 \end{cases},$
 $A = 1, h(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$

Datei: `bsp14.fkt` $\Lambda = 1.5, \phi(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{für } t \leq 0.1 \\ t & \text{für } 0.1 < t \leq 1.5 \\ 1.5 & \text{für } t > 1.5 \end{cases},$
 $A = 1, h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$

Datei: `bsp15.fkt` $\Lambda = 1.5, \phi(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{für } t \leq 0.1 \\ t & \text{für } 0.1 < t \leq 1.5 \\ 1.5 & \text{für } t > 1.5 \end{cases},$
 $A = 3.141592654, h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$

Datei: `bsp16.fkt` $\Lambda = 1, \phi(t) = \exp(-|t|),$
 $A = 10, h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{10-x}{5}\right) & \text{für } x \leq A \\ 0 & \text{für } x > A \end{cases}$
(siehe auch Unterabschnitt 3))

Literaturverzeichnis

- [Als96] Gerold Alsmeyer. *Skript zur Vorlesung Stochastische Prozesse*. Universität Münster, 1996.
- [Als98] Gerold Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30. Universität Münster, 1998.
- [Asm87] Søren Asmussen. *Applied Probability and Queues*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Chichester, 1987.
- [Bau92] Heinz Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter Berlin, 1992.
- [BB94] François Baccelli and Pierre Brémaud. *Elements of Queueing Theory*. Springer Verlag Berlin, 1994.
- [BFL90] Andreas Brandt, Peter Franken, and Bernd Lisek. *Stationary Stochastic Models*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Chichester, 1990.
- [BM96] Pierre Brémaud and Laurent Massoulié. Stability of nonlinear Hawkes Processes. *The Annals of Probability*, 24(3):1563–1588, 1996.
- [Bré81] Pierre Brémaud. *Point Processes and Queues*. Springer Verlag New York, 1981.
- [DVJ88] D.J. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer Verlag New York, 1988.
- [For76] Otto Forster. *Analysis 1 Differential- und Integralrechnung in einer Veränderlichen*. Grundkurs Mathematik, 4. Auflage. Verlag Vieweg Braunschweig, 1976.
- [Jac79] Jean Jacod. *Calcul stochastique et problèmes de martingales*. Springer Verlag Berlin, 1979.
- [Kin93] J.F.C. Kingman. *Poisson Processes*. Oxford Studies in Probability. Clarendorn Press Oxford, 1993.
- [Nev65] J. Neveu. *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. Holden-Day San Francisco, 1965.

