Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Mathematische Statistik

DIPLOMARBEIT

Das SM/SM/1-Modell
Ein Bedienungssystem mit Markov-moduliertem Inputprozeß

vorgelegt von

Rouget Pletziger

Thema vergeben von

Prof. Dr. G. Alsmeyer

Münster, August 1998

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $1, 2, \ldots$
$\mathbb{N}_0$	natürliche Zahlen $0, 1, 2, \ldots$
$\overline{\mathbb{N}}$	Vereinigung $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen $0, -1, 1, -2, 2, \ldots$
$\mathbb{B}, \mathbb{B}^n$	Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$
$\times_{i \in I} B_i$	kartesisches Produkt der Mengen B_i mit $i \in I$
$\times_{i=1}^{n} B_i$	kartesisches Produkt der Mengen B_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$
$\sigma(B_i;\ i \in I)$	von den Mengen B_i, $i \in I$, erzeugte σ-Algebra
$\mathbb{I}_A(x)$	Indikatorfunktion einer Menge A
δ_x	Dirac-Verteilung im Punkt x
λ_0	Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$
λ_d	d-faches Zählmaß auf $d\mathbb{Z}$ $(d > 0)$
L_1	Raum der Funktionen $f : (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $\int \lvert f \rvert \, d\lambda_0 < \infty$
L_∞	Raum der λ_0-f.ü. beschränkten Funktionen $f : (\mathbb{R}, \mathbb{B}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$
$\lVert f \rVert_\infty$	Supremum von f
$\lfloor t \rfloor$	$\max\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq t\}$
$\xrightarrow{d}$	Konvergenz in Verteilung bzw. schwache Konvergenz
$\xrightarrow{TV}$	Konvergenz in Totalvariation
$\mathcal{B}(n, p)$	Binomialverteilung mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$
$\mathrm{Exp}(\mu)$	Exponentialverteilung mit Parameter $\mu > 0$
$\mathcal{NB}(1, p)$	negative Binomialverteilung mit Parametern 1 und $p \in (0, 1)$

Folgende Symbole treten im Zusammenhang mit Maßen Q, Q_1, Q_2 bzw. Zufallsvariablen X, Y auf:

$Q_1 \otimes Q_2$	Produktmaß von Q_1 und Q_2
$Q_1 * Q_2$	Faltung von Q_1 und Q_2
$Q^{*(n)}$	n-fache Faltung von Q
$Q(t)$	Veteilungsfunktion von $Q\ =\ Q((-\infty, t])$
$\lVert Q \rVert$	Totalvariation von Q
$d(Q)$	Spanne der Verteilung $Q\ =\ \sup\{c > 0;\ Q(c\mathbb{Z}) = 1\}$ $[\sup \emptyset := 0]$
$X \sim Q$	X besitzt Verteilung Q
$X \sim Y$	X besitzt dieselbe Verteilung wie Y

Einleitung

Die Analyse von Bedienungssystemen stellt schon seit langem ein wichtiges Anwendungsfeld der angewandten Wahrscheinlichkeitstheorie dar. Doch gerade im heutigen Zeitalter eines stetig wachsenden Dienstleistungssektors, der expandierenden Vernetzung von Großrechnersystemen und einer ständigen Ausweitung von Online-Diensten gewinnen Optimierungsansätze hinsichtlich geeigneter Bedienungsstrategien sowie Stabilitätsprognosen für Bedienungssysteme immer mehr an Bedeutung.

Gleichzeitig wird die Diskrepanz zwischen abstrahierenden Annahmen in klassischen mathematischen Modellierungsansätzen auf der einen und einer zunehmenden Komplexität neuer Systeme auf der anderen Seite zunehmend größer. Diese Tatsachen mögen als Motivation dienen, nach Erweiterungsmöglichkeiten herkömmlicher Methoden zu suchen.

Untersuchungsobjekt dieser Arbeit ist ein Bedienungssystem mit einem Server, der seine Arbeit nur bei leerem System einstellt und ansonsten die sukzessiv eintreffenden Kunden/Käufer mit gleichbleibender Geschwindigkeit vollständig bedient. Des weiteren steht ein Warteraum mit unbegrenzter Aufnahmekapazität zur Verfügung.

Den meisten klassischen Modellansätzen für ein derartiges System ist der Kritikpunkt anzulasten, daß sie von sämtlichen Abhängigkeitsstrukturen und Unregelmäßigkeiten abstrahieren, indem sie sowohl die Zwischenankunftszeiten (i.e. die Zeitspannen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kundenankünften) als auch die Bedienungszeiten einzelner Kunden jeweils über eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen beschreiben.

Das allgemeinste dieser Modelle ist das *G/G/1-Modell*[1], das zumindest den Verteilungstyp einer „typischen“ Zwischenankunfts- bzw. Bedienungszeit nicht weiter spezifiziert. Dennoch basiert es auf der Annahme einer *vollständigen Homogenität* im Kaufverhalten und Ankunftsmuster der gesamten Kundenschicht. Der Aspekt einer möglichst realitätskonformen Modellierung bleibt durch diese restriktiven Prämissen zu Gunsten einer besseren mathematischen Beherrschbarkeit weitestgehend unberücksichtigt.

Obwohl zahlreichen Bedienungssystemen eine gewisse „Regelmäßigkeit“ nicht abgesprochen werden kann, können diese jedoch in der Regel nur bei fokussierter Betrachtung spezieller Käuferschichten oder auch bestimmter Tageszeiten etc. tatsächlich mit dem Attribut einer homogenen Struktur versehen werden. Ein erster Ansatzpunkt zur Korrektur des dargestellten Dilemmas besteht somit in einer Differenzierung der Kunden nach geeigneten Kriterien, beispielsweise nach bestimmten demographischen Daten oder sonstigen Persönlichkeitsmerkmalen.

---

[1] Bei dieser auf *Kendall* zurückgehenden Notation ist die erste Komponente für den Verteilungstyp der Zwischenankunftszeiten, die zweite für den der Bedienungszeiten und die dritte für die Anzahl der Server reserviert. „G“ steht dabei für „general“.

Derartige Möglichkeiten bieten *Markov-modulierte Modelle*, speziell das in dieser Arbeit vorgestellte *SM/SM/1-Modell* („*SM*“ = „*semi-markovian*“). An die Stelle der unabhängigen Zufallsgrößen im G/G/1-Modell treten solche, die nur noch bedingt unter einer (geeignet zu interpretierenden) „steuernden“ Markov-Kette unabhängig sind; die bedingte Verteilung einer Variablen hängt dabei stets nur vom aktuellen und vorausgegangenen Zustand dieser Markov-Kette ab.

Das Hauptaugenmerk bei der Modellanalyse liegt auf *Stabilitätsbetrachtungen*, d.h. es wird der Frage nachgegangen, unter welchen Bedingungen die Verteilungen verschiedener Kenngrößen wie z.B. der Wartezeit eines Kunden oder der Warteschlangenlänge zu beliebigen Zeitpunkten ein asymptotisches Verhalten aufweisen. Zentrales Ziel ist darüber hinaus eine möglichst genaue Beschreibung der Strukturen und Zusammenhänge existierender Grenzverteilungen.

Unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen an die steuernde Markov-Kette lassen sich in diesem Zusammenhang viele bekannte Ergebnisse für das G/G/1-Modell auf recht kanonische und auch anschaulich plausible Art und Weise verallgemeinern. Bei der Darstellung der entsprechenden klassischen Resultate - Thema zahlreicher Veröffentlichungen - wurde bewußt darauf geachtet, daß diese stets als besonders einfache Spezialfälle der Ergebnisse im SM/SM/1-Modell erscheinen.

Die Ableitung optimaler Bedienungsstrategien ist nicht Inhalt dieser Ausführungen, und es wird aus diesem Grunde fast ausschließlich die FIFO-Disziplin (*first in first out*, d.h. die Kunden werden in der Reihenfolge ihres Erscheinens bedient) unterstellt.

Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit dient der Bereitstellung der notwendigen theoretischen Grundlagen. Neben einer kurzen Zusammenstellung bekannter Ergebnisse, vor allem aus der klassischen Erneuerungstheorie, werden zunächst *Markov-modulierte Folgen* und deren elementare Eigenschaften vorgestellt. Als weiterer Hauptbestandteil schließt sich eine Einführung in die Theorie der *Harris-Ketten* an. Diese Markov-Ketten mit Werten in allgemeinen Zustandsräumen besitzen eine spezielle regenerative Struktur und übernehmen später die „Steuerungsfunktion“ im SM/SM/1-Modell, das im zweiten Kapitel eingeführt wird. Die Darstellung des allgemeinen Modells wird ergänzt um Integrationsmöglichkeiten speziellerer Modelle, insbesondere des G/G/1-Modells, und eine Auswahl von Modellierungsbeispielen. Hieran sollen vor allem die Vielzahl erfaßbarer Phänomene und diverse Interpretationsmöglichkeiten für die ansonsten nur nominell auftauchende steuernde Markov-Kette erkennbar werden. Zentrales Thema des Kapitels und zugleich der gesamten Arbeit sind die sich anschließenden Stabilitätsanalysen für die Folge der Wartezeiten, die anstehende Arbeit im System und die Schlangenlänge zu beliebigen Zeitpunkten. Abschließend wird noch kurz auf die Struktur des Abgangsprozesses und eine einfache Vernetzungsmöglichkeit von SM/SM/1-Systemen eingegangen. Das sich anschließende Kapitel behandelt einige Sonderfälle des bisher Gezeigten und zeigt Möglichkeiten auf, bereits gewonnene Ergebnisse in verschärfter Form anzugeben.

Dies ist möglich, wenn der Zustandsraum der Steuerkette als endlich vorausgesetzt wird. U.a. ergeben sich hiermit eine Reihe bekannter Resultate für das klassische G/G/1-Modell. Zentrale Bedeutung erlangt die Beschränkung des Zustandsraums für die Ableitung von *Identitäten für verschiedene Grenzverteilungen.* Den Abschluß der Arbeit bildet das vierte Kapitel, das einen kurzen Ausblick auf alternative Analysemethoden des Modells gibt, indem ausgewählte Aspekte mit der Theorie *markierter Punktprozesse* in Verbindung gebracht werden. Zuvor wird im hierfür nötigen Umfang ein Einblick in die allgemeine theoretische Behandlung solcher Prozesse gegeben.

