

Das gewichtete Paarungsproblem und die Verteilungskonvergenz gewisser Zufallsbäume

Diplomarbeit

von

Matti Schneider

betreut von

Prof. Dr. G. Alsmeyer

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Mathematische Statistik

September 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
Danksagung	v
1. Das Paarungsproblem für zufällig gewichtete Zufallsbäume	1
1.1. Markierte und unmarkierte Bäume	1
1.2. Galton-Watson-Bäume	13
1.3. Grimmetts Lemma	20
1.4. Die Problemstellung	23
1.5. Zufällige Gewichte	27
2. Charakterisierung der Grenzwerte von $B(T_n^{\text{small}})$ und $B(T_n^{\text{big}})$	31
2.1. t^{small} vs. $t^{\text{small}}(e(t))$	31
2.2. Fixpunktgleichung für $B(\text{PGW}(1))$	38
2.3. Der Grenzwert von $B(T_n^{\text{big}})$	43
2.3.1. Heuristische Herleitung	43
2.3.2. Die Fixpunktgleichung	45
2.4. Asymptotik von $\mathbb{E}M_n$	56
2.5. Exponentialverteilte Gewichte	58
3. Fransenverteilungen	63
3.1. Definition und Eigenschaften	63
3.1.1. Die \mathbb{P}_π -Kette	66
3.1.2. Charakterisierungssatz	67
3.2. Sin-Bäume	74
Literaturverzeichnis	83

Einleitung

Eine Paarung eines Baumes ist eine Teilmenge der Kantenmenge, die nur Kanten enthält, die paarweise keinen gemeinsamen Knoten verbinden. Wählen wir einen Baum T_n gleichverteilt aus der n^{n-1} -elementigen Menge aller verwurzelten Bäume mit einer festen, n -elementigen Knotenmenge und versehen die Kanten von T_n mit identisch nach F verteilten, unabhängig voneinander gewählten und nichtnegativen Gewichten, so gebe M_n das maximale Gewicht einer Paarung von T_n an.

Das erste Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Asymptotik des Erwartungswertes der Zufallsgröße M_n zu verstehen. Dabei folgen wir einer Arbeit von Aldous und Steele [4] aus dem Jahr 2004.

Die Methode, die hier zum Erfolg führt, wird in der Literatur häufig *objective method* genannt. Dabei handelt es sich weniger um ein festes Schema zur Problemlösung als um eine philosophische Herangehensweise (vgl. [17], Kapitel 5): Gegeben sei eine Folge endlicher Objekte, die wir auf eine gewisse Eigenschaft untersuchen. Finden wir ein unendliches Objekt, für das die zu untersuchende Eigenschaft nahezu der der Folge entspricht, so ist die Hoffnung groß, dass die Eigenschaft der Folge approximativ mit der Eigenschaft des unendlichen Objektes übereinstimmt.

Auch wenn diese Formulierung sehr ungenau ist und ungewiss scheint, was ein derartiges unendliches Objekt überhaupt ist und wie wir es finden, so gibt es doch bemerkenswert viele Beispiele, bei denen diese Philosophie zum Ziel führt.

In unserem Fall ist die Folge endlicher Objekte die Folge der Zufallsbäume T_n . Die Eigenschaft, die untersucht wird, ist das maximale Gewicht einer Paarung von T_n . Hier scheint klar zu sein, was ein unendliches Objekt ist: Es muss ein Zufallsbaum T_∞ sein, der unendlich viele Knoten besitzt und bestenfalls der Limes der Folge T_n ist.

Um die *objective method* anzuwenden, müssen wir also zunächst untersuchen, welche Konvergenzart hier die richtige ist und gegen welchen Zufallsbaum die Folge T_n konvergiert. Es wird sich herausstellen, dass die Verteilungskonvergenz der geeignete Konvergenzbegriff ist, und dass der unendliche Baum T_∞ derjenige Zufallsbaum ist, der entsteht, wenn wir eine unabhängige Folge kritischer Galton-Watson-Bäume mit Poissonscher Reproduktionsverteilung entlang ihrer Wurzeln verbinden.

Die für die Formulierung dieser Aussage notwendigen Formalitäten führen wir im ersten Kapitel dieser Arbeit ein. Beginnen werden wir damit, den passenden Wertebereich der Zufallsbäume T_n festzulegen, ihn mit einer geeigneten Metrik auszustatten und anschließend die Verteilungskonvergenz auf diesem metrischen Raum zu untersuchen.

Der darauffolgende Abschnitt 1.2 dient zur Einführung der Galton-Watson-Bäume und zur Wiederholung einiger Eigenschaften derselben.

Nachdem wir die Konvergenz von T_n gegen T_∞ festgemacht haben, befassen wir uns damit, ob das maximale Gewicht einer Paarung von T_n – oder zumindestens sein Erwartungswert – approximativ durch T_∞ ausgedrückt werden kann.

Dies wird uns das zweite Kapitel hindurch beschäftigen. In Abschnitt 2.4 werden wir dann das Hauptresultat beweisen: Im Fall einer stetigen Gewichtsverteilung F mit endlichem Erwartungswert gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}M_n = \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y+Z\}}),$$

wobei ξ, Y und Z unabhängige Zufallsgrößen mit den Verteilungen F, G und H seien. Die Verteilungen G und H ergeben sich als Lösungen zweier *stochastischer Fixpunktgleichungen*:

G ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$Y \stackrel{d}{=} \max\{0, \xi_i - Y_i : 1 \leq i \leq N\} \quad (*)$$

und H ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$Z \stackrel{d}{=} \max\{Y, \xi - Z\}, \quad (**)$$

wobei die Variablen (Y_i) , (ξ_i) und N unabhängig voneinander mit $Y_i \sim Y$, $\xi_i \sim F$ und $N \sim Poi(1)$ seien. Beiden Fixpunktgleichungen widmen wir uns ebenfalls im zweiten Kapitel, siehe Theoreme 2.2.3 und 2.3.1.

Den Abschluss des Kapitels bildet eine Untersuchung des Falles exponentialverteilter Gewichte, also $F = Exp(\lambda)$. In diesem Fall werden wir die Fixpunktverteilungen aus (*) und (**) explizit bestimmen, und auch den gesuchten Erwartungswert geben wir näherungsweise an.

Im letzten Kapitel der Arbeit verlassen wir das Paarungsproblem und beschäftigen uns mit einer Klasse von endlichen Zufallsbäumen S , die von Aldous in [2] eingeführt wurde: Sei $\mathbb{E}Q(S, t)$ die erwartete Anzahl von Teilbäumen der ersten Generation von S , die zu t isomorph sind. S besitzt eine *Fransenverteilung*, falls

$$\mathbb{E}Q(S, t) = P(S = t)$$

für alle t gilt. Wir werden sehen, dass kritische Galton-Watson-Bäume diese Bedingung erfüllen (Beispiel 3.1.4). Allerdings treten auch bei anderen Anwendung derartige Verteilungen auf.

Die Abschnitte 3.1.2 und 3.2 werden klären, warum Zufallsbäume mit Fransenverteilungen im Kontext der *objective method* wichtig sind: Sie lassen sich stets fortsetzen zu unendlichen Bäumen, die als Approximationsobjekt endlicher Folgen dienen.

Danksagung

Für die Auswahl des Diplomarbeitsthemas, die Betreuung während der Entstehungsphase und die motivierenden Vorlesungen danke ich Herrn Prof. Gerold Alsmeyer.

Ich danke außerdem allen Menschen, die auf ihre Art zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben – insbesondere meinen Eltern und meinem Bruder, die mich immer bei meinem Studium unterstützen.

Des Weiteren danke ich Maren für ihre hilfreiche Unterstützung und konstruktive Kritik während der letzten Wochen.

1. Das Paarungsproblem für zufällig gewichtete Zufallsbäume

Bevor wir das Paarungsproblem für zufällig gewichtete Zufallsbäume einführen, legen wir formal exakt fest, wie der Bildraum eines Zufallsbaumes aussieht und welche σ -Algebra auf dieser Menge die „richtige“ ist. Am Anfang dieser Formalitäten steht die Frage, was genau ein Baum eigentlich ist.

1.1. Markierte und unmarkierte Bäume

Definition 1.1.1 Unter einem *markierten Baum mit Wurzel* verstehen wir ein Tupel $t = (V_t, E_t, r)$, wobei

- (a) V_t eine Menge ist, genannt *Knotenmenge des Baumes*,
- (b) $r \in V_t$ ein ausgezeichnetes Element ist, genannt *Wurzel des Baumes*, und
- (c) E_t eine Menge von zwei-elementigen Teilmengen von V_t ist, genannt *Kantenmenge des Baumes*.

Zudem muss es zwischen zwei verschiedenen Knoten $v, w \in V_t$ genau einen Pfad von v nach w geben.

Ein *Pfad von v nach w* ist hierbei eine endliche Folge v_0, \dots, v_n in V_t mit $v_0 = v$, $v_n = w$, $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ und $\{v_i, v_{i-1}\} \in E_t$ für alle $i = 1, \dots, n$. Wir schreiben auch $v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ für einen derartigen Pfad, und nennen n die *Länge des Pfades von v nach w* .

Einen Baum $t = (V_t, E_t, r)$ visualisieren wir dadurch, dass wir uns für jeden Knoten $v \in V_t$ einen Punkt mit Markierung v vorstellen und für jede Kante $e = \{v, w\} \in E_t$ eine Linie zwischen den Punkten v und w . Außerdem muss die Wurzel gekennzeichnet werden. Abbildung 1.1 zeigt ein Beispiel für diese Visualisierung.

Es scheint naheliegend, dass wir einen Baum t mit allen Bäumen s identifizieren sollten, deren graphische Visualisierung mit der von t übereinstimmt, obwohl die Knotenmenge von s aus ganz anderen Elementen besteht. De facto sind derartige Bäume jedoch unterschiedlich, und Gleichheit zwischen diesen Bäumen herrscht nur dann, wenn die Knotenmengen tatsächlich übereinstimmen.

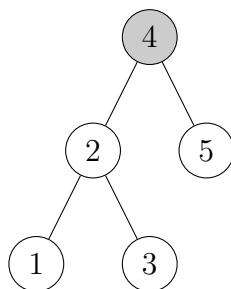


Abbildung 1.1. Der Baum $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{\{4, 2\}, \{4, 5\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}\}, 4)$.

In Definition 1.1.7 werden wir die konkrete Markierung der Knoten vergessen, um diese Bäume tatsächlich miteinander zu identifizieren.

Dadurch, dass wir einen ausgezeichneten Knoten r gegeben haben, können wir auf der Knotenmenge V_t auf natürliche Weise eine Ordnung definieren, indem wir für zwei Knoten vergleichen, auf welchem Pfad wir zur Wurzel r gelangen. Eine exaktere Auskunft gibt die nächste Definition:

Definition 1.1.2 Sei $t = (V_t, E_t, r)$ ein Baum, $v, w \in V_t$, $w \neq r$ mit eindeutigem Pfad $r = v_0 \rightarrow \dots \rightarrow v_n = w$ von der Wurzel zu dem Knoten w .

- (a) Existiert ein $0 \leq j \leq n - 1$ mit $v_j = v$, so heißt v *Vorfahre von w* sowie umgekehrt w *ein Nachkomme von v* .
- (b) Gilt in (a) speziell $j = n - 1$, so heißt v *Mutter von w* sowie umgekehrt w *Kind von v* . Die Menge aller Kinder von v bezeichnen wir mit C_v . Ist $v = r$, so werden wir auch C oder $C(t)$ statt C_r schreiben.

Die oben erwähnte Ordnung \leq auf V_t erhalten wir, indem wir $v \leq w$ für alle Nachkommen w von v und für $w = v$ definieren.

Die Begriffe „Mutter“ und „Kind“ in obiger Definition lassen darauf schließen, dass wir einen Baum auch als *Stammbaum einer Population* ansehen. Die Wurzel des Baumes werden wir auch als *Urahn* bezeichnen, jeden Knoten als *Individuum*. Der Urahn bildet somit die 0. Generation der Population, die Kinder des Urahnen die 1. Generation der Population, alle Kinder der 1. Generation bilden die 2. Generation usw.

Definition 1.1.3 Sei $t = (V_t, E_t, r)$ ein Baum, $v \in V_t$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

- (a) v befinde sich in *Generation n* , falls die Länge des Pfades von r nach v genau n beträgt. Die Generation der Wurzel r setzen wir hierbei auf 0.
- (b) $t|_n$ sei der Teilbaum von t , der aus den ersten n Generationen besteht.

- (c) t^v sei der Teilbaum von t , der am Knoten v hängt, d. h. die Knotenmenge V_{t^v} von t^v besteht aus v und allen Nachkommen von v , die Wurzel von t^v sei v und die Kantenmenge von t^v besteht aus den Kanten von t , welche Knoten aus V_{t^v} miteinander verbinden.

Weitere interessante Größen für (Zufalls-)Bäume sind die Höhe des Baumes, die Größe der gesamten Population sowie die Anzahl der Blätter des Baumes.

Definition 1.1.4 Sei $t = (V_t, E_t, r)$ ein Baum.

- (a) $H(t)$ sei die *Höhe des Baumes* t , gegeben durch $H(t) = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : t_{|n} = t\}$.
- (b) $|t|$ sei die Anzahl der Knoten des Baumes t , d. h. $|t| = |V_t|$. $|t|$ nennen wir auch die *Populationsgröße von* t .
- (c) $v \in V_t$ heißt *Blatt* von t , falls v keine Nachkommen besitzt. Es bezeichne $L(t)$ die *Menge aller Blätter* von t . $|L(t)|$ gibt dann die Anzahl der Blätter von t an.

Zurückkehrend zur Interpretation eines Baumes als Stammbaum einer Population scheint es sinnvoll, wenn wir uns auf diejenigen Bäume t einschränken, bei denen jedes Individuum nur endlich viele Kinder gebärt. Ein derartiger Baum hat die Eigenschaft, dass jeder der Bäume $t_{|n}$, $n \in \mathbb{N}$, endlich ist.

Schneiden wir den Baum t ab der Generation n ab, so erhalten wir einen endlichen Baum. Dies erklärt die Begriffsbildung in der nächsten Definition:

Definition 1.1.5 (a) Ein Baum $t = (V_t, E_t, r)$ heißt *lokal endlich*, wenn jeder Knoten von t nur endlich viele Kinder besitzt.

- (b) Es sei $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ die Menge aller verwurzelten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ und $\widetilde{\mathcal{S}}_\infty$ die Menge aller lokal endlichen, verwurzelten Bäume mit Knotenmenge \mathbb{N} .

Ein Resultat von Arthur Cayley aus dem Jahr 1889 gibt Auskunft über die Mächtigkeit von $\widetilde{\mathcal{S}}_n$, d. h. über die Anzahl verwurzelter Bäume mit fester n -elementiger Knotenmenge.

Satz 1.1.6 (Cayley) Die Menge der unverwurzelten markierten Bäume mit n Knoten besitzt die Mächtigkeit n^{n-2} . Folglich gilt

$$|\widetilde{\mathcal{S}}_n| = n^{n-1}, \quad (1.1)$$

da es für einen unverwurzelten Baum mit n Knoten n verschiedene Möglichkeiten gibt, diesen zu einem verwurzelten Baum zu machen.

Beweis. Siehe Korollar 4.3 in [14] oder [8] für den ursprünglichen Beweis von Cayley. \square

Im Anschluss an Definition 1.1.1 haben wir bereits motiviert, auf welche Art wir zwei markierte Bäume miteinander identifizieren. Ein weiterer Grund für die Einführung eines Isomorphiebegriffs auf der Menge aller Bäume ist, dass es für viele graphentheoretische Probleme – das Paarungsproblem eingeschlossen – unerheblich ist, welche konkrete Markierung der Baum trägt.

Definition 1.1.7 Zwei Bäume $t = (V_t, E_t, r)$ und $t' = (V_{t'}, E_{t'}, r')$ heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion $f : V_t \rightarrow V_{t'}$ mit $f(r) = r'$ gibt, die

$$\{f(u), f(v)\} \in E_{t'} \quad \Leftrightarrow \quad \{u, v\} \in E_t$$

erfüllt. Wir schreiben in diesem Fall $t \cong t'$. Die Restklasse eines Baumes t bezeichnen wir mit $[t]$. f induziert offenbar eine Bijektion $\bar{f} : E_t \rightarrow E_{t'}$.

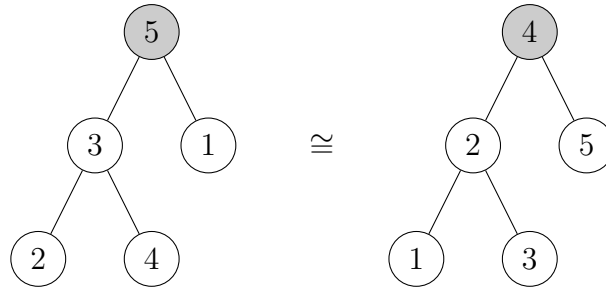


Abbildung 1.2. Zwei isomorphe Bäume aus $\widetilde{\mathcal{S}}_5$.

Eine Restklasse $[t]$ nennen wir nun *unmarkierten Baum*. Wenn wir von der Kantenmenge V_t eines unmarkierten Baumes sprechen, so heißt das stets, dass wir einen Repräsentanten gewählt haben, dessen Kantenmenge wir betrachten. Ausdrücke der Form

$$\prod_{v \in V_t} g(|C_v|) \quad \text{und} \quad \sum_{v \in V_t} g(|C_v|) \quad (1.2)$$

für eine Funktion $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ werden dadurch wohldefiniert und uns im weiteren Verlauf einige Male begegnen.

Auch die Höhe von $[t]$, die Teilbäume von $[t]$ bis zur Generation n , die Populationsgröße von $[t]$ und die Anzahl der Blätter von $[t]$ sind Eigenschaften, die für unmarkierte Bäume mühelos definiert werden können.

Definition 1.1.8 Für $n \in \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei

$$\mathcal{S}_n = \{[t] : t \in \widetilde{\mathcal{S}}_n\}. \quad (1.3)$$

Wir setzen ferner

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \bigcup_{n \in \bar{\mathbb{N}}} \widetilde{\mathcal{S}}_n \quad \text{und} \quad \mathcal{S} = \bigcup_{n \in \bar{\mathbb{N}}} \mathcal{S}_n. \quad (1.4)$$

Die Menge der endlichen Bäume sei als \mathcal{S}_{fin} definiert, d. h.

$$\mathcal{S}_{\text{fin}} = \{t \in \mathcal{S} : |t| < \infty\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n. \quad (1.5)$$

Die Menge aller unmarkierten, lokal endlichen Bäume \mathcal{S} wird der passende Wertebereich für die Zufallsbäume sein, die wir betrachten werden. Bevor wir uns mit Zufallsbäumen beschäftigen, klären wir zunächst die Frage, ob wir einer Restklasse $[t]$, $t \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$, ansehen können, aus wie vielen Elementen sie besteht.

Für $t \in \mathcal{S}_n$ sei

$$A_{\widetilde{\mathcal{S}}}(t) = |\{\tilde{t} \in \widetilde{\mathcal{S}}_n : [\tilde{t}] = t\}|. \quad (1.6)$$

$A_{\widetilde{\mathcal{S}}}(t)$ gibt demnach an, auf wie viele Arten wir t als einen markierten Baum aus $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ darstellen können.

Wir definieren für markierte Bäume t, s und einen Knoten v von t die Zählvariable

$$Q_v(t, s) = |\{i \in C_v : t^i \cong s\}|. \quad (1.7)$$

Der Ausdruck $Q_v(t, s)$ ist nur für markierte Bäume t definiert, weil wir den Knoten v direkt „ansprechen“.

Wenn wir (1.7) über alle Knoten von t summieren oder multiplizieren, erhalten wir eine Zahl, die für alle Bäume aus $[t]$ identisch ist (siehe dazu auch (1.2)).

Wir erhalten ebenso einen vom Repräsentanten unabhängigen Ausdruck, wenn wir (1.7) über alle Knoten v in einer festen Generation summieren oder multiplizieren.

Suchen wir nach einer alternativen Darstellung von (1.6), so ist klar, dass jede der $n!$ möglichen Belegungen der n Knoten von t mit paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ einen Baum $\tilde{t} \in \widetilde{\mathcal{S}}_n$ mit $[\tilde{t}] = t$ liefert. Die Frage ist, bei wie vielen dieser Belegungen *identische* Bäume entstehen.

Um dies zu beantworten, fixieren wir einen Knoten v und betrachten seine Kindermenge C_v . Sind für $i, j \in C_v$ die Teilbäume t^i und t^j isomorph, so liefert die Transposition (i, j) auf jeder Belegung stets denselben Baum. Diese Beobachtung lässt sich mühelos verallgemeinern:

Lemma 1.1.9 Für $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ gilt

$$A_{\widetilde{\mathcal{S}}}(t) = n! \prod_{v \in V_t} \prod_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \frac{1}{Q_v(t, s)!}. \quad (1.8)$$

Beweis. Ist eine Belegung der n Knoten von t mit paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ gegeben, so liefert jede Permutation auf der Menge

$$\{i \in C_v : [t^i] = s\},$$

für festes $v \in V_t$ und $s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$, die ursprüngliche Belegung. Mit dieser Überlegung folgt (1.8). Siehe auch Abbildung 1.3 für ein Beispiel. \square

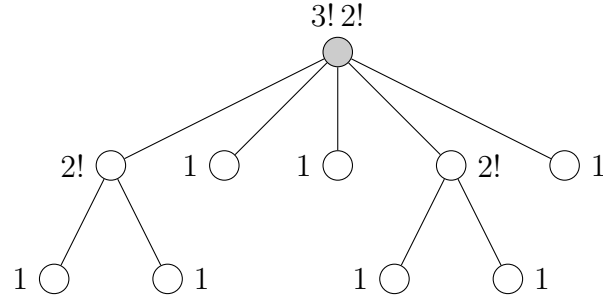


Abbildung 1.3. Ein Baum $t \in \widetilde{\mathcal{S}}_{10}$ mit $A_{\widetilde{\mathcal{S}}}(t) = \frac{10!}{3!2!2!2!} = 75600$. An jedem Knoten v ist $\prod_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q_v(t, s)!$ notiert.

Wir definieren nun erste Zufallsvariablen mit Werten in \mathcal{S} . Dabei nehmen wir die Existenz eines nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{A}, P) an, auf dem alle in dieser Arbeit vorkommenden Zufallsvariablen definiert sind.

Die Zufallsvariable

$$\widetilde{T}_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \widetilde{\mathcal{S}}_n$$

wähle gemäß einer Gleichverteilung einen Baum aus der Menge $\widetilde{\mathcal{S}}_n$. Ferner sei

$$T_n = [\cdot] \circ \widetilde{T}_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathcal{S}_n$$

$$\omega \mapsto [T_n(\omega)].$$

Wir beachten, dass T_n *nicht* gleichverteilt auf \mathcal{S}_n ist, sondern

$$P(T_n = t) = A_{\widetilde{\mathcal{S}}}(t) \cdot n^{1-n} \quad (1.9)$$

für alle $t \in \mathcal{S}_n$ gilt.

Die zufälligen Bäume T_n spielen eine wichtige Rolle und lassen sich allgemein in die Klasse der *einfach erzeugten Bäume* einordnen (siehe dazu [1] oder [9]). Einen einfachen Algorithmus zur Simulation einer Gleichverteilung auf der Menge der unverwurzelten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ gibt das nächste Lemma an.

Lemma 1.1.10 Es seien $n \geq 2$ und U_2, \dots, U_n unabhängige, gleichverteilte Zufallsgrößen auf $\{1, \dots, n\}$.

- Für $2 \leq i \leq n$ verbinden wir den Knoten i durch eine Kante mit dem Knoten

$$V_i = \min\{U_i, i - 1\}.$$

- Wir wählen gleichverteilt eine Permutation π auf $\{1, \dots, n\}$ und durchmischen die Markierung des oben erhaltenen Baumes gemäß π .

Der deraus resultierende Zufallsbaum \bar{T}_n ist gleichverteilt auf der Menge der unverwurzelten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$, d. h. es gilt

$$P(\bar{T}_n = t) = n^{2-n}$$

für jeden unverwurzelten Baum $t = (\{1, \dots, n\}, V_t)$.

Beweis. Siehe Proposition 3 in [1]. □

Alternativ können wir jeden konstruktiven Beweis des Satzes von Cayley (Satz 1.1.6) nutzen, um einen Algorithmus zur Simulation einer Gleichverteilung auf der Menge der unverwurzelten Bäume zu finden. Erwähnt sei hierbei der von Heinz Prüfer entdeckte und nach ihm benannte *Prüfer-Code*, der eine Bijektion zwischen der Menge $\{1, \dots, n\}^{n-2}$ und der Menge der unverwurzelten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$ beschreibt. Für Details verweisen wir auf [16].

In Satz 1.2.12 werden wir sehen, dass wir die Verteilung von T_n auch erhalten, indem wir einen gewissen Galton-Watson-Baum darunter bedingen, dass er aus n Knoten besteht.

Dies deutet an, dass wir Zufallsvariablen betrachten, die nicht nur Werte in einer diskreten Teilmenge von \mathcal{S} annehmen, sondern in ganz \mathcal{S} . Um von Messbarkeit von Abbildungen mit Bildraum \mathcal{S} sprechen zu können, benötigen wir eine σ -Algebra auf \mathcal{S} , die hier durch eine Metrik induziert werden kann.

Für die nächste Definition legen wir $\infty^{-1} = 0$ als Konvention fest.

Satz 1.1.11 Durch $d_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$d_{\mathcal{S}}(t, t') = (1 + \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : t_{|n} = t'_{|n}\})^{-1} \quad (1.10)$$

wird \mathcal{S} zu einem polnischen Raum, d. h. zu einem vollständigen, separablen metrischen Raum. Eine abzählbare dichte Teilmenge von \mathcal{S} ist durch \mathcal{S}_{fin} gegeben.

Bemerkung 1.1.12 (a) Gilt für $t, s \in \mathcal{S}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$d_{\mathcal{S}}(t_{|k}, s_{|k}) \leq (1 + k)^{-1},$$

folgt $t_{|k} = s_{|k}$. Sind t und s endlich, und lässt sich $k \geq H(t) \vee H(s)$ wählen, so folgt offenbar $t = s$.

(b) Wie in (1.10) wird $\tilde{\mathcal{S}}$ via $d_{\tilde{\mathcal{S}}}$ zu einem polnischen Raum. Die Restklassenprojektion $[\cdot]$ ist dann eine stetige Abbildung, denn die Topologie auf \mathcal{S} ist die Quotiententopologie von $\tilde{\mathcal{S}}$ bzgl. \cong .

Beweis von Satz 1.1.11. Die Symmetrie von $d_{\mathcal{S}}$ und die Eigenschaft

$$d_{\mathcal{S}}(t, t') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = t'$$

sind offenkundig erfüllt. Für den Nachweis der Dreiecksungleichung seien $t, t', t'' \in \mathcal{S}$. Dann gilt

$$\sup\{n \in \mathbb{N}_0 : t_{|n} = t''_{|n}\} \geq \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : t_{|n} = t'_{|n}\} \wedge \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : t'_{|n} = t''_{|n}\}$$

und folglich

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{S}}(t, t'') &\leq (1 + \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : t_{|n} = t'_{|n}\} \wedge \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : t'_{|n} = t''_{|n}\})^{-1} \\ &= d_{\mathcal{S}}(t, t') \vee d_{\mathcal{S}}(t', t'') \\ &\leq d_{\mathcal{S}}(t, t') + d_{\mathcal{S}}(t', t''). \end{aligned}$$

Die Menge $\mathcal{S}_{\text{fin}} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ ist als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar und für $t \in \mathcal{S}$ gilt $d_{\mathcal{S}}(t, t_{|n}) = (1 + n)^{-1} \rightarrow 0$, welches zusammen mit $t_{|n} \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ für alle $n \geq 1$ die Dichtheit von $\mathcal{S}_{\text{fin}} \subseteq \mathcal{S}$ und die Separabilität von \mathcal{S} zeigt.