Symbolverzeichnis

$\mathfrak{B}(\cdot)$	Borelsche σ -Algebra auf \cdot ; S. 2
$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^d, \mathfrak{B}^+, \mathfrak{B}^-$	Borelsche σ -Algebra auf $\mathbb{R}, \mathbb{R}^d, [0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0]$; S. 2
(D1)	Grundform der Dynamiken im univariaten Fall; S.12
(D2)	Grundform der Dynamiken im K -variaten Fall; S. 13
$(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}}$	Filtration eines (markierten) Punkt-Prozesses ; S. 4
$(\mathcal{F}_t^N)_{t \in \mathbb{R}}$	Filtration eines (markierten) Punkt-Prozesses N ; S. 4
$(\mathcal{F}_t^U)_{t \in \mathbb{R}}$	Filtration der Marken $(U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eines markierten Punkt-Prozesses N ; S. 4
(M, \mathcal{M})	meßbarer Raum der Radon-Maße auf \mathbb{R} ; S. 14
(M_E, \mathcal{M}_E)	meßbarer Raum der Radon-Maße auf E ; S. 14
(M'_E, \mathcal{M}'_E)	meßbarer Raum der ganzzahligen Radon-Maße auf E ; S. 14
(M_k, \mathcal{M}_k)	meßbarer Raum der Radon-Maße auf \mathbb{R}^k ; S. 14
$(M(\mathbb{R}^k), \mathcal{M}(\mathbb{R}^k))$	meßbarer Raum der Radon-Maße auf \mathbb{R}^k ; S. 14
(M'_k, \mathcal{M}'_k)	meßbarer Raum der ganzzahligen Radon-Maße auf \mathbb{R}^k ; S. 14
$(M(X), \mathcal{M}(X))$	meßbarer Raum der Radon-Maße auf X ; S. 14
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen ohne (mit) Null; S. 2
\mathcal{N}_0	Menge aller Punkt-Prozesse N , für die (10.5) f.s. lokal integrierbar auf $[0, \infty)$ ist; S. 51
\mathcal{N}_0^K	Menge aller K -variaten Punkt-Prozesse N mit Intensität $(\lambda(t))_{t \in \mathbb{R}}$, für die $t \mapsto \mathbf{E}(\lambda_i(t) \mathcal{F}_0^N)$ f.s. lokal integrierbar auf $[0, \infty)$ ist ($1 \leq i \leq K$); S. 85
$\bar{\mathbb{N}}$	$= \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; S.2
N^\pm	Einschränkung des Punkt-Prozesses N auf \mathbb{R}^\pm ; S. 4, 7
(\mathcal{P}_-)	Anfangsbedingung; S.15
$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$	σ -Algebra der \mathcal{F}_t -vorhersagbaren Ereignisse (Kurzschreibweise); S. 5
$\mathcal{P}((\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}})$	σ -Algebra der \mathcal{F}_t -vorhersagbaren Ereignisse; S. 5
$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathcal{F}_t)$	σ -Algebra der \mathcal{F}_t -progressiv meßbaren Ereignisse (Kurzschreibweise); S. 5
$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}((\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}})$	σ -Algebra der \mathcal{F}_t -progressiv meßbaren Ereignisse; S. 5
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$	positive bzw. negative reelle Achse inklusive Null; S. 2
$S_u \lambda(t)$	$= \lambda(u + t)$; S.15

$S_t\mu$	Shift-Operator; S.14, 15
(ST1)	erste Bedingung für Stabilität; S.16
(ST2)	zweite Bedingung für Stabilität; S.16
(ST2')	alternative zweite Bedingung für Stabilität; S. 16
S_tN^\pm	$= N((t + \cdot) \cap \mathbb{R}^\pm)$; S. 15

Index

A

(\mathcal{F}_t -) adaptiert 4

Aktivität

neuronale 13

Anfangsbedingung 15

angeregt 13

Anregungs-Funktion 13

Anregungs-Schwelle 13

Anregungsfunktion 13

D

Dynamik 12, 13

auf $[0, \infty)$ 16

mit beschränktem Speicher 38

F

Filtration 4

interne 4, 24

Funktion

anregende 13

Transfer 13

G

Gedächtnis

beschränktes 38

gehemmt 13

H

Hawkes-Prozeß

nichtlinearer 13

multivariater 13

multivariater nichtlinearer 13

I

in Ruhe 13

Intensität 5, 7

auf $[0, \infty)$ 16

Intensitäts-Maß 23

K

kanonischer Raum der Punkt-Prozesse 34

kausal 38

θ_t -kompatibel 15

Konvergenz

in Variation 16

in Verteilung 15

schwache 15

vage 15

Kopplung 16

Kopplungsungleichung 17

M

Marken 4

-raum 4

meßbar

progressiv 5

meßbarer Fluß 15

mischend 27

N

Netzwerk

neuronales 13

Neuron

Potential eines 13

P

Parameter-Maß 23

Poisson-Prozeß 23, 24

markierter 24

Potential 13

Punkt-Prozeß 3

bivariater 7

der Spitzen 14
einfacher 3
Hawkes' 13
kanonischer Raum der ... e 34
(einfacher) markierter 4
multivariater 7
selbst-anregender 13
univariater 7
K-variater 7
wechselseitig anregender 13
Punkte 3, 7

R

Radon-Maß 5

S

Semi-Ring 28
Shift-Operator 14
Speicher
 beschränkter 38, 77
Stabilität
 in Variation 16
 in Verteilung 16
Stationarität 15

T

transient 17
Translations-Operator 14

U

Übertragungsfunktion 13

V

Voraussetzung 1 39
Voraussetzung 2 47
Voraussetzung 3 51
vorhersagbar 5

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, Januar 1999

Jürgen te Vrugt