Kapitel 1

Theoretische Grundlagen

1.1 Das 2. Erneuerungstheorem und spezielle Erneuerungsgleichungen

Funktionale $Z : I\!R \to I\!R$ eines stochastischen Prozesses genügen häufig einer sogenannten *Erneuerungsgleichung*

$$Z = z + Z * Q \tag{1.1}$$

mit einer weiteren reellen Funktion z und einem Maß Q auf $I\!R$. Verschwinden z und Z auf $(-\infty, 0)$ und ist Q auf $[0, \infty)$ konzentriert, spricht man von einer *Standard-Erneuerungsgleichung*. Unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen an z, Z und Q besitzt die Erneuerungsgleichung (1.1) dann die eindeutig bestimmte Lösung

$$Z = z * U,$$

wobei $U = \sum_{n \geq 0} Q^{*(n)}$ das zu Q gehörige *Erneuerungsmaß* bezeichne. Diese Tatsache motiviert die Analyse des asymptotischen Verhaltens von Faltungen der Form $z * U$ reeller Funktionen mit Erneuerungsmaßen.

Entsprechende Grenzwertaussagen im Fall, daß U das Erneuerungsmaß eines Random-Walks (RW) $(S_n)_{n \geq 0}$ mit Zuwachsverteilung Q und z einer geeigneten Funktionenklasse zuzuordnen ist, bilden Inhalt des *2. Erneuerungstheorems* (in englischsprachiger Literatur oft als *Key Renewal Theorem* bezeichnet).

Inhalt dieses Abschnitts bildet eine gezielte Auswahl der für den dargestellten Zusammenhang relevanten Resultate im für uns notwendigen Umfang ohne Angabe der entsprechenden Beweise, die als bekannt vorausgesetzt werden können.

Notationen 1.1. Für eine reelle Zahl $d \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) = \begin{cases} \lim_{t\to\infty} f(t) & , \text{ falls } d = 0 \\ \lim_{n\to\infty} f(nd) & , \text{ falls } d > 0 \end{cases}$$

sowie

$$\lambda\!\!\lambda_d \text{ das} \begin{cases} \text{Lebesgue-Maß} & , \text{ falls } d = 0 \\ d\text{-fache Zählmaß auf } d\mathbb{Z} & , \text{ falls } d > 0 \end{cases}.$$

Definition 1.2 ([Al 1] *Def. 2.5.1*). g sei eine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ sowie ferner für $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$I_n^\varepsilon = (\varepsilon n, \varepsilon(n+1)],$$

$$m_n^\varepsilon = \inf\{g(t);\ t \in I_n^\varepsilon\} \quad , \quad M_n^\varepsilon = \sup\{g(t);\ t \in I_n^\varepsilon\},$$

$$\underline{\sigma}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n^\varepsilon \quad \text{und} \quad \overline{\sigma}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} M_n^\varepsilon.$$

Dann heißt g *direkt Riemann-integrierbar (d.R.i.)*, falls $\underline{\sigma}(\varepsilon)$ und $\overline{\sigma}(\varepsilon)$ beide für alle $\varepsilon > 0$ absolut konvergieren und

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\overline{\sigma}(\varepsilon) - \underline{\sigma}(\varepsilon)) = 0.$$

Satz 1.3 ([Al 1] *Satz 2.5.2*). *Jede d.R.i. Funktion g erfüllt*

(a) g ist beschränkt und $\lambda\!\!\lambda_0$-fast überall stetig.
(b) g ist $\lambda\!\!\lambda_d$-integrierbar für alle $d \geq 0$.

Umgekehrt ist eine reellwertige Funktion g auf $\mathbb{R}$ d.R.i., wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(c) g erfüllt (a), und es gibt d.R.i. Funktionen f, h mit $f \leq g \leq h$.
(d) $g = 0$ auf $(-\infty, 0)$, monoton fallend auf $[0, \infty)$ und $\lambda\!\!\lambda_0$-integrierbar.

Theorem 1.4 (2. Erneuerungstheorem) ([Al 1] *Satz 2.5.3, Bem. 2.5.4*). *$(S_n)_{n\geq 0}$ sei ein Random-Walk mit beliebiger Auftaktverteilung $\lambda = P^{S_0}$, Zuwachsverteilung Q, Drift $\mu \in (0, \infty]$, Spanne $d = d(Q)$ und Erneuerungsmaß $U_\lambda = \sum_{n\geq 0} P^{S_n} = \lambda * \sum_{n\geq 0} Q^{*(n)}$. Dann gilt für jede direkt Riemann-integrierbare Funktion g im Fall $d = 0$ bzw. jede $\lambda\!\!\lambda_d$-integrierbare Funktion g im Fall $d > 0$:*

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} g * U_\lambda(t) = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}} g(x)\ \lambda\!\!\lambda_d(dx)$$

$$\lim_{t\to-\infty} g * U_\lambda(t) = 0$$

Korollar 1.5 (Elementares Erneuerungstheorem) ([Al 1] *Satz 2.4.2*). *In der Situation von Theorem 1.4 gilt unabhängig von $d \geq 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} U_\lambda\big([0,t]\big) = \frac{1}{\mu} \quad \textit{und} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} U_\lambda\big([-t,0]\big) = 0.$$

Falls $U_\lambda((-\infty,0]) < \infty$, folgt darüber hinaus

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} U_\lambda\big((-\infty,t]\big) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} U_\lambda(t) = \frac{1}{\mu}.$$

Für einen d-arithmetischen Random-Walk mit Spanne $d > 0$ gilt als Verschärfung von Theorem 1.4 sogar eine gleichmäßige Konvergenzaussage.

Satz 1.6 ([Al 1] *Satz 2.6.5*). *Es sei $d > 0$ und $(S_n)_{n\geq 0}$ ein d-arithmetischer Random-Walk mit Auftaktverteilung λ, Drift $\mu \in (0,\infty]$ und Erneuerungsmaß U_λ. Dann gilt für jede $\lambda\!\!\lambda_d$-integrierbare Funktion $f \geq 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|g|\leq f} \left| g * U_\lambda(nd) - \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}} g(x)\ \lambda\!\!\lambda_d(dx) \right| = 0$$

Bei weiteren Voraussetzungen an die Zuwachsverteilung des betrachteten Random-Walks lassen sich auch im Fall $d = 0$ die Aussagen des 2. Erneuerungstheorems erweitern:

Definition 1.7 ([Al 1] *Def. 2.6.1*). Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}$ heißt *quasi $\lambda\!\!\lambda_0$-stetig*, falls für ein $n \geq 1$ die n-fache Faltung $Q^{*(n)}$ eine Zerlegung

$$Q^{*(n)} = Q_1 + Q_2$$

in ein $\lambda\!\!\lambda_0$-stetiges Maß $Q_1 \neq 0$ und ein weiteres Maß Q_2 besitzt. Eine Zufallsgröße Y heißt quasi $\lambda\!\!\lambda_0$-stetig, falls dies für ihre Verteilung gilt.

Satz 1.8 ([Al 1] *Satz 2.6.4*). *$(S_n)_{n\geq 0}$ sei ein Random-Walk mit quasi $\lambda\!\!\lambda_0$-stetigen Zuwächsen, Auftaktverteilung λ, Drift $\mu \in (0,\infty]$ und Erneuerungsmaß U_λ. Dann gilt für jede Funktion $0 \leq f \in L_1 \cap L_\infty$ mit $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$:*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} \left| g * U_\lambda(t) - \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}} g(x)\ \lambda\!\!\lambda_0(dx) \right| = 0$$

Schließlich präsentieren wir noch ein Ergebnis über die Lösungen spezieller Erneuerungsgleichungen:

Satz 1.9 ([Al 1] *Satz 3.1.2*). *Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \neq \delta_0$ auf $[0,\infty)$ mit zugehörigem Erneuerungsmaß U und eine lokal beschränkte, meßbare Funktion $z : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine lokal beschränkte Lösung $Z : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Erneuerungsgleichung $Z = z + Z * Q$, nämlich $Z = z * U$.*

1.2 Stationäre stochastische Folgen

Im gesamten Abschnitt stehe $X = (X_n)_{n\geq 1}$ für eine Folge von Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in einem meßbaren Raum $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$.

Definition 1.10. Die stochastische Folge X heißt

(a) *stationär*, wenn für jedes $k \geq 0$ gilt:

$$P^{(X_{k+n})_{n\geq 1}} = P^{(X_n)_{n\geq 1}}.$$

(b) *m-abhängig* oder auch *Folge von m-abhängigen Zufallsvariablen*, $m \in \mathbb{N}_0$, wenn für jedes $k \geq 1$ die Zufallsvariablen $(X_1, \ldots, X_k)$ und $(X_{k+m+n})_{n\geq 1}$ stochastisch unabhängig sind.

Bemerkungen 1.11. (a) Ist X stationär, so sind insbesondere die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt.

(b) Offenbar entspricht der Begriff der 0-Abhängigkeit von X gerade dem der stochastischen Unabhängigkeit von $X_1, X_2, \ldots$.

Für alles weitere konzentrieren wir uns auf Folgen von Zufallsgrößen mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Mit s bezeichnen wir fortan die *Shift-Funktion* auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definiert durch

$$s(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Weiter bezeichne

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}}; s^{-1}(A) = A\}$$

die *σ-Algebra der (unter s) invarianten Mengen,*

$$\mathcal{J}_X := X^{-1}(\mathcal{G})$$

die *σ-Algebra der gegenüber* $X = (X_n)_{n\geq 0}$ *invarianten Ereignisse* und

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n\geq 1} \sigma((X_k)_{k\geq n})$$

die *terminale σ-Algebra der Folge X.*

Lemma 1.12 ([Sch] *Anm. 12.21*). *$\mathcal{J}_X$ bildet eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{T}_\infty$.*

Beweis:
Jedes Element $B \in \mathcal{J}_X$ ist von der Form $B = X^{-1}(A)$ mit $A \in \mathcal{G}$. Nach Definition der σ-Algebra $\mathcal{G}$ gilt $A = s^{-1}(A)$ und induktiv folgt damit auch $A = (s^n)^{-1}(A)$, d.h.

$$B = (s^n \circ X)^{-1}(A) = (X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)^{-1}(A) \in \sigma((X_k)_{k \geq n})$$

für beliebiges $n \geq 1$. Dies zeigt bereits

$$B \in \bigcap_{n \geq 1} \sigma((X_k)_{k \geq n}) = \mathcal{T}_\infty.$$

$\square$

Definition 1.13 ([Sch] *Def. 12.25*). Eine stationäre Folge $X = (X_n)_{n \geq 1}$ heißt *ergodisch*, wenn die σ-Algebra $\mathcal{J}_X$ trivial ist im Sinne von $P(B) \in \{0, 1\}$ für alle $B \in \mathcal{J}_X$.