Für den Nachweis der Vollständigkeit sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathcal{S} und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{S}}((t_n)_{|k}, (t_m)_{|k}) &\leq d_{\mathcal{S}}((t_n)_{|k}, t_n) + d_{\mathcal{S}}(t_m, t_n) + d_{\mathcal{S}}((t_m)_{|k}, t_m) \\ &= 2 \cdot (1 + k)^{-1} + d_{\mathcal{S}}(t_m, t_n) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 2 \cdot (1 + k)^{-1}. \end{aligned}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ wird aufgrund der Bemerkung 1.1.12 (a) die Folge $((t_n)_{|k})_{n \in \mathbb{N}}$ konstant, etwa gegen $t(k)$. Offenbar gilt für alle $l \leq k$ die Gleichheit

$$t(k)_{|l} = t(l),$$

und somit existiert ein Baum t mit $t_{|k} = t(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Insgesamt folgt $t_n \rightarrow t$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Definition 1.1.13 Für einen topologischen Raum $(\mathfrak{X}, \mathfrak{T})$ sei $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ die kleinste σ -Algebra auf \mathfrak{X} , welche alle offenen Mengen enthält. $\mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ heißt die *Borelsche σ -Algebra auf \mathfrak{X}* .

Einer Zufallsvariablen mit Werten in \mathcal{S} bzw. $\tilde{\mathcal{S}}$ unterstellen wir ab sofort die Messbarkeit bzgl. $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$ bzw. $\mathfrak{B}(\tilde{\mathcal{S}})$. Diese Variable nennen wir auch *zufälligen unmarkierten Baum* bzw. *zufälligen markierten Baum*.

Für den Nachweis der Messbarkeit einer Abbildung ist es von Vorteil, wenn wir einen „möglichst einfachen“ Erzeuger der σ -Algebra kennen. Im Falle eines separablen metrischen Raumes ist ein dementsprechender Erzeuger stets durch das System aller ϵ -Bälle gegeben. In \mathcal{S} können wir diese Bälle einfach beschreiben.

Lemma 1.1.14 Für $t \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$[t]_n = \{t' \in \mathcal{S} : t_{|n} = t'_{|n}\}. \quad (1.11)$$

Dann bildet

$$\mathcal{E} = \{\emptyset\} \cup \{[t]_n : t \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

einen \cap -stabilen Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$.

Beweis. Für $t \in \mathcal{S}$ und $\epsilon > 0$ sei

$$B_\epsilon(t) = \{t' \in \mathcal{S} : d_{\mathcal{S}}(t, t') < \epsilon\},$$

der offene ϵ -Ball um t .

Da $d_{\mathcal{S}}$ nur Werte in der abzählbaren Menge $\{0\} \cup \{(1+k)^{-1} : k \in \mathbb{N}_0\}$ annimmt und $B_\epsilon(t) = \mathcal{S}$ für alle $\epsilon > 1$ erfüllt ist, gilt

$$\begin{aligned} \{B_\epsilon(t) : t \in \mathcal{S}, \epsilon > 0\} &= \{B_{(1+k)^{-1}}(t) : t \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathcal{S}\} \\ &= \{[t]_k : t \in \mathcal{S}, k \in \mathbb{N}_0\}, \end{aligned}$$

wobei sich die zweite Gleichung mittels $[t]_0 = \mathcal{S}$ und

$$t' \in B_{k^{-1}}(t) \Leftrightarrow \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : t|_n = t'|_n\} > k - 1 \Leftrightarrow t|_k = t'|_k \Leftrightarrow t' \in [t]_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt.

Es folgt nun $\sigma(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathcal{S})$, denn in einem separablen Raum lässt sich jede nichtleere offene Menge als abzählbare Vereinigung von ϵ -Bällen schreiben. Für den Nachweis der \cap -Stabilität seien $t, t' \in \mathcal{S}$ und $j \geq k \geq 0$. Dann gilt

$$[t]_j \cap [t']_k = \{s \in \mathcal{S} : s|_j = t|_j, s|_k = t'|_k\} = \begin{cases} [t]_j, & \text{falls } t|_k = t'|_k, \\ \emptyset, & \text{falls } t|_k \neq t'|_k. \end{cases} \quad \square$$

Bemerkung 1.1.15 Die offenen ϵ -Bälle um t sind durch die Mengen $[t]_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, gegeben und zudem abgeschlossen.

Der Grund dafür liegt darin, dass $d_{\mathcal{S}}$ eine *Ultra-Metrik* ist, d. h. es gilt die verschärfte Dreiecksungleichung

$$d_{\mathcal{S}}(t, t') \leq d_{\mathcal{S}}(t, t'') \vee d_{\mathcal{S}}(t', t'')$$

für alle $t, t', t'' \in \mathcal{S}$.

Ferner haben wir im Beweis gesehen, dass zwei ϵ -Bälle entweder disjunkt oder ineinander enthalten sind. Diese spezielle Topologie vereinfacht den Begriff der schwachen Konvergenz auf \mathcal{S} , den wir als nächstes definieren werden.

Definition 1.1.16 Es sei $(\mathfrak{X}, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $\mu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endliche Maße auf $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}(\mathfrak{X}))$. Es bezeichne $\mathcal{C}_b(\mathfrak{X})$ die Menge aller stetigen, beschränkten Funktionen $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) μ_n konvergiert schwach gegen μ , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{X}} f d\mu_n = \int_{\mathfrak{X}} f d\mu$$

für alle $f \in \mathcal{C}_b(\mathfrak{X})$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall auch $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

- (b) Sind $X, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit Werten in \mathfrak{X} , so konvergiert X_n in Verteilung gegen X , falls $P(X_n \in \cdot)$ schwach gegen $P(X \in \cdot)$ konvergiert. Wir schreiben in diesem Fall auch $X_n \xrightarrow{d} X$.

Eine wichtige Charakterisierung der schwachen Konvergenz gibt das Portmanteau-Theorem.

Satz 1.1.17 (Portmanteau-Theorem) Es sei \mathfrak{X} ein metrischer Raum und $\mu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endliche Maße auf $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B}(\mathfrak{X}))$. Dann sind äquivalent:

- (a) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathfrak{X}) = \mu(\mathfrak{X})$ und für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathfrak{X}$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \mu(A).$$

- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\mathfrak{X}) = \mu(\mathfrak{X})$ und für jede offene Menge $B \subseteq \mathfrak{X}$ gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) \geq \mu(B).$$

- (d) Für jedes $C \in \mathfrak{B}(\mathfrak{X})$ mit $\mu(\partial C) = 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C) = \mu(C)$.

Beweis. Siehe Theorem 3.25 in [11]. □

Sind $\mu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Wahrscheinlichkeitsmaße vorausgesetzt, so ist trivialerweise die Bedingung $\mu_n(\mathfrak{X}) \rightarrow \mu(\mathfrak{X})$ erfüllt. Ist $\mathfrak{X} = \mathcal{S}$, so vereinfacht sich das Theorem erneut, denn hier genügt es die Mengen $[t]_k$ aus (1.11) zu untersuchen.

Korollar 1.1.18 Es seien $X_\infty, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zufällige unmarkierte Bäume. Dann sind äquivalent:

- (a) $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$.
 (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in [t]_k) = P(X_\infty \in [t]_k)$ für alle $t \in \mathcal{S}$, $k \geq 1$.
 (c) $\liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in [t]_k) \geq P(X_\infty \in [t]_k)$ für alle $t \in \mathcal{S}$, $k \geq 1$.

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“: Aufgrund der Bemerkung 1.1.15 ist $[t]_k$ offen und abgeschlossen. Mit Hilfe des Portmanteau-Theorems folgt dann (b).

„(b) \Rightarrow (c)“: Klar.

„(c) \Rightarrow (a)“: Da \mathcal{S} separabel ist, lässt sich jede nichtleere offene Menge $A \subseteq \mathcal{S}$ als höchstens abzählbare Vereinigung von ϵ -Bällen schreiben, d. h. es existiert eine Menge $I \subseteq \mathbb{N}$, Bäume $(t_i)_{i \in I}$ und Zahlen $(k_i)_{i \in I}$ mit

$$A = \bigcup_{i \in I} [t_i]_{k_i}.$$

Unter Beachtung der Bemerkung 1.1.15 können wir annehmen, dass diese Vereinigung aus paarweise disjunkten Mengen besteht. Dann folgt mit Hilfe von (c) und Fatous Lemma (siehe Lemma 9.12 in [6])

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in A) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} P(X_n \in [t_i]_{k_i}) \\ &\geq \sum_{i \in I} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in [t_i]_{k_i}) \\ &\geq \sum_{i \in I} P(X_\infty \in [t_i]_{k_i}) \\ &= P(X_\infty \in A) \end{aligned}$$

und mit Portmanteau wiederum die Behauptung. \square

Betrachten wir zufällige unmarkierte Bäume mit Werten in der abzählbaren Menge \mathcal{S}_{fin} , so genügt es, für die Verteilungskonvergenz $P(X_n = t) \rightarrow P(X_\infty = t)$ für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ nachzuweisen.

Korollar 1.1.19 Es seien $X_\infty, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zufällige unmarkierte Bäume mit Werten in \mathcal{S}_{fin} . Dann sind äquivalent:

- (a) $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = t) = P(X_\infty = t)$ für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$.

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“: Wir wählen $k = H(t)$ in Korollar 1.1.18 (b).

„(b) \Rightarrow (a)“: Da $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge endlicher Zufallsbäume mit Werten in der abzählbaren Menge \mathcal{S}_{fin} ist, gilt

$$P(X_n \in [t]_k) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \cap [t]_k} P(X_n = s)$$

für alle $t \in \mathcal{S}$, $k \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Eine erneute Anwendung des Lemmas von Fatou zeigt

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n \in [t]_k) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \cap [t]_k} P(X_n = s) \\ &\geq \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \cap [t]_k} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(X_n = s) \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \cap [t]_k} P(X_\infty = s) \\ &= P(X_\infty \in [t]_k), \end{aligned}$$

und (a) folgt mit Korollar 1.1.18. \square

Korollar 1.1.20 Es seien $X_\infty, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zufällige unmarkierte Bäume. Wir setzen $X_n^k = (X_n)_{|k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \overline{\mathbb{N}}$. Dann sind äquivalent:

- (a) $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$.
- (b) $X_n^k \xrightarrow{d} X_\infty^k$ für alle $k \geq 1$.

Beweis. Die Behauptung folgt durch eine Kombination der vorangegangenen Korollare und der Beobachtung $\{X_n^k = t_{|k}\} = \{X_n \in [t]_k\}$ für alle $t \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \overline{\mathbb{N}}$. \square

Die Topologie von \mathcal{S} gibt der schwachen Konvergenz auf \mathcal{S} einen lokalen Charakter. Daher wird in der Literatur die Bezeichnung *local weak convergence* verwendet.

Da die Definition $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$ ausschließlich von den Verteilungen der Variablen abhängt, stellt sich die Frage, ob wir nicht auch Variablen X'_n , $n \in \overline{\mathbb{N}}$, konstruieren können, die $X_n \sim X'_n$ erfüllen, und für die eine stärkere Konvergenz vorliegt. Das folgende Theorem gibt eine positive Antwort auf diese Frage.

Theorem 1.1.21 Sind $X_\infty, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in einem polnischen Raum und konvergiert X_n in Verteilung gegen X_∞ , so existieren Zufallsvariablen $(X'_n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ derart, dass $X_n \sim X'_n$ für alle $n \in \overline{\mathbb{N}}$ und $X'_n \rightarrow X'_\infty$ P' -fast sicher gilt.

Beweis. Siehe Theorem 3.30 in [11]. \square

Der Nutzen dieses Theorems in der Theorie kann nicht genug herausgestellt werden. Ein treffendes Beispiel für seine Anwendung ist der folgende Satz.

Satz 1.1.22 Sind $X_\infty, (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in einem polnischen Raum und konvergiert X_n gegen X_∞ in Verteilung, so konvergiert auch $f(X_n)$ für jede P^{X_∞} -f. s. stetige Funktion f in Verteilung gegen $f(X_\infty)$.

Beweis. In Anbetracht des Theorems 1.1.21 lässt sich ohne Einschränkung $X_n \rightarrow X_\infty$ f. s. voraussetzen. Daraus folgt $f(X_n) \rightarrow f(X_\infty)$ f. s. (siehe Lemma 34.3 in [6]) und die Behauptung, da fast sichere Konvergenz die Konvergenz in Verteilung impliziert. \square

Ist eine Folge von Zufallsbäumen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $X_n \xrightarrow{d} X_\infty$ gegeben, so konvergieren beispielsweise auch

- (a) $|X_n|$,
- (b) $H(X_n)$,
- (c) $Z_k(X_n) = \text{Anzahl der Individuen von } X_n \text{ in festen Generation } k, \text{ und}$
- (d) $|L(X_n)|$

für $n \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen $|X_\infty|$, $H(X_\infty)$, $Z_k(X_\infty)$ und $|L(X_\infty)|$, denn alle auftretenden Abbildungen sind stetig.

1.2. Galton-Watson-Bäume

In diesem Abschnitt führen wir eine wichtige Klasse von Zufallsbäumen ein, die Galton-Watson-Bäume. Während T_n eher aus kombinatorischer Sicht interessant ist, sind Galton-Watson-Bäume biologisch motiviert: Stellen wir uns eine Population mit einem Urahn vor, in der sich jedes Individuum gemäß einer Verteilung $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ vermehrt, so erhalten wir einen zufälligen Stammbaum, also eine Zufallsvariable mit Werten in \mathcal{S} .

Über einen Umweg gelangen wir zu der Definition dieses Zufallsbaumes: Die Werte der Zufallsvariable sind zunächst Teilmengen des *Ulam-Harris-Baumes*

$$\mathbb{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{N}^n, \quad (1.12)$$

wobei $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$ gesetzt wird. \emptyset ist das Symbol, welches den Urahn kennzeichnet.

Zur Übersichtlichkeit werden wir für ein Element $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ auch $v_1 \dots v_n$ schreiben. Die elementaren Definitionen und Sätze dieses Abschnittes lassen sich in [7] wieder finden.

Definition 1.2.1 Eine Teilmenge $\tau \subseteq \mathbb{V}$ heißt *Baum*, falls folgendes gilt:

- (a) $\emptyset \in \tau$,
- (b) Aus $v_1 \dots v_n \in \tau$ folgt $v_1 \dots v_k \in \tau$ für alle $1 \leq k < n$ und alle $n \geq 1$,
- (c) Aus $v_1 \dots v_{n-1} v_n \in \tau$ folgt $v_1 \dots v_{n-1} j \in \tau$ für alle $1 \leq j < v_n$ und alle $n \geq 1$.

Ein Baum heißt – wie zuvor auch – *lokal endlich*, wenn jedes Individuum nur endlich viele Kinder besitzt. Für $\tau \subseteq \mathbb{V}$ halten wir diese Bedingung als

$$|\tau \cap \mathbb{N}^n| < \infty \text{ für alle } n \geq 1$$

fest.

Ein Baum $\tau \subseteq \mathbb{V}$ induziert einen Baum im Sinne von Definition 1.1.1, indem wir die Knotenmenge als τ und die Wurzel als \emptyset setzen, und die Kantenmenge E_τ dadurch gegeben ist, dass wir jeden Knoten $v_1 \dots v_n \in \tau$ mit seiner Mutter $v_1 \dots v_{n-1}$ verbinden, die definitionsgemäß in τ enthalten ist (siehe auch Abbildung 1.4 für ein Beispiel).

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \{\tau \subseteq \mathbb{V} : \tau \text{ ist ein lokal endlicher Baum}\}, \\ \mathbb{T}_n &= \{\tau \in \mathbb{T} : |\tau| = n\} \text{ und} \\ \mathbb{T}_{\text{fin}} &= \{\tau \in \mathbb{T} : |\tau| < \infty\} = \{\tau \subseteq \mathbb{V} : \tau \text{ ist ein endlicher Baum}\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

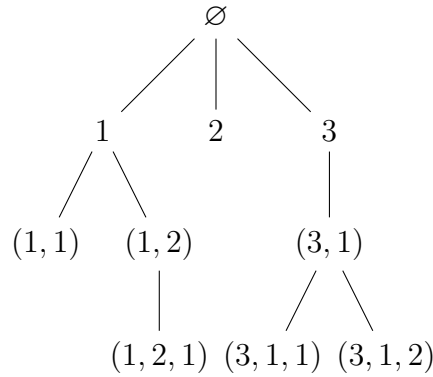


Abbildung 1.4. Ein Baum aus \mathbb{T} .

Die Bäume aus \mathbb{T} unterscheiden sich von denen aus \mathcal{S} darin, dass die Kindermenge jedes Knotens *geordnet* ist. In der Literatur ist deshalb auch von verwurzelten, geordneten Bäumen die Rede. Es ist also für jeden Knoten v von Bedeutung, in welcher Reihenfolge die Teilbäume τ^w , $w \in C_v$, an der Mutter v hängen.

Den bereits bekannten Isomorphiebegriff aus Definition 1.1.7 führen wir auch für Bäume aus \mathbb{T} ein, um die Markierung und Anordnung zu „vergessen“. Den Quotienten \mathbb{T} modulo Isomorphie identifizieren wir mit \mathcal{S} . Da es keine Probleme bereitet, werden wir die Restklassenprojektion $\mathbb{T} \rightarrow \mathcal{S}$ auch mit $[\cdot]$ bezeichnen.

Analog zu $A_{\mathcal{S}}(t)$ in (1.6) definieren wir für jeden Baum $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ die Zählvariable $A_{\mathbb{T}}(t)$ als die Anzahl der Bäume $\tau \in \mathbb{T}$ mit $[\tau] = t$, d. h.

$$A_{\mathbb{T}}(t) = |\{\tau \in \mathbb{T} : [\tau] = t\}|. \quad (1.14)$$

Genau wie für $A_{\mathcal{S}}(t)$ in Lemma 1.1.9 suchen wir eine Produktdarstellung für $A_{\mathbb{T}}(t)$.

Lemma 1.2.2 Für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ gilt

$$A_{\mathbb{T}}(t) = \prod_{v \in V_t} |C_v|! \prod_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \frac{1}{Q_v(t, s)!}. \quad (1.15)$$

Beweis. Gemäß Definition 1.2.1 (a) kann die Wurzel r von t nur die Markierung \emptyset erhalten. Die $|C_r|$ Kinder der Wurzel müssen mit den Zahlen 1 bis $|C_r|$ versehen werden. Dafür gibt es $|C_r|!$ Möglichkeiten, wobei bei jeder derartigen Belegung ein identischer Baum entsteht, wenn die Markierung innerhalb der Menge $\{i \in C_r : [t^i] = s\}$, für ein festes $s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$, identisch ist.

Sukzessiv setzen wir dies für jeden Knoten v fort und erhalten dann (1.15). \square

Alle Bezeichnungen, die wir für Bäume aus \mathcal{S} bereits eingeführt haben, verwenden wir auch für Bäume aus \mathbb{T} , und so wie wir \mathcal{S} in Satz 1.1.11 mit der Metrik $d_{\mathcal{S}}$ versehen haben, lässt sich auch eine Metrik auf \mathbb{T} definieren.

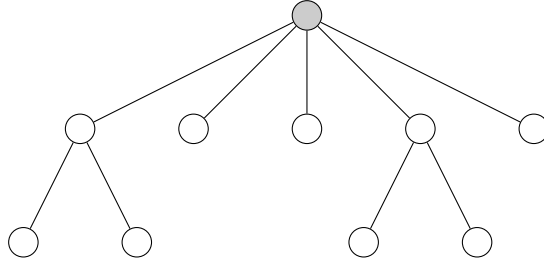


Abbildung 1.5. t aus Abbildung 1.3. Es ist $A_{\mathbb{T}}(t) = 10$ und $A_{\mathcal{S}}(t) = 75600$.

Satz 1.2.3 (a) Durch $d_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$ mit

$$d_{\mathbb{T}}(\tau, \tau') = (1 + \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \tau_{|n} = \tau'_{|n}\})^{-1}$$

wird \mathbb{T} zu einem polnischen Raum und $[\cdot] : \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{S}$ zu einer stetigen Abbildung.

(b) $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \{\emptyset\} \cup \{[\tau]_n : \tau \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein \cap -stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathbb{T})$.

Beweis. Analog zu den Beweisen aus Satz 1.1.11 und Lemma 1.1.14 folgen die Behauptungen. \square

Wir kommen nun zur Definition des Galton-Watson-Baumes \mathbf{GW} als Zufallsvariable mit Werten in $(\mathbb{T}, \mathfrak{B}(\mathbb{T}))$, bei gegebener Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ auf \mathbb{N}_0 .

Sei $\{X_v : v \in \mathbb{V}\}$ eine Familie von unabhängigen, nach $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ verteilten Zufallsgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) . Wir definieren

$$\mathbf{GW} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{GW}_n \tag{1.16}$$

durch $\mathbf{GW}_0 = \{\emptyset\}$ und

$$\mathbf{GW}_n = \{v_1 \dots v_n \in \mathbb{N}^n : v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbf{GW}_{n-1} \text{ und } 1 \leq v_n \leq X_{v_1 \dots v_{n-1}}\}.$$

Offensichtlich ist \mathbf{GW} eine \mathbb{T} -wertige Abbildung und wir nennen \mathbf{GW} den *Galton-Watson-Baum mit Reproduktionsverteilung* $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$. Den Erwartungswert

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p_j$$

der Reproduktionsverteilung bezeichnen wir als *Reproduktionsmittel*.

Das nächste Lemma klärt, dass es sich bei \mathbf{GW} tatsächlich um eine *messbare* Abbildung handelt.

Lemma 1.2.4 Die Abbildung $\mathbf{GW} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{T}$ ist \mathcal{A} - $\mathfrak{B}(\mathbb{T})$ -messbar. Folglich ist die Komposition

$$[\mathbf{GW}] : (\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{\mathbf{GW}} \mathbb{T} \xrightarrow{[\cdot]} \mathcal{S}$$

\mathcal{A} - $\mathfrak{B}(\mathcal{S})$ -messbar.

Beweis. Gemäß Satz 1.2.3 (b) genügt es $\text{GW}^{-1}(\mathcal{E}_{\mathbb{T}}) \subseteq \mathcal{A}$ zu zeigen.

Es sei $A = [\tau]_n$ für ein $\tau \in \mathbb{T}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Mit $\tau_j = \tau \cap \mathbb{N}^j$ für $j \in \mathbb{N}_0$ und $|v| = n$ für $v = v_1 \dots v_n \in \mathbb{V}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \text{GW}^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega : \text{GW}_{|n}(\omega) = \tau_{|n}\} \\ &= \bigcap_{j=1}^n \{\omega \in \Omega : \text{GW}_j(\omega) = \tau_j\} \\ &\in \sigma(\{X_v : |v| \leq n-1\}) \subseteq \mathcal{A}. \quad \square \end{aligned}$$

Das Lemma berechtigt, von den Verteilungen von GW und $[\text{GW}]$ zu sprechen. Gegeben, dass die Wurzel k Kinder besitzt, scheint aufgrund des rekursiven Aufbaus von GW klar zu sein, dass die Teilbäume, die an den Kindern der Wurzeln hängen, stochastisch unabhängig voneinander und gemäß GW verteilt sind.

Lemma 1.2.5 Seien GW , $X = X_{\emptyset}$ wie in Definition (1.16) und $T = [\text{GW}]$ sowie $p_k > 0$. Gegeben $X = k$, ist die Familie $\{T^i : 1 \leq i \leq k\}$ bedingt stochastisch unabhängig und jede Variable T^i genauso verteilt wie T .

Beweis. Siehe Satz 2.3 in [7]. □

Eine naheliegende Frage ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Population eines Galton-Watson-Baumes ausstirbt. Übersetzen wir diese in das gegebene mathematische Modell, so suchen wir nach der Aussterbewahrscheinlichkeit

$$q = P(\text{GW} \in \mathbb{T}_{\text{fin}}) = P([\text{GW}] \in \mathcal{S}_{\text{fin}}). \quad (1.17)$$

Eine Untersuchung der erzeugenden Funktion f der Reproduktionsverteilung beantwortet die Frage größtenteils. Allerdings sollte nicht verschwiegen werden, dass eine genaue Angabe von q im Fall (b) nur in seltenen Fällen möglich ist.

Satz 1.2.6 Die Aussterbewahrscheinlichkeit q ist der kleinste Fixpunkt von f in $[0, 1]$. Setzen wir $0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1$ voraus, so gelten die folgenden Implikationen:

- (a) $\mu \leq 1 \Rightarrow f$ hat keinen Fixpunkt in $[0, 1)$ und folglich ist $q = 1$,
- (b) $\mu > 1 \Rightarrow f$ hat genau einen Fixpunkt in $[0, 1)$ und es gilt $p_0 < q < 1$.

Beweis. Siehe Satz 3.1 in [7] oder Theorem 2.1.1 in [12]. □

Ist das Reproduktionsmittel $\mu \leq 1$ und $p_1 \neq 1$, so stirbt die Population fast sicher aus. In diesem Fall nimmt GW fast sicher Werte in \mathbb{T}_{fin} an. Der Satz gibt Anlass zu einer Definition.

Definition 1.2.7 Ein Galton-Watson-Baum mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ und Reproduktionsmittel $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot p_j$ heißt

- (a) *subkritisch*, falls $\mu < 1$,
- (b) *kritisch*, falls $\mu = 1$, und
- (c) *superkritisch*, falls $\mu > 1$ gilt.

Der Grund für die Unterscheidung der Fälle $\mu = 1$ und $\mu < 1$ liegt darin, dass z. B. Aussagen über die Aussterbegeschwindigkeit in beiden Fällen variieren.

Unser Interesse gilt einer besonderen Reproduktionsverteilung, der Poisson-Verteilung mit Erwartungswert $\mu = 1$.

Definition 1.2.8 Sei $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \sim Poi(1)$, d. h. $p_j = (e \cdot j!)^{-1}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Sei ferner **GW** ein Galton-Watson-Baum mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$. Wir definieren die Verteilung

$$PGW(1) \tag{1.18}$$

auf \mathcal{S}_{fin} als die Verteilung von $[GW]$.

Der Grund für unser Interesse liegt darin: Ist $T \sim PGW(1)$, so gilt

$$P(T \in \cdot \mid |T| = n) = P(T_n \in \cdot) \tag{1.19}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Bedingt darunter, dass die Gesamtpopulation von T aus n Individuen besteht, ist T genauso verteilt wie die in (1.9) definierten Zufallsbäume T_n . Um dies einzusehen, bedarf es einiger Vorbereitungen.

Satz 1.2.9 (Dwass) Sei **GW** ein Galton-Watson-Baum mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ und $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, jeweils nach $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ verteilter Zufallsgrößen. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$P(|GW| = n) = n^{-1} \cdot P(N_1 + \dots + N_n = n - 1), \tag{1.20}$$

sowie $P(|GW| = \infty) = 1 - q$.

Beweis. Siehe Kapitel I, Satz 10.1 in [5] oder Theorem 6.3 in [9]. □

Eine zusätzliche Anmerkung ist, dass die Verteilung von $|GW|$ beim Übergang nach \mathcal{S} unverändert bleibt, da die Knotenanzahl eines Baum invariant unter Isomorphie ist, d. h. mit $T = [GW]$ gilt

$$P(|GW| \in \cdot) = P(|T| \in \cdot).$$

Wenden wir Satz 1.2.9 auf die für uns interessante $PGW(1)$ -Verteilung an, so erhalten wir das folgende:

Korollar 1.2.10 Ist $T \sim \text{PGW}(1)$, so gilt für alle $n \geq 1$

$$P(|T| = n) = \frac{n^{n-1}}{n!} \cdot e^{-n}. \quad (1.21)$$

Beweis. Ist $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $N_i \sim \text{Poi}(1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt aufgrund von (1.20) und $N_1 + \dots + N_n \sim \text{Poi}(n)$

$$\begin{aligned} P(|T| = n) &= n^{-1} \cdot \text{Poi}(n)(\{n-1\}) \\ &= n^{-1} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-n} \\ &= \frac{n^{n-1}}{n!} \cdot e^{-n}. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 1.2.11 Ist $T \sim \text{PGW}(1)$, so gilt

$$P(T = t) = \frac{A_{\tilde{\mathcal{S}}}(t)}{n!} \cdot e^{-n} \quad (1.22)$$

für alle $t \in \mathcal{S}_n$.