Ein Beispiel für ergodische Folgen gemäß dieser Definition sind iid-Folgen, d.h. Folgen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsgrößen, deren terminale σ-Algebren nach dem Kolmogoroff'schen 0-1-Gesetz trivial sind, was in Verbindung mit Lemma 1.12 bereits die Ergodizität dieser Folgen impliziert. Auf ähnliche Weise wird gezeigt:

Satz 1.14. *Jede stationäre Folge X, die m-abhängig ist für ein $m \geq 0$, ist ergodisch.*

Beweis:
Es genügt auch hier, nachzuweisen, daß die zugehörige terminale σ-Algebra $\mathcal{T}_\infty$ von X von sich selbst stochastisch unabhängig und folglich trivial ist. Wegen der m-Abhängigkeit ist $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ für jedes $n \geq 1$ unabhängig von $\sigma((X_k)_{k > n+m})$ und somit auch unabhängig von der darin enthaltenen σ-Algebra $\mathcal{T}_\infty$. Es folgt die Unabhängigkeit von $\cup_{n \geq 1} \sigma(X_1, \dots, X_n)$ und $\mathcal{T}_\infty$, was wiederum mit der $\cap$-Stabilität von $\cup_{n \geq 1} \sigma(X_1, \dots, X_n)$ die Unabhängigkeit von $\sigma(\cup_{n \geq 1} \sigma(X_1, \dots, X_n))$ und $\mathcal{T}_\infty$ nach sich zieht. Dies schließt den Beweis ab, da offenbar die Inklusion $\mathcal{T}_\infty \subset \sigma(\cup_{n \geq 1} \sigma(X_1, \dots, X_n))$ erfüllt ist. $\square$

In der im Vergleich zu iid-Folgen viel allgemeineren Klasse ergodischer Folgen gilt weiterhin das *starke Gesetz der großen Zahlen*, die Existenz und Endlichkeit von EX_1 vorausgesetzt. In etwas allgemeinerer Form ist dieses Resultat Inhalt des *Birkhoff'schen Ergodensatzes*, den wir hier ohne Beweis angeben.

Satz 1.15 (Birkhoff'scher Ergodensatz) ([Du] *Th. 6/2.1*). *Gegeben eine stationäre Folge $X = (X_n)_{n \geq 1}$ von Zufallsgrößen mit Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \geq 1$ und $E|X_1| < \infty$, gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = E(X_1 \mid \mathcal{J}_X) \qquad P\text{-f.s.}.$$

Ist X sogar ergodisch, also $\mathcal{J}_X$ trivial, genügt X damit dem starken Gesetz der großen Zahlen, besitzt also die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = EX_1 \qquad P\text{-f.s.}$$

Korollar 1.16. *In der Situation von Satz 1.15 sei $X = (X_n)_{n\geq 1}$ ergodisch, und die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ besitze nichtnegative Zuwächse mit Erwartungswert $EX_1 \in (0,\infty)$. Ferner bezeichne für $t \in (0,\infty)$*

$$\tau(t) := \inf\{n \geq 1; S_n > t\}$$

die Erstaustrittszeit *von $(S_n)_{n\geq 1}$ aus dem Intervall $(0,t]$. Es folgt dann*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{t} = \frac{1}{EX_1} \qquad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
Der Birkhoff'sche Ergodensatz liefert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n = EX_1 > 0$ P-f.s. und folglich

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad P\text{-f.s.} \qquad \text{bzw.} \qquad \tau(t) < \infty \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $t \geq 0$. Unter Verwendung von $\tau(t) \uparrow \infty$ P-f.s. führt eine erneute Anwendung des Ergodensatzes damit auf

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{\tau(t)}}{\tau(t)} = EX_1 \quad P\text{-f.s.}$$

Beachtet man nun, daß wegen der vorausgesetzten Nichtnegativität aller X_n, $n \geq 1$, und nach Definition von $\tau(t)$

$$\frac{\tau(t)}{S_{\tau(t)}} \leq \frac{\tau(t)}{t} \leq \frac{\tau(t)}{S_{\tau(t)-1}}$$

gilt, so führen die daraus resultierenden Abschätzungen

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{t} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{S_{\tau(t)}} = \frac{1}{EX_1},$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{S_{\tau(t)-1}} = \frac{1}{EX_1}$$

zum Gewünschten. $\square$

1.3 Markov-Modulation

Die Klasse der stationären stochastischen Folgen hat sich im letzten Abschnitt als Obermenge der iid-Folgen erwiesen, in der unter geeigneten Voraussetzungen weiterhin klassische Resultate von iid-Folgen wie etwa das starke Gesetz der großen Zahlen gelten.

Der vorliegende Abschnitt stellt eine weitere Möglichkeit vor, Eigenschaften einer iid-Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ abzuschwächen. Die stochastische Unabhängigkeit der Komponenten wird ersetzt durch die weniger restriktive Forderung *bedingter Unabhängigkeit* gegeben die Realisierung einer „steuernden“ Markov-Kette $M = (M_n)_{n\geq 0}$, derart daß die bedingten Verteilungen

$$P^{X_n \,|\, M}$$

im Fall ihrer Existenz nicht von n abhängen.

Letztere Eigenschaften charakterisieren die Menge sogenannter *Markov-modulierter Folgen*, innerhalb derer sich iid-Folgen wiederfinden in Form der „Steuerung“ durch eine fast sicher konstante Markov-Kette mit entartetem, einelementigem Zustandsraum.

Alle zusammengestellten Resultate sind entweder bekannt oder ergeben sich aus einer Übertragung allgemeinerer bekannter Ergebnisse auf vorliegende spezielle Situationen. Aus diesem Grunde wird hier durchgehend auf Beweise verzichtet und stattdessen auf entsprechende Literatur verwiesen.

Definition 1.17. Es sei $(S, \mathcal{S})$ ein meßbarer Raum und $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierte zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $(S \times \mathbb{R}^d, \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^d)$, $d \geq 1$, und Übergangskern

$$\mathbb{P} : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^d) \longrightarrow [0,1],$$

d.h. für alle $n \geq 0$ und $A \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^d$ gelte

$$\begin{aligned} P((M_{n+1}, X_{n+1}) \in A \,|\, M_n, X_n) &= P((M_{n+1}, X_{n+1}) \in A \,|\, M_n) \\ &= \mathbb{P}(M_n, A) \qquad P\text{-f.s.} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dann bezeichnen wir $(X_n)_{n\geq 0}$ und manchmal auch leicht mißbräuchlich die bivariate Folge $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ als *(d-dimensionale) Markov-modulierte Folge mit Steuerkette* $M = (M_n)_{n\geq 0}$.

Aufgrund der besonderen Form des Übergangskerns hängt also in obiger Definition (M_{n+1}, X_{n+1}) von (M_n, X_n) jeweils nur über M_n ab.

Für den weiteren Verlauf dieses Kapitels setzen wir $(S, \mathcal{S})$ als polnisch voraus, so daß alle nachfolgend verwendeten bedingten Verteilungen existieren und sich Gleichung (1.2) auch schreiben läßt als

$$P^{(M_{n+1}, X_{n+1}) \,|\, M_n, X_n} = P^{(M_{n+1}, X_{n+1}) \,|\, M_n} = \mathbb{P}(M_n, \bullet\,) \quad P\text{-f.s.}$$

Offenbar bildet auch M eine Markov-Kette, und zwar mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ und Übergangskern

$$\mathbb{P}_M(x, \bullet) := \mathbb{P}(x, \bullet \times \mathbb{R}^d).$$

Der folgende Satz bestätigt, daß sich eine Markov-modulierte Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ auch alternativ durch die eingangs beschriebenen bedingten Verteilungen gegeben M charakterisieren läßt.

Satz 1.18 ([Al 3] *Satz VIII/1.3*). *Für eine stochastische Folge $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $(S \times \mathbb{R}^d, \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^d)$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $(X_n)_{n\geq 0}$ *ist Markov-modulierte Folge mit Steuerkette* $M = (M_n)_{n\geq 0}$.

(b) M *ist eine zeitlich homogene Markov-Kette, und* $X_0, X_1, \ldots$ *sind bedingt unter* M *stochastisch unabhängig mit*

$$P^{X_0 \mid M} = P^{X_0 \mid M_0} \quad P\text{-f.s.} \qquad \text{und}$$
$$P^{X_n \mid M} = P^{X_n \mid M_{n-1}, M_n} = \mathbb{K}(M_{n-1}, M_n, \bullet) \quad P\text{-f.s.}$$

für alle $n \geq 1$ *und einen stochastischen Kern* $\mathbb{K} : S^2 \times \mathbb{B}^d \to [0,1]$.

In Verallgemeinerung zur Definition von Random-Walks und Erneuerungsprozessen über die Partialsummen einer iid-Folge führt man die folgenden Begriffe ein:

Definition 1.19 ([Al 1] *Def. 9.1.1*). Es sei $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine d-dimensionale Markov-modulierte Folge und $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$, $n \geq 0$. Dann heißt $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ *(d-dimensionaler) Markov-Random-Walk (MRW)* oder *(d-dimensionaler) Markov-additiver Prozeß mit Steuerkette* $M = (M_n)_{n\geq 0}$. Gilt überdies

$$\mathbb{P}\left(x, S \times (0, \infty)\right) = 1 \qquad \text{für alle} \quad x \in S,$$

so nennt man $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ auch *Markov-Erneuerungsprozeß (MEP)*.

Als erste Eigenschaft eines MRW halten wir fest:

Satz 1.20 ([Al 3] *Kor. VIII/1.7*). *In der Situation von Definition 1.19 bildet* $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ *eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Übergangskern* $\mathbb{L}$, *definiert durch*

$$\mathbb{L}\left((x, s), A \times B\right) := \mathbb{P}(x, A \times B - s)$$

für alle $(x, s) \in S \times \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{S}$ *und* $B \in \mathbb{B}^d$.

Für die weiteren Untersuchungen unterstellen wir wie bei Markov-Ketten oft üblich ein Standardmodell

$$\left(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, X_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R}^d)}\right)$$

für die Markov-modulierte Folge bzw. den Übergangskern $\mathbb{P}$, wobei wir für $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^d$ und $\nu \in \mathcal{W}(S)$ die Notationen

$$P_{x,y} := P_{\delta_{(x,y)}} \qquad \text{bzw.} \qquad P_\nu := P_{\nu \otimes \delta_0}$$

mit entsprechenden Vereinbarungen für die Erwartungswertoperatoren $E_{x,y}$ und E_ν einführen. Auf diese Weise wird gleichzeitig

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (M_n)_{n\geq 0}, (P_\nu)_{\nu \in \mathcal{W}(S)}\Big)$$

zu einem Standardmodell für $\mathbb{P}_M$.

Bei bedingten Verteilungen, die nicht von der Anfangsverteilung λ abhängen, verzichten wir auf eine Indizierung, außerdem bedeute „f.s." stets „P_λ-f.s. für alle $\lambda \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R}^d)$". Des weiteren sei für meßbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 0, 1, 2$ und Kerne $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$ von $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)$ nach $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. von $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$

$$\mathbb{K}_1 \otimes \mathbb{K}_2(\omega_0, A_1 \times A_2) := \int_{A_1} \mathbb{K}_2(\omega_1, A_2) \mathbb{K}_1(\omega_0, d\omega_1),$$

$\omega_0 \in \Omega_0$, $A_i \in \mathcal{A}_i$, das *(Tensor-)Produkt von $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$*, sowie

$$\mathbb{K}_1^n := \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{K}_1$$

für $n \geq 1$.

Nachfolgend sind einige bekannte Resultate für Markov-Ketten, angewandt auf unsere Folge $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ mit ihrem speziellen Übergangskern $\mathbb{P}$, zusammengestellt. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sei dabei stets eine beliebige Filtration von $\mathcal{A}$, bezüglich der $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ Markov-adaptiert ist, und $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n)$.

Satz 1.21 ([Al 3] *Satz I/1.3; Kor. I/1.4*). *Die Markov-modulierte Folge $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ besitzt für jedes $n \geq 0$ und $k \geq 1$ die folgenden Eigenschaften:*
(a)

$$\begin{aligned} P^{(M_{n+j}, X_{n+j})_{j=1,\ldots,k} \,|\, \mathcal{F}_n} &= P^{(M_{n+j}, X_{n+j})_{j=1,\ldots,k} \,|\, M_n} \\ &= P_{M_n}^{(M_j, X_j)_{j=1,\ldots,k}} = \mathbb{P}^k(M_n, \bullet) \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

(b) Ist $f : (S \times \mathbb{R}^d)^k \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Funktion und $f((M_{n+j}, X_{n+j})_{j=1,\ldots,k})$ quasi-integrierbar, so gilt

$$\begin{aligned} &E(f((M_{n+j}, X_{n+j})_{j=1,\ldots,k}) \,|\, \mathcal{F}_n) \\ &\qquad = \int f((y_j, z_j)_{j=1,\ldots,k}) \; \mathbb{P}^k(M_n, \times_{j=1}^k (dy_j \times dz_j)) \\ &\qquad = E_{M_n} f((M_j, X_j)_{j=1,\ldots,k}) \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

(c)

$$P^{(M_{n+j}, X_{n+j})_{j\geq 1} \,|\, \mathcal{F}_n} = P^{(M_{n+j}, X_{n+j})_{j\geq 1} \,|\, M_n} = P_{M_n}^{(M_j, X_j)_{j\geq 1}} = \mathbb{P}^{\mathbb{N}}(M_n, \bullet) \quad \text{f.s.}$$

(d) Ist $f : (S \times I\!R^d)^{I\!N} \longrightarrow \overline{I\!R}$ eine meßbare Funktion und $f((M_{n+j}, X_{n+j})_{j\geq 1})$ quasi-integrierbar, so gilt

$$E(f((M_{n+j}, X_{n+j})_{j\geq 1}) \,|\, \mathcal{F}_n) = E_{M_n} f((M_j, X_j)_{j\geq 1}) \quad f.s.$$

Beachtet man, daß für eine meßbare Funktion $f : (I\!R^d, I\!B^d) \longrightarrow (I\!R^k, I\!B^k)$, $k \geq 1$, stets die Inklusion $\sigma((M_n, f(X_n)) \subset \mathcal{F}_n$ erfüllt ist, ergibt sich als Anwendung der Glättungsregel für bedigte Erwartungswerte unter Verwendung von Satz 1.21 (b)

Korollar 1.22. *Gegeben eine meßbare Funktion $f : (I\!R^d, I\!B^d) \longrightarrow (I\!R^k, I\!B^k)$ und $k \geq 1$, bildet $(M_n, f(X_n))_{n\geq 0}$ eine k-dimensionale Markov-modulierte Folge mit Steuerkette M und Übergangskern*

$$I\!P_f(s, A) := \int_A (y, f(z)) I\!P(s, dy \times dz) \quad , \quad A \in \mathcal{S} \otimes I\!B^k.$$

Bezeichnet speziell $X_n^{(i)}$ die i-te Komponente von X_n, und setzt man im obigen Korollar für f die Projektion p_I auf die Komponenten mit Indizes aus $I \subset \{1, \ldots, d\}$ ein, folgt insbesondere, daß $(M_n, (X_n^{(i)}; i \in I))_{n\geq 0}$ eine $|I|$-dimensionale Markov-modulierte Folge mit Übergangskern $I\!P_I$, gegeben durch

$$I\!P_I\big(s, A \times (\times_{i\in I} B_i)\big) := I\!P\big(s, A \times (\times_{j=1}^d \tilde{B}_j)\big),$$

ist, wobei $A \in \mathcal{S}$, $B_i \in I\!B$ für $i \in I$ und

$$\tilde{B}_j = \begin{cases} B_j & , \quad j \in I \\ I\!R & , \quad j \notin I \end{cases} .$$

Wir beenden dieses erste Kapitel mit der *starken Markov-Eigenschaft für Markov-modulierte Folgen*. Bildet τ eine Stopzeit bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, so hat $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ als Markov-Kette die Eigenschaft, daß „bedingt unter der Vergangenheit bis zum Zeitpunkt τ das Verhalten der Kette nach τ nur vom Zustand (M_τ, X_τ) abhängt“. Aufgrund der besonderen Struktur von $I\!P$ liegt bei Markov-modulierten Folgen in Wahrheit sogar nur eine Abhängigkeit über M_τ vor.

Zur formalen Beschreibung dieser skizzierten Eigenschaft erweitern wir zunächst (ausschließlich aus Definitheitsgründen) den Zustandsraum von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ um einen zusätzlichen absorbierenden Zustand $\Delta = (\Delta_M, \Delta_X)$, genannt *Friedhof*, und fassen somit $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ auf als Markov-Kette auf dem Raum

$$\Big((S \cup \{\Delta_M\}) \times (I\!R^d \cup \{\Delta_X\}), \sigma(\mathcal{S} \cup \{\Delta_M\}) \otimes \sigma(I\!B^d \cup \{\Delta_X\})\Big)$$

mit Übergangskern

$$I\!P^\Delta(x, \bullet\,) = \begin{cases} I\!P(x, \bullet\,) & , \quad x \in S \\ \delta_\Delta & , \quad x = \Delta_M \end{cases} .$$

Weiter sei $(M_{\infty+n}, X_{\infty+n}) :\equiv \Delta$ für alle $n \geq 0$.

Gegeben eine Stopzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, bezeichne schließlich

$$\mathcal{F}_\tau := \big\{A \in \mathcal{A};\ A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\big\}$$

die *σ-Algebra der τ-Vergangenheit.*

Satz 1.23 (Starke Markov-Eigenschaft) ([Al 3] *Satz I/3.7*).
$(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ besitzt die starke Markov-Eigenschaft für Markov-modulierte Folgen, d.h. für jede Stopzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ gilt f.s.:

$$P^{(M_{\tau+n}, X_{\tau+n})_{n\geq 1} \,|\, \mathcal{F}_\tau} = P^{(M_{\tau+n}, X_{\tau+n})_{n\geq 1} \,|\, M_\tau} = P_{M_\tau}^{(M_n, X_n)_{n\geq 1}}$$
$$= \begin{cases} \mathbb{P}^{\mathbb{N}}(M_\tau, \bullet) & , \ \textit{falls} \quad \tau < \infty \quad \textit{f.s.} \\ \delta_{(\Delta,\Delta,\ldots)} & , \ \textit{falls} \quad \tau = \infty \quad \textit{f.s.} \end{cases}$$

1.4 Harris-Ketten

Will man für die im letzten Kapitel kennengelernten Markov-modulierten Folgen Aussagen herleiten, die beispielsweise das asymptotische Verhalten betreffen, so muß man mindestens fordern, daß bereits die entsprechende Steuerkette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ derartige Aussagen zuläßt.

Einen geeigneten Zugang hierfür bietet in der Theorie diskreter Markov-Ketten (DMK) der Begriff eines *rekurrenten Zustands* i_0 mit der Eigenschaft $M_n = i_0$ unendlich oft P_{i_0}-f.s. Betrachtet man jedoch wie in Kapitel 1 die Steuerkette M auf einem beliebigen polnischen Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$, existieren derartige Zustände i.a. selbst dann nicht mehr, wenn man aus anschaulichen Gründen M als in geeignetem Sinne rekurrent einstufen würde.

Eine geeignete schwächere Rekurrenzeigenschaft, die eine Verallgemeinerung der Erkenntnisse über das asymptotische Verhalten diskreter Markov-Ketten ermöglicht, ist die weiter unten definierte *Harris-Rekurrenz.*

1.4.1 Definitionen, ein Regenerationslemma

Generell sei $M = (M_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit polnischem Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ in einem Standardmodell

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (M_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(S)}\Big)$$

mit Übergangskern $\mathbb{P} : S \times \mathcal{S} \longrightarrow [0,1]$ und zugehörigen *n-Schritt-Übergangskernen* $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$, gegeben durch $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$ und

$$\mathbb{P}_n(x, A) = \mathbb{P} \circ \mathbb{P}_{n-1}(x, A) := \int \mathbb{P}_{n-1}(y, A)\mathbb{P}(x, dy)$$

für $x \in S$, $A \in \mathcal{S}$ und $n \geq 2$. Wir werden des öfteren benutzen, daß gemäß der sogenannten *Kolmogoroff-Chapman-Gleichungen*[1] für alle $n \geq 2$ und $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$I\!P_n(x, A) = I\!P_k \circ I\!P_{n-k}(x, A) = \int I\!P_{n-k}(y, A) I\!P_k(x, dy) \qquad x \in S, A \in \mathcal{S}.$$

Einige weitere notwendige Begriffsbildungen enthält

Definition 1.24 ([Nu 3] *Def. 2.2; Def. 3.5*). Gegeben $M = (M_n)_{n \geq 0}$ in der zuvor beschriebenen Situation, sei φ ein σ-endliches Maß auf $(S, \mathcal{S})$ und für $B \in \mathcal{S}$ die Stopzeit $\tau(B)$ definiert durch

$$\tau(B) = \inf\{n \geq 1; M_n \in B\}.$$

Man nennt dann $(M_n)_{n \geq 0}$ (bzw. $I\!P$)

(a) *φ-irreduzibel*, falls für jede Menge $B \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(B) > 0$ gilt: Zu jedem $x \in S$ existiert ein $n \in I\!N$ mit

$$P_x(M_n \in B) = I\!P_n(x, B) > 0.$$

(b) *φ-rekurrent*, falls für jede Menge $B \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(B) > 0$ gilt:

$$(1.3) \qquad P_x(\tau(B) < \infty) = P_x(M_n \in B \ \infty\text{-oft}) = 1 \quad \forall x \in S$$

Jede Menge $B \in \mathcal{S}$, die Gleichung (1.3) für alle $x \in S$ erfüllt, heißt *Rekurrenzmenge* für $(M_n)_{n \geq 0}$ (bzw. für $I\!P$).