Beweis. Es bezeichne GW den zu T gehörigen Galton-Watson-Baum mit Werten in \mathbb{T} . Es sei $\tau \in \mathbb{T}$ ein fester Baum mit $[\tau] = t$. Dann gilt offenbar

$$P(T = t) = A_{\mathbb{T}}(t) \cdot P(\text{GW} = \tau). \quad (1.23)$$

Da sich die Individuen $v \in \tau$ unabhängig voneinander gemäß einer $\text{Poi}(1)$ -Verteilung vermehren, gilt

$$P(\text{GW} = \tau) = \prod_{v \in \tau} \text{Poi}(1)(|C_v|) = \prod_{v \in \tau} \frac{1}{|C_v|! \cdot e} = e^{-n} \prod_{v \in \tau} \frac{1}{|C_v|!} = e^{-n} \prod_{v \in V_t} \frac{1}{|C_v|!}$$

Aus Lemma 1.1.9 und Lemma 1.2.2 ergibt sich

$$\prod_{v \in V_t} \frac{1}{|C_v|!} = \frac{A_{\tilde{\mathcal{S}}}(t)}{n! \cdot A_{\mathbb{T}}(t)}$$

und das Einsetzen in (1.23) liefert die Behauptung (1.22). \square

Nun verifizieren wir das in (1.19) angekündigte Resultat:

Satz 1.2.12 Ist $T \sim \text{PGW}(1)$, so gilt für alle $n \geq 1$

$$P(T \in \cdot \mid |T| = n) = P(T_n \in \cdot). \quad (1.24)$$

Beweis. Ist $t \in \mathcal{S}_n$, so folgt mit Korollar 1.2.10, Lemma 1.2.11 und (1.9)

$$P(T = t \mid |T| = n) = \frac{P(T = t)}{P(|T| = n)} = A_{\tilde{\mathcal{S}}}(t) \cdot n^{1-n} = P(T_n = t). \quad \square$$

Bemerkung 1.2.13 Ist $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \sim Geo\left(\frac{1}{2}\right)$, d. h. $p_j = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}$, und GW der zugehörige Galton-Watson-Baum mit Werten in \mathbb{T} , so können wir analog – wie in Korollar 1.2.10 und Lemma 1.2.11 –

$$\begin{aligned} P(\text{GW} = \tau) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{T}_n \text{ und} \\ P(|\text{GW}| = n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \cdot \binom{2 \cdot (n-1)}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.25)$$

einsehen. Da $P(\text{GW} = \tau)$ von τ nur über $|\tau|$ abhängt, folgt unmittelbar

$$P(\text{GW} \in \cdot \mid |\text{GW}| = n) = \text{Uniform}(\mathbb{T}_n). \quad (1.26)$$

Hierbei sei $\text{Uniform}(\mathbb{T}_n)$ die Gleichverteilung auf \mathbb{T}_n . Aus (1.25) und (1.26) lässt sich $|\mathbb{T}_n|$, die Anzahl aller verwurzelten, geordneten Bäume mit n Knoten, ablesen. Es gilt

$$|\mathbb{T}_n| = \binom{2 \cdot (n-1)}{n-1} \cdot \frac{1}{n},$$

auch besser bekannt als $(n-1)$ -te *Catalan-Zahl*.

Verbinden wir eine unabhängige Folge von PGW(1)-Bäumen entlang ihrer Wurzeln, so erhalten wir einen weiteren wichtigen Zufallsbaum, der gerade der Verteilungslimes der T_n ist. Um das „Verbinden“ mathematisch zu formulieren, definieren wir:

Definition 1.2.14 Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Bäumen aus \mathcal{S} , und für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = (V_n, E_n, r_n)$ ein Repräsentant von b_n derart, dass $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen ist. Es sei

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} b_i \in \mathcal{S} \quad (1.27)$$

die Restklasse des Baumes

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{r_n, r_{n+1}\}, r_1 \right).$$

Für eine Folge von Zufallsbäumen $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei $\sqcup_{i=1}^{\infty} B_i$ punktweise wie in (1.27) definiert.

Wir beachten, dass $\sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist, und dass die Reihenfolge der b_i eine Rolle spielt, da z. B. die Wurzel von $\sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$ der Wurzel von b_1 entspricht (siehe auch Abbildung 1.6).

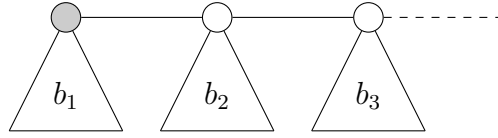


Abbildung 1.6. Der Baum $\sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$.

Definition 1.2.15 Für eine unabhängige Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $B_n \sim \text{PGW}(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, definieren wir

$$\text{PGW}^{\infty}(1) \quad (1.28)$$

als die Verteilung von $\sqcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Ist in (1.27) jedes b_i ein endlicher Baum, so ist $\sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$ ein Baum, der einen eindeutigen, unendlich langen, in der Wurzel startenden Pfad besitzt. In Abschnitt 3.2 untersuchen wir die Menge dieser Bäume genauer.

Wir merken an, dass die Verteilung $\text{PGW}^{\infty}(1)$ nur Masse in dieser speziellen Baumemenge besitzt, da jede der Variablen B_i nach $\text{PGW}(1)$ verteilt ist und somit fast sicher ausstirbt.

1.3. Grimmetts Lemma

Die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei wie in (1.9) gegeben. Grimmetts Lemma stellt die Verbindung zwischen den ersten beiden Abschnitten her.

Satz 1.3.1 (Grimmetts Lemma) Es sei $T_{\infty} \sim \text{PGW}^{\infty}(1)$. Mit $T_n^k = (T_n)_{|k}$ gilt

$$T_n^k \xrightarrow{d} T_{\infty}^k \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle $k \geq 1$. Das Korollar 1.1.20 impliziert

$$T_n \xrightarrow{d} T_{\infty} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis. Verifizieren werden wir die Aussage in Kapitel 3, Satz 3.2.8. Für den ursprünglichen Beweis von Grimmett siehe Theorem 3 in [10]. \square

Als nächstes untersuchen wir die Verteilungskonvergenz gewisser Teilbäume von T_n gegen Teilbäume von T_{∞} . Für $t \in \mathcal{S}$ und Kindermenge C der Wurzel sei

$$\begin{aligned} m_t &= \max\{|t^i| : i \in C\} \text{ und} \\ C_{\max}(t) &= \{t^j : j \in C \text{ mit } |t^j| = m_t\}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Die Zufallsvariable $t_{\max} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathcal{S}$ wähle gleichverteilt einen Baum aus $C_{\max}(t)$. Entfernen wir den Teilbaum t_{\max} von t , so erhalten wir einen Baum t_{\max}^c , der wieder in der Wurzel von t verwurzelt ist.

Anschließend nennen wir die beiden Bäume t_{\max} und t_{\max}^c in t^{small} bzw. t^{big} um, je nachdem, welcher der beiden Teilbäume aus mehr Knoten besteht. Im Gleichheitsfall werfen wir eine Münze, d. h.

$$t^{\text{small}} = \begin{cases} t_{\max} & \text{auf } |t_{\max}| < |t_{\max}^c| \\ t_{\max}^c & \text{auf } |t_{\max}| > |t_{\max}^c| \\ X \cdot t_{\max} + (1 - X) \cdot t_{\max}^c & \text{auf } |t_{\max}| = |t_{\max}^c| \end{cases} \quad (1.30)$$

und

$$t^{\text{big}} = \begin{cases} t_{\max} & \text{auf } |t_{\max}| > |t_{\max}^c| \\ t_{\max}^c & \text{auf } |t_{\max}| < |t_{\max}^c| \\ (1 - X) \cdot t_{\max} + X \cdot t_{\max}^c, & \text{auf } |t_{\max}| = |t_{\max}^c|, \end{cases} \quad (1.31)$$

mit einer Zufallsgröße $X \sim B(1, 1/2)$, die unabhängig von t_{\max} sei. Siehe Abbildung 1.7 für ein Beispiel.

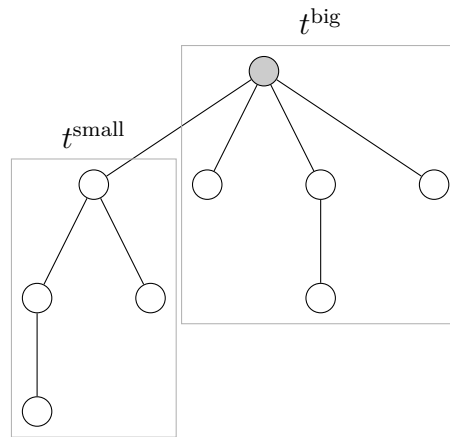


Abbildung 1.7. Baum t mit t^{small} und t^{big} visualisiert. Hier gilt $t_{\max} = t^{\text{small}}$.

Für einen Zufallsbaum T definieren wir T^{small} und T^{big} punktweise, wie in (1.30) und (1.31) beschrieben. Alle auftretenden Münzwürfe und Gleichverteilungen seien unabhängig voneinander und unabhängig von T .

Lemma 1.3.2 Ist $T_\infty \sim \text{PGW}^\infty(1)$, so sind T_∞^{small} und T_∞^{big} unabhängig, und es gilt

$$T_\infty^{\text{small}} \sim \text{PGW}(1) \quad \text{bzw.} \quad T_\infty^{\text{big}} \sim \text{PGW}^\infty(1).$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus der Konstruktion der $\text{PGW}^\infty(1)$ -Verteilung. Der Teilbaum T_∞^j , $j \in C$, der den unendlichen Pfad enthält, besitzt stets unendlich viele Knoten. Der restliche Teil von T_∞ besteht P -fast sicher nur aus endlich vielen Knoten, d. h. es gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 1.2.15

$$\begin{aligned} T_\infty^{\text{small}} &= B_1 \sim \text{PGW}(1) \quad \text{und} \\ T_\infty^{\text{big}} &= \bigsqcup_{i=2}^{\infty} B_i \sim \text{PGW}^\infty(1). \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit von T_∞^{small} und T_∞^{big} ist damit ebenso klar. \square

Lemma 1.3.3 Seien $t, (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Bäume aus \mathcal{S} mit $t_n \rightarrow t$ und t besitze einen eindeutigen größten Teilbaum t^j , $j \in C$, d. h. es gelte

$$|C_{\max}(t)| = 1. \quad (1.32)$$

Dann gilt $|C_{\max}(t_n)| = 1$ für fast alle n , d. h. wir können t_n^{small} und t_n^{big} als Elemente von \mathcal{S} ansehen, und es gilt

$$t_n^{\text{small}} \rightarrow t^{\text{small}} \quad \text{und} \quad t_n^{\text{big}} \rightarrow t^{\text{big}}.$$

Beweis. Aufgrund von (1.32) gilt insbesondere $|t^{\text{small}}| < \infty$. Damit können wir ein $k_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$t^{\text{small}} = (t_{|k})^{\text{small}} \quad (1.33)$$

für alle $k \geq k_0$ gilt. Wir wählen dafür ein k_0 mit $|(t_{|k_0})^{\text{big}}| > |t^{\text{small}}|$, das nach Voraussetzung existiert.

Aus $t_n \rightarrow t$ folgt, dass die Folge $((t_n)_{|l})_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes l konstant $t_{|l}$ wird. Demnach gilt $|C_{\max}(t_n)| = 1$ für fast alle n und wir erhalten wie gewünscht $t_n^{\text{small}} \rightarrow t^{\text{small}}$ und $t_n^{\text{big}} \rightarrow t^{\text{big}}$, wenn wir (1.33) beachten. \square

Satz 1.3.4 Für die Folge der Zufallsbäume $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$(T_n^{\text{small}}, T_n^{\text{big}}) \xrightarrow{d} (T_\infty^{\text{small}}, T_\infty^{\text{big}}), \quad (1.34)$$

wobei T_∞^{small} und T_∞^{big} unabhängig mit $T_\infty^{\text{small}} \sim \text{PGW}(1)$ und $T_\infty^{\text{big}} \sim \text{PGW}^\infty(1)$ sind.

Beweis. Aus Grimmetts Lemma folgt $T_n \xrightarrow{d} T_\infty \sim \text{PGW}^\infty(1)$. Gemäß Theorem 1.1.21 existiert eine Kopienfolge $S_\infty, (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ mit $S_n \rightarrow S_\infty$ P' -fast sicher und $S_n \sim T_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für S_∞ ist P' -fast sicher die Voraussetzung von Lemma 1.3.3 erfüllt, somit folgt

$$(S_n^{\text{small}}, S_n^{\text{big}}) \rightarrow (S_\infty^{\text{small}}, S_\infty^{\text{big}}) \quad P'\text{-f. s.} \quad (1.35)$$

Wir beachten nun, dass die Verteilungen von $(S_n^{\text{small}}, S_n^{\text{big}})$ und $(T_n^{\text{small}}, T_n^{\text{big}})$ übereinstimmen, auch wenn wir S_n nur so gewählt haben, dass $S_n \sim T_n$ gilt. Der Grund dafür liegt darin, dass die Verteilung von $(S_n^{\text{small}}, S_n^{\text{big}})$ nur von der Verteilung von S_n abhängt.

Die fast sichere Konvergenz in (1.35) impliziert die Verteilungskonvergenz der Folge, also gilt, wie in (1.34) behauptet,

$$(T_n^{\text{small}}, T_n^{\text{big}}) \stackrel{d}{=} (S_n^{\text{small}}, S_n^{\text{big}}) \xrightarrow{d} (S_\infty^{\text{small}}, S_\infty^{\text{big}}) \stackrel{d}{=} (T_\infty^{\text{small}}, T_\infty^{\text{big}}).$$

Die restlichen Behauptungen ergeben sich aus Lemma 1.3.2. \square

1.4. Die Problemstellung

Wir führen nun den Begriff der gewichteten Paarung ein, beschränken uns in diesem Abschnitt aber auf eine feste Kantengewichtsfunktion und einen fixierten Baum, um uns mit den Definitionen vertraut zu machen.

Paarungen für Zufallsbäume mit zufälligen Gewichten werden im anschließenden Abschnitt 1.5 definiert.

Definition 1.4.1 (a) Eine *Paarung* (oder auch: *ein matching*) eines Baumes $t = (V_t, E_t, r)$ ist eine Teilmenge $S \subseteq E_t$, so dass je zwei verschiedene Kanten aus S keinen gemeinsamen Knoten besitzen, d. h. für alle $\{v_1, v_2\} \neq \{w_1, w_2\}$ aus S gilt $\{v_1, v_2\} \cap \{w_1, w_2\} = \emptyset$.

(b) Es bezeichne $P(t)$ die Menge aller Paarungen von t .

Wir sagen, dass eine Paarung S einen Knoten v enthält, wenn es eine Kante e in S gibt, die den Knoten v enthält.

Paarungen werden unter Isomorphismen auf Paarungen abgebildet, genauer gilt: Sind t, t' zwei markierte Bäume, die via f isomorph sind, und ist S eine Paarung von t , so wird durch

$$\bar{f}(S) = \{\{f(v), f(w)\} : \{v, w\} \in S\}$$

eine Paarung von t' definiert. Wie wir schnell erkennen, induziert f auf diese Weise eine Bijektion zwischen $P(t)$ und $P(t')$.

Definition 1.4.2 Sei $t = (V_t, E_t, r)$ ein endlicher markierter Baum und $w : E_t \rightarrow [0, \infty)$ eine *Kantengewichtsfunktion*. w induziert das *Gewicht der Paarung* S durch

$$w(S) = \sum_{e \in S} w(e).$$

Ist S^* eine Paarung von t mit $w(S^*) \geq w(S)$ für alle $S \in P(t)$, so nennen wir S^* eine *maximal gewichtete Paarung* von t . Wir definieren

$$M(t) = w(S^*) = \max_{S \in P(t)} w(S), \quad (1.36)$$

das *maximale Gewicht einer Paarung* von t .

Wir geben die Definition $M(t)$ auch für Bäume $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$: Sind t', t zwei markierte Bäume, die via $f : V_{t'} \rightarrow V_t$ isomorph sind, und ist w eine Kantengewichtsfunktion von t , so wird durch $w' = w \circ \bar{f}$ eine Kantengewichtsfunktion von t' definiert, die

$$\max_{S \in P(t')} w'(S) = \max_{S \in P(t)} w(S)$$

erfüllt. Demzufolge ist der Ausdruck $M(t)$ für $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ wohldefiniert, wenn wir w auf einem Repräsentanten von t definiert haben und auf allen anderen Repräsentanten die Gewichte entsprechend der Definition w' setzen.

Für den Rest des Abschnittes sei ein Baum $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und eine Kantengewichtsfunktion w auf einem Repräsentanten von t fixiert. Auf jedem Teilbaum von t induziert w eine Kantengewichtsfunktion des Teilbaumes.

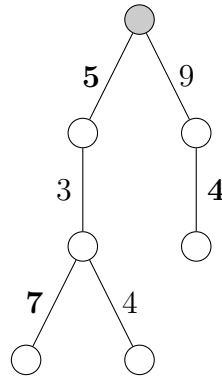


Abbildung 1.8. Beispiel eines Baumes t mit $M(t) = 16$. Wir beachten, dass t zwei maximal gewichtete Paarungen besitzt.

Lemma 1.4.3 Sei C die Kindermenge der Wurzel r von t . Existiert für t eine maximal gewichtete Paarung, die die Wurzel nicht enthält, so gilt

$$M(t) = \sum_{i \in C} M(t^i). \quad (1.37)$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich dadurch, dass es zwischen t^i und t^j , $i \neq j$, keine Verbindungskanten gibt. \square

Ist die Voraussetzung des Lemmas nicht erfüllt, so gilt (1.37) im Allgemeinen nicht mehr. Mit der nächsten Definition fangen wir die Größe ein, die angibt, um wie viel sich beide Seiten unterscheiden. Sei dazu $P_r(t)$ die Menge aller Paarungen von t , die die Wurzel nicht enthalten, d. h.

$$P_r(t) = \{S \in P(t) : r \notin e \text{ für alle } e \in S\} \quad (1.38)$$

für $t = (V_t, E_t, r)$.

Wir definieren $B(t)$ so, dass $M(t) - B(t)$ das maximale Gewicht einer Paarung angibt, die die Wurzel von t nicht enthält, d. h.

$$M(t) - B(t) = \max_{S \in P_r(t)} w(S). \quad (1.39)$$

Wir beachten, dass $B(t)$ ebenfalls für Bäume $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ ein wohldefinierter Ausdruck ist.

Lemma 1.4.4 Für $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ gilt stets $B(t) \geq 0$ und

$$M(t) - B(t) = \sum_{i \in C} M(t^i). \quad (1.40)$$

Beweis. Aus der Optimalität von $M(t)$ folgt $B(t) \geq 0$. (1.40) ergibt sich daraus, dass es zwischen t^i und t^j , $i \neq j$, keine Verbindungskanten gibt. \square

Lemma 1.4.5 Existiert für $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ eine maximal gewichtete Paarung, die die Wurzel r enthält, so gilt

$$M(t) = \max_{j \in C} \{w(\{r, j\}) - B(t^j)\} + \sum_{i \in C} M(t^i). \quad (1.41)$$

Beweis. Ist S_j eine maximal gewichtete Paarung von t , die die Kante $e_j = \{r, j\}$ zwischen der Wurzel r und einem $j \in C$ enthält, so gilt nach Definition von $B(\cdot)$

$$M(t) = w(e_j) + M(t^j) - B(t^j) + \sum_{\substack{i \in C \\ i \neq j}} M(t^i) = w(e_j) - B(t^j) + \sum_{i \in C} M(t^i).$$

Eine Maximierung über alle $j \in C$ liefert (1.41), unter Beachtung der Voraussetzung. \square

Wir kommen nun zur wichtigsten Darstellung von $B(t)$. Aus ihr leiten wir im zweiten Kapitel eine stochastische Fixpunktgleichung ab (siehe Satz 2.2.2).

Satz 1.4.6 Für $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ mit Wurzel r gilt

$$B(t) = \max_{i \in C} \{0, w(\{r, i\}) - B(t^i)\}. \quad (1.42)$$

Beweis. Existiert für t eine maximal gewichtete Paarung, die die Wurzel enthält, so gilt aufgrund von (1.40) und (1.41)

$$B(t) = M(t) - \sum_{i \in C} M(t^i) = \max_{j \in C} \{w(\{r, j\}) - B(t^j)\},$$

und da $B(t) \geq 0$ ist, folgt (1.42).

Im anderen Fall ist $B(t) = 0$ und wir haben

$$B(t^j) \geq w(\{r, j\})$$

für alle $j \in C$ zu zeigen.

Sei dazu j fixiert und S^* eine maximal gewichtete Paarung von t , die die Wurzel nicht enthält. Wir definieren eine Paarung S durch:

- S enthalte die Kante $\{r, j\}$,
- S enthalte alle Kanten einer maximal gewichteten Paarung von t^j , die die Wurzel von t^j nicht enthält, und
- S enthalte alle Kanten aus S^* , die sich in den Teilbäumen t^i , $i \neq j$, befinden.

Damit gilt

$$w(S) = w(\{r, j\}) + M(t^j) - B(t^j) + \sum_{\substack{i \in C \\ i \neq j}} M(t^i)$$

und aufgrund von (1.37) und der Optimalität von S^*

$$B(t^j) - w(\{r, j\}) = w(S^*) - w(S) \geq 0. \quad \square$$

Wir nutzen die rekursive Struktur eines Baumes aus, um eine alternative Darstellung für $M(t)$ zu finden: Für $t \in \mathcal{S}$ und eine Kante $e \in E_t$ von t seien

$$t^{\text{small}}(e) \quad \text{und} \quad t^{\text{big}}(e) \tag{1.43}$$

die beiden Teilbäume von t , die durch das Entfernen von e aus t entstehen und deren Wurzeln die beiden Knoten seien, die von e verbunden werden.

Wie in (1.30) soll die Mächtigkeit der Knotenmenge von $t^{\text{small}}(e)$ kleiner sein als die Mächtigkeit der Knotenmenge von $t^{\text{big}}(e)$. Im Gleichheitsfalle werfen wir eine faire Münze.

Wir beachten, dass der Ausgang des Münzwurfes keinen Einfluss auf die Summen

$$M(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)) \quad \text{und} \quad B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e))$$

hat.

Lemma 1.4.7 Ist $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und S^* eine maximal gewichtete Paarung von t mit der Eigenschaft

$$e \in S^* \quad \Rightarrow \quad M(t) > M(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)), \tag{1.44}$$

so gilt

$$S^* = \{e \in E : w(e) > B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e))\}. \tag{1.45}$$

Insbesondere ist S^* die einzige maximal gewichtete Paarung von t .

Beweis. Wir merken als erstes an, dass stets

$$M(t) \geq M(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)) \quad (1.46)$$

gilt, da $t^{\text{small}}(e)$ und $t^{\text{big}}(e)$ zwei disjunkte Teilbäume von t sind.

Für $e \in E_t$ gelten nun folgende Äquivalenzen:

$$e \notin S^* \Leftrightarrow M(t) = M(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)) \quad \text{und} \quad (1.47)$$

$$e \in S^* \Leftrightarrow M(t) > M(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)). \quad (1.48)$$

Die Hinrichtung von (1.47) ist klar und die Rückrichtung folgt aus (1.44). Die Aussage (1.48) ist nur die Verneinung von (1.47), unter Beachtung von (1.46). Für $e \in S^*$ gilt jedoch nach Definition von $B(\cdot)$

$$M(t) = w(e) + M(t^{\text{small}}(e)) - B(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)) - B(t^{\text{big}}(e)).$$

Ein Vergleich mit (1.48) zeigt,

$$e \in S^* \Leftrightarrow w(e) > B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e)),$$

wie in (1.45) behauptet. □

1.5. Zufällige Gewichte

Wie bereits mehrfach erwähnt, sind wir nicht an einer festen Gewichtsfunktion interessiert, sondern betrachten zufällige Bäume mit zufälligen Gewichten. Für $t \in \mathcal{S}$ und jede Kante e von t nehmen wir die Existenz einer Zufallsgröße

$$\xi_e^t : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow [0, \infty)$$

an, derart, dass die Familie aller Gewichte

$$\mathcal{G} = \{\xi_e^t : t \in \mathcal{S}, e \in E_t\} \quad (1.49)$$

stochastisch unabhängig ist, und jedes ξ_e^t die Verteilung F besitzt. Für ein festes $t \in \mathcal{S}$ und $\omega \in \Omega$ betrachten wir die Kantengewichtsfunktion

$$e \mapsto \xi_e^t(\omega)$$

und nennen einen von \mathcal{G} unabhängigen Zufallsbaum T einen *Zufallsbaum mit F -verteilten Kantengewichten*.

Wir halten eine Verteilung F auf $[0, \infty)$ fixiert und unterstellen für alle betrachteten Zufallsbäume, dass sie F -verteilte Kantengewichte besitzen.

In Anlehnung an die Ausgangsproblemstellung führen wir jetzt die Zufallsgrößen $M(T)$ und $B(T)$ ein. Sei dazu T ein endlicher Zufallsbaum mit F -verteilten Kantengewichten. Wir definieren $M(T)$ als die Zufallsgröße

$$M(T) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow [0, \infty),$$

die für $\omega \in \Omega$ das maximale Gewicht einer Paarung des Baumes $t = T(\omega)$ mit zugrundeliegender Gewichtsfunktion $e \mapsto \xi_e^t(\omega)$ angibt. Also gilt

$$M(T) = \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \max_{S \in P(t)} \sum_{e \in S} \xi_e^t. \quad (1.50)$$

Die Zufallsgröße $B(T)$ auf (Ω, \mathcal{A}, P) sei so definiert, dass $M(T) - B(T)$ das maximale Gewicht einer Paarung angibt, die die Wurzel nicht enthält, d. h.

$$M(T) - B(T) = \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \max_{S \in P_r(t)} \sum_{e \in S} \xi_e^t. \quad (1.51)$$

Lemma 1.5.1 Sind $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, X_\infty$ endliche Zufallsbäume mit F -verteilten Kantengewichten und konvergiert X_n in Verteilung gegen X_∞ , so gilt

$$M(X_n) \xrightarrow{d} M(X_\infty) \quad \text{und} \quad B(X_n) \xrightarrow{d} B(X_\infty).$$

Beweis. Unter Beachtung des Theorems 1.1.21 nehmen wir ohne Einschränkung $X_n \rightarrow X_\infty$ P -f. s. an.

Ist $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge endlicher Bäume mit $t_n \rightarrow t$ und $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$, so wird die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab einem Index konstant t , denn alle auftretenden Bäume sind endlich.

Damit ist auch $M(t_n)$ ab einem Index konstant. Insbesondere folgt $M(t_n) \rightarrow M(t)$ P -f. s. und $M(X_n) \rightarrow M(X_\infty)$ P -f. s. Analog folgern wir $B(X_n) \rightarrow B(X_\infty)$ P -f. s. \square

Der nächste Satz bildet das Pendant zu Satz 1.4.6. Auch wenn ein Beweis nicht nötig ist, halten wir diese wichtige Verteilungsgleichheit für $B(T)$ in einem eigenen Satz fest.

Satz 1.5.2 Für einen endlichen Zufallsbaum T mit F -verteilten Kantengewichten gilt

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \max\{0, \xi_i^t - B(t^i) : i \in C(t)\}, \quad (1.52)$$

wobei ξ_i^t das Gewicht der Kante zwischen der Wurzel von t und dem Kind $i \in C(t)$ sei.

Beweis. In Satz 1.4.6 wurde (1.52) punktweise überprüft. \square

Abbildung 1.4 auf Seite 24 gibt ein Beispiel für einen Baum, der zwei maximal gewichtete Paarungen besitzt. Ist die Kantengewichtsverteilung F stetig, so tritt dieses Phänomen fast sicher nicht auf.

Satz 1.5.3 Ist F eine stetige Verteilung auf $[0, \infty)$ und T ein endlicher Zufallsbaum mit F -verteilten Kantengewichten, so gilt

$$M(T) \stackrel{d}{=} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \sum_{e \in E_t} \xi_e^t \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_e^t > B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e))\}}. \quad (1.53)$$

Beweis. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen, dass für P -fast alle ω die Voraussetzung (1.44) von Lemma 1.4.7 an $t = T(\omega)$ erfüllt ist.

Zu zeigen ist demnach, dass für P -fast alle ω eine maximal gewichtete Paarung $S^* = S^*(\omega)$ von $t = T(\omega)$ derart existiert, dass

$$M(t) > M(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)) \quad P\text{-fast sicher} \quad (1.54)$$

für jede Kante $e \in S^*$ gilt.

Ist S^* eine maximal gewichtete Paarung von t und $e \in S^*$, so gilt

$$M(t) = \xi_e^t + M(t^{\text{small}}(e)) - B(t^{\text{small}}(e)) + M(t^{\text{big}}(e)) - B(t^{\text{big}}(e)),$$

also

$$M(t) - M(t^{\text{small}}(e)) - M(t^{\text{big}}(e)) = \xi_e^t - B(t^{\text{small}}(e)) - B(t^{\text{big}}(e)).$$

Die zu zeigende Ungleichung (1.54) vereinfacht sich dadurch zu

$$\xi_e^t > B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e)) \quad P\text{-fast sicher}. \quad (1.55)$$

Da $B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e))$ stochastisch unabhängig von ξ_e^t , und ξ_e^t nach Voraussetzung stetig verteilt ist, gilt

$$\xi_e^t \neq B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e)) \quad P\text{-fast sicher},$$

und mit Blick auf (1.46) folgt auch (1.55). \square

Für jeden Baum $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ sei $e(t)$ eine auf E_t gleichverteilte und von den Gewichten \mathcal{G} stochastisch unabhängige Zufallsvariable. Für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ erhalten wir

$$\sum_{e \in E_t} \xi_e^t \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_e^t > B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e))\}} = |E_t| \cdot \xi_{e(t)}^t \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_{e(t)}^t > B(t^{\text{small}}(e(t))) + B(t^{\text{big}}(e(t)))\}}. \quad (1.56)$$

Aus (1.53) leiten wir auch eine nützliche Darstellung von $\mathbb{E}M(T)$ für stetige F ab:

Korollar 1.5.4 Ist F eine stetige Verteilung auf $[0, \infty)$ und T ein endlicher Zufallsbaum mit F -verteilten Kantengewichten, so gilt

$$\mathbb{E}M(T) = \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} |E_t| \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > B(t^{\text{small}}(e(t))) + B(t^{\text{big}}(e(t)))\}}), \quad (1.57)$$

wobei ξ nach F verteilt und stochastisch unabhängig von T und \mathcal{G} ist.

Beweis. Aus (1.53) und (1.56) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M(T) &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \sum_{e \in E_t} \xi_e^t \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_e^t > B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e))\}}) \\ &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} |E_t| \cdot \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \xi_{e(t)}^t \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_{e(t)}^t > B(t^{\text{small}}(e(t))) + B(t^{\text{big}}(e(t)))\}}). \end{aligned}$$

Da jedes ξ_e^t unabhängig von T und $\mathcal{G} \setminus \{\xi_e^t\}$ ist und die gleiche Verteilung F besitzt, können wir $\xi_{e(t)}^t$ durch ξ ersetzen. \square

Wir halten die Ergebnisse aus Satz 1.5.3 und Korollar 1.5.4 noch einmal für die speziellen Bäume T_n aus (1.9) fest. (1.57) vereinfacht sich in diesem Fall, denn es gilt $|E_{T_n}| = n - 1$. Wir setzen abkürzend $e_n = e(T_n)$ und $M_n = M(T_n)$.

Korollar 1.5.5 Ist F eine stetige Verteilung auf $[0, \infty)$, so gilt für alle $n \geq 1$

$$M_n \stackrel{d}{=} \sum_{t \in \mathcal{S}_n} \mathbb{1}_{\{T_n=t\}} \sum_{e \in E_t} \xi_e^t \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_e^t > B(t^{\text{small}}(e)) + B(t^{\text{big}}(e))\}} \quad (1.58)$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M_n &= (n - 1) \sum_{t \in \mathcal{S}_n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T_n=t\}} \cdot \xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > B(t^{\text{small}}(e(t))) + B(t^{\text{big}}(e(t)))\}}) \\ &= (n - 1) \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > B(T_n^{\text{small}}(e_n)) + B(T_n^{\text{big}}(e_n))\}}), \end{aligned} \quad (1.59)$$

mit $\xi \sim F$ und stochastisch unabhängig von $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und \mathcal{G} .

Für das weitere Verstehen der Asymptotik von $\mathbb{E}M_n$ werden wir im anschließenden Kapitel die Folgen $B(T_n^{\text{small}}(e_n))$ und $B(T_n^{\text{big}}(e_n))$ genauer untersuchen müssen. Vorweg sei erwähnt, dass unter den Voraussetzungen, dass F stetig ist und einen endlichen Erwartungswert besitzt, $\mathbb{E}M_n$ sich für $n \rightarrow \infty$ wie $n \cdot \gamma$ verhält, wobei die Konstante γ nur von F abhängt. In einigen Fällen können wir γ explizit berechnen.

2. Charakterisierung der Grenzwerte von $B(T_n^{\text{small}})$ und $B(T_n^{\text{big}})$

Wie in (1.9) seien die Zufallsbäume T_n so geschaffen, dass wir zunächst gleichverteilt einen Baum aus der n^{n-1} -elementigen Menge aller verwurzelten Bäume mit n Knoten wählen. Anschließend vergessen wir die Knotenmarkierung, d. h. wir sehen den Baum als Element der in (1.3) definierten Menge \mathcal{S}_n an.

Des Weiteren erinnern wir an die Definition von $M_n = M(T_n)$ aus (1.50). M_n gibt das maximale Gewicht einer Paarung von T_n an, wenn wir auf den Kanten von T_n unabhängige, nichtnegative und nach F verteilte Gewichte \mathcal{G} ansetzen.

Das Ziel des Kapitels ist es, die Asymptotik von $\mathbb{E}M_n$ zu verstehen. Korollar 1.5.5 zeigt, dass wir dafür die Folgen $B(T_n^{\text{small}}(e_n))$ und $B(T_n^{\text{big}}(e_n))$ genauer untersuchen müssen.

Die Verteilungslimiten von T_n^{small} und T_n^{big} kennen wir bereits aus Abschnitt 1.3, Satz 1.3.4. Der erste Abschnitt dieses Kapitels gibt eine positive Antwort auf die Frage, ob mit $B(T_n^{\text{small}})$ bzw. $B(T_n^{\text{big}})$ auch $B(T_n^{\text{small}}(e_n))$ bzw. $B(T_n^{\text{big}}(e_n))$ in Verteilung konvergieren.

2.1. t^{small} vs. $t^{\text{small}}(\mathbf{e}(t))$

Das Ziel dieses technischen Abschnittes sind die Abschätzungen (2.1) und (2.2).

Lemma 2.1.1 Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| P\left(B(T_n^{\text{small}}(e_n)) \leq x\right) - P\left(B(T_n^{\text{small}}) \leq x\right) \right| \leq \frac{1}{n} \quad (2.1)$$

und

$$\left| P\left(B(T_n^{\text{big}}(e_n)) \leq x\right) - P\left(B(T_n^{\text{big}}) \leq x\right) \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (2.2)$$

Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten v von t die Wurzel von $t^{\text{small}}(e(t))$ bzw. $t^{\text{big}}(e(t))$ wird. $e(t)$ sei wie vor Korollar 1.5.4 definiert als eine von den Gewichten \mathcal{G} unabhängige und auf E_t gleichverteilte Zufallsvariable.

Wir beachten, dass die gesuchten Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p_v^{\text{small}} &= P(v \text{ ist die Wurzel von } t^{\text{small}}(e(t))) \quad \text{und} \\ p_v^{\text{big}} &= P(v \text{ ist die Wurzel von } t^{\text{big}}(e(t))) \end{aligned} \quad (2.3)$$

überhaupt wohldefiniert sind, weil sie nicht von einer Repräsentantenwahl vom Baum $t \in \mathcal{S}_n$ abhängen. Zudem hängt (2.3) nicht davon ab, in welchem Knoten t verwurzelt ist. Wir gehen deshalb im Folgenden davon aus, dass t ein unverwurzelter, markierter Baum mit Knotenmenge V_t und Kantenmenge E_t ist.

Wir betrachten nun die beiden Aussagen:

A Für $t = (V_t, E_t)$ existiert genau ein $u \in V_t$ mit $u \notin t^{\text{small}}(e)$ für alle $e \in E_t$.¹

B Für $t = (V_t, E_t)$ existiert genau ein $e = \{v, w\} \in E_t$ mit $|t^{\text{small}}(e)| = |t^{\text{big}}(e)|$.

Lemma 2.1.2 Ist $t = (V_t, E_t)$ ein unverwurzelter Baum mit $n \geq 2$ Knoten, so gilt:

(a) Ist n ungerade, so hat t die Eigenschaft A.

(b) Ist n gerade, so hat t entweder die Eigenschaft A oder die Eigenschaft B.

Beweis. Es ist klar, dass A und B sich ausschließen, denn im Fall B ist ein Münzwurf erforderlich, um $t^{\text{small}}(e)$ bzw. $t^{\text{big}}(e)$ festzulegen (vgl. Definition (1.43)).

Für den Beweis von (a) und (b) konstruieren wir für jeden unverwurzelten Baum $t = (V_t, E_t)$ einen Pfad $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ in t , auf dem wir nach den Knoten u , v und w suchen.

Sei v_1 ein Blatt von t und $t(v_1)$ der Baum t , verwurzelt in v_1 . Als Blatt besitzt v_1 nur ein Kind v_2 . Induktiv fahren wir fort: Ist $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_i$ definiert, so wählen wir einen Kinderknoten v_{i+1} von v_i derart, dass der Teilbaum, der an v_{i+1} hängt, maximale Größe besitzt unter allen Kinderteilbäumen von v_i , d. h.

$$v_{i+1} \in \{v \in C_{v_i} : |t^v| = \max\{|t^j| : j \in C_{v_i}\}\}. \quad (2.4)$$

Dies liefert einen Pfad $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ in t , dessen Endknoten v_k wiederum ein Blatt ist. Entfernen wir für $i = 1, \dots, k-1$ die Kante zwischen v_i und v_{i+1} , so zerlegt sich t in zwei Bäume, t_i und t_i^c (vgl. dazu Abbildung 2.1).

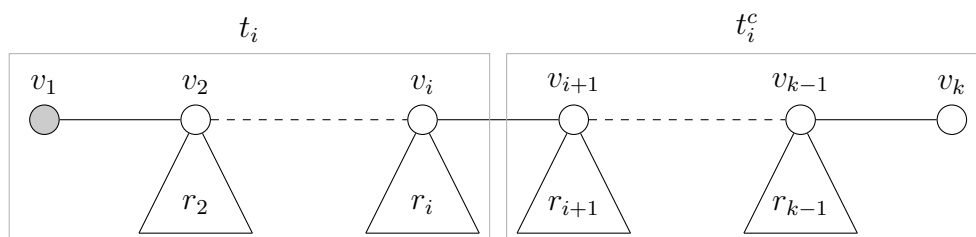


Abbildung 2.1. Der Pfad $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ und die Zerlegung von t in t_i und t_i^c .

Wir wählen nun $i \in \{1, \dots, k-1\}$ maximal, so dass

$$|t_i| \leq |t_i^c| \quad (2.5)$$

¹ $u \notin t^{\text{small}}(e)$ bedeutet, dass u nicht in der Knotenmenge von $t^{\text{small}}(e)$ vorkommt.

gilt. Dieses i existiert, da t_1 nur aus dem Blatt v_1 besteht, d. h. $|t_1| = 1 \leq n - 1 = |t_i^c|$ gilt.

Herrscht in (2.5) Gleichheit, so befinden wir uns im Fall **B** mit $v = v_i$ und $w = v_{i+1}$. Die Eindeutigkeit dieser Knoten ist – genauso wie die Tatsache, dass n aufgrund von $|t_i| + |t_i^c| = |t| = n$ gerade sein muss – unmittelbar klar.

Von nun an gelte also

$$|t_i| < |t_i^c|, \quad (2.6)$$

und wir weisen die Eigenschaft **A** mit $u = v_{i+1}$ nach. Sei dafür e eine Kante von t . Durch einige Fallunterscheidungen zeigen wir $u \notin t^{\text{small}}(e)$:

- Ist e eine Kante von t_i , so folgt aus (2.6), dass $t^{\text{small}}(e)$ ein Teilbaum von t_i ist. Für $e = \{v_i, u\}$ ist $t^{\text{small}}(e) = t_i$, gemäß (2.6). In beiden Fällen gilt somit $u \notin t^{\text{small}}(e)$.
- Sei jetzt e eine Kante von t_{i+1}^c oder $e = \{u, v_{i+2}\}$. Durch die Maximalität von i in (2.5) gilt

$$|t_{i+1}| > |t_{i+1}^c|.$$

Dies impliziert, dass $t^{\text{small}}(e)$ ein Teilbaum von t_{i+1}^c ist. Im Fall $e = \{u, v_{i+2}\}$ ist $t^{\text{small}}(e) = t_{i+1}^c$. Mit $u \notin t_{i+1}^c$ gilt auch $u \notin t^{\text{small}}(e)$.

- Es bleibt der Fall, dass e eine Kante von r_{i+1} ist (vgl. Abbildung 2.1). Hier sichert aber die Wahl des Knotens v_{i+2} in (2.4), dass $|t^{\text{small}}(e)| < |t_{i+1}^c| + 1$ gilt. Mithin ist $u \notin t^{\text{small}}(e)$.

Zu zeigen ist nun noch die Eindeutigkeit von u in **A**. Ist x ein von u verschiedener Knoten und e eine Kante des Pfades $u \rightarrow \dots \rightarrow x$, so gilt nach Voraussetzung $u \notin t^{\text{small}}(e)$, nach Wahl von e dann $x \in t^{\text{small}}(e)$, d. h. x kann **A** nicht erfüllen. \square

Je nachdem, ob t die Eigenschaft **A** oder **B** besitzt, lassen sich jetzt die Wahrscheinlichkeiten (2.3) bestimmen. Dazu setzen wir für einen unverwurzelten Baum $t = (V_t, E_t)$ und ein $x \in V_t$ die Menge der Nachbarn von x als

$$N(x) = \{y \in V_t : \{x, y\} \in E_t\}. \quad (2.7)$$

Es gilt offenbar

$$\sum_{x \in V_t} |N(x)| = 2 \cdot |E_t| = 2 \cdot (n - 1). \quad (2.8)$$

Lemma 2.1.3 Hat t die Eigenschaft **A**, so gilt

$$p_u^{\text{small}} = 0 \quad \text{und} \quad p_u^{\text{big}} = \frac{|N(u)|}{n - 1} \quad (2.9)$$

und für $x \neq u$

$$p_x^{\text{small}} = \frac{1}{n-1} \quad \text{und} \quad p_x^{\text{big}} = \frac{|N(x)| - 1}{n-1}. \quad (2.10)$$

Hat t die Eigenschaft **B**, so gilt für $x \in \{v, w\}$

$$p_x^{\text{small}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \quad \text{und} \quad p_x^{\text{big}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{|N(x)| - 1}{n-1} \quad (2.11)$$

und für $x \notin \{v, w\}$

$$p_x^{\text{small}} = \frac{1}{n-1} \quad \text{und} \quad p_x^{\text{big}} = \frac{|N(x)| - 1}{n-1}. \quad (2.12)$$

Beweis. Die Gleichungen (2.9) sind aufgrund von $u \notin t^{\text{small}}(e(t))$ klar. Für den Nachweis von (2.10) sei $x \neq u$ und $v_1 = x \rightarrow \dots \rightarrow v_k = u$ der Pfad von x nach u .

Ist e eine Kante von t , so gilt $u \notin t^{\text{small}}(e)$ und damit

$$x \text{ ist die Wurzel von } t^{\text{small}}(e) \quad \Leftrightarrow \quad e = \{x, v_2\},$$

sowie

$$x \text{ ist die Wurzel von } t^{\text{big}}(e) \quad \Leftrightarrow \quad e = \{x, y\} \text{ für ein } y \neq v_2.$$

Dies zeigt (2.10).

t habe nun die Eigenschaft **B**. (2.11) ergibt sich aus der Randomisierung im Fall $e(t) = \{v, w\}$. Für (2.12) argumentieren wir genauso wie in (2.10), diesmal mit dem Pfad $v_1 = x \rightarrow \dots \rightarrow v_k = v$. \square

Um ähnliche Untersuchungen für t^{small} durchzuführen, muss t eine Wurzel besitzen, da der Ausdruck t^{small} sonst gar nicht definiert ist. Sei $v(t)$ eine von \mathcal{G} unabhängige, auf V_t gleichverteilte Zufallsvariable. Wir betrachten t von nun an als Zufallsbaum, der in $v(t)$ verwurzelt ist. Analog zu (2.3) definieren wir

$$\begin{aligned} q_x^{\text{small}} &= P(x \text{ ist die Wurzel von } t^{\text{small}}) \quad \text{und} \\ q_x^{\text{big}} &= P(x \text{ ist die Wurzel von } t^{\text{big}}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wir erinnern an die Notation (1.29) aus Abschnitt 1.3:

$$\begin{aligned} m_t &= \max\{|t^i| : i \in C\} \text{ und} \\ C_{\max}(t) &= \{t^j : j \in C \text{ mit } |t^j| = m_t\}. \end{aligned}$$

Eine einfache Überlegung zeigt, dass $|C_{\max}(t)| > 1$ nur gelten kann, wenn t die Eigenschaft **A** besitzt und $v(t) = u$ gilt. Daher setzen wir

$$M(u) = \{j \in N(u) : t^j \in C_{\max}(t)\} \quad (2.14)$$

für einen Baum t , der die Eigenschaft **A** besitzt und in u verwurzelt ist.

Lemma 2.1.4 Für den in $v(t)$ verwurzelten Zufallsbaum t gilt:

Hat t die Eigenschaft **A**, so ist

$$q_u^{\text{small}} = 0 \quad \text{und} \quad q_u^{\text{big}} = \frac{1 + |N(u)|}{n} \quad (2.15)$$

und für $x \neq u$

$$q_x^{\text{small}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|M(u)|} \cdot \mathbb{1}_{M(u)}(x) \quad \text{und} \quad q_x^{\text{big}} = \frac{|N(x)| - 1}{n}. \quad (2.16)$$

Hat t die Eigenschaft **B**, so gilt für $x \in \{v, w\}$

$$q_x^{\text{small}} = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad q_x^{\text{big}} = \frac{|N(x)|}{n} \quad (2.17)$$

und für $x \notin \{v, w\}$

$$q_x^{\text{small}} = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad q_x^{\text{big}} = \frac{|N(x)| - 1}{n}. \quad (2.18)$$

Beweis. Beginnen wir mit Fall **A**.

Da u stets ein Knoten des Baumes t^{big} ist, gilt $q_u^{\text{small}} = 0$.

- Ist $v(t) \in N(u) \cup \{u\}$, so ist u die Wurzel von t^{big} . Aufgrund der Gleichung

$$P(v(t) \in N(u) \cup \{u\}) = \frac{1 + |N(u)|}{n}$$

folgt (2.15).

- Im Fall $v(t) = u$ ist die Wurzel von t^{small} ein Element aus $M(u)$, welches gleichverteilt gewählt wird. Dies erklärt den Summanden $n^{-1} \cdot |M(u)|^{-1} \cdot \mathbb{1}_{M(u)}(x)$ in (2.16).
- Nehmen wir nun an, dass $v(t) = x \neq u$ gilt. In diesem Fall ist $|C_{\max}(t)| = 1$ und x die Wurzel von t^{small} . Bezeichnet $u = v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k = x$ den Pfad von u nach x , so ist für $v(t) \in N(x) \setminus \{v_{k-1}\}$ die Wurzel von t^{big} der Knoten x , denn der Teilbaum t^x enthält u .

Alle Fälle zusammen ergeben (2.16).

Es liege nun Fall **B** vor.

- Für $v(t) \in \{v, w\}$ muss ein Münzwurf entscheiden, welcher Teilbaum t^{small} bzw. t^{big} ist. Ist $v(t) \in N(v) \setminus \{w\}$, so ist v stets die Wurzel von t^{big} . Eine analoge Aussage lässt sich für w formulieren.

- Für $v(t) = x \notin \{v, w\}$ ist x offenbar die Wurzel von t^{small} , denn der Teilbaum t^j , $j \in C$, der v und w enthält, besitzt mindestens $\frac{n}{2} + 1$ Knoten.
- Ist $x \notin \{v, w\}$, $v = v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k = x$ der Pfad von v nach x und $v(t) \in N(x) \setminus \{v_{k-1}\}$, so ist x die Wurzel von t^{big} , denn der Teilbaum t^x enthält v und w .

Fassen wir alle Fälle zusammen, so erhalten wir (2.17) und (2.18). \square

Wir berechnen nun jeweils den Totalvariationsabstand zwischen den Verteilungen

$$p^{\text{small}} = (p_x^{\text{small}})_{x \in V_t} \quad \text{und} \quad q^{\text{small}} = (q_x^{\text{small}})_{x \in V_t}$$

bzw.

$$p^{\text{big}} = (p_x^{\text{big}})_{x \in V_t} \quad \text{und} \quad q^{\text{big}} = (q_x^{\text{big}})_{x \in V_t}.$$

Dieser ist durch

$$\begin{aligned} d_V(p^{\text{small}}, q^{\text{small}}) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V_t} |p_x^{\text{small}} - q_x^{\text{small}}| \quad \text{bzw.} \\ d_V(p^{\text{big}}, q^{\text{big}}) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V_t} |p_x^{\text{big}} - q_x^{\text{big}}| \end{aligned} \tag{2.19}$$

gegeben.

Korollar 2.1.5 Sei $t = (V_t, E_t)$ ein unverwurzelter Baum mit $n \geq 2$ Knoten, der in $v(t)$ verwurzelt ist. Für die in (2.3) und (2.13) definierten Verteilungen p^{small} , q^{small} , p^{big} und q^{big} gilt:

$$d_V(p^{\text{small}}, q^{\text{small}}) = \begin{cases} \frac{n-1-|M(u)|}{n \cdot (n-1)} & \text{falls A vorliegt,} \\ \frac{n-2}{n \cdot (n-1)} & \text{falls B vorliegt,} \end{cases} \tag{2.20}$$

bzw.

$$d_V(p^{\text{big}}, q^{\text{big}}) = \begin{cases} \frac{n-1-|N(u)|}{n \cdot (n-1)} & \text{falls A vorliegt,} \\ \frac{n-|N(v)|-|N(w)|}{n \cdot (n-1)} & \text{falls B vorliegt.} \end{cases} \tag{2.21}$$

Insbesondere gilt stets

$$d_V(p^{\text{small}}, q^{\text{small}}) \leq \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad d_V(p^{\text{big}}, q^{\text{big}}) \leq \frac{1}{n}. \tag{2.22}$$

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall A. Unter Beachtung von (2.9), (2.10), (2.15) und (2.16) folgt

$$\begin{aligned}
& \sum_{x \in V_t} |p_x^{\text{small}} - q_x^{\text{small}}| \\
&= \sum_{u \neq x \in V_t} |p_x^{\text{small}} - q_x^{\text{small}}| \\
&= \sum_{u \neq x \in V_t \setminus M(u)} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{x \in M(u)} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|M(u)|} - \frac{1}{n-1} \right) \\
&= (n-1 - |M(u)|) \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} + |M(u)| \cdot \frac{n-1 - |M(u)|}{n \cdot (n-1) \cdot |M(u)|} \\
&= 2 \cdot \frac{n-1 - |M(u)|}{n \cdot (n-1)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \sum_{x \in V_t} |p_x^{\text{big}} - q_x^{\text{big}}| \\
&= \left(\frac{1 + |N(u)|}{n} + \frac{|N(u)|}{n-1} \right) + \sum_{u \neq x \in V_t} \left(\frac{|N(x)| - 1}{n-1} - \frac{|N(x)| - 1}{n} \right) \\
&= \frac{n-1 - |N(u)|}{n \cdot (n-1)} + \sum_{u \neq x \in V_t} \frac{|N(x)| - 1}{n \cdot (n-1)} \\
&= \frac{1}{n \cdot (n-1)} \left(n-1 - 2 \cdot |N(u)| - (n-1) + \sum_{x \in V_t} |N(x)| \right) \\
&= 2 \cdot \frac{n-1 - |N(u)|}{n \cdot (n-1)},
\end{aligned}$$

wobei im letzten Gleichheitszeichen (2.8) benutzt wurde.

Wir haben damit (2.20) und (2.21) für den Fall A bewiesen und widmen uns nun dem Fall B. Hier liefern (2.11), (2.12), (2.17) und (2.18)

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in V_t} |p_x^{\text{small}} - q_x^{\text{small}}| &= 2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \right) + \sum_{x \in V_t \setminus \{v, w\}} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{n-2}{n \cdot (n-1)} + \frac{n-2}{n \cdot (n-1)} = 2 \cdot \frac{n-2}{n \cdot (n-1)},
\end{aligned}$$

für $x \in \{v, w\}$

$$\begin{aligned}
|p_x^{\text{big}} - q_x^{\text{big}}| &= \left(\frac{|N(x)|}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{|N(x)| - 1}{n-1} \right) \\
&= \frac{n-2 \cdot |N(x)|}{2 \cdot n \cdot (n-1)}
\end{aligned}$$

und für $x \notin \{v, w\}$

$$\begin{aligned} |p_x^{\text{big}} - q_x^{\text{big}}| &= \left(\frac{|N(x)| - 1}{n - 1} - \frac{|N(x)| - 1}{n} \right) \\ &= \frac{|N(x)| - 1}{n \cdot (n - 1)}. \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also

$$\begin{aligned} &\sum_{x \in V_t} |p_x^{\text{big}} - q_x^{\text{big}}| \\ &= \frac{n - 2 \cdot |N(v)|}{2 \cdot n \cdot (n - 1)} + \frac{n - 2 \cdot |N(w)|}{2 \cdot n \cdot (n - 1)} + \sum_{x \in V_t \setminus \{v, w\}} \frac{|N(x)| - 1}{n \cdot (n - 1)} \\ &= \frac{1}{n \cdot (n - 1)} \left(n - 2 \cdot |N(v)| - 2 \cdot |N(w)| - (n - 2) + \sum_{x \in V_t} |N(x)| \right) \\ &= 2 \cdot \frac{n - |N(v)| - |N(w)|}{n \cdot (n - 1)}, \end{aligned}$$

wenn wir erneut (2.8) anwenden. Damit ergeben sich die restlichen Behauptungen. \square

Wir gehen nun unser eigentliches Anliegen (Lemma 2.1.1) an. In den bisherigen Resultaten ist der Baum t fixiert, und die Verteilungen von $p^{\text{small}}, q^{\text{small}}, p^{\text{big}}$ und q^{big} hängen nur von den auf E_t bzw. V_t gleichverteilten Variablen $e(t)$ bzw. $v(t)$ ab. Mit Hilfe einer maximalen Kopplung (siehe Kapitel I, Theorem 5.2 in [13]) nehmen wir daher ohne Einschränkung

$$\begin{aligned} P(t^{\text{small}} \neq t^{\text{small}}(e(t))) &= d_V(p^{\text{small}}, q^{\text{small}}) \quad \text{und} \\ P(t^{\text{big}} \neq t^{\text{big}}(e(t))) &= d_V(p^{\text{big}}, q^{\text{big}}) \end{aligned} \tag{2.23}$$

an. Aus

$$\begin{aligned} \left| P(B(t^{\text{small}}(e(t))) \leq x) - P(B(t^{\text{small}}) \leq x) \right| &\leq P(B(t^{\text{small}}(e(t))) \neq B(t^{\text{small}})) \\ &\leq P(t^{\text{small}} \neq t^{\text{small}}(e(t))) \\ &= d_V(p^{\text{small}}, q^{\text{small}}) \end{aligned}$$

und (2.22) folgt dann (2.1). Die analoge Ungleichung für den „big“-Teil sichert (2.2).

2.2. Fixpunktgleichung für $B(\text{PGW}(1))$

Wir widmen uns in diesem Abschnitt der Folge $(T_n^{\text{small}})_{n \in \mathbb{N}}$. Diese konvergiert in Verteilung gegen einen endlichen Zufallsbaum, womit Lemma 1.5.1 anwendbar wird.

Lemma 2.2.1 Es gilt

$$B(T_n^{\text{small}}) \xrightarrow{d} B(T),$$

mit $T \sim \text{PGW}(1)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 1.3.4 und Lemma 1.5.1, wenn wir $P(T \in \mathcal{S}_{\text{fin}}) = 1$ beachten. \square

Satz 2.2.2 Es sei $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsbäume mit F -verteilten Kantengewichten und $T_i \sim \text{PGW}(1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Ist ein weiterer Zufallsbaum $T \sim \text{PGW}(1)$ mit F -verteilten Kantengewichten gegeben, so gilt

$$B(T) \stackrel{d}{=} \max\{0, \xi_i - B(T_i) : 1 \leq i \leq N\}, \quad (2.24)$$

wobei $N \sim \text{Poi}(1)$ und jedes $\xi_i \sim F$, derart, dass die Variablen $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und N stochastisch unabhängig sind.