Bemerkung 1.25. Offenbar folgt aus φ-Rekurrenz stets φ-Irreduzibilität.

Definition 1.26 (Harris-Rekurrenz) ([Al 1] *Def. 8.1.1*). $(M_n)_{n \geq 0}$ (bzw. $I\!P$) heißt *Harris-rekurrent* oder auch *Harris-Kette* (bzw. *Harris-Kern*), falls eine Rekurrenzmenge $\Re$ für $(M_n)_{n \geq 0}$ existiert mit der Eigenschaft

$$I\!P_r(x, A) \geq \alpha \phi(A) \qquad \forall x \in \Re, A \in \mathcal{S}$$

für ein $r \in I\!N$, $\alpha > 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß ϕ auf $(S, \mathcal{S})$ mit $\phi(\Re) > 0$. Man nennt in diesem Falle $\Re$ eine *Regenerationsmenge* für $(M_n)_{n \geq 0}$ (bzw. $I\!P$) und verwendet die Sprechweise „*$(M_n)_{n \geq 0}$ (bzw. $I\!P$) erfüllt (die Minorisierungsbedingung) $\mathcal{M}(r, \alpha, \Re, \phi)$*“.

Beispiel 1.27. $(M_n)_{n \geq 0}$ sei eine DMK und besitze eine Äquivalenzklasse $\mathcal{K}$ rekurrenter Zustände mit $P_x(\tau(\mathcal{K}) < \infty) = 1$ für alle $x \in S$. Dann erfüllt $(M_n)_{n \geq 0}$ die Minorisierugsbedingung $\mathcal{M}(r, \alpha, \Re, \phi)$ mit $\mathcal{R} = \{j\}$, $j \in \mathcal{K}$, $r \in \{n; p_{jj}^{(n)} > 0\}$, $\alpha = p_{jj}^{(r)}$ sowie $\phi = \delta_j$.

[1] vgl. [Al 3] Kor. I/1.7

Insbesondere ist also jede rekurrente DMK bereits Harris-rekurrent. Die Umkehrung gilt hingegen nicht, da in der vorstehend dargestellten Situation $(M_n)_{n\geq 0}$ durchaus auch transiente Zustände besitzen kann, von denen aus $\mathcal{K}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 erreichbar ist.

Bemerkungen 1.28. (a) Durch Übergang von ϕ zu $\phi(\bullet \cap \Re)/\phi(\Re)$ und von α zu $\alpha\phi(\Re)$ kann in Definition 1.26 ohne Einschränkung auch stets $\phi(\Re) = 1$ angenommen werden.

(b) Man sieht leicht ein, daß $(M_n)_{n\geq 0}$ ϕ-irreduzibel ist. Hierzu fixiere man $A \in \mathcal{S}$ mit $\phi(A) > 0$ und $x \in S$. Da $\Re$ Rekurrenzmenge ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}_k(x, \Re) > 0$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{r+k}(x, A) &= \int \mathbb{P}_r(y, A)\mathbb{P}_k(x, dy) \geq \int_{\Re} \mathbb{P}_r(y, A)\mathbb{P}_k(x, dy) \\ &\geq \alpha \cdot \phi(A) \cdot \mathbb{P}_k(x, \Re) > 0. \end{aligned}$$

Sofern man das Standardmodell für $\mathbb{P}$ geeignet konstruiert, besitzt $(M_n)_{n\geq 0}$ ein sog. *Regenerationsschema*, wie wir es in allgemeinerer Form auch noch in Kapitel 3.2 kennenlernen weden.

Satz 1.29 (Regenerationslemma) ([Al 1] *Satz 8.2.2*). *Der Harris-Kern $\mathbb{P}$ erfülle die Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(r, \alpha, \Re, \phi)$. Dann existiert ein Standardmodell*

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, M = (M_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(S)}\Big)$$

für $\mathbb{P}$, das sich wie folgt charakterisieren läßt:

Gegeben die Folge $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ der sukzessiven Eintrittszeiten von M in die Regenerationsmenge $\Re$, definiert durch

$$\sigma_n = \inf\{k > \sigma_{n-1};\ M_k \in \Re\} \quad \textit{für} \quad n \geq 1$$

mit der Vereinbarung $\sigma_0 := -1$, existiert eine auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definierte Folge $(\eta_n)_{n\geq 1}$ von Randomisierungsvariablen, *derart daß zusammen mit den Festsetzungen $T_0 = 0$,*

$$T_n = \inf\{\sigma_k + r;\ \sigma_k \geq T_{n-1}, \eta_k = 1\} \quad , n \geq 1,$$

unter jeder Verteilung P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S)$, folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(1) η_n ist für jedes $n \geq 1$ unabhängig von $(M_0, \ldots, M_{\sigma_n}, \sigma_n)$ und $\mathcal{B}(1, \alpha)$-verteilt.

(2) $T_0 < T_1 < T_2 < \cdots < \infty$ P_λ-f.s.

(3) Es gibt eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ von $\mathcal{A}$, derart daß M Markov-adaptiert und jedes T_n Stopzeit bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist.

(4) $(T_n - T_{n-1}, M_{T_n})$, $n \geq 2$, *sind unabhängig von* (T_1, M_{T_1}) *und ferner u.i.v. gemäß*

$$P_\lambda^{(T_n-T_{n-1},M_{T_n})} = P_\phi^{(T_1,M_{T_1})} = P_\phi^{T_1} \otimes \phi.$$

(5) Die Zyklen

$$Z_n := \big(T_{n+1} - T_n, (M_k)_{T_n \leq k < T_{n+1}}\big) \quad , n \geq 0,$$

sind stochastisch unabhängig im Fall $r = 1$ *und einsabhängig im Fall* $r \geq 2$. *Ferner ist die Folge* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *stationär mit*

$$P_\lambda^{(Z_n)_{n\geq 1}} = P_\phi^{(Z_n)_{n\geq 0}}.$$

(6) Für jedes $n \geq 0$ *ist* $(Z_k)_{k\geq n}$ *unabhängig von* $(T_0, \ldots, T_n)$.

Beweis:
Für den formalen und technisch recht aufwendigen Beweis verweisen wir im Fall $r = 1$ auf die Arbeiten [A/N] bzw. [Nu 1] für eine sehr ähnliche Technik sowie für die Konstruktionsidee des Standardmodells im allgemeinen Fall zusätzlich auf die Ausführungen in [As] auf Seite 151. □

Bemerkungen 1.30. (a) Vermöge Aussage (4) im obigen Regenerationslemma bildet $(T_n)_{n\geq 1}$ unter jedem P_λ einen Erneuerungsprozeß (EP) mit Zuwachsverteilung $P_\phi^{T_1}$ und folglich die Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ unter P_ϕ sogar einen Standard-Erneuerungsprozeß (SEP). Nimmt man wieder ohne Einschränkung $\phi(\Re) = 1$ an, so folgt aus den Teilen (4) und (5) überdies für alle $n \geq 1$:

$$P_\lambda(M_{T_n} \in \Re) = P_\phi(M_{T_1} \in \Re) = \phi(\Re) = 1.$$

(b) Die Eigenschaften (5) und (6) machen $(M_n)_{n\geq 0}$ zu einem sog. *regenerativen Prozeß* mit *Regenerationszeiten* $(T_n)_{n\geq 1}$. Eine ausführlichere Behandlung derartiger Prozesse wird in Kapitel 3.2 vorgenommen.

(c) Unter Beachtung von $P_\phi(\sigma_1 = 0) = P_\phi(M_0 \in \Re) = \phi(\Re) = 1$ gilt

$$P_\phi(T_1 = r) = P_\phi(\eta_1 = 1) = \alpha > 0,$$

d.h. die Spanne d von T_1 unter P_ϕ muß ein Teiler von r sein.

Im folgenden unterstellen wir durchgehend, daß $M = (M_n)_{n\geq 0}$ eine Harris-Kette ist, die der Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(r, \alpha, \Re, \phi)$ genügt. Bei allen Aussagen, die lediglich die Verteilung von M betreffen, wird zudem stets ohne gesonderten Hinweis angenommen, es liege ein Regenerationsmodell gemäß Satz 1.29 mit allen dort eingeführten Notationsvereinbarungen und Bezeichnungen vor.

1.4.2 Stationäre Maße und Periodizität

Als erste wichtige Folgerung aus dem Regenerationslemma ist festzuhalten, daß sich mit Hilfe der Stationarität der Zyklen $(Z_n)_{n\geq 0}$ unter P_ϕ ein stationäres Maß für $(M_n)_{n\geq 0}$, d.h. ein σ-endliches Maß $\xi \neq 0$ mit $\xi \circ I\!P = \xi$, definieren läßt.

Satz 1.31 ([Al 1] *Satz 8.3.1*). *Die Harris-Kette $(M_n)_{n\geq 0}$ bzw. der zugehörige Übergangskern $I\!P$ besitzt ein stationäres Maß ξ, gegeben durch*

$$\xi(A) := E_\phi\left(\sum_{n=0}^{T_1-1} 1\!\!1_A(M_n)\right) \qquad , A \in \mathcal{S}. \tag{1.4}$$

Falls $E_\phi T_1 < \infty$, bildet folglich $\xi^* = \frac{1}{E_\phi T_1}\cdot\xi$ eine stationäre Verteilung für $(M_n)_{n\geq 0}$ (bzw. $I\!P$).