Beweis. Der Satz 1.5.2 liefert zunächst

$$\begin{aligned} B(T) &\stackrel{d}{=} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \mathbb{1}_{\{T=t\}} \cdot \max\{0, \xi_i^t - B(t^i) : i \in C(t)\} \\ &= \max\{0, \xi_i^T - B(T^i) : i \in C(T)\}. \end{aligned}$$

Es gebe X die Anzahl der Kinder der Wurzel von T an. Gemäß Lemma 1.2.5 sind, gegeben $X = k$, die Teilbäume $\{T^i : 1 \leq i \leq k\}$ bedingt stochastisch unabhängig voneinander und alle wie T verteilt.

Aufgrund von $|C(T)| = X \sim N$, $\xi_i^T \sim \xi_i$, $B(T^i) \sim B(T_i)$ und der Unabhängigkeit von \mathcal{G} , X und $(T^i)_{i \in \mathbb{N}}$ schließen wir, wie in (2.24) behauptet,

$$\max\{0, \xi_i^T - B(T^i) : i \in C(T)\} \stackrel{d}{=} \max\{0, \xi_i - B(T_i) : 1 \leq i \leq N\}. \quad \square$$

Verteilungsgleichheiten der Form

$$X \stackrel{d}{=} g((X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}, N),$$

für eine Funktion g und unabhängige X_1, X_2, \dots mit $X_n \sim X$ für alle $n \in \mathbb{N}$, nennen wir *stochastische Fixpunktgleichungen*.

Wir haben in (2.24) gesehen, dass $B(T)$ die stochastische Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{d}{=} \max\{0, \xi_i - X_i : 1 \leq i \leq N\}$$

löst. Eine sinnvolle Frage ist nun, ob die Lösung auch eindeutig ist. Dies motiviert die folgende Definition:

Seien F und G zwei gegebene Verteilungen auf $[0, \infty)$. Ferner seien Zufallsgrößen $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und N derart gegeben, dass die Familie $\{Y_i, \xi_i, N : i \in \mathbb{N}\}$ stochastisch

unabhängig ist, $\xi_i \sim F$, $Y_i \sim G$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $N \sim Poi(1)$ gilt. Wir definieren $D_F(G)$ als die Verteilung der Zufallsgröße

$$\max\{0, \xi_i - Y_i : 1 \leq i \leq N\}. \quad (2.25)$$

Wir beachten, dass auf dem Ereignis $\{N = 0\}$ das Maximum als 0 gesetzt ist.

Theorem 2.2.3 Ist F eine Verteilung auf $[0, \infty)$ und $T \sim PGW(1)$ mit F -verteilten Kantengewichten, so ist die Verteilung von $B(T)$ die eindeutige Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung

$$D_F(G) = G. \quad (2.26)$$

Beweis. Wir haben in Satz 2.2.2 eingesehen, dass $B(T)$ die Fixpunktgleichung löst. Was zu zeigen bleibt, ist die Eindeutigkeit. Sei G eine Verteilung mit $D_F(G) = G$ und $T \sim PGW(1)$ mit F -verteilten Kantengewichten.

Für den Nachweis von $B(T) \sim G$ bedienen wir uns der Konstruktion des Galton-Watson-Baumes \mathbf{GW} als Teilmenge des Ulam-Harris-Baumes \mathbb{V} und geben uns zunächst Familien von Zufallsgrößen

$$\{X_v : v \in \mathbb{V}\} \quad \text{und} \quad \{\xi_w, Y_w : w \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}\}$$

mit $X_v \sim Poi(1)$, $\xi_w \sim F$ und $Y_w \sim G$ vor, so dass die Familie aller Variablen

$$\{X_v, Y_w, \xi_w : v \in \mathbb{V}, w \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}\} \quad (2.27)$$

stochastisch unabhängig ist.

Erinnern wir uns, dass der Galton-Watson-Baum definiert ist als

$$\mathbf{GW} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{GW}_n$$

mit $\mathbf{GW}_0 = \{\emptyset\}$ und

$$\mathbf{GW}_n = \{v_1 \dots v_n \in \mathbb{N}^n : v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbf{GW}_{n-1} \text{ und } 1 \leq v_n \leq X_{v_1 \dots v_{n-1}}\}$$

für $n \geq 1$ (siehe (1.16)).

Wir benutzen im Folgenden den Ausdruck $B(\mathbf{GW})$, indem wir auf jeden Baum aus \mathbb{T} die Gewichte $\{\xi_w : w \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}\}$ ansetzen: Eine Kante zwischen dem Knoten v und einem Kind w erhält das Gewicht ξ_w . Offenbar gilt $B(T) \sim B(\mathbf{GW})$, wenn wir $B(\mathbf{GW})$ auf diese Weise definieren.

Wir setzen für $v = v_1 \dots v_n \in \mathbb{V}$ die Zufallsgröße Z_v als

$$Z_v = \max\{0, \xi_{vv_{n+1}} - Y_{vv_{n+1}} : 1 \leq v_{n+1} \leq X_v\}.$$

Aufgrund der Fixpunkteigenschaft (2.26) von G , $X_v \sim \text{Poi}(1)$ und den Unabhängigkeitsannahmen aus (2.27) folgt

$$Z_v \sim G \text{ für alle } v \in \mathbb{V}. \quad (2.28)$$

Andererseits gilt, gegeben $v \in \text{GW}_n$ mit $X_v = 0$,

$$Z_v = 0 = B(\text{GW}^v) \quad P\text{-f. s.}$$

Alle Blätter v von GW erfüllen demnach $Z_v \sim B(\text{GW}^v)$, bedingt darunter, dass sie tatsächlich von GW realisiert werden. Unter Beachtung der Tatsache, dass der betrachtete Galton-Watson-Baum gemäß Satz 1.2.6 P -f. s. ausstirbt, fahren wir induktiv fort:

Gegeben, $w \in \text{GW}_m$ und $B(\text{GW}^{ww_{m+1}}) \sim Z_{ww_{m+1}}$ für alle Nachkommen von w , gilt

$$\begin{aligned} B(\text{GW}^w) &\stackrel{d}{=} \max\{0, \xi_{ww_{m+1}} - B(\text{GW}^{ww_{m+1}}) : 1 \leq w_{m+1} \leq X_w\} \\ &\stackrel{d}{=} \max\{0, \xi_{ww_{m+1}} - Z_{ww_{m+1}} : 1 \leq w_{m+1} \leq X_w\} \\ &= Z_w. \end{aligned}$$

Insbesondere können wir mit $w = \emptyset$ schließen, dass

$$B(T) \stackrel{d}{=} B(\text{GW}) = B(\text{GW}^\emptyset) \stackrel{d}{=} Z_\emptyset$$

gilt, womit wie gewünscht $B(T) \sim G$ aus (2.28) folgt. \square

Bemerkung 2.2.4 (a) Der Beweis zeigt, dass die stochastische Fixpunktgleichung

$$Y \stackrel{d}{=} \max\{0, \xi_i - Y_i : 1 \leq i \leq N\}$$

für jede andere Zufallsgröße N auf \mathbb{N}_0 mit $\mathbb{E}N \leq 1$ und $P(N = 1) < 1$ eindeutig lösbar ist. Wir beschränken uns aber weiterhin auf den Fall $N \sim \text{Poi}(1)$.

- (b) Eine ähnliche Fixpunktgleichung erhalten wir, wenn wir das folgende Problem betrachten: Eine Menge von Knoten $W \subseteq V_t$ eines Baumes $t = (V_t, E_t, r)$ heißt *unabhängig*, falls je zwei Knoten aus W nicht durch eine Kante verbunden sind, d. h. für alle $v, w \in W$ gilt $\{v, w\} \notin E_t$.

Wie beim Paarungsproblem auch, suchen wir nun für Zufallsbäume mit zufälligen *Knotengewichten* das maximale Gewicht einer unabhängigen Menge von Knoten. Ist die Variable $C(T)$ für einen endlichen Zufallsbaum T mit Wurzel r und F -verteilten Knotengewichten durch

$$\begin{aligned} C(T) &= \text{maximale Gewicht einer unabhängigen Menge von Knoten von } T \\ &\quad - \text{maximale Gewicht einer unabhängigen Menge von Knoten von } T \setminus \{r\} \end{aligned}$$

definiert, so ist die Verteilung von $C(T)$ mit $T \sim \text{PGW}(1)$ die eindeutige Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{d}{=} \max\{0, \xi - \sum_{i=1}^N X_i\}. \quad (2.29)$$

Hierbei sei wieder $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge mit $X_i \sim X$ für alle i , $\xi \sim F$ und $N \sim \text{Poi}(1)$ derart, dass die Variablen $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ξ und N stochastisch unabhängig sind.

(2.29), und andere Fixpunktgleichungen, lassen sich in einem Übersichtsartikel von Aldous und Bandyopadhyay finden, siehe [3].

Bevor wir den Grenzwert von $(B(T_n^{\text{big}}))_{n \in \mathbb{N}}$ untersuchen, berechnen wir für ein einfaches Beispiel die Lösung der Gleichung (2.26).

Beispiel 2.2.5 Für $p \in [0, 1]$ wählen wir $F = B(1, p)$, die Bernoulli-Verteilung mit Erfolgsparameter p . In den Fällen $p = 0$ bzw. $p = 1$ sei $B(1, p)$ die Dirac-Verteilung in 0 bzw. 1.

Dann ist $G = B(1, 1 - q)$ mit

$$q = e^{-qp} \quad (2.30)$$

die eindeutige Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung $D_F(G) = G$.

Beweis. Sei $T \sim \text{PGW}(1)$ mit $B(1, p)$ -verteilten Kantengewichten, d. h. jede Kante von T erhält mit Wahrscheinlichkeit p das Gewicht 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ das Gewicht 0.

Die Differenz einer größten gewichteten Paarung und einer größten gewichteten Paarung, die die Wurzel nicht enthalten darf, nimmt somit nur die Werte 0 und 1 an. $B(T)$ genügt also einer Bernoulli-Verteilung, dessen Erfolgsparameter $1 - q$ es zu finden gilt.

Wir wählen unabhängige Zufallsgrößen N , Y , $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ξ und $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $N \sim \text{Poi}(1)$, $Y \sim G$, $Y_i \sim G$, $\xi \sim F$ und $\xi_i \sim F$. Dann gilt

$$\begin{aligned} q &= P(Y = 0) = P(\max\{0, \xi_i - Y_i : 1 \leq i \leq N\} = 0) \\ &= P(\xi_i \leq Y_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq N) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi_i \leq Y_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n) \cdot P(N = n) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P(\xi \leq Y)^n \\ &= \frac{1}{e} \exp(P(\xi \leq Y)) \\ &= \exp(-P(\xi > Y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(-P(\xi = 1, Y = 0)) \\
&= \exp(-P(\xi = 1) \cdot P(Y = 0)) \\
&= \exp(-pq),
\end{aligned}$$

was (2.30) zeigt. \square

Bemerkung 2.2.6 Analog zur obigen Rechnung erhalten wir, dass für ein beliebiges $\xi \sim F, Y \sim G$ mit $D_F(G) = G$, für alle $k \geq 0$ die Gleichung

$$P(Y \leq k) = \exp(-P(\xi > Y + k)) \quad (2.31)$$

gilt. Ist F gedächtnislos, so lässt sich (2.31) weiter vereinfachen. Im Abschnitt 2.5 werden wir dies für den Fall $F \sim \text{Exp}(\lambda)$ unternehmen.

2.3. Der Grenzwert von $B(T_n^{\text{big}})$

In diesem Abschnitt führen wir eine ähnliche Untersuchung für $(B(T_n^{\text{big}}))_{n \in \mathbb{N}}$ durch und erinnern zunächst daran, dass wir in Satz 1.3.4 u. a. die Verteilungskonvergenz

$$T_n^{\text{big}} \xrightarrow{d} T_\infty$$

eingesehen haben, wobei $T_\infty \sim \text{PGW}^\infty(1)$.

Wie in Lemma 2.2.1 würden wir nun gerne folgern, dass auch $B(T_n^{\text{big}})$ in Verteilung konvergiert. Der Grenzwert kann, sofern existent, jedoch *nicht* $B(T_\infty)$ sein, denn dieser Ausdruck ist nicht wohldefiniert, da T_∞ stets ein Baum mit unendlich vielen Knoten ist. Eine größte gewichtete Paarung würde demnach – unabhängig davon, ob sie die Wurzel enthalten darf oder nicht – ein unendliches Gewicht besitzen. Damit wäre $B(T_\infty)$ die Differenz zweier unendlicher Größen.

Nichtsdestotrotz werden wir sehen, dass $B(T_n^{\text{big}})$ einen Verteilungslimes besitzt, den wir erneut als eindeutige Lösung einer stochastischen Fixpunktgleichung beschreiben können. Diese Gleichung leiten wir kurz heuristisch her, indem wir mit $B(T_\infty)$ weiter rechnen – wohl wissend, dass es kein wohldefinierter Ausdruck ist.

2.3.1. Heuristische Herleitung

Erinnern wir uns an die Definition 1.2.15 von T_∞ , so zerlegt sich T_∞ in die Bäume T_∞^{small} und T_∞^{big} mit Wurzeln v und w . Es sei C^s die Kindermenge von v im Baum T_∞^{small} (d. h. $C^s = C_v \setminus \{w\}$) und für $i \in C^s$ sei T^i der Teilbaum von T_∞^{small} , dessen Wurzel i ist.

Eine größte gewichtete Paarung von T_∞ , die die Wurzel v nicht enthält, würde durch die Größe $M(T_\infty) - B(T_\infty)$ eingefangen, die wir auch als

$$M(T_\infty) - B(T_\infty) = M(T_\infty^{\text{big}}) + \sum_{i \in C^s} M(T^i) \quad (2.32)$$

schreiben können.

Für eine größte gewichtete Paarung, die die Wurzel v enthalten *muss*, gibt es zwei Fälle zu betrachten: Im ersten Fall enthält die Paarung einen Knoten j aus C^s , womit das Gewicht dieser Paarung auch als

$$\xi_j + M(T^j) - B(T^j) + \sum_{\substack{i \in C^s \\ i \neq j}} M(T^i) + M(T_\infty^{\text{big}}),$$

oder kürzer

$$\xi_j - B(T^j) + M(T_\infty^{\text{big}}) + \sum_{i \in C^s} M(T^i), \quad (2.33)$$

geschrieben werden kann. ξ_j sei hierbei das Gewicht der Kante zwischen j und seiner Mutter v .

Im zweiten Fall enthält die Paarung die Kante $\{v, w\}$, womit sein Gewicht durch

$$\xi_w + \sum_{i \in C^s} M(T^i) + M(T_\infty^{\text{big}}) - B(T_\infty^{\text{big}}) \quad (2.34)$$

gegeben ist.

Die Maximierung der Größen (2.32), (2.33) und (2.34) liefert eine alternative Darstellung für $M(T_\infty)$:

$$M(T_\infty) = M(T_\infty^{\text{big}}) + \sum_{i \in C^s} M(T^i) + \max\{0, \max\{\xi_j - B(T^j) : j \in C^s\}, \xi_w - B(T_\infty^{\text{big}})\}.$$

Durch das Umstellen nach $B(T_\infty)$ in (2.32) erhalten wir dann

$$B(T_\infty) = \max\{0, \max\{\xi_j - B(T^j) : j \in C^s\}, \xi_w - B(T_\infty^{\text{big}})\}. \quad (2.35)$$

Da $T_\infty^{\text{small}} \sim \text{PGW}(1)$, gilt nach Theorem 2.2.3

$$B(T_\infty^{\text{small}}) \sim \max\{\xi_j - B(T^j) : j \in C^s\}.$$

$T_\infty^{\text{big}} \sim \text{PGW}^\infty(1)$ impliziert $B(T_\infty^{\text{big}}) \sim B(T_\infty)$, und schliesslich vereinfacht sich (2.35) zu

$$B(T_\infty) \sim \max\{B(T_\infty^{\text{small}}), \xi - B(T_\infty)\}, \quad (2.36)$$

wobei abkürzend $\xi = \xi_w$ gesetzt ist.

Im Folgenden geht es darum, die soeben erhaltene Fixpunktgleichung (2.36) zu studieren. Im Gegensatz zur Fixpunktgleichung $D_F(G) = G$ ist nun keineswegs klar, ob es eine Lösung gibt, denn wir erinnern noch einmal daran, dass $B(T_\infty)$ kein wohldefinierter Ausdruck ist und demnach auch keine Lösung von (2.36) sein kann.

Es wird sich jedoch zeigen, dass für gegebene $F \sim \xi$ und G mit $D_F(G) = G \sim B(T_\infty^{\text{small}})$ die Fixpunktgleichung (2.36) eindeutig lösbar und ihre Lösung der Verteilungslimes von $B(T_n^{\text{big}})$ ist.

2.3.2. Die Fixpunktgleichung

Die heuristische Überlegung aus Abschnitt 2.3.1 gibt Anlass zu einer Definition. Sei F eine Verteilung auf $[0, \infty)$ und G die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung $D_F(G) = G$ aus Theorem 2.2.3. Gegeben eine Verteilung H und stochastisch unabhängige Zufallsgrößen Z, Y und ξ mit

$$Z \sim H, Y \sim G \text{ und } \xi \sim F,$$

sei $\widetilde{D}_F(H)$ die Verteilung der Zufallsgröße

$$\max\{Y, \xi - Z\}. \quad (2.37)$$

Theorem 2.3.1 Für eine Verteilung F auf $[0, \infty)$ besitzt die stochastische Fixpunktgleichung

$$\widetilde{D}_F(H) = H \quad (2.38)$$

genau eine Lösung H . Ferner gilt im Fall, dass F kein Dirac-Maß ist, die Konvergenz

$$B(T_n^{\text{big}}) \xrightarrow{d} H. \quad (2.39)$$

Der Beweis erfordert einigen Aufwand. Wir beginnen damit, die Existenz von H zu zeigen und greifen auf die Theorie der Markov-Ketten zurück. Für eine ausführlichere Diskussion der folgenden Resultate verweisen wir auf [15].

Für festes F, G und unabhängige Zufallsgrößen $\xi \sim F$ und $Y \sim G$ betrachten wir den stochastischen Kern $K : [0, \infty) \times \mathfrak{B}([0, \infty)) \rightarrow [0, 1]$ mit

$$K(z, A) = P(\max\{Y, \xi - z\} \in A), \quad (2.40)$$

der den *Übergangskern* für eine zeitlich diskrete und zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $[0, \infty)$ auf folgende Weise definiert:

Definition 2.3.2 Gegeben sei ein stochastischer Kern $K : [0, \infty) \times \mathfrak{B}([0, \infty)) \rightarrow [0, 1]$ und eine Verteilung λ auf $[0, \infty)$. Ein stochastischer Prozess $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten in $[0, \infty)$ heißt *zeitlich homogene Markov-Kette mit Übergangskern K und Anfangsverteilung λ* , falls $P(M_0 \in \cdot) = \lambda$ und

$$P^{M_{n+1}|M_n} = K(M_n, \cdot) \quad P\text{-f. s.}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist.

Wir interessieren uns nur für den Übergangskern K aus (2.40). Dessen ungeachtet formulieren wir die nächsten Definitionen und Lemmas allgemein. Alleiniger Existenzbeweis einer invarianten Verteilung werden wir nur kurz auf die entsprechende Verallgemeinerung eingehen. Außerdem halten wir den Zustandsraum $[0, \infty)$ fixiert, auch wenn dies nicht notwendig ist, da wir ihn durch einen beliebigen metrischen Raum ersetzen könnten.

Definition 2.3.3 Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir induktiv den n -Schritt Übergangskern K^n durch $K^0(x, A) = \delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$ und

$$K^n(x, A) = \int_{[0, \infty)} K^{n-1}(y, A) K(x, dy) \quad (2.41)$$

für alle $x \in [0, \infty)$ und $A \in \mathfrak{B}([0, \infty))$. Insbesondere gilt $K^1 = K$.

$K^n(x, A)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Markov-Kette M mit Übergangskern K nach n Schritten in der Menge A landet, wenn sie in $M_0 = x$ gestartet ist.

Definition 2.3.4 Ein σ -endliches Maß $\pi \neq 0$ auf $[0, \infty)$ heißt *invariant für K* , falls

$$\pi(A) = \int_{[0, \infty)} K(x, A) \pi(dx) \quad (2.42)$$

für alle $A \in \mathfrak{B}([0, \infty))$ gilt. Ist π zudem ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so heißt π auch *invariante Verteilung für K* .

Ist π eine invariante Verteilung für K aus (2.40) und Z eine von Y und ξ unabhängige Zufallsgröße mit Verteilung π , so gilt gemäß (2.42)

$$\begin{aligned} P(Z \in \cdot) &= \int_{[0, \infty)} K(z, \cdot) P^Z(dz) \\ &= \int_{[0, \infty)} P(\max\{Y, \xi - z\} \in \cdot) P^Z(dz) \\ &= P(\max\{Y, \xi - Z\} \in \cdot). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: π ist eine Lösung der Fixpunktgleichung (2.38).

Eine hilfreiche Eigenschaft für die Suche nach einer invarianten Verteilung ist die Feller-Eigenschaft eines Übergangskernes.

Definition 2.3.5 K besitzt die *Feller-Eigenschaft*, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ die schwache Konvergenz

$$K(x_n, \cdot) \xrightarrow{w} K(x, \cdot) \quad (2.43)$$

gilt.

Wir weisen (2.43) für den Kern K aus (2.40) nach. Geben wir uns eine gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einen Stetigkeitspunkt $k \geq 0$ der Verteilung $K(x, \cdot)$ vor, so ist k auch ein Stetigkeitspunkt der Verteilung $P(\xi - x \in \cdot)$, denn aus der Definition von K und der Unabhängigkeit von Y und ξ folgt zunächst

$$P(Y \leq k) \cdot P(\xi - x \leq k) = K(x, [0, k]) \stackrel{\text{Vor.}}{=} K(x, [0, k]) = P(Y < k) \cdot P(\xi - x < k),$$

also

$$P(Y \leq k) \cdot P(\xi - x \leq k) \leq P(Y \leq k) \cdot P(\xi - x < k).$$

Mit Bemerkung 2.2.6 erhalten wir $P(Y \leq k) > 0$ und folglich

$$P(\xi - x \leq k) = P(\xi - x < k),$$

d. h. die Stetigkeit der Verteilung $P(\xi - x \in \cdot)$ in k . Dies impliziert

$$\begin{aligned} K(x_n, (\infty, k]) &= P(\max\{Y, \xi - x_n\} \leq k) \\ &= P(Y \leq k) \cdot P(\xi - x_n \leq k) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(Y \leq k) \cdot P(\xi - x \leq k) = K(x, (\infty, k]). \end{aligned}$$

Der für uns interessante Kern K besitzt in der Tat die Feller-Eigenschaft. Einen ersten Anhaltspunkt für den Nutzen dieser Eigenschaft gibt das nächste Lemma, welches für allgemeine Übergangskerne K formuliert ist.

Lemma 2.3.6 Es seien $\mu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endliche Maße auf $[0, \infty)$ mit $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

(a) Ist $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$\liminf_{x \rightarrow y} h(x) \geq h(y) \tag{2.44}$$

für alle $y \geq 0$, so ist h messbar und es gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} h d\mu_n \geq \int_{[0, \infty)} h d\mu. \tag{2.45}$$

(b) Besitzt der Kern K die Feller-Eigenschaft, so gilt

$$\int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) \mu_n(dy) \xrightarrow{w} \int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) \mu(dy). \tag{2.46}$$

Beweis. Der Prototyp einer Funktion h mit der Eigenschaft (2.44) ist $h = \mathbb{1}_A$ für eine offene Menge A . Ist h von dieser Gestalt, so gilt $\int_{[0, \infty)} h d\mu_n = \mu_n(A)$ und aufgrund des Portmanteau-Theorems (Theorem 1.1.17) auch (2.45).

Im allgemeinen Fall zeigen wir zunächst, dass die Mengen $\{h > y\}$, $y \geq 0$, offen sind. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\{h \leq y\}$ mit $x_n \rightarrow x$, so folgt aus (2.44) und $h(x_n) \leq y$ für alle n

$$h(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} h(x_n) \leq y,$$

und somit $x \in \{h \leq y\}$, d. h. $\{h \leq y\}$ ist abgeschlossen für jedes $y \geq 0$. h ist folglich messbar.

Da h nichtnegativ ist, gilt (siehe Kapitel III, Korollar A.2. in [6])

$$\int_{[0, \infty)} h d\mu_n = \int_0^\infty \mu_n(\{h > y\}) dy.$$

Eine Anwendung von Fatous Lemma liefert

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} h d\mu_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \mu_n(\{h > y\}) dy \geq \int_0^\infty \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\{h > y\}) dy. \quad (2.47)$$

Teil (c) des Portmanteau-Theorems 1.1.17, angewandt auf die offene Menge $\{h > y\}$, zeigt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\{h > y\}) \geq \mu(\{h > y\}).$$

Zusammen mit (2.47) folgt nun (2.45).

Teil (b) des Lemmas ist eine Anwendung des ersten Teils auf die Funktion $h = K(\cdot, A)$, für eine offene Menge $A \subseteq [0, \infty)$. Aufgrund der Feller-Eigenschaft (2.43) von K und des Portmanteau-Theorems erfüllt h die Voraussetzung (2.44) und wir erhalten

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} K(y, A) \mu_n(dy) \geq \int_{[0, \infty)} K(y, A) \mu(dy)$$

für alle offenen A , welches wiederum mit Portmanteau (2.46) beweist, wenn wir zusätzlich

$$\int_{[0, \infty)} K(y, [0, \infty)) \mu_n(dy) = \mu_n([0, \infty)) \rightarrow \mu([0, \infty)) = \int_{[0, \infty)} K(y, [0, \infty)) \mu(dy)$$

beachten. □

Finden wir also Verteilungen $\mu, (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ und

$$\int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) \mu_n(dy) \xrightarrow{w} \mu, \quad (2.48)$$

so ist nach Teil (b) des Lemmas μ eine invariante Verteilung für K .

Definition 2.3.7 Die *Okkupationsmaße* $(\mu_n(x, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$, für $x \in [0, \infty)$, seien gegeben durch

$$\mu_n(x, \cdot) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} K^i(x, \cdot). \quad (2.49)$$

Da jedes $K^i(x, \cdot)$ gemäß (2.41) eine Verteilung ist, ist auch jedes $\mu_n(x, \cdot)$ eine Verteilung.

Konvergiert $(\mu_n(x, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen ein μ , so ist (2.48) automatisch erfüllt, wie das nächste Lemma zeigt. Ein derartiger Limes μ ist also stets invariant für K , vorausgesetzt K erfüllt (2.43).

Lemma 2.3.8 Besitzt K die Feller-Eigenschaft und existiert ein $x \geq 0$, für das die Folge der Okkupationsmaße $(\mu_n(x, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $(\mu_{n_k}(x, \cdot))_{k \in \mathbb{N}}$ mit Limes π_x besitzt, so ist π_x eine invariante Verteilung für K .

Beweis. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) \mu_{n_k}(x, dy) &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) K^i(x, dy) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} K^{i+1}(x, \cdot) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} K^i(x, \cdot) + \frac{1}{n_k} (K^{n_k}(x, \cdot) - K^0(x, \cdot)) \\ &= \mu_{n_k}(x, \cdot) + \frac{1}{n_k} (K^{n_k}(x, \cdot) - K^0(x, \cdot)) \\ &\xrightarrow{d} \pi_x + 0 = \pi_x. \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir mit Lemma 2.3.6 (b) die Verteilungskonvergenz

$$\int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) \mu_{n_k}(x, dy) \xrightarrow{d} \int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) \pi_x(dy),$$

womit wir aus der Eindeutigkeit des Limes

$$\pi_x = \int_{[0, \infty)} K(y, \cdot) \pi_x(dy)$$

schließen. D. h. π_x ist eine invariante Verteilung für K . □

Existenzbeweis von H in Theorem 2.3.1. Im Anschluss an Definition (2.43) haben wir eingesehen, dass der Kern $K(z, A) = P(\max\{Y, \xi - z\} \in A)$ die Feller-Eigenschaft (2.43) besitzt. Wir verifizieren nun, dass die Voraussetzung von Lemma 2.3.8 an $(\mu_n(x, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ für ein $x \geq 0$ erfüllt ist. Es ist unerheblich, welches x wir dabei wählen – der Einfachheit halber sei $x = 0$ und abkürzend $\mu_n = \mu_n(0, \cdot)$ gesetzt.

Als Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen besitzt $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Satz von Helly-Bray genau dann eine schwach konvergente Teilfolge, wenn $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ straff ist (vgl.

Satz 44.4 in [6]), d. h. wir haben zu zeigen, dass für beliebiges $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge $\mathcal{K} \subseteq [0, \infty)$ mit

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\mathcal{K}^c) < \epsilon \quad (2.50)$$

existiert (vgl. Definition 43.3 in [6]).

Für alle $k \geq 0$ und $z \geq 0$ gilt aufgrund der Ungleichung $\xi - z \leq \xi$

$$K(0, [0, k]) = P(\max\{Y, \xi\} \leq k) \leq P(\max\{Y, \xi - z\} \leq k) = K(z, [0, k]).$$

Mit anderen Worten: $K(0, \cdot)$ wird von jedem $K(z, \cdot)$, $z \geq 0$, dominiert. Induktiv folgt daraus

$$K(0, [0, k]) \leq K^n(z, [0, k]) \quad (2.51)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$ und $z \geq 0$, denn der Induktionsschritt ergibt sich aus der Definition (2.41) und aus

$$K^n(z, [0, k]) = \int \underbrace{K^{n-1}(y, [0, k])}_{\geq K(0, [0, k])} K(z, dy) \geq K(0, [0, k]).$$

Ist $\epsilon > 0$ gegeben, so können wir ein $k \geq 0$ mit $K(0, [0, k]^c) < \epsilon$ finden, denn eine einzelne Verteilung auf \mathbb{R} ist stets straff. Mit $\mathcal{K} = [0, k]$ und (2.51) folgt

$$\sup\{K^n(z, \mathcal{K}^c) : z \geq 0, n \in \mathbb{N}\} < \epsilon,$$

d. h. die Familie $\{K^n(z, \cdot) : z \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ ist straff.

Die Straffheit der Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt sich dann vermöge

$$\mu_n(\mathcal{K}^c) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{K^i(0, \mathcal{K}^c)}_{< \epsilon} < \epsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Die Existenz einer invarianten Verteilung für ein beliebiges K lässt sich verallgemeinern, wenn wir die entscheidende Ungleichung (2.51) anpassen: Ist ein Übergangskern K mit Feller-Eigenschaft gegeben, und existieren ein x_0 aus dem Zustandsraum sowie eine aufsteigende Folge kompakter Mengen $(\mathcal{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen den gesamten Zustandsraum konvergiert und

$$K(x_0, \mathcal{K}_n) \leq K(x, \mathcal{K}_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle x aus dem Zustandsraum erfüllt, so besitzt K eine invariante Verteilung.

Die Eindeutigkeit der invarianten Verteilung könnten wir ebenfalls mit der allgemeinen Theorie verifizieren. Wir verwenden jedoch ein Kopplungsargument, das später nützlich sein wird, um die Verteilungskonvergenz $B(T_n^{\text{big}}) \rightarrow H$ nachzuweisen.

Für das nächste Lemma sei F wie üblich die Kantengewichtsverteilung und G die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung $D_F(G) = G$ aus Theorem 2.2.3.

Lemma 2.3.9 Sei F kein Dirac-Maß. Gegeben stochastisch unabhängige Zufallsgrößen ξ und Y mit $\xi \sim F$ und $Y \sim G$, gilt dann

$$P(\xi \geq Y) < 1. \quad (2.52)$$

Beweis. Ist T ein von ξ unabhängiger PGW(1)-Baum mit F -verteilten Kantengewichten, so können wir $Y = B(T)$ annehmen. Sei t_2 der einzige Baum aus \mathcal{S}_2 , also der Baum mit zwei Knoten und einer Kante. Sei ξ' die Gewichtsfunktion dieser Kante, die als unabhängig von ξ angenommen wird. Dann gilt offenbar $P(T = t_2) = e^{-2}$ und $B(t_2) = \xi'$, womit wir die Ungleichung

$$P(\xi < B(T)) \geq P(\xi < B(T), T = t_2) = P(\xi < \xi', T = t_2) = P(\xi < \xi') \cdot P(T = t_2)$$

erhalten. Da ξ und ξ' stochastisch unabhängig und nicht P -f. s. konstant sind, gilt $P(\xi < \xi') > 0$. Es folgt

$$P(\xi \geq B(T)) = 1 - P(\xi < B(T)) \leq 1 - P(T = t_2) = 1 - e^{-2} < 1. \quad \square$$

Beweis der Eindeutigkeit von H . Der Fall $F = \delta_c$ für ein $c \geq 0$ ist separat zu betrachten. Die Fälle $c = 0$ und $c = 1$ behandeln wir in Beispiel 2.3.10. Für ein beliebiges $c > 0$ beachten wir, dass sich beide Fixpunktgleichungen unproblematisch unter skalarer Multiplikation verhalten: Haben wir die Lösungen Y und Z für den Fall $c = 1$ bestimmt, so ergeben sich die Lösungen für ein allgemeines c durch cY und cZ (siehe dazu auch Lemma 2.5.1).

Wir nehmen nun an, dass die Verteilung F nicht auf einen Punkt konzentriert ist, womit Lemma 2.3.9 anwendbar wird. Sei eine Familie von unabhängigen Zufallsgrößen

$$\{\xi_n, Y_n : n \in \mathbb{N}\}$$

mit $\xi_n \sim F$ und $Y_n \sim G$ für alle n gegeben. Für jedes $z \geq 0$ definieren wir eine Markov-Kette $M(z) = (M_n(z))_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch $M_0(z) = z$ und

$$M_n(z) = \max\{\xi_n - M_{n-1}(z), Y_n\}, \quad (2.53)$$

d. h. $M(z)$ startet in z und der Übergangskern ist gemäß K aus (2.40) gegeben.

Für $z, z' \geq 0$ gilt dann offenbar

$$M_n(z) \geq M_n(z') \quad \Rightarrow \quad M_{n+1}(z) \leq M_{n+1}(z') \quad \Rightarrow \quad M_{n+2}(z) \geq M_{n+2}(z'),$$

womit aus $M_0(z) \geq M_0(0)$

$$M_{2k}(z) \geq M_{2k}(0) \quad (2.54)$$

für alle $z \geq 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ folgt. Durch

$$\tau = \inf\{2k + 1 : M_{2k+1}(0) = Y_{2k+1}\} \quad (2.55)$$

wird eine Stoppzeit definiert, von der wir zeigen, dass sie fast sicher endlich ist. Zunächst bemerken wir, dass τ nur ungerade Werte annimmt und aufgrund von (2.54)

$$M_{\tau-1}(z) \geq M_{\tau-1}(0)$$

für alle z gilt. Folglich erhalten wir

$$M_\tau(0) = Y_\tau \geq \xi_\tau - M_{\tau-1}(0) \geq \xi_\tau - M_{\tau-1}(z)$$

und somit $M_\tau(z) = Y_\tau$ für alle z . Die Stoppzeit τ erfüllt demnach

$$M_{\tau+k}(z) = M_{\tau+k}(0) \text{ für alle } z \geq 0 \text{ und alle } k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.56)$$

Da $P(\xi_n \geq Y_n)$ nicht von n abhängt, setzen wir $\rho = P(\xi_n \geq Y_n)$. Aus

$$\{\tau \geq 2k + 1\} \subseteq \{\xi_{2i+1} \geq Y_{2i+1} \text{ für alle } i = 0, \dots, k-1\}$$

folgt $P(\tau \geq 2k + 1) \leq \rho^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, und τ ist fast sicher endlich, da nach Lemma 2.3.9 $\rho < 1$ ist.

Ist X eine Zufallsgröße auf $[0, \infty)$, so ist τ gemäß (2.56) eine Kopplungszeit für $(M_n(X))_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(M_n(0))_{n \in \mathbb{N}_0}$. Aufgrund der Kopplungsungleichung (siehe [5], Kapitel II, Abschnitt 11) gilt

$$\sup_{A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})} |P(M_n(X) \in A) - P(M_n(0) \in A)| \leq P(\tau > n) \leq \rho^k \quad (2.57)$$

für alle $n \geq 2k + 1$, d. h. der Totalvariationsabstand zwischen $P(M_n(X) \in \cdot)$ und $P(M_n(0) \in \cdot)$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

Ist H eine Lösung der Fixpunktgleichung (2.38) und Z eine von $\{\xi_n, Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ unabhängige Zufallsgröße mit $Z \sim H$, so gilt $M_n(Z) \sim H$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(2.57) impliziert dann $P(M_n(0) \in \cdot) \rightarrow H$ in Totalvariation. Insbesondere ist H eindeutig, da der Totalvariationslimes dies ist. \square

Um den Eindeutigkeitsbeweis abzuschließen, fehlt noch der Nachweis im Fall $F = \delta_c$. Wir greifen das Beispiel 2.2.5 auf und berechnen die Lösung von (2.38) per Hand.

Beispiel 2.3.10 Sei $p \in [0, 1]$, $F = B(1, p)$ und $G = B(1, 1 - q)$ mit

$$q = e^{-qp},$$

die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung $D_F(G) = G$. Dann ist $H = B(1, 1 - r)$ mit

$$r = \frac{q}{qp + 1} \quad (2.58)$$

die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung $\widetilde{D}_F(H) = H$.

Beweis. Beginnen wir mit der Eindeutigkeit von H . Seien dazu ξ , Y und Z stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit den Verteilungen F , G und H .

Aus $Z \sim \max\{Y, \xi - Z\}$, $P(Y \geq 0) = 1$ und $P(\xi \leq 1) = 1$ folgt

$$P(0 \leq Z \leq 1) = 1.$$

Da die Variablen stochastisch unabhängig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(Y = 0) \cdot P(\xi \leq Z) \\ &= P(Y = 0) \cdot (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) \cdot P(Z = 1)) \\ &= q \cdot ((1 - p) + p \cdot P(Z = 1)). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 1)$ hingegen berechnet sich zu

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(Y = 1) + P(Y = 0) \cdot P(\xi - Z = 1) \\ &= P(Y = 1) + P(Y = 0) \cdot P(\xi = 1) \cdot P(Z = 0) \\ &= (1 - q) + q \cdot p \cdot P(Z = 0). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Addieren wir die Gleichungen (2.59) und (2.60), erhalten wir $P(Z = 0) + P(Z = 1) = 1$, also ist Z tatsächlich $B(1, 1 - r)$ -verteilt. Stellen wir eine der beiden Gleichungen nach $r = P(Z = 0)$ um, so folgt auch die Eindeutigkeit von H , die sich durch (2.58) ausdrückt.

Ist umgekehrt $H = B(1, 1 - r)$ mit $r = \frac{q}{qp+1}$ gegeben, so sehen wir wie in (2.59) und (2.60), dass

$$P(Z = k) = P(\max\{Y, \xi - Z\} = k)$$

für $k \in \{0, 1\}$ gilt, d. h. H löst die Fixpunktgleichung $\widetilde{D}_F(H) = H$. \square

Um den Beweis von Theorem 2.3.1 zu vollenden, fehlt noch der Nachweis der Verteilungskonvergenz von $B(T_n^{\text{big}})$ gegen H , im Fall, dass F kein Dirac-Maß ist.

Lemma 2.3.11 Sei F wie üblich eine Verteilung auf $[0, \infty)$ und G bzw. H seien die eindeutigen Lösungen der Fixpunktgleichungen $D_F(G) = G$ bzw. $\widetilde{D}_F(H) = H$. Es sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert und

(a) $\{Y_m^n : -2k + 2 \leq m \leq 0\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Familie von Zufallsgrößen, die

$$\left(Y_{-2k+2}^n, \dots, Y_0^n \right) \xrightarrow{d} \underbrace{G \otimes \dots \otimes G}_{2k-1 \text{ mal}} \quad (2.61)$$

für $n \rightarrow \infty$ erfüllt,

(b) $\{X_m^n : -2k + 1 \leq m \leq 0\}$ durch

$$X_m^n = \max\{\xi_m^n - X_{m-1}^n, Y_m^n\} \quad (2.62)$$

definiert, wobei X_{-2k+1}^n eine beliebige nichtnegative Zufallsgröße sei und

- (c) $\{\xi_m^n : -2k+2 \leq m \leq 0\}$ eine Familie unabhängiger Zufallsgrößen mit Verteilung F sei, die zudem unabhängig von X_{-2k+1}^n und $\{Y_m^n : -2k+2 \leq m \leq 0\}$ sei.

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P(X_0^n \leq x) - H(x)| \leq \rho^k, \quad (2.63)$$

wobei ρ sich aus

$$\rho = \int_{[0, \infty)} \int_{(y, \infty)} F(dx) G(dy)$$

ergibt. Zudem impliziert Lemma 2.3.9 $\rho < 1$, falls F keine Dirac-Verteilung ist.

Beweis. Wir übernehmen die Notation aus dem Eindeutigkeitsbeweis von H : Seien $M(z) = (M_i(z))_{i \in \mathbb{N}_0}$ und τ wie in (2.53) bzw. (2.55) gegeben, d. h. $M_0(z) = z$, $M_i(z) = \max\{\xi_i - M_{i-1}(z), Y_i\}$ und $\tau = \inf\{2i+1 : M_{2i+1}(0) = Y_{2i+1}\}$ für eine unabhängige Familie $\{\xi_i, Y_i : i \in \mathbb{N}\}$, die auch unabhängig von $(X_{-2k+1}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, $\xi_i \sim F$ und $Y_i \sim G$ für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Ferner sei Z eine von $\{\xi_i, Y_i : i \in \mathbb{N}\}$ unabhängige Zufallsgröße mit Verteilung H . τ ist gemäß (2.56) eine Kopplungszeit für $(M_i(X_{-2k+1}^n))_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(M_i(Z))_{i \in \mathbb{N}_0}$, d. h. es gilt

$$M_{\tau+i}(X_{-2k+1}^n) = M_{\tau+i}(Z) \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0.$$

Aus $M_i(Z) \sim Z$ für alle $i \geq 0$ erhalten wir mittels der Kopplungsungleichung

$$|P(M_{2k-1}(X_{-2k+1}^n) \leq x) - P(Z \leq x)| \leq P(\tau > 2k-1) = P(\tau \geq 2k+1) \leq \rho^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Für (2.63) genügt es demnach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P(X_0^n \leq x) - P(M_{2k-1}(X_{-2k+1}^n) \leq x)| = 0 \quad (2.64)$$

zu zeigen, d. h. X_0^n verhält sich für $n \rightarrow \infty$ wie die Markov-Kette M , wenn diese in X_{-2k+1}^n gestartet und $2k-1$ Schritte gelaufen ist.

Doch X_0^n haben wir durch (2.62) genau so konstruiert. Es gilt überdies

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P(X_m^n \leq x) - P(M_{2k-1+m}(X_{-2k+1}^n) \leq x)| = 0 \quad (2.65)$$

für alle $-2k+1 \leq m \leq 0$. Der Fall $m = -2k+1$ in (2.65) ergibt sich offenkundig aus $M_0(X_{-2k+1}^n) = X_{-2k+1}^n$.

Die Voraussetzung (2.61) impliziert

$$(Y_{-2k+2}^n, \dots, Y_0^n) \xrightarrow{d} (Y_1, \dots, Y_{2k-1}).$$

Für $-2k+2 \leq m \leq 0$ sind X_{m-1}^n und ξ_m^n nach Annahme (c) stochastisch unabhängig. Zusammen mit $(\xi_{-2k+2}^n, \dots, \xi_0^n) \sim (\xi_1, \dots, \xi_{2k-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sehen wir

$$\begin{aligned} & |P(X_m^n \leq x) - P(M_{2k-1-m}(X_{-2k+1}^n) \leq x)| \\ &= |P(\max\{\xi_m^n - X_{m-1}^n, Y_m^n\} \leq x) \\ &\quad - P(\max\{\xi_{-2k-1-m} - M_{2k-2-m}(X_{-2k+1}^n), Y_{-2k-1-m}\} \leq x)| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich mit $m = 0$ die Behauptung (2.64). \square

Mit dieser Vorbereitung beweisen wir nun die Behauptung (2.39) aus Theorem 2.3.1.

Beweis für $B(T_n^{\text{big}}) \xrightarrow{d} H$. Sei $T_\infty \sim \text{PGW}^\infty(1)$ mit F -verteilten Kantengewichten. Wir nehmen ohne Einschränkung $T_n^{\text{big}} \rightarrow T_\infty$ P -f. s. an, unter Beachtung des Theorems 1.1.21 und Satz 1.3.4.

Für $k \in \mathbb{N}$ und P -fast alle $\omega \in \Omega$ finden wir nun ein $N(k, \omega) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N(k, \omega)$ ein Pfad $\pi = \pi(\omega, n)$ aus $2k$ Knoten des Baumes $T_n^{\text{big}}(\omega)$ existiert, der den folgenden beiden Eigenschaften genügt:

- (a) Der erste Knoten in π ist die Wurzel von $T_n^{\text{big}}(\omega)$.
- (b) Schreiben wir π als $v_0^n \rightarrow v_1^n \rightarrow \dots \rightarrow v_{2k-1}^n$, dann führt die Entfernung der Kanten $\{v_i^n, v_{i+1}^n\}$, $i = 0, \dots, 2k-2$, zu Teilbäumen $T_0^n(\omega), \dots, T_{2k-1}^n(\omega)$ von $T_n^{\text{big}}(\omega)$ mit Wurzeln v_i^n und es gilt die Verteilungskonvergenz

$$(T_0^n, \dots, T_{2k-2}^n) \xrightarrow{d} (T_0^\infty, \dots, T_{2k-2}^\infty),$$

wobei $(T_i^\infty)_{0 \leq i \leq 2k-2}$ eine unabhängige Familie von F -gewichteten $\text{PGW}(1)$ -Bäumen sei.

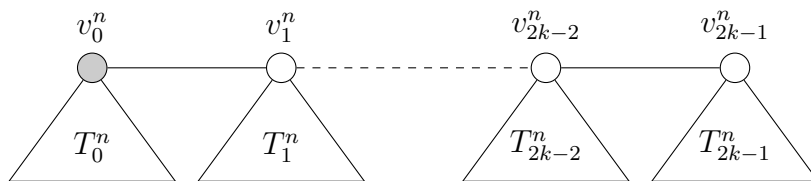


Abbildung 2.2. Die Bäume T_0^n, \dots, T_{2k-1}^n .

Die Existenz eines derartigen Pfades liefert das sukzessive Anwenden von Satz 1.3.4: Wir setzen v_1^n als Wurzel von $(T_n^{\text{big}})^{\text{big}}$, sofern diese Wurzel von v_0^n verschieden ist, d. h. n groß genug ist. v_2^n setzen wir als Wurzel von $((T_n^{\text{big}})^{\text{big}})^{\text{big}}$, sofern n wieder groß genug ist usw.

Da wir diesen Schritt nur endlich oft durchführen, erhalten wir auch ein endliches $N(k, \omega)$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Für $0 \leq i \leq 2k - 1$ sei nun R_i^n der Teilbaum von T_n^{big} , der an v_i^n hängt, d. h.

$$R_i^n = (T_n^{\text{big}})^{v_i^n}.$$

Wir beachten, dass $R_0^n = T_n^{\text{big}}$ gilt. Ist nun ξ_i^n das Gewicht der Kante $\{v_i^n, v_{i+1}^n\}$, so gilt

$$B(R_i^n) = \max\{\xi_i^n - B(R_{i+1}^n), B(T_i^n)\} \quad (2.66)$$

für alle $0 \leq i \leq 2k - 2$.

Die Gleichung (2.66) erhalten wir durch die in Abschnitt 2.3.1 gegebenen Argumente mit $v = v_i^n$ und $w = v_{i+1}^n$. Wir beachten dabei, dass die auftretenden Bäume endlich sind und deshalb mit keiner nicht definierten Größe gerechnet wird.

Eine Anwendung von Lemma 2.3.11 auf $m = -i$, also $Y_m^n = B(T_{-m}^n)$ und $X_m^n = B(R_{-m}^n)$ für alle $-2k + 2 \leq m \leq 0$, liefert zusammen mit $R_0^n = T_n^{\text{big}}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |P(B(T_n^{\text{big}}) \leq x) - H(x)| \leq \rho^k$$

für alle x . Weil k beliebig ist, folgt die Behauptung (2.39). \square

2.4. Asymptotik von $\mathbb{E}M_n$

Den Abschluss des ersten Kapitels bildet Korollar 1.5.5, welches eine nützliche Rekursionsgleichung für $\mathbb{E}M_n$ bereitstellt und die Vermutung nahelegt, dass $\mathbb{E}M_n$ sich für $n \rightarrow \infty$ wie $n \cdot \gamma$ verhält. Wir halten jetzt das Hauptresultat der beiden Kapitel fest:

Gegeben eine stetige Verteilung F auf $[0, \infty)$ mit endlichem Erwartungswert, seien G und H die eindeutigen Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichungen $D_F(G) = G$ und $\widetilde{D}_F(H) = H$ aus den Theoremen 2.2.3 und 2.3.1.

Ferner seien ξ , Y und Z stochastisch unabhängige Zufallsgrößen mit den Verteilungen F , G und H . ξ sei zudem unabhängig von den Gewichten \mathcal{G} aus (1.49) und der Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (1.9).

Theorem 2.4.1 Für $M_n = M(T_n)$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}M_n = \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y+Z\}}). \quad (2.67)$$

Beweis. Wir lassen die Ergebnisse der beiden Kapitel Revue passieren. In Korollar 1.5.5 wird festgehalten, dass

$$\mathbb{E}M_n = (n - 1) \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > B(T_n^{\text{small}}(e_n)) + B(T_n^{\text{big}}(e_n))\}}) \quad (2.68)$$

gilt. Auf die gleiche Weise, wie wir in Satz 1.3.4

$$(T_n^{\text{small}}, T_n^{\text{big}}) \xrightarrow{d} (T_\infty^{\text{small}}, T_\infty^{\text{big}})$$

gezeigt haben, folgern wir aus den beiden Fixpunkttheoremen 2.2.3 und 2.3.1

$$(B(T_n^{\text{small}}), B(T_n^{\text{big}})) \xrightarrow{d} (Y, Z).$$

Satz 1.1.22 liefert dann

$$B(T_n^{\text{small}}) + B(T_n^{\text{big}}) \xrightarrow{d} Y + Z,$$

und zusammen mit Lemma 2.1.1 folgt

$$B(T_n^{\text{small}}(e_n)) + B(T_n^{\text{big}}(e_n)) \xrightarrow{d} Y + Z. \quad (2.69)$$

Nach Voraussetzung ist $\mathbb{E}\xi < \infty$ und somit bildet

$$(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > B(T_n^{\text{small}}(e_n)) + B(T_n^{\text{big}}(e_n))\}})_{n \in \mathbb{N}} \quad (2.70)$$

eine gleichgradig integrierbare Folge. Unter Beachtung der Unabhängigkeit von ξ , \mathcal{G} und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt mit (2.69)

$$\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > B(T_n^{\text{small}}(e_n)) + B(T_n^{\text{big}}(e_n))\}} \xrightarrow{d} \xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y + Z\}}.$$

Letztlich schließen wir aus dieser Verteilungskonvergenz und der gleichgradigen Integrierbarkeit von (2.70) auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > B(T_n^{\text{small}}(e_n)) + B(T_n^{\text{big}}(e_n))\}}) = \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y + Z\}}). \quad (2.71)$$

Für den letzten Schluss siehe Satz 50.5 in [6]. Das Einsetzen von (2.68) in (2.71) zeigt (2.67). \square

Wir schließen den Abschnitt mit der Berechnung im Fall $F = B(1, p)$ ab, auch wenn dies keine stetige Verteilung ist. Die Fixpunktlösungen haben wir in den Beispielen 2.2.5 und 2.3.10 bestimmt: $G = B(1, 1 - q)$ und $H = B(1, 1 - r)$ mit

$$q = e^{-qp} \quad \text{und} \quad r = \frac{q}{qp + 1}$$

sind die eindeutigen Lösungen der Fixpunktgleichungen $D_F(G) = G$ und $\widetilde{D}_F(H) = H$. Sind ξ , Y und Z unabhängige Zufallsgrößen mit den Verteilungen F , G und H , so gilt aufgrund von $\{\xi > Y + Z\} = \{\xi = 1, Y = 0, Z = 0\}$ offenbar

$$\mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y + Z\}}) = p \cdot q \cdot r.$$

2.5. Exponentialverteilte Gewichte

Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Fall $F = \text{Exp}(\lambda)$. Lemma 2.5.1 gestattet es uns, dabei nur den Fall $\lambda = 1$ betrachten zu müssen.

Für eine Verteilung R auf $[0, \infty)$ und $c > 0$ sei die Verteilung R_c auf $[0, \infty)$ gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$R_c(x) = R(xc^{-1}).$$

In Termen von Zufallsgrößen ausgedrückt ist R_c die Verteilung von cX , wenn X eine Zufallsgröße mit Verteilung R ist.

Lemma 2.5.1 Gegeben $c > 0$ und eine Verteilung F auf $[0, \infty)$, seien G und H die eindeutigen Lösungen der Fixpunktgleichungen $D_F(G) = G$ und $\widetilde{D}_F(H) = H$. Dann sind G_c und H_c die eindeutigen Lösungen der Fixpunktgleichungen $D_{F_c}(G_c) = G_c$ und $\widetilde{D}_{F_c}(H_c) = H_c$.

Beweis. Dies folgt direkt aus der Beobachtung $c \cdot \max\{x, y\} = \max\{cx, cy\}$ für alle $c > 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. \square

Satz 2.5.2 Ist $\lambda > 0$ und $F = \text{Exp}(\lambda)$, so sind die Verteilungsfunktionen der Fixpunktlösungen $D_F(G) = G$ bzw. $\widetilde{D}_F(H) = H$ durch

$$G(y) = \exp(-ce^{-\lambda y}) \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y) \quad \text{bzw.} \quad (2.72)$$

$$H(z) = (1 - be^{-\lambda z}) \cdot \exp(-ce^{-\lambda z}) \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(z) \quad (2.73)$$

gegeben, wobei c die eindeutige positive Lösung der Gleichung

$$c^2 + e^{-c} = 1 \quad (2.74)$$

ist, und b sich aus

$$b = \frac{c^2}{c^2 + 2c - 1} \quad (2.75)$$

ergibt.

Beweis. Unter Beachtung des Lemmas 2.5.1 setzen wir ohne Einschränkung $\lambda = 1$, denn für $F = \text{Exp}(1)$ und $c = \lambda^{-1}$ gilt $F_c = \text{Exp}(\lambda)$, und die entsprechenden Gleichungen für G und H , wie ein Blick auf (2.72) und (2.73) zeigt.

Sei also von nun an $F = \text{Exp}(1)$. Wir wählen unabhängige Zufallsgrößen $N, Y, (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}, \xi$ und $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $N \sim \text{Poi}(1)$, $Y \sim G$, $Y_i \sim G$, $\xi \sim F$ und $\xi_i \sim F$.

Die Gleichung $D_F(G) = G$ impliziert

$$P(Y \leq y) = P(\xi_i - Y_i \leq y \text{ für alle } 1 \leq i \leq N)$$

für alle $y \geq 0$.