Beweis:
Zum Nachweis der σ-Additivität von ξ notieren wir zunächst, daß offenbar $S = \bigcup_{p,q\in I\!N} A_{p,q}$ mit

$$A_{p,q} = \left\{x \in S;\ P_x(\sigma_1 \leq p) \geq \frac{1}{q}\right\}$$

gilt, weil $\Re$ eine Rekurrenzmenge ist. Es genügt daher, für beliebig fixierte Zahlen $p, q \in I\!N$ $\xi(A_{p,q}) < \infty$ zu zeigen. Hierzu sei $\tau_n := \tau_n(A_{p,q})$ jeweils der n-te Eintrittszeitpunkt von M in die Menge $A_{p,q}$ $[\tau_0 := 0]$. Für $n \geq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
P_\phi(T_1 > \tau_{(n+1)(p+r)}) &= \sum_{k\geq 0} P_\phi(\sigma_k \leq \tau_{n(p+r)} < \sigma_{k+1}, T_1 > \tau_{(n+1)(p+r)}) \\
&\leq \sum_{k\geq 0} P_\phi\Big(\{\sigma_k \leq \tau_{n(p+r)} < \sigma_{k+1}\wedge T_1\} \\
&\qquad\qquad \cap \big(\{\sigma_{k+1} - \tau_{n(p+r)} > p\} \cup \{\sigma_{k+1} - \tau_{n(p+r)} \leq p, \eta_{k+1} = 0\}\big)\Big) \\
&= \sum_{k\geq 0} \int_{\{\sigma_k \leq \tau_{n(p+r)} < \sigma_{k+1}\wedge T_1\}} P\big(\{\sigma_{k+1} - \tau_{n(p+r)} > p\} \\
&\qquad\qquad \cup \{\sigma_{k+1} - \tau_{n(p+r)} \leq p, \eta_{k+1} = 0\} \,\big|\, \mathcal{F}_{\tau_{n(p+r)}}\big)\, dP_\phi \\
&= \sum_{k\geq 0} \int_{\{\sigma_k \leq \tau_{n(p+r)} < \sigma_{k+1}\wedge T_1\}} P_{M_{\tau_{n(p+r)}}}\big(\{\sigma_1 > p\} \cup \{\sigma_1 \leq p, \eta_1 = 0\}\big)\, dP_\phi \\
&= \sum_{k\geq 0} \int_{\{\sigma_k \leq \tau_{n(p+r)} < \sigma_{k+1}\wedge T_1\}} P_{M_{\tau_{n(p+r)}}}\big(\{\sigma_1 > p, \eta_1 = 1\} \cup \{\eta_1 = 0\}\big)\, dP_\phi \\
&= \sum_{k\geq 0} \int_{\{\sigma_k \leq \tau_{n(p+r)} < \sigma_{k+1}\wedge T_1\}} \alpha \cdot P_{M_{\tau_{n(p+r)}}}(\sigma_1 > p) + (1-\alpha)\, dP_\phi \\
&\leq \Big(\alpha(1 - \frac{1}{q}) + (1-\alpha)\Big) \cdot P_\phi(T_1 > \tau_{n(p+r)}) = (1 - \frac{\alpha}{q}) \cdot P_\phi(T_1 > \tau_{n(p+r)}).
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde dabei benutzt, daß wegen $T_1 \in \{\sigma_k + r;\ k \in I\!N\}$ aus $\sigma_{k+1} - \tau_{n(p+r)} \leq p$ und $T_1 > \tau_{(n+1)(p+r)}$ notwendigerweise $T_1 > \sigma_{k+1} + r$ und somit $\eta_{k+1} = 0$ folgt. Anschließend ergaben sich die dritte und vierte Zeile unter Verwendung der $\mathcal{F}_{\tau_{n(p+r)}}$-Meßbarkeit des Ereignisses $\{\sigma_k \leq \tau_{n(p+r)} < \sigma_{k+1} \wedge T_1\}$ und der starken Markov-Eigenschaft, weil auf dieser Menge der Vektor $(\sigma_{k+1} - \tau_{n(p+r)}, \eta_{k+1})$ als meßbare Funktion f von $(M_n)_{n \geq \tau_{n(p+r)}}$ mit $f(M) = (\sigma_1, \eta_1)$ darstellbar ist.

Induktiv liefert obige Rechnung

$$P_\phi(T_1 > \tau_{n(p+r)}) \leq (1 - \frac{\alpha}{q})^n \cdot P_\phi(T_1 > \tau_0) = (1 - \frac{\alpha}{q})^n$$

für alle $n \geq 1$, und es folgt damit

$$\begin{aligned}
\xi(A_{p,q}) &= E_\phi \left(\sum_{k=0}^{T_1 - 1} 1\!\!1_{A_{p,q}}(M_k) \right) = \sum_{n \geq 1} n \cdot P_\phi \left(\sum_{k=0}^{T_1 - 1} 1\!\!1_{A_{p,q}}(M_k) = n \right) \\
&\leq \sum_{n \geq 1} n \cdot P_\phi(T_1 > \tau_n) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k = n(p+r)+1}^{(n+1)(p+r)} k \cdot P_\phi(T_1 > \tau_k) \\
&\leq (p+r) \Big(P_\phi(T_1 > \tau_0) + \sum_{n \geq 1} (n+1) P_\phi(T_1 > \tau_{n(p+r)}) \Big) \\
&\leq (p+r) \Big(1 + \sum_{n \geq 1} (n+1)(1 - \frac{\alpha}{q})^n \Big).
\end{aligned}$$

Die unendliche Reihe im letzten Term konvergiert nach dem Quotientenkriterium wegen

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)(1 - \frac{\alpha}{q})^{n+1}}{(n+1)(1 - \frac{\alpha}{q})^n} = 1 - \frac{\alpha}{q} < 1.$$

Die Invarianz von ξ, d.h. die Eigenschaft $\xi \circ I\!P = \xi$ ergibt sich schließlich wie folgt aus $P_\phi^{M_{T_1}} = P_\phi^{M_0} = \phi$:

$$\begin{aligned}
\xi(A) &= E_\phi \left(\sum_{n=0}^{T_1 - 1} 1\!\!1_A(M_n) \right) = E_\phi \left(\sum_{n=1}^{T_1} 1\!\!1_A(M_n) \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} P_\phi(T_1 > n-1, M_n \in A) = \sum_{n \geq 1} \int_{\{T_1 > n-1\}} P(M_n \in A \,|\, \mathcal{F}_{n-1}) \, dP_\phi \\
&= \sum_{n \geq 1} \int_{\{T_1 > n-1\}} I\!P(M_{n-1}, A) \, dP_\phi = E_\phi \left(\sum_{n=0}^{T_1 - 1} I\!P(M_n, A) \right) \\
&= \int I\!P(x, A) \, \xi(dx)
\end{aligned}$$

□

Das Symbol ξ stehe fortan stets für das stationäre Maß in (1.4), und es sei

$$\xi^* = \frac{1}{E_\phi T_1}\xi,$$

wobei letzterer Ausdruck als Null interpretiert werde im Fall $E_\phi T_1 = \infty$. Der nachfolgende Satz besagt, daß die Bedingung $E_\phi T_1 < \infty$ sogar notwendig für die Existenz einer stationären Verteilung für M ist, welche dann bereits eindeutig bestimmt ist.

Satz 1.32. *Die Harris-Kette M besitzt genau dann eine stationäre Verteilung ζ^*, wenn $E_\phi T_1$ endlich ist. ζ^* ist in diesem Falle eindeutig bestimmt, es gilt also $\zeta^* = \xi^*$.*

Beweis:
Seien zunächst $A \in \mathcal{S}$ mit $\xi(A) < \infty$, $U = \sum_{n\geq 0} P_\phi^{T_n}$ das Erneuerungsmaß zum SEP (bzgl. P_ϕ) $(T_n)_{n\geq 0}$ und d die Spanne von T_1 unter P_ϕ. Definiert man jeweils zu $k \in \{0,\ldots,d-1\}$ die Funktion $g_{A,k} : \mathbb{Z} \to [0,\infty)$ durch

$$g_{A,k}(n) = P_\phi(T_1 > n, M_{n+k} \in A) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(n),$$

so folgt

$$\begin{aligned}\int g_{A,k}(x)\ \lambda\!\!\lambda_1(dx) &= \sum_{n\geq 0} P_\phi(T_1 > n, M_{n+k} \in A)\\ &= E_\phi\left(\sum_{n=k}^{T_1+k-1} \mathbb{1}_A(M_n)\right) = E_\phi\left(\sum_{n=0}^{T_1-1} \mathbb{1}_A(M_n)\right) = \xi(A) < \infty,\end{aligned}$$

d.h. $g_{A,k}$ ist $\lambda\!\!\lambda_1$-integrabel und wegen $d \in \mathbb{N}$ auch $\lambda\!\!\lambda_d$-integrabel mit

$$\begin{aligned}P_\phi(M_{nd+k} \in A) &= \sum_{j\geq 0} P_\phi(T_j \leq nd+k < T_{j+1}, M_{nd+k} \in A)\\ &= \sum_{j\geq 0}\sum_{m=0}^{n} P_\phi(T_j = md)\cdot P_\phi(T_1 > (n-m)d, M_{(n-m)d+k} \in A)\\ &= \sum_{j\geq 0}\int_{[0,nd]} g_{A,k}(nd-x)\ P_\phi^{T_j}(dx) = g_{A,k} * U(nd).\end{aligned}$$

Das 2. Erneuerungstheorem impliziert

$$\lim_{n\to\infty} P_\phi(M_{nd+k} \in A) = \frac{d}{E_\phi T_1}\sum_{j\geq 0} g_{A,k}(jd) = \frac{d}{E_\phi T_1} E_\phi\left(\sum_{j=0}^{\frac{1}{d}T_1-1} \mathbb{1}_A(M_{jd+k})\right)$$

für jedes $k \in \{0,\ldots,d-1\}$ bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_\phi(M_{nd+(k-i)} \in A) = \frac{1}{E_\phi T_1} E_\phi\left(\sum_{j=0}^{T_1-1} \mathbb{1}_A(M_j)\right) = \xi^*(A)$$

für jedes $i \in \{1,\ldots,d\}$. Für eine beliebige Startverteilung $\lambda \in \mathcal{W}(S)$ und beliebiges $n \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_\lambda(M_{nd+k} \in A) \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} \Big(P_\lambda(T_1 > nd, M_{nd+k} \in A) + P_\lambda(T_1 \le nd, M_{nd+k} \in A) \Big) \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_\lambda(T_1 > nd, M_{nd+k} \in A) \\
&\quad + \sum_{s \ge 0} \left(\mathbb{1}_{\{s<n\}} \cdot \sum_{i=1}^{d} P_\lambda(T_1 = sd + j) \cdot \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_\phi(M_{(n-s)d+(k-i)} \in A) \right),
\end{aligned}$$

deshalb folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_\lambda(M_{nd+k} \in A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_\lambda(T_1 > nd, M_{nd+k} \in A) + \sum_{s\ge 0}\sum_{i=1}^{d} P_\lambda(T_1 = sd + i) \cdot \xi^*(A) \\
&= \xi^*(A) \cdot P_\lambda(T_1 < \infty) \;=\; \xi^*(A).
\end{aligned}$$

Da der Term $\frac{1}{d}\sum_{k=0}^{d-1} P_\lambda(M_{nd+k} \in A)$ bei spezieller Wahl $\lambda = \zeta^*$ wegen der Stationarität von ζ^* für alle $n \ge 0$ mit $\zeta^*(A)$ übereinstimmt, folgt

$$\zeta^*(A) = \xi^*(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{S} \text{ mit } \xi(A) < \infty. \tag{1.5}$$

Die σ-Endlichkeit von ξ sichert die Existenz einer monotonen Folge $(A_n)_{n\ge 0}$ von Mengen aus $\mathcal{S}$ mit $A_n \uparrow S$ und $\xi(A_n) < \infty \; \forall n \ge 0$. Der Fall $E_\phi T_1 = \infty$ ist ausgeschlossen, weil sonst (1.5)

$$1 = \zeta^*(S) = \lim_{n\to\infty} \zeta^*(S \cap A_n) = \lim_{n\to\infty} \xi^*(S \cap A_n) = 0$$

implizierte, somit ist ξ^* ebenfalls eine stationäre Verteilung von M. Auf ähnliche Weise ergibt sich $\zeta^* = \xi^*$, für alle $B \in \mathcal{S}$ gilt nämlich

$$\zeta^*(B) = \lim_{n\to\infty} \zeta^*(B \cap A_n) = \lim_{n\to\infty} \xi^*(B \cap A_n) = \xi^*(B).$$

$\square$

Definition 1.33. Eine Harris-Kette $M = (M_n)_{n\ge 0}$ heißt *positiv (Harris-)rekurrent*, wenn sie eine (eindeutig bestimmte) stationäre Verteilung besitzt; andernfalls nennt man M *null-rekurrent*.