Das Bedingen unter den Werten von N liefert

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi_i - Y_i \leq y \text{ für alle } 1 \leq i \leq n) \cdot P(N = n) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot P(\xi - Y \leq y)^n \\ &= \frac{1}{e} \cdot \exp(P(\xi - Y \leq y)) \\ &= \exp(-P(\xi - Y > y)). \end{aligned}$$

Mit $c := P(\xi > Y)$ und der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung folgt

$$\begin{aligned} \exp(-P(\xi - Y > y)) &= \exp(-P(\xi > y + Y)) \\ &= \exp(-P(\xi > Y) \cdot P(\xi > y)) \\ &= \exp(-ce^{-y}), \end{aligned}$$

wie in (2.72) behauptet. (2.74) lässt sich aus der definierenden Gleichung von c und (2.72) beweisen:

$$\begin{aligned} c = P(\xi > Y) = P(\xi \geq Y) &= \int_{[0, \infty)} \int_{[0, y]} P^Y(dx) P^\xi(dy) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot P(Y \leq y) dy \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot \exp(-ce^{-y}) dy \\ &= \int_0^1 \exp(-cz) dz \\ &= \frac{1 - e^{-c}}{c}. \end{aligned}$$

Beim vorletzten Gleichheitszeichen wurde $z = e^{-y}$ substituiert. Die Eindeutigkeit von c in (2.74) folgt aus einer simplen Kurvendiskussion der Funktion $x \mapsto x^2 + e^x$.

Für die Bestimmung von H sei eine von ξ und Y unabhängige Zufallsgröße $Z \sim H$ gegeben. Es gilt dann $Z \sim \max\{Y, \xi - Z\}$ und folglich

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(Y \leq z, \xi - Z \leq z) \\ &= P(Y \leq z) \cdot P(\xi - Z \leq z) \\ &= \exp(-ce^{-z}) \cdot P(\xi \leq z + Z) \\ &= \exp(-ce^{-z}) \cdot (1 - e^{-z} \cdot P(\xi > Z)) \end{aligned}$$

für alle $z \geq 0$, unter erneuter Benutzung der Gedächtnislosigkeit von ξ .

Mit $b := P(\xi > Z)$ folgt dann (2.73) und es bleibt (2.75) zu zeigen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} b &= P(\xi > Z) = P(\xi \geq Z) \\ &= \int_{[0, \infty)} \int_{[0, z]} P^Z(dx) P^\xi(dz) \\ &= \int_0^\infty e^{-z} \cdot P(Z \leq z) dz \\ &= \int_0^\infty e^{-z} \cdot (1 - be^{-z}) \cdot \exp(-ce^{-z}) dz \\ &= \frac{c-b}{c^2} + \frac{b-c+bc}{c^2} \cdot e^{-c}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder $s = e^{-z}$ substituieren, um das Integral zu lösen. Mit (2.74) erhalten wir $e^{-c} = 1 - c^2$, womit wie gewünscht

$$\begin{aligned} b &= \frac{c-b}{c^2} + \frac{b-c+bc}{c^2} \cdot (1-c^2) = b \cdot (c^{-1} - 1 - c) + c \\ \Leftrightarrow b &= \frac{c^2}{c^2 + 2c - 1} \end{aligned}$$

folgt. □

Wir beachten, dass c der Schranke ρ aus (2.57) entspricht. Die Gleichungen für b und c lassen sich numerisch lösen, näherungsweise gilt

$$b = 0.543353\dots \quad \text{und} \quad c = 0.714556\dots,$$

siehe Abschnitt 3.8, Lemma 2 in [4].

Mit Hilfe des Theorems 2.4.1 und der Verteilungen (2.72) und (2.73) berechnen wir nun den Grenzwert von $n^{-1} \mathbb{E}M_n$ für exponentialverteilte Gewichte.

Wir beschränken uns erneut auf den Fall $\lambda = 1$, denn den Grenzwert im allgemeinen Fall erhalten wir durch Multiplikation von λ^{-1} mit dem Grenzwert im Fall $F = \text{Exp}(1)$, wenn wir Lemma 2.5.1 und

$$\mathbb{E}(c \cdot \xi \cdot \mathbb{1}_{\{c\xi > cY + cZ\}}) = c \cdot \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y+Z\}})$$

für alle $c > 0$ beachten.

Theorem 2.5.3 Ist $F = \text{Exp}(1)$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}M_n = \int_0^\infty \int_0^s c (e^{-y} - be^{-s}) \exp(-ce^{-y} - ce^{-(s-y)}) se^{-s} dy ds. \quad (2.76)$$

Näherungsweise ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}M_n = 0.239583 \dots,$$

siehe Abschnitt 3.8, Theorem 2 in [4].

Beweis. Im Angesicht des Theorems 2.4.1 haben wir nur $\mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y+Z\}})$ für stochastisch unabhängige ξ , Y und Z mit $\xi \sim F$, $Y \sim G$ und $Z \sim H$ zu berechnen.

G ist gemäß (2.72) auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit $G'(s) = ce^{-s} \exp(-ce^{-s})$ für alle $s > 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi \cdot \mathbb{1}_{\{\xi > Y+Z\}}) &= \int_{(0, \infty)} s \int_{(0, s)} \int_{(0, s-y)} P^Z(dz) P^Y(dy) P^\xi(ds) \\ &= \int_{(0, \infty)} s \int_{(0, s)} H(s-y) P^Y(dy) P^\xi(ds) \\ &= \int_{(0, \infty)} \int_0^s s \cdot G'(y) \cdot H(s-y) dy P^\xi(ds) \\ &= \int_0^\infty \int_0^s G'(y) \cdot H(s-y) \cdot se^{-s} dy ds. \end{aligned}$$

Ferner ist für $s, y > 0$ mit $s - y > 0$ die Gleichung

$$\begin{aligned} G'(y) \cdot H(s-y) &= ce^{-y} \exp(-ce^{-y}) \cdot (1 - be^{-(s-y)}) \cdot \exp(-ce^{-(s-y)}) \\ &= c \cdot (e^{-y} - be^{-s}) \cdot \exp(-ce^{-s}) \cdot \exp(-ce^{-(s-y)}) \end{aligned}$$

gültig. Insgesamt zeigt dies (2.76). □

3. Fransenverteilungen

Dieses Kapitel beruht auf einem, aus dem Jahr 1991 stammenden, Artikel von Aldous [2]. Wir beschäftigen uns mit einer speziellen Klasse von Verteilungen auf \mathcal{S}_{fin} – genannt Fransenverteilungen. \mathcal{S}_{fin} ist dabei die in (1.5) definierte Menge aller endlichen unmarkierten Bäume.

Im ersten Abschnitt führen wir Fransenverteilungen ein und leiten einige elementare Eigenschaften aus der Definition ab. Des Weiteren beweisen wir in Beispiel 3.1.4, dass die Verteilung eines kritischen Galton-Watson-Baumes dieser Klasse angehört.

3.1. Definition und Eigenschaften

Für $s, t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ sei $Q(s, t)$ definiert als

$$Q(s, t) = |\{c \in C(s) : s^c = t\}|. \quad (3.1)$$

$Q(s, t)$ gibt also an, wie viele der Bäume s^v , $v \in C(s)$, zu t isomorph sind. Erinnern wir uns an die Definition von $Q_v(s, t)$ in (1.7), so gilt offenbar $Q(s, t) = Q_r(s, t)$, wenn r die Wurzel von s bezeichnet.

Wir fassen Q als Matrix auf und definieren Q^n als das n -fache Matrixprodukt von Q mit sich selbst. Q^0 sei dabei als Einheitsmatrix gesetzt.

Als einfache Konsequenz der Definition halten wir das folgende Lemma ohne Beweis fest. In Teil (d) gibt $|L(t)|$ die Anzahl der Blätter von t an, vgl. Definition 1.1.4.

Lemma 3.1.1 Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ gilt

- (a) $Q^n(s, t) = |\{v \in V_s : v \text{ befindet sich in Generation } n, \text{ und es gilt } s^v = t\}|$,
- (b) $\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q^n(s, t) = |\{v \in V_s : v \text{ befindet sich in Generation } n\}|$,
- (c) $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q^i(s, t) = |s|$ und
- (d) $\sum_{i=0}^{\infty} Q^i(s, t_1) = |L(s)|$, wobei t_1 der einzige Baum aus \mathcal{S}_1 sei.

Definition 3.1.2 Eine Verteilung π auf \mathcal{S}_{fin} heißt *Fransenverteilung* (engl. *fringe distribution*), falls für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ die Gleichung

$$\pi(t) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot Q(s, t) \quad (3.2)$$

erfüllt ist.

Ist T ein Zufallsbaum mit Verteilung π , so ist (3.2) offenbar äquivalent zu

$$\mathbb{E}Q(T, t) = P(T = t)$$

für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$.

In Matrixschreibweise muss für π die Gleichung $\pi Q = \pi$ gelten. Ist dies der Fall, so folgt induktiv $\pi Q^i = \pi$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

Über elementare Eigenschaften einer Fransenverteilung gibt das nächste Lemma Auskunft.

Lemma 3.1.3 Sei π eine Fransenverteilung und $t_1 \in \mathcal{S}_1$, der einzige Baum mit einem Knoten. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Sind $s, t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und ist s ein Teilbaum von t , so gilt $\pi(s) \geq \pi(t)$. Insbesondere folgt $\pi(t_1) \geq \pi(t)$ für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$.
- (b) $0 < \pi(t_1) < 1$.
- (c) $\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |C(t)| = 1$.
- (d) $\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |L(t)| = \infty$.
- (e) $\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |t| = \infty$.

Beweis. Seien $s, t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Dann gilt gemäß Lemma 3.1.1 (a)

$$s \text{ ist ein Teilbaum von } t \iff Q^n(t, s) \geq 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Ist dies erfüllt, so folgt aufgrund von $\pi = \pi Q^n$

$$\pi(s) = \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s') \cdot Q^n(s', s) \geq \pi(t) \cdot Q^n(t, s) \geq \pi(t),$$

welches (a) zeigt. Damit folgt auch $\pi(t_1) > 0$, denn im anderen Fall wäre $\pi \equiv 0$.

Wäre $\pi(t_1) = 1$, so würden wir mit (3.2)

$$1 = \pi(t_1) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot Q(s, t_1) = 0$$

erhalten, denn sowohl $Q(t_1, t_1)$ als auch $\pi(s)$, $s \neq t_1$, sind 0.

Für (c) bemerken wir zunächst, dass aus Lemma 3.1.1 (b) mit $n = 1$

$$|C(t)| = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q(t, s) \tag{3.3}$$

folgt. Das Einsetzen von (3.3) in (c) liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |C(t)| &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q(t, s) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot Q(t, s) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) = 1.
\end{aligned}$$

Aussage (d) folgt mit Lemma 3.1.1 (d) durch

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |L(t)| &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(t, t_1) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot Q^i(t, t_1) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \pi(t_1) = \infty,
\end{aligned}$$

wenn wir zusätzlich (b) und $\pi Q^i = \pi$ beachten.

Der Teil (e) folgt aus (d) und $|L(t)| \leq |t|$. □

Die Aussage (a) des Lemmas sichert eine gewisse Monotoniebedingung an eine Fransenverteilung: Ein Teilbaum darf unter π nicht weniger Wahrscheinlichkeit tragen als der ursprünglich größere Baum.

Ist T ein Zufallsbaum mit einer Fransenverteilung, so besagt (e), dass die erwartete Größe der Gesamtpopulation ∞ beträgt. Für einen fast sicher aussterbenden Galton-Watson-Baum T ist dies nur im kritischen Fall erfüllt. Das nächste Beispiel zeigt, dass ein kritischer Galton-Watson-Baum tatsächlich eine Fransenverteilung besitzt.

Beispiel 3.1.4 Sei T ein kritischer Galton-Watson-Baum mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ und Werten in \mathcal{S}_{fin} . Dann ist $P(T \in \cdot)$ eine Fransenverteilung.

Beweis. Sei $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Dann gilt mit $A_q^k = \{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}} : |C(s)| = k \text{ und } Q(s, t) = q\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(T = s) \cdot Q(s, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k \sum_{s \in A_q^k} P(T = s) \cdot q \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{q=1}^k q \cdot P(T \in A_q^k).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Gibt X die Größe der 1. Generation von T an, so gilt mit Lemma 1.2.5

$$\begin{aligned} P(T \in A_q^k) &= P(T \in A_q^k, X = k) \\ &= P(T \in A_q^k \mid X = k) \cdot P(X = k) \\ &= \binom{k}{q} \cdot P(T = t)^q \cdot (1 - P(T = t))^{k-q} \cdot P(X = k), \end{aligned}$$

denn q der k Teilbäume T^v , $v \in C(T)$, müssen zu t isomorph sein, während die anderen $k - q$ Teilbäume beliebige, aber von t verschiedene, Bäume sein müssen.

Summieren wir über alle Möglichkeiten von q , so ergibt sich

$$\sum_{q=1}^k q \cdot P(T \in A_q^k) = P(T = t) \cdot k \cdot P(X = k),$$

und das Einsetzen in (3.4) liefert

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(T = s) \cdot Q(s, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(T = t) \cdot k \cdot P(X = k) \\ &= P(T = t) \cdot \mathbb{E}X. \end{aligned}$$

Da X nach $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ verteilt ist und wir uns im kritischen Fall befinden, ist $\mathbb{E}X = 1$ und damit $P(T \in \cdot)$ eine Fransenverteilung. \square

Auf weitere Beispiele von Fransenverteilungen verzichten wir an dieser Stelle und verweisen dafür auf die Abschnitte 3 und 6 in [2].

3.1.1. Die \mathbb{P}_π -Kette

Dieser kurze Abschnitt dient der Einführung einer Markov-Kette, die wir aus einer Fransenverteilung π gewinnen. Diese Kette wird später für die Konstruktion einer Fortsetzung von π nützlich sein, siehe dazu Lemma 3.2.4 (b).

Zu einer Fransenverteilung π definieren wir eine zeitlich diskrete und zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathcal{Z}_\pi = \{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}} : \pi(t) > 0\}$ durch die Übergangsmatrix

$$\mathbb{P}_\pi(s, t) = \frac{\pi(t)}{\pi(s)} \cdot Q(t, s). \quad (3.5)$$

Einige essentielle Eigenschaften der Kette fasst das nächste Lemma zusammen.

Lemma 3.1.5 Sei π eine Fransenverteilung und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix \mathbb{P}_π und Anfangsverteilung $P(X_0 \in \cdot)$. Dann gilt

(a) $\pi(s) \cdot \mathbb{P}_\pi^n(s, t) = \pi(t) \cdot Q^n(t, s)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t, s \in \mathcal{Z}_\pi$,

- (b) $|X_n| > |X_{n+1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$,
- (c) $H(X_n) > H(X_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und
- (d) mit $L_n = \{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}} : |t| < n\}$ gilt

$$\sum_{s \in L_n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \setminus L_n} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\pi}(s, s') \cdot \mathbb{P}_{\pi}^i(t, s) = 1$$

für alle $t \in L_n \cap \mathcal{Z}_{\pi}$.

Beweis. Der Teil (a) folgt aus einer einfachen Induktion: Für $n = 1$ ist die Behauptung korrekt, nach Definition von \mathbb{P}_{π} in (3.5). Der Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ folgt via

$$\begin{aligned} \pi(s) \cdot \mathbb{P}_{\pi}^{n+1}(s, t) &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot \mathbb{P}_{\pi}(s, s') \cdot \mathbb{P}_{\pi}^n(s', t) \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q(s', s) \cdot \pi(t) \cdot Q^n(t, s') \\ &= \pi(t) \cdot Q^{n+1}(t, s), \end{aligned}$$

unter zweifacher Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung im vorletzten Gleichheitszeichen. Die Aussagen (b) und (c) folgen unmittelbar dadurch, dass $\mathbb{P}_{\pi}(s, t) > 0$ bereits $Q(t, s) \geq 1$, und somit $|t| > |s|$ als auch $H(t) > H(s)$ impliziert. Um (d) zu zeigen, setzen wir den Startpunkt der Kette als t , d. h. $X_0 = t$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_{\pi}(s, s') \cdot \mathbb{P}_{\pi}^i(t, s) = P(X_i = s, X_{i+1} = s')$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sum_{s \in L_n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \setminus L_n} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\pi}(s, s') \cdot \mathbb{P}_{\pi}^i(t, s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s \in L_n} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \setminus L_n} P(X_i = s, X_{i+1} = s') \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(X_i \in L_n, X_{i+1} \notin L_n) \\ &= 1, \end{aligned}$$

wenn wir Teil (b) und $X_0 = t \in L_n$ beachten. □

3.1.2. Charakterisierungssatz

Gegeben eine Folge von Zufallsbäumen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in \mathcal{S}_{fin} , wählen wir für jedes n einen Teilbaum $(S_n)^v$, wobei v ein gleichverteilt gewählter Knoten von S_n sei. Die auf diese Weise entstandene Folge von Zufallsbäumen steht nun im Zentrum unseres

Interesses. Wir werden sehen, dass Verteilungslimiten von derart konstruierten Folgen im Wesentlichen genau die Fransenverteilungen sind.

Wir formalisieren zunächst die beschriebene Teilbaum-Konstruktion: Für $s, t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ sei

$$U(s, t) = \frac{1}{|s|} \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(s, t). \quad (3.6)$$

$U(s, t)$ gibt also die Wahrscheinlichkeit an, dass ein gleichverteilt gewählter Teilbaum s^v , $v \in V_s$, den Baum t ergibt.

Für einen endlichen Zufallsbaum S mit Verteilung θ sei U_S der Zufallsbaum, der entsteht, wenn wir einen Knoten v von S gleichverteilt wählen und den zugehörigen Teilbaum S^v bilden. Es gilt also

$$P(U_S = s) = \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} U(t, s) \cdot P(S = t). \quad (3.7)$$

Wir schreiben für die Verteilung von U_S auch U_θ .

Die Definition (3.7) von U_θ kann für jedes endliche Maß θ auf \mathcal{S}_{fin} gegeben werden. Dann gilt

$$U_\theta(\mathcal{S}_{\text{fin}}) = \theta(\mathcal{S}_{\text{fin}}), \quad (3.8)$$

wie wir ohne großen Aufwand nachrechnen:

$$\begin{aligned} U_\theta(\mathcal{S}_{\text{fin}}) &= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} U_\theta(s) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} U(t, s) \cdot \theta(t) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \frac{1}{|t|} \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(t, s) \cdot \theta(t) \\ &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \theta(t) \cdot \frac{1}{|t|} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(t, s) \\ &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \theta(t) \\ &= \theta(\mathcal{S}_{\text{fin}}). \end{aligned}$$

Im vorletzten Gleichheitszeichen haben wir Lemma 3.1.1 (c) angewendet.

Theorem 3.1.6 Ist π eine Fransenverteilung, so existiert eine Folge von Zufallsbäumen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in \mathcal{S}_{fin} , die

$$|S_n| \xrightarrow{d} \infty \quad \text{und} \quad U_{S_n} \xrightarrow{d} \pi \quad (3.9)$$

erfüllt.

Beweis. Es sei $L_n = \{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}} : |t| < n\}$ und $L_n^c = \mathcal{S}_{\text{fin}} \setminus L_n$. Wir definieren ein endliches Maß θ_n auf $L_n \cap \mathcal{Z}_\pi$ durch

$$\theta_n(t) = |t| \sum_{s \in L_n^c} \pi(s) \cdot Q(s, t). \quad (3.10)$$

Für das zu θ_n gehörige Maß U_{θ_n} aus (3.7) gilt für alle $s \in L_n \cap \mathcal{Z}_\pi$

$$\begin{aligned} U_{\theta_n}(s) &= \sum_{t \in L_n} \theta_n(t) \cdot U(t, s) \\ &= \sum_{t \in L_n} \theta_n(t) \cdot \frac{1}{|t|} \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(t, s) \\ &= \sum_{t \in L_n} \sum_{s' \in L_n^c} \pi(s') \cdot Q(s', t) \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(t, s) \\ &= \pi(s) \sum_{t \in L_n} \sum_{s' \in L_n^c} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}_\pi(t, s') \cdot \mathbb{P}_\pi^i(s, t) \\ &= \pi(s), \end{aligned}$$

wobei die beiden letzten Gleichheitszeichen aus Lemma 3.1.5 (a) bzw. (d) folgen.

(3.8) impliziert $\theta_n(\mathcal{S}_{\text{fin}}) = U_{\theta_n}(\mathcal{S}_{\text{fin}}) = \pi(L_n)$. Für Zufallsbäume S_n mit Verteilung $\frac{1}{\pi(L_n)}\theta_n$ gilt dann

$$U_{S_n} \sim \pi|_{L_n},$$

welches $U_{S_n} \xrightarrow{d} \pi$ beweist.

Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine \mathbb{P}_π -Kette mit Anfangsverteilung π , so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(|S_n| < k) &= P(S_n \in L_k) \\ &= \frac{1}{\pi(L_n)} \sum_{t \in L_k} \theta_n(t) \\ &= \frac{1}{\pi(L_n)} \sum_{t \in L_k} |t| \sum_{s \in L_n^c} \pi(s) \cdot Q(s, t) \\ &\leq \frac{k}{\pi(L_n)} \sum_{t \in L_k} \sum_{s \in L_n^c} \pi(t) \cdot \mathbb{P}_\pi(t, s) \\ &= \frac{k}{\pi(L_n)} \sum_{t \in L_k} \sum_{s \in L_n^c} P(X_0 = t, X_1 = s) \\ &= \frac{k}{\pi(L_n)} \cdot P(X_0 \in L_k, X_1 \notin L_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

denn $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bildet eine aufsteigende Mengenfolge mit $L_n \rightarrow \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Damit ist das Theorem vollständig bewiesen. \square

Geben wir uns umgekehrt eine Folge endlicher Zufallsbäume mit $|S_n| \rightarrow \infty$ vor, für die U_{S_n} in Verteilung gegen π konvergiert, so stellt sich die Frage, ob π eine Fransenverteilung ist.

Dazu betrachten wir zwei einfache Beispiele.

Beispiel 3.1.7 (a) Ist S_n der „Pfadbaum“ mit n Knoten, d. h. der Baum aus \mathcal{S}_n , der nur ein Blatt besitzt, so gilt $P(U_{S_n} = t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für alle $t \in \mathcal{S}$. U_{S_n} konvergiert hier zwar in Verteilung, jedoch nicht gegen ein Maß auf \mathcal{S}_{fin} , sondern gegen das Dirac-Maß im „unendlichen Pfadbaum“ aus \mathcal{S}_∞ .

(b) Ist S_n der „Sternbaum“ mit n Knoten, d. h. der Baum $s \in \mathcal{S}_n$, der $|C(s)| = n-1$ erfüllt, so gilt $P(U_{S_n} = t_1) = \frac{n}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ für den trivialen Baum $t_1 \in \mathcal{S}_1$. Auch hier konvergiert U_{S_n} zwar in Verteilung, jedoch gegen keine Fransenverteilung.

Vorausgesetzt der Limes $P(U_{S_n} = t) \rightarrow \pi(t)$ existiert für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$, muss π nicht zwingend eine Fransenverteilung sein. π muss nicht einmal ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{S}_{fin} sein. Setzen wir jedoch zusätzlich $\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |C(t)| = 1$ voraus, so ist π tatsächlich eine Fransenverteilung, wie das nächste Theorem zeigt.

Theorem 3.1.8 Ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge endlicher Zufallsbäume mit

$$|S_n| \xrightarrow{d} \infty \quad \text{und} \quad P(U_{S_n} = t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(t) \quad (3.11)$$

für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$, und erfüllt π die Bedingung (c) aus Lemma 3.1.3, d. h. gilt

$$\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |C(t)| = 1, \quad (3.12)$$

so ist π eine Fransenverteilung. Insbesondere gilt $\pi(\mathcal{S}_{\text{fin}}) = 1$.

Beweis. Sei $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Aus dem Lemma von Fatou und der Voraussetzung (3.11) folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(U_{S_n} = s) \cdot Q(s, t) \geq \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot Q(s, t).$$

Andererseits gilt

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(U_{S_n} = s) \cdot Q(s, t) = P(U_{S_n} = t) - \frac{1}{|t|} \cdot P(S_n = t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(t), \quad (3.13)$$

denn

$$\begin{aligned}
& \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(U_{S_n} = s) \cdot Q(s, t) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|s'|} \cdot Q^i(s', s) \cdot Q(s, t) \cdot P(S_n = s') \\
&= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \frac{1}{|s'|} \cdot P(S_n = s') \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q^i(s', s) \cdot Q(s, t) \\
&= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \frac{1}{|s'|} \cdot P(S_n = s') \sum_{i=0}^{\infty} Q^{i+1}(s', t) \\
&= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \frac{1}{|s'|} \cdot P(S_n = s') \sum_{i=0}^{\infty} Q^i(s', t) - \sum_{s' \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \frac{1}{|s'|} Q^0(s', t) \cdot P(S_n = s') \\
&= P(U_{S_n} = t) - \frac{1}{|t|} \cdot P(S_n = t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(t),
\end{aligned}$$

unter erneuter Benutzung beider Voraussetzungen aus (3.11). Insgesamt erhalten wir

$$\pi(t) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(U_{S_n} = s) \cdot Q(s, t) \geq \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot Q(s, t) \quad (3.14)$$

für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$. Wenn wir zeigen, dass

$$\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) = 1 = \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot Q(s, t) \quad (3.15)$$

gilt, folgt mit (3.14) auch wie gewünscht $\pi(t) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot Q(s, t)$ für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$.

Der Nachweis von (3.15) ergibt sich zum einen aus der Voraussetzung (3.12), denn

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot Q(s, t) &= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} Q(s, t) \\
&= \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(s) \cdot |C(s)| \\
&\stackrel{(3.12)}{=} 1,
\end{aligned}$$

zum anderen aus (3.13) durch

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(U_{S_n} = s) \cdot Q(s, t) &= \sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} P(U_{S_n} = t) - \frac{1}{|t|} P(S_n = t) \\
&= 1 - E|S_n|^{-1} \leq 1
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt wie gewünscht

$$\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) = 1,$$

und das Theorem ist bewiesen. □

Der folgende Charakterisierungssatz ist lediglich eine Zusammenfassung der Theoreme 3.1.6 und 3.1.8 und bedarf daher keines Beweises.

Satz 3.1.9 (Charakterisierungssatz) Eine Verteilung π auf \mathcal{S} mit

$$\sum_{t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \pi(t) \cdot |C(t)| = 1$$

ist genau dann eine Fransenverteilung, wenn es eine Folge endlicher Zufallsbäume $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$|S_n| \xrightarrow{d} \infty \quad \text{und} \quad P(U_{S_n} = t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi(t)$$

für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ gibt.

Wenden wir uns wieder den kritischen Galton-Watson-Bäumen zu. Für sie lässt sich eine einfache Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden, deren Teilbaumfolge $(U_{S_n})_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen den kritischen Galton-Watson-Baum konvergiert.

Beispiel 3.1.10 Sei T ein kritischer Galton-Watson-Baum mit Werten in \mathcal{S}_{fin} und Reproduktionsverteilung $p = (p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$. p habe endliche Varianz und sei arithmetisch mit Spanne $d(p) = 1$. Sei S_n mit

$$S_n \sim P(T \in \cdot \mid |T| = n). \quad (3.16)$$

Dann gilt

$$P(U_{S_n} = t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(T = t) \quad (3.17)$$

für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$, gemäß Korollar 1.1.19 also

$$U_{S_n} \xrightarrow{d} T. \quad (3.18)$$

Beweis. (3.17) lässt sich auf den Spezialfall zurückführen, dass t der triviale Baum aus \mathcal{S}_1 ist. Für ihn lautet die zu zeigende Aussage

$$\frac{1}{n} \cdot E|L(S_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p_0, \quad (3.19)$$

die in [12], Theorem 2.3.1, bewiesen wird. Die technische Voraussetzung $d(p) = 1$ wird dort benötigt.

Da wir die Reproduktionsvarianz als endlich annehmen, gilt gemäß Theorem 2.1.4 in [12]

$$P(|T| = n) \sim n^{-3/2} (2\pi \cdot \text{Var}(p))^{-1/2}. \quad (3.20)$$

Es sei R_T der in der Wurzel von T verwurzelte Baum, der entsteht, wenn wir den Baum U_T bis auf seine Wurzel aus T entfernen (siehe auch Abbildung 3.1).

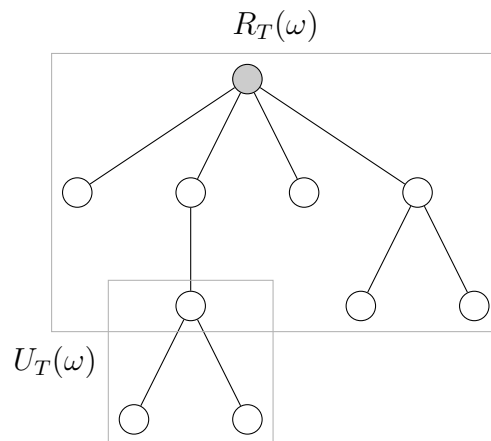


Abbildung 3.1. Eine Realisierung von U_T und R_T .

Für alle $s, t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ mit $|s| + |t| = n + 1$ gilt dann

$$P(U_T = t, R_T = s) = \frac{|L(s)|}{n} \cdot \frac{P(T = s) P(T = t)}{p_0}, \quad (3.21)$$

denn der rechte Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Galton-Watson-Baum T den Baum ergibt, der entsteht, wenn wir einen Blattknoten von s durch t ersetzen. Der linke Faktor gibt die Wahrscheinlichkeit an, einen Knoten von T gleichverteilt zu wählen, der $U_T = t$ und $R_T = s$ impliziert. Aus (3.21) folgern wir

$$\begin{aligned} \frac{P(U_{T_n} = t)}{P(T = t)} &= \frac{1}{P(T = t)} \sum_{s \in \mathcal{S}_{n-|t|+1}} \frac{P(U_T = t, R_T = s)}{P(|T| = n)} \\ &= \frac{1}{p_0 \cdot P(|T| = n) \cdot n} \sum_{s \in \mathcal{S}_{n-|t|+1}} |L(s)| \cdot P(T = s) \\ &= \frac{P(|T| = n - |t| + 1)}{P(|T| = n)} \cdot \frac{n - |t| + 1}{n} \cdot \frac{1}{p_0} \cdot \frac{1}{n - |t| + 1} \cdot E|L(S_{n-|t|+1})|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.19) und (3.20) erhalten wir damit gewünscht

$$\frac{P(U_{T_n} = t)}{P(T = t)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

für alle $t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$. □

Im Fall $T \sim \text{PGW}(1)$ lässt sich (3.20) mit Hilfe des Korollars 1.2.10 verifizieren. Wir beachten, dass in diesem Fall $S_n \sim T_n$ gemäß Satz 1.2.12 gilt.

3.2. Sin-Bäume

Das Ziel dieses letzten Abschnittes ist es, die Aussage von Theorem 3.1.8 zu verschärfen. Mit dieser Verschärfung sind wir dann in der Lage Grimmetts Lemma (vgl. Abschnitt 1.3) zu beweisen.

Wir erinnern zunächst an Definition 1.2.14: $\sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$ ist der Baum, der entsteht, wenn wir die Bäume b_i entlang ihrer Wurzeln verbinden und die neue Wurzel als Wurzel von b_1 festlegen. Analog definieren wir für endlich viele Bäume t_1, \dots, t_n den Baum $\sqcup_{i=1}^n b_i$.

Ist eine Folge endlicher Bäume $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegeben, so entsteht durch $\sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$ ein Baum, der einen eindeutigen, unendlich langen, in der Wurzel startenden Pfad besitzt.

Definition 3.2.1 Es sei

$$\mathcal{I} = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^{\infty} b_i : b_i \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\},$$

die Menge der sogenannten *sin-Bäume*. Die Bezeichnung geht auf die Arbeit [2] von Aldous zurück, in der „sin“ für „single infinite path“ steht.

Ist $t \in \mathcal{I}$ gegeben, so lässt sich eine eindeutige Folge $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $t = \sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$ finden. Diese Darstellung nennen wir auch *Zweigdarstellung von t* . b_n bezeichnet den *n -ten Zweig*.

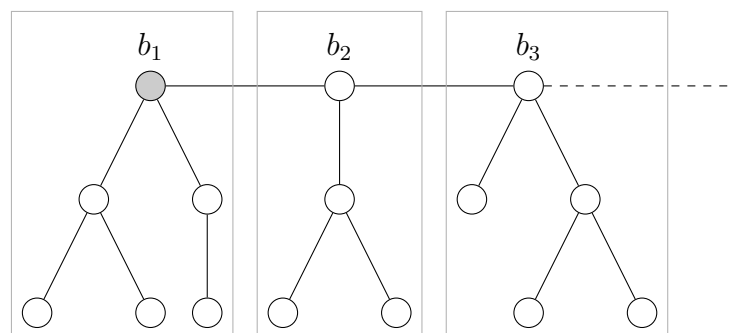


Abbildung 3.2. Visualisierung der Zweigdarstellung eines sin-Baumes.

Eine andere Darstellung von t lässt sich wie folgt beschreiben: Ist r_n die Wurzel von b_n aus der Zweigdarstellung von t , so sei $f_n(t)$ der in r_n verwurzelte Baum, der aus denjenigen Knoten besteht, die sich nicht im Baum $t^{r_{n+1}}$ befinden. Die Kantenmenge von $f_n(t)$ sei hierbei wie üblich von t induziert.

Offenkundig gilt $f_n(t) = \sqcup_{i=1}^n b_{n+1-i}$ (siehe Abbildung 3.3). Wir nennen $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ die *monotone Darstellung von t* .

Wir beachten, dass $f_1(t) = b_1$ und $Q(f_{n+1}(t), f_n(t)) \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

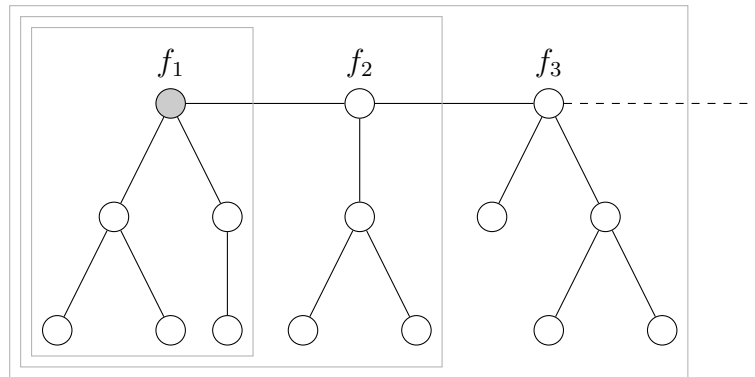


Abbildung 3.3. Die monotone Darstellung des gleichen sin-Baumes.

Als nächstes setzen wir die Zählvariable Q aus (3.1) auf \mathcal{I} zu $Q_{\mathcal{I}}$ fort: Sind zwei Bäume $t = \sqcup_{i=1}^{\infty} b_i$ und $s = \sqcup_{i=1}^{\infty} c_i$ aus \mathcal{I} gegeben, und ist v ein Kind der Wurzel von b_1 , so können wir t als sin-Baum mit Wurzel v ansehen. $Q_{\mathcal{I}}(t, s)$ gebe an, für wieviele v diese Konstruktion zum Baum s führt, d. h.

$$Q_{\mathcal{I}}(t, s) = |\{v \in C(b_1) : t \text{ als Baum mit Wurzel } v \text{ ist zu } s \text{ isomorph}\}|. \quad (3.22)$$

Erneut wirft dies die Frage der Wohldefiniertheit von (3.22) auf, die hier allerdings gegeben ist, da wir mit $Q_{\mathcal{I}}(t, s)$ eine Zählvariable definieren, die für alle Repräsentanten von t einen identischen Wert ergibt.

Es ist außerdem klar, dass $Q_{\mathcal{I}}(t, s) \geq 1$ nur dann gelten kann, wenn

- (a) $Q(b_1, c_1) \geq 1$ gilt,
- (b) c_2 der Baum $b_1 \setminus c_1$ ist, der entsteht, wenn wir einen zu c_1 isomorphen Teilbaum $(b_1)^v$, $v \in C(b_1)$, von b_1 entfernen, und
- (c) $c_n = b_{n-1}$ für alle $n \geq 3$ gilt.

Sind (a), (b) und (c) erfüllt, so gilt $Q_{\mathcal{I}}(t, s) = Q(b_1, c_1)$. Ist eine der drei Bedingung verletzt, so ist $Q_{\mathcal{I}}(t, s) = 0$. Die Definition (3.22) lässt sich demnach im Fall $Q_{\mathcal{I}}(t, s) \geq 1$ auch schreiben als

$$Q_{\mathcal{I}}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} b_i, c_1 \sqcup (b_1 \setminus c_1) \bigsqcup_{i=2}^{\infty} b_i\right) = Q(b_1, c_1). \quad (3.23)$$

Für uns wird jedoch zweckmäßiger sein, (3.22) bzw. (3.23) mit Hilfe der monotonen Darstellungen $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ zu formulieren: Aus $Q_{\mathcal{I}}(t, s) \geq 1$ folgt

$$f_n(t) = f_{n+1}(s)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir können $Q_{\mathcal{I}}(t, s)$ als

$$Q_{\mathcal{I}}(t, s) = Q(f_1(t), f_1(s)) \quad (3.24)$$

schreiben.

Ähnlich der Definition einer Fransenverteilungen als bzgl. Q invariante Verteilung auf \mathcal{S}_{fin} , betrachten wir im Folgenden invariante Verteilungen bzgl. $Q_{\mathcal{I}}$ auf \mathcal{I} .

Da \mathcal{I} eine Teilmenge von \mathcal{S} ist, statten wir \mathcal{I} mit der von \mathcal{S} induzierten Topologie aus. Ein Maß auf \mathcal{I} soll dementsprechend stets auf den Borel-Mengen $\mathfrak{B}(\mathcal{I})$ definiert sein.

Definition 3.2.2 Für einen Zufallsbaum T mit Werten in \mathcal{I} , Verteilung μ und monotoner Darstellung $(f_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ sei μ_i die Verteilung von $(f_1(T), \dots, f_i(T))$.

- (a) μ heißt *invariant* bzgl. $Q_{\mathcal{I}}$ oder auch *$Q_{\mathcal{I}}$ -invariant*, falls

$$\mu_i(t_1, \dots, t_i) = \mu_{i-1}(t_2, \dots, t_i) \cdot Q(t_2, t_1) \quad (3.25)$$

für alle $t_1, \dots, t_i \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und alle $i \geq 2$ gilt.

- (b) Die Verteilung $\hat{\mu}$ auf \mathcal{S}_{fin} sei definiert als Verteilung von $f_1(T)$, d. h. $\hat{\mu} = \mu_1$ und für alle $b_1 \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ ist

$$\hat{\mu}(b_1) = \mu\left(\left\{\bigsqcup_{i=1}^{\infty} b_i : b_i \in \mathcal{S}_{\text{fin}} \text{ für alle } i \geq 2\right\}\right).$$

Bemerkung 3.2.3 Mit einem Blick auf (3.23) lässt sich die Definition der $Q_{\mathcal{I}}$ -Invarianz auch in Termen der Ästeverteilungen $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von T schreiben. Die Verteilung von T ist genau dann $Q_{\mathcal{I}}$ -invariant, falls

$$P(B_1 = t_1, \dots, B_n = t_n) = P(B_1 = t_2 \sqcup t_1, B_2 = t_3, \dots, B_{n-1} = t_n) \cdot (1 + Q(t_2, t_1))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ gilt.

Das nächste Lemma besagt, dass $Q_{\mathcal{I}}$ -invariante Verteilungen nichts anderes sind als Fortsetzungen von Fransenverteilungen auf \mathcal{I} .

Lemma 3.2.4 (a) Ist μ eine $Q_{\mathcal{I}}$ -invariante Verteilung auf \mathcal{I} , so ist $\hat{\mu}$ eine Fransenverteilung.

- (b) Ist umgekehrt π eine Fransenverteilung auf \mathcal{S}_{fin} gegeben, so existiert genau eine $Q_{\mathcal{I}}$ -invariante Verteilung μ auf \mathcal{I} , für die $\hat{\mu} = \pi$ gilt.

Beweis. Für den Nachweis von (a) setzen wir zunächst $i = 2$ in (3.25) ein: Es gilt für alle $t, s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$

$$\mu_2(t, s) = \mu_1(s) \cdot Q(s, t) = \hat{\mu}(s) \cdot Q(s, t).$$

Das Summieren über alle Möglichkeiten von s liefert wie gewünscht

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \hat{\mu}(s) \cdot Q(s, t) = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}} \mu_2(t, s) = \mu_2(\{t\} \times \mathcal{S}_{\text{fin}}) = \mu_1(t) = \hat{\mu}(t),$$

d. h. $\hat{\mu}$ ist eine Fransenverteilung.

Für den Nachweis von (b) zeigen wir zunächst die Eindeutigkeit von μ . Induktiv folgt die Äquivalenz von (3.25) mit der Bedingung

$$\mu_i(t_1, \dots, t_i) = \mu_1(t_i) \prod_{j=2}^i Q(t_j, t_{j-1}) \quad (3.26)$$

für alle $t_1, \dots, t_i \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und alle $i \geq 2$. Da die Verteilung μ eindeutig durch $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ festgelegt ist und jedes μ_i gemäß (3.26) nur von $\mu_1 = \pi$ abhängt, folgt die Eindeutigkeit.

Für die Existenz von μ setzen wir μ_i als Verteilung von (X_1, \dots, X_i) an, wobei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathbb{P}_π -Kette mit Anfangsverteilung $\mu_1 = \pi$ sei. Gemäß Lemma 3.1.5 (a) gilt

$$\begin{aligned} \mu_i(t_1, \dots, t_i) &= \mu_1(t_1) \prod_{j=2}^i \mathbb{P}_\pi(t_{j-1}, t_j) \\ &= \pi(t_i) \prod_{j=2}^i Q(t_j, t_{j-1}) \end{aligned}$$

für alle $t_1, \dots, t_i \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und $i \in \mathbb{N}$. Ein Vergleich mit (3.26) zeigt die Invarianz bzgl. $Q_{\mathcal{T}}$. \square

Sei nun t ein endlicher Baum mit Wurzel r , v ein gleichverteilt gewählter Knoten von t und $r = v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_j = v$ der eindeutige Pfad von der Wurzel zu v . Falls $v = r$ gewählt wurde, setzen wir $j = 1$ und $v_1 = r$. Sei $t(v)$ der Baum t , verwurzelt in v .

Für $n = 1, \dots, j$ sei der Teilbaum $\hat{f}_n(t)$ verwurzelt in v_{j-n+1} und bestehe aus allen Knoten von $t(v)$, die sich nicht im Baum $t(v)^{v_{j-n}}$ befinden. Wir beachten, dass stets $\hat{f}_1(t) = t^v$ und $\hat{f}_j(t) = t$ gilt, j aber ein zufälliger Index ist, der von v abhängt.

In Analogie zu $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ nennen wir

$$\hat{f}(t) = (\hat{f}_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \quad (3.27)$$

die *monotone Darstellung des Baumes t* , wobei wir $\hat{f}_n(t) = \emptyset$ für alle $n > j$ setzen. Abbildung 3.4 visualisiert die Konstruktion anhand eines Beispiels.

Ist ein endlicher Zufallsbaum S gegeben, so definieren wir $\hat{f}(S)$ punktweise, wie in (3.27). Alle Gleichverteilungen seien dabei unabhängig voneinander und unabhängig von S .

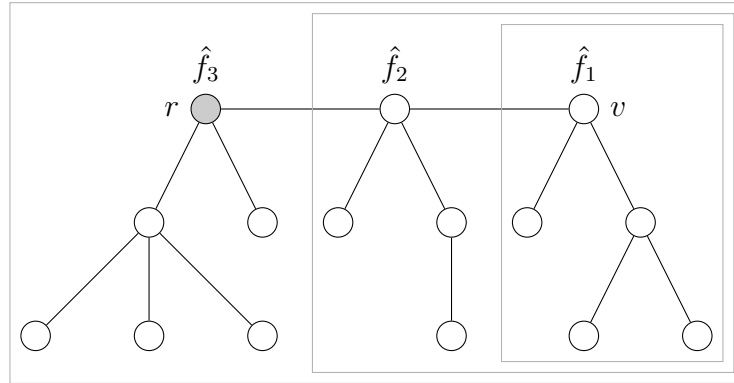


Abbildung 3.4. Monotone Darstellung eines endlichen Baumes.

Bilden wir

$$\hat{U}_S = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \hat{f}_i(S), \quad (3.28)$$

so ist \hat{U}_S nichts anderes als der Zufallsbaum S , verwurzelt in einem neuen gleichverteilt gewählten Knoten. Wir beachten, dass $\hat{f}_1(S) = U_S$, der zufällig gewählte Teilbaum von S aus (3.7), ist.

Außerdem merken wir an, dass die Folge $\hat{f}(S)$ Werte in $\mathcal{S}_{\text{fin}} \cup \{\emptyset\}$ annimmt. Das Symbol \emptyset steht hier für den „leeren Baum“, den wir einführen müssen, um $\hat{f}(S)$ exakt zu definieren. Die Verteilung der Folge $\hat{f}(S)$ auf \mathcal{S}_{fin} lässt sich wie folgt beschreiben:

Lemma 3.2.5 Ist S ein Zufallsbaum mit Werten in \mathcal{S}_{fin} , so gilt

$$\begin{aligned} P(\hat{f}_1(S) = t_1, \dots, \hat{f}_i(S) = t_i) &= P(\hat{f}_1(S) = t_2, \dots, \hat{f}_{i-1}(S) = t_i) \cdot Q(t_2, t_1) \\ &= P(U_S = t_i) \prod_{j=2}^i Q(t_j, t_{j-1}) \end{aligned}$$

für alle $t_1, \dots, t_i \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus der Konstruktion von $\hat{f}(S)$, die zweite induktiv aus der ersten, wenn wir $\hat{f}_1(S) = U_S$ beachten. \square

Kommen wir nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes.

Theorem 3.2.6 Ist $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge endlicher Zufallsbäume, für die U_{S_n} in Verteilung gegen eine Fransenverteilung π konvergiert, so konvergiert \hat{U}_{S_n} in Verteilung gegen μ , die eindeutige $Q_{\mathcal{I}}$ -invariante Fortsetzung von π aus Lemma 3.2.4 (b).

Beweis. Sei $\hat{f}(S_n) = (\hat{f}_1(S_n), \hat{f}_2(S_n), \dots)$ die monotone Darstellung von \hat{U}_{S_n} . Dann gilt für alle $t_1, \dots, t_i \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ gemäß Lemma 3.2.5

$$P(\hat{f}_1(S_n) = t_1, \dots, \hat{f}_i(S_n) = t_i) = P(U_{S_n} = t_i) \prod_{j=2}^i Q(t_j, t_{j-1}).$$

Nach Voraussetzung konvergiert $P(U_{S_n} = t_i)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $\pi(t_i)$, womit aus (3.26)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\hat{f}_1(S_n) = t_1, \dots, \hat{f}_i(S_n) = t_i) = \mu_i(t_1, \dots, t_i),$$

und mit Korollar 1.1.19 auch

$$(\hat{f}_1(S_n), \dots, \hat{f}_i(S_n)) \xrightarrow{d} (X_1, \dots, X_i) \quad (3.29)$$

folgt. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei hierbei eine \mathbb{P}_π -Kette mit Anfangsverteilung π .

(3.29) impliziert die Verteilungskonvergenz $\hat{U}_{S_n} \rightarrow \mu$, denn μ haben wir im Beweis von Lemma 3.2.4 (b) durch die Markov-Kette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiert. \square

Eine berechtigte Frage ist, ob wir einen Zufallsbaum mit $Q_{\mathcal{T}}$ -invarianter Verteilung nicht auch durch die Verteilung von $\sqcup_{i=1}^{\infty} B_i$ konstruieren können, wobei die Folge $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig ist, und jedes B_i nach derselben Fransenverteilung verteilt ist. Im Allgemeinen ist dies jedoch falsch.

Es ist aber nicht verwunderlich, dass zumindest im Fall $B_i \sim \text{PGW}(1)$ eine $Q_{\mathcal{T}}$ -invariante Verteilung mit dieser Konstruktion entsteht, kündigten wir doch zu Beginn dieses Abschnittes an, Grimmetts Lemma aus der Theorie zu folgern.

Wir greifen das Beispiel kritischer Galton-Watson-Bäume auf, und berechnen die Fortsetzung aus Lemma 3.2.4 (b) für diesen Fall.

Satz 3.2.7 Sei T ein kritischer Galton-Watson-Baum mit Werten in \mathcal{S}_{fin} und Reproduktionsverteilung $p = (p_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$. Sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge mit $B_1 \sim T$ und $B_i \sim \hat{T}$ für alle $i \geq 2$. Die Verteilung des modifizierten Galton-Watson-Baumes \hat{T} sei wie folgt gegeben:

- (a) Ein Urahne erzeuge Nachkommen gemäß der Verteilung $\hat{p} = (\hat{p}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$, die durch

$$\hat{p}_j = (j + 1) \cdot p_{j+1} \quad (3.30)$$

gegeben ist,

- (b) alle weiteren Individuen erzeugen Nachkommen gemäß der Verteilung p , und
(c) alle Individuen erzeugen ihre Nachkommen unabhängig voneinander.

Der auf diese Weise definierte Zufallsbaum \hat{T} nimmt f. s. Werte in \mathcal{S}_{fin} an. Die Verteilung von $\sqcup_{i=1}^{\infty} B_i$ ist die $Q_{\mathcal{T}}$ -invariante Fortsetzung der Verteilung von T .

Beweis. Für $s, t \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ mit $Q(s, t) \geq 1$ sei $s \setminus t$ der Baum, der entsteht, wenn wir einen zu t isomorphen Teilbaum der 1. Generation von s entfernen.

Sei nun $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die monotone Darstellung des Zufallsbaumes $\sqcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Zu zeigen ist, dass für alle $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$, $n \in \mathbb{N}$, die Gleichung

$$P(F_1 = t_1, \dots, F_n = t_n) = P(F_1 = t_n) \prod_{i=2}^n Q(t_i, t_{i-1}) \quad (3.31)$$

gilt. Wir beschränken uns beim Nachweis von (3.31) auf den Fall $n = 2$. Der allgemeine Fall lässt sich dann mit den gleichen Argumenten und längeren Rechnungen beweisen.

Für $t, s \in \mathcal{S}_{\text{fin}}$ mit $Q(t, s) \geq 1$ gilt zunächst

$$A_{\mathbb{T}}(s \setminus t) \cdot A_{\mathbb{T}}(t) \cdot |C(s)| = A_{\mathbb{T}}(s), \quad (3.32)$$

denn sind Repräsentanten von $s \setminus t$ und t aus \mathbb{T} gegeben, so gibt es $|C(s)|$ Möglichkeiten, t in die erste Generation von $s \setminus t$ einzufügen, um einen Repräsentanten von s zu erhalten. Umgekehrt erhalten wir auf diese Weise alle Repräsentanten von s . Mit Lemma 1.2.2 lässt sich diese kombinatorische Überlegung auch direkt überprüfen.

Bezeichnet r die Wurzel von $s \setminus t$, so gilt aufgrund der Unabhängigkeit von B_1 und B_2 , der Definition der Verteilung von B_i und (3.32)

$$\begin{aligned} P(B_1 = t, B_2 = s \setminus t) &= P(B_1 = t) \cdot P(B_2 = s \setminus t) \\ &= (A_{\mathbb{T}}(t) \cdot \prod_{v \in V_t} p_{|C_v|}) \cdot (A_{\mathbb{T}}(s \setminus t) \cdot \hat{p}_{|C(s)|-1} \cdot \prod_{r \neq v \in V_{s \setminus t}} p_{|C_v|}) \\ &= A_{\mathbb{T}}(t) \cdot A_{\mathbb{T}}(s \setminus t) \cdot |C(s)| \cdot \prod_{v \in V_t} p_{|C_v|} \prod_{v \in V_{s \setminus t}} p_{|C_v|} \\ &= A_{\mathbb{T}}(s) \cdot \prod_{v \in V_s} p_{|C_v|} \\ &= P(B_1 = s). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} P(F_1 = t, F_2 = s) &= P(B_1 = t, B_2 \sqcup B_1 = s) \\ &= P(B_1 = t, B_2 = s \setminus t) \cdot Q(s, t) \\ &= P(B_1 = s) \cdot Q(s, t), \end{aligned}$$

also (3.31) für $n = 2$. □

Satz 3.2.7 lässt sich auf andere Fransenverteilungen verallgemeinern, vgl. dazu Abschnitt 4.4. in [2]. Kombinieren wir Beispiel 3.1.10 mit dem eben Gezeigten, erhalten wir für

$$S_n \sim P(T \in \cdot \mid |T| = n)$$

die Konvergenz

$$\hat{U}_{S_n} \xrightarrow{d} \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Ist speziell $T \sim \text{PGW}(1)$, so lässt sich auch Grimmetts Lemma (siehe Satz 1.3.1) folgern. Die Anwendung, der in diesem Kapitel entwickelten Theorie, bildet gleichzeitig den Abschluss dieser Arbeit:

Satz 3.2.8 Für die Folge der Zufallsbäume $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (1.9) gilt

$$T_n \xrightarrow{d} \text{PGW}^{\infty}(1). \quad (3.33)$$

Beweis. Aus Lemma 1.2.12 und Beispiel 3.1.10 folgt

$$U_{T_n} \xrightarrow{d} \text{PGW}(1).$$

Da offenbar $\hat{U}_{T_n} \stackrel{d}{=} T_n$ gilt, konvergiert T_n gemäß Theorem 3.2.6 gegen die $Q_{\mathcal{I}}$ -invariante Fortsetzung der $\text{PGW}(1)$ -Verteilung, die wir in Satz 3.2.7 bestimmt haben. Mit der Bezeichnung aus (3.30) gilt für $p = \text{Poi}(1)$

$$\hat{p}_j = (j+1) \cdot p_{j+1} = \frac{(j+1)}{(j+1)! \cdot e} = \frac{1}{j! \cdot e} = p_j,$$

d. h. jeder Ast B_i ist nach $\text{PGW}(1)$ verteilt. Damit ist $\text{PGW}^{\infty}(1)$ die $Q_{\mathcal{I}}$ -invariante Fortsetzung der $\text{PGW}(1)$ -Verteilung und Grimmetts Lemma bewiesen. \square

Literaturverzeichnis

- [1] ALDOUS, David: The random walk construction of uniform spanning trees and uniform labelled trees. In: *SIAM J. Discrete Math.* 3 (1990), Nr. 4, S. 450–465
- [2] ALDOUS, David: Asymptotic fringe distributions for general families of random trees. In: *Ann. Appl. Probab.* 1 (1991), Nr. 2, S. 228–266
- [3] ALDOUS, David und BANDYOPADHYAY, Antar: A survey of max-type recursive distributional equations. In: *Ann. Appl. Probab.* 15 (2005), Nr. 2, S. 1047–1110
- [4] ALDOUS, David und STEELE, Michael: The objective method: probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence. In: *Probability on discrete structures* Bd. 110. Springer, 2004, S. 1–72
- [5] ALSMEYER, Gerold: *Stochastische Prozesse, Teil 1: Diskrete Markov-Ketten, Martingale und Erneuerungstheorie*. 3. Auflage. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 33, Universität Münster, 2005
- [6] ALSMEYER, Gerold: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4. Auflage. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30, Universität Münster, 2005
- [7] ALSMEYER, Gerold: *Manuskript zur Vorlesung Verzweigungsprozesse*. 2008
- [8] CAYLEY, Arthur: A theorem on trees. In: *Quart. J. Math.* 23 (1889)
- [9] DEVROYE, Luc: Branching processes and their applications in the analysis of tree structures and tree algorithms. In: *Probabilistic methods for algorithmic discrete mathematics* Bd. 16. Springer, 1998, S. 249–314
- [10] GRIMMETT, G. R.: Random labelled trees and their branching networks. In: *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 30 (1980/81), Nr. 2, S. 229–237
- [11] KALLENBERG, Olav: *Foundations of modern probability*. 2. Auflage. Springer, 2002
- [12] KOLCHIN, Valentin: *Random mappings*. Optimization Software Inc. Publications Division, 1986 (Translation Series in Mathematics and Engineering)
- [13] LINDVALL, Torgny: *Lectures on the coupling method*. Dover Publications Inc., 2002

- [14] LYONS, Russell und PERES, Yuval: *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, 2008. – Vorläufige Version erhältlich unter <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/>
- [15] MEYN, Sean und TWEEDIE, Richard: *Markov Chains and Stochastic Stability*. Cambridge University Press, 2005. – Erhältlich unter <http://probability.ca/MT/>
- [16] PRÜFER, Heinz: Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. In: *Arch. Math. Phys.* 27 (1918), S. 742–744
- [17] STEELE, Michael: *Probability theory and combinatorial optimization*. 1997 (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics)

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine weiteren Hilfsmittel als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen verwendet habe.

Münster, den 15. September 2009

Matti Schneider