Anstatt über die Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(r, \alpha, \Re, \phi)$ definierte Harris ursprünglich die Harris-Rekurrenz über den Begriff der φ-Rekurrenz für ein σ-endliches Maß φ. Beide Definitionen sind äquivalent zueinander.

Satz 1.34 ([As] *Cor. VI/3.12*). *Eine Markov-Kette $(M_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann Harris-rekurrent, wenn sie φ-rekurrent ist für ein σ-endliches Maß φ.*

Beweis:
„$\Rightarrow$ “: Ist $(M_n)_{n\geq 0}$ Harris-rekurrent mit Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(r, \alpha, \Re, \phi)$ und $B \in \mathcal{S}$ mit $\phi(B) > 0$, so sind für beliebiges $x \in S$ die Ereignisse $\{M_{T_n} \in B, T_n < \infty\}$, $n \geq 1$, gemäß Eigenschaft (4) des Regenerationslemmas stochastisch unabhängig unter P_x mit

$$\sum_{n\geq 2} P_x(M_{T_n} \in B, T_n < \infty) = \sum_{n\geq 2} \phi(B) = \infty.$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt

$$P_x(\tau(B) < \infty) \geq P_x\Big(\limsup_{n\to\infty}\{M_{T_n} \in B, T_n < \infty\}\Big) = 1,$$

d.h. $(M_n)_{n\geq 0}$ ist ϕ-rekurrent.
„$\Leftarrow$ “: Die umgekehrte Richtung beweist man unter Verwendung des sog. *C-Set-Theorems*, für dessen Beweis wir auf die angegebene Quelle verweisen.

Theorem 1.35 (C-Set-Theorem) ([Or] *Th. 2.1*). *Die Markov-Kette $(M_n)_{n\geq 0}$ sei φ-irreduzibel und $B \in \mathcal{S}$ mit $\varphi(B) > 0$. Dann existieren eine Menge $C \subset B$ mit $\varphi(C) > 0$, eine reelle Zahl $\alpha > 0$ und ein $r \in I\!N$ mit*

$$P_x(M_r \in A) \geq \alpha\varphi(A \cap C)$$

für alle $x \in C$ und $A \in \mathcal{S}$.

Da φ σ-endlich ist, existiert ein $C \in \mathcal{S}$ wie im C-Set-Theorem mit $\varphi(C) \in (0, \infty)$. $(M_n)_{n\geq 0}$ erfüllt dann offenbar die Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(r, \alpha, C, \phi)$ mit der Normierung $\phi = \varphi(\bullet \cap C)/\varphi(C)$ und ist damit Harris-rekurrent. □

Satz 1.36 ([As] *Cor. VI/ 3.3*). *Gegeben eine Harris-Kette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ mit stationärem Maß ξ gemäß (1.4) und eine Menge $A \in \mathcal{S}$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) A ist Rekurrenzmenge für M.

(b) $\xi(A) > 0$.

In beiden Fällen enthält A eine Regenerationsmenge $\hat{\Re}$ von M mit $\xi(\hat{\Re}) > 0$.

Beweis:
Nach dem Regenerationslemma sind die Zufallsvariablen

$$X_n = \sum_{j=T_{n-1}}^{T_n - 1} \mathbb{I}_A(M_j) \quad , n \geq 1,$$

einsabhängig und identisch verteilt unter P_ϕ mit $E_\phi X_1 = \xi(A)$. $(S_n)_{n\geq 0}$ sei die Folge der zugehörigen Partialsummen. Ist A eine Rekurrenzmenge, so ergibt sich für beliebiges $x \in S$

$$\begin{aligned} 1 &= P_x(M_n \in A \ \infty\text{-oft}) = P_x(M_{T_1+n} \in A \ \infty\text{-oft}) \\ &= P_\phi(M_n \in A \ \infty\text{-oft}) = P_\phi(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) \end{aligned}$$

und weiter mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} n\xi(A) = \lim_{n\to\infty} E_\phi S_n = E_\phi(\lim_{n\to\infty} S_n) = \infty,$$

also $\xi(A) > 0$. Umgekehrt folgt aus $\xi(A) > 0$ für den Erneuerungsprozeß $(S_n^*)_{n\geq 0}$ mit Zuwächsen $(X_{2n})_{n\geq 0}$, daß $P_\phi(\lim_{n\to\infty} S_n^* = \infty) = 1$ und damit auch

$$P_x(M_n \in A \ \infty\text{-oft}) = P_\phi(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) \geq P_\phi(\lim_{n\to\infty} S_n^* = \infty) = 1$$

für beliebiges $x \in S$ gelten.

Die Implikation (b) $\Rightarrow$(a) besagt gerade, daß M ξ-rekurrent ist, deshalb garantiert das C-Set-Theorem die Existenz einer Regenerationsmenge $\hat{\Re} \subset A$ mit $\xi(\hat{\Re}) > 0$. $\square$

Eine entscheidende Rolle bei der Analyse des Langzeitverhaltens von Harris-Ketten kommt ihrer periodischen Struktur zu. Motivation für die Einführung des Begriffs der *Periode* von M ist das Phänomen, daß die Harris-Kette M gewisse Mengen aus $\mathcal{S}$ nur in bestimmten Schrittweiten mit positiver Wahrscheinlichkeit erreichen kann. Basis für die formale Definition bildet der folgende Satz.

Satz 1.37 ([As] *Prop. VI/ 3.10*). *(a) Besitzt T_1 unter P_ϕ die Spanne $d \geq 1$, so existiert eine* zyklische Zerlegung

$$S = \bigcup_{i=1}^{d} S_i$$

des Zustandsraums in disjunkte, nichtleere Teilmengen, derart daß

$$I\!P(x, S_{i+1}) = 1$$

für alle $x \in S_i \setminus N$ und eine ξ-Nullmenge N gilt. (Man identifiziere dabei S_{d+1} mit S_1 usw.).

(b) Bei jeder weiteren Zerlegung der o.a. Art mit $\tilde{d} \geq 0$ und Mengen $\tilde{S}_1, \ldots, \tilde{S}_{\tilde{d}}, \tilde{N}$ ist $\tilde{d}$ ein Teiler von d.

Bevor wir zum Beweis kommen, halten wir als Folgerung fest, daß d damit unabhängig ist von der speziellen Wahl des Tripels $(r, \Re, \phi)$ aus der Minorisierungsbedingung für M. Im Anschluß an das Regenerationslemma wurde überdies festgestellt, daß d stets ein Teiler von r ist.

Definition 1.38. Die Spanne d von T_1 unter P_ϕ heißt *Periode* von $(M_n)_{n\geq 0}$ bzw. $I\!P$. Man sagt auch, $(M_n)_{n\geq 0}$ bzw. $I\!P$ ist *aperiodisch* im Fall $d = 1$ bzw. *d-periodisch* im Fall $d \geq 2$.

Erfüllt $(M_n)_{n\geq 0}$ sogar die Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(1, \alpha, \Re, \phi)$, hat also neben d auch r den Wert 1, so heißt $(M_n)_{n\geq 0}$ (bzw. $I\!P$) *streng aperiodisch*.

Beweis von Satz 1.37:
(a) Da $\Re$ Rekurrenzmenge für M ist, ist S darstellbar als Vereinigung der Mengen

$$E_i := \bigcup_{k\geq 0} \{x \in S;\ \mathbb{P}_{kd-r-i}(x, \Re) > 0\},$$

$i = 1, \dots, d$. Für $n \geq 0$ und $i, j \in \{1, \dots, d\}$ mit $i \neq j$ gilt stets

$$P_\phi(M_{nd+i} \in E_j) = 0, \tag{1.6}$$

denn andernfalls existierte ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$P_\phi\big(\mathbb{P}_{kd-r-j}(M_{nd+i}, \Re) > 0\big) > 0.$$

Daraus ergäbe sich

$$P_\phi(M_{(k+n)d+i-j-r} \in \Re) = \int \mathbb{P}_{kd-r-j}(M_{nd+i}, \Re)\, dP_\phi > 0,$$

und es existierte daher ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$P_\phi(\sigma_{n_1} = (k+n)d + i - j - r) > 0.$$

Aus

$$\begin{aligned} P_\phi\left(\bigcup_{m\geq 1}\{T_m = (k+n)d + i - j\}\right) &\geq P_\phi(\sigma_{n_1} = (k+n)d + i - j - r, \eta_{n_1} = 1) \\ &= \alpha \cdot P_\phi(\sigma_{n_1} = (k+n)d + i - j - r) > 0 \end{aligned}$$

ließe sich dann

$$P_\phi(T_{n_2} = (k+n)d + i - j) > 0$$

für ein $n_2 \in \mathbb{N}$ schließen, d.h. $(k+n)d + i - j$ gehörte zum Träger von T_{n_2} unter P_ϕ. Die Spanne d der Zuwächse von $(T_n)_{n\geq 0}$ müßte dann ein Teiler dieser Zahl und damit auch von $|i - j| \in \{1, \dots, d-1\}$ sein, was nicht möglich ist.

Gleichung (1.6) impliziert direkt

$$P_\phi(M_{nd+i} \in E_i) = 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq 0, i \geq 1.$$

Definiert man nun für $i = 1, \dots, d$

$$S_i := E_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} E_j\right),$$

so ist S die disjunkte Vereinigung von $S_1, \dots, S_d$, und es gilt

$$P_\phi(M_{nd+i} \in S_i) \geq P_\phi(M_{nd+i} \in E_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P_\phi(M_{nd+i} \in E_j) = 1. \tag{1.7}$$

Abschließend ist nur noch zu zeigen, daß für $i, j \geq 1$ mit $j \neq i+1$ stets

$$N_{i,j} = \left\{x \in S_i;\ I\!\!P(x, S_j) > 0\right\}$$

eine ξ-Nullmenge ist, denn dann folgt Aussage (a) mit

$$N = \bigcup_{i \geq 1} \bigcup_{j \neq i+1} N_{i,j}.$$

$\xi(N_{i,j}) > 0$ ist nach Satz 1.36 hinreichend für die Existenz einer natürlichen Zahl $m \geq 0$ mit $P_\phi(M_m \in N_{i,j}) > 0$. Es folgt zum einen $P_\phi(M_m \in S_i) > 0$, d.h. m ist gemäß (1.7) von der Form $m = kd + i$ mit $k \in I\!\!N_0$, und zum anderen

$$P_\phi(M_{kd+i+1} \in S_j) = \int I\!\!P(M_m, S_j)\, dP_\phi \geq \int_{N_{i,j}} I\!\!P(x, S_j)\, dP_\phi^{M_m} > 0,$$

was wiederum nach (1.7) nur im Fall $j = i + 1$ möglich ist.

(b) Bei gegebener weiterer Zerlegung mit Bezeichnungen wie in der Formulierung des Satzes wählen wir zunächst ein $\tilde{S}_j$ mit $\xi(\tilde{S}_j) > 0$. Die σ-Endlichkeit von ξ ermöglicht ferner die Auswahl einer monotonen Folge $(B_n)_{n \geq 1}$ von Mengen aus $\mathcal{S}$ mit $B_n \uparrow S$ und $0 < \xi(B_n \cap \tilde{S}_j) < \infty$ für alle $n \geq 1$. Durch

$$\psi = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\xi(\,\bullet \cap \tilde{S}_j \cap B_n)}{\xi(\tilde{S}_j \cap B_n)}$$

wird dann offenbar ein zu $\xi(\,\bullet \cap \tilde{S}_j)$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. Gilt nun $P_\psi(M_k \in \tilde{S}_j) > 0$ für ein $k \geq 0$, so folgt vermöge

$$0 < P_\psi(M_k \in \tilde{S}_j) = \int I\!\!P_k(x, \tilde{S}_j)\, \psi(dx)$$

notwendigerweise $\psi(\{x \in S;\ I\!\!P_k(x, \tilde{S}_j) > 0\}) > 0$, wegen $\psi \ll \xi(\,\bullet \cap \tilde{S}_j)$ also auch $\xi(\tilde{S}_j \cap \{x \in S;\ I\!\!P_k(x, \tilde{S}_j) > 0\}) > 0$. Dies ist nach Teil (a) nur möglich, wenn $\tilde{d}$ ein Teiler von k ist. Hinreichend für $\tilde{d}|d$ ist demnach offenbar die Existenz einer natürlichen Zahl k mit

$$P_\psi(M_k \in \tilde{S}_j) > 0 \quad \text{und} \quad P_\psi(M_{k+d} \in \tilde{S}_j) > 0.$$

Für den entsprechenden Nachweis sei

$$H = \left\{n \geq 0;\ \exists m \geq 1 :\ P_\phi(T_m = n) > 0\right\}.$$

H ist offenbar enthalten in $d\mathbb{Z}$ und eine Obermenge des Trägers von T_1 unter P_ϕ, deshalb gilt ggT $H = d$. Darüber hinaus ist H abgeschlossen bezüglich der Addition. $H \setminus d\mathbb{Z}$ ist somit endlich[2], insbesondere gibt es natürliche Zahlen n, m_1, m_2 mit

$$P_\phi(T_{m_1} = nd) > 0 \quad \text{und} \quad P_\phi(T_{m_2} = (n+1)d) > 0.$$

[2]vgl. [Al 3] Lemma zu Satz I/6.10

Wählt man nun noch $p, q \in I\!N$ mit $P_\phi(M_p \in \tilde{S}_j) > 0$ (existiert nach Satz 1.36 wegen $\xi(\tilde{S}_j) > 0$) und $P_\psi(T_1 = q) > 0$, so folgt für $k = p + q + nd$

$$\begin{aligned} P_\psi(M_k \in \tilde{S}_j) &\geq P_\psi(T_1 = q, T_{m_1+1} - T_1 = nd, M_{T_{m_1+1}+p} \in \tilde{S}_j) \\ &= P_\psi(T_1 = q) \cdot P_\phi(T_{m_1} = nd) \cdot P_\phi(M_p \in \tilde{S}_j) > 0 \end{aligned}$$

und auf die gleiche Weise auch

$$\begin{aligned} P_\psi(M_{k+d} \in \tilde{S}_j) &\geq P_\psi(T_1 = q, T_{m_2+1} - T_1 = (n+1)d, M_{T_{m_2+1}+p} \in \tilde{S}_j) \\ &= P_\psi(T_1 = q) \cdot P_\phi(T_{m_2} = (n+1)d) \cdot P_\phi(M_p \in \tilde{S}_j) > 0. \end{aligned}$$

□

Definition 1.39. Eine positiv rekurrente und aperiodische Harris-Kette heißt *ergodisch*.

1.4.3 Kopplung von Harris-Ketten, ein Ergodensatz

Gegeben eine Markov-Kette $(M_n)_{n\geq 0}$ mit Übergangskern $I\!P$ und eine Verteilung $\lambda \in \mathcal{W}(S)$, nennen wir einen stochastischen Prozeß $(M_n^\lambda)_{n\geq 0}$, definiert auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$, eine *$P_\lambda$-Version von $(M_n)_{n\geq 0}$ (bzw. $I\!P$)*, wenn M_0^λ unter $\hat{P}$ die Verteilung λ besitzt und $(M_n^\lambda)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Übergangskern $I\!P$ ist.

Darüber hinaus sagen wir, *$(M_n)_{n\geq 0}$ (bzw. $I\!P$) läßt sich koppeln unter (λ, μ)*, wenn es eine P_λ-Version $(M_n^\lambda)_{n\geq 0}$ und eine P_μ-Version $(M_n^\mu)_{n\geq 0}$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P})$ sowie eine $\hat{P}$-f.s. endliche *Kopplungszeit*

$$T = T_{\lambda,\mu} : (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}) \longrightarrow (I\!N, \mathcal{P}(I\!N))$$

gibt, so daß $M_n^\lambda = M_n^\mu$ für alle $n \geq T$ gilt.

Satz 1.40 ([As] *Prop. VI/3.13*). *Für eine zeitlich homogene Markov-Kette M mit Übergangskern $I\!P$, Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ und existierender stationärer Verteilung ξ^* sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) M ist eine ergodische Harris-Kette.

(b) Für jedes $x \in S$ läßt sich M koppeln unter (ξ^*, δ_x).

Dem Beweis des Satzes schicken wir zunächst noch zwei technische Hilfsaussagen voraus.

Lemma 1.41 ([Al 1] *Satz 2.3.4*). *Sind $S = (S_n)_{n\geq 0}$ und $S^* = (S_n^*)_{n\geq 0}$ voneinander unabhängige 1-arithmetische Erneuerungsprozesse mit Startvariablen S_0 und S_0^*, Zuwächsen $(X_n)_{n\geq 1}$ und $(X_n^*)_{n\geq 1}$, gleicher Zuwachsverteilung $P^{X_1} = P^{X_1^*}$ und $EX_1 < \infty$, so gibt es P-fast sicher $I\!N_0$-wertige Zufallsvariablen ρ, ν mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für jedes* $n \geq 0$ *ist* $(S_0, \dots, S_n)$ *unabhängig von* $(S_0^*, \dots, S_{\rho+n}^*)$.

(2) ν *ist Stopzeit bzgl.* $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ *mit* $\mathcal{G}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n, S_0^*, \dots, S_{\rho+n}^*)$.

(3) $\nu^* = \rho + \nu$ *ist Stopzeit für* $(S_n, S_n^*)_{n\geq 0}$.

(4) $S_\nu = S_{\nu^*}^*$

Beweis:
$d(Y)$ bezeichne fortan die Spanne einer Zufallsgröße Y. Für

$$d := d(X_1^* - X_1) \in \mathbb{N}$$

gilt dann bekanntermaßen auch $d = d(X_1^* - y)$ für P^{X_1}-fast alle $y \in \mathbb{N}_0$. Folglich muß ein $a \in \{0, \dots, d-1\}$ existieren mit $d(X_1^* - a) = d$. Dies bedeutet

$$P(X_1^* \in \mathrm{ggT}(a,d) \cdot \mathbb{Z}) \geq P(X_1^* \in a + d\mathbb{Z}) = 1$$

und impliziert

$$1 = d(X_1^*) \geq \mathrm{ggT}(a,d) \geq 1.$$

a und d sind also teilerfremd. Es folgt[3]

$$a\mathbb{Z} + d\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

und damit die P-fast sichere Endlichkeit der $\sigma(S_0, S_0^*)$-meßbaren Zufallsgröße

$$\rho := \inf\{m \geq 0;\ \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } am + dn = S_0 - S_0^*\}.$$

Ferner ist ρ Stopzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{H}_n)_{n\geq 0}$, $\mathcal{H}_n := \sigma(S_0, S_0^*, \dots, S_n^*)$. Für $A \in \mathcal{H}_\rho$, $n \geq 1$ und $B \in \mathbb{B}^n$ gilt unter Verwendung von $A \cap \{\rho = k\} \in \mathcal{H}_k\ \forall k \geq 0$ und der Unabhängigkeit von S und S^*

$$\begin{aligned}
&P\big(A \cap \{(X_{\rho+1}^*, \dots, X_{\rho+n}^*) \in B\}\big) \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} \int_{A\cap\{\rho=k\}} P\big((X_{k+1}^*, \dots, X_{k+n}^*) \in B \,\big|\, \mathcal{H}_k\big)\, dP \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} \int_{A\cap\{\rho=k\}} P\big((X_{k+1}^*, \dots, X_{k+n}^*) \in B \,\big|\, S_0^*, \dots, S_k^*\big)\, dP \\
&\qquad = P\big((X_1^*, \dots, X_n^*) \in B\big) \cdot P(A),
\end{aligned}$$

d.h. $(X_{\rho+n}^*)_{n\geq 1} \sim (X_n^*)_{n\geq 1}$, und $(X_{\rho+n}^*)_{n\geq 1}$ ist unabhängig von $\mathcal{H}_\rho$. Insbesondere zeigt dies, daß $X_1, X_{\rho+1}^*, X_2, X_{\rho+2}^*, \dots$ u.i.v. und auch unabhängig von $(S_0, S_0^*, \dots, S_\rho^*)$ sind. Damit ist speziell Eigenschaft (1) erfüllt. Definiert man mittels ρ die Zufallsvariable

$$\nu := \inf\{n \geq 0;\ S_n = S_{\rho+n}^*\},$$

[3] vgl. [Bo] 2.4, Satz 13

zieht dies unmittelbar die Gültigkeit der Eigenschaften (2) bis (4) nach sich, es muß also lediglich noch der Nachweis der P-fast sicheren Endlichkeit von ν erbracht werden. Hierzu setzen wir

$$W_n^\rho := (S^*_{\rho+n} - S_n) - (S^*_\rho - S_0)$$

und erhalten so den Standard-Random-Walk $(W_n^\rho)_{n\geq 0}$ mit d-arithmetischen Zuwächsen $(X^*_{\rho+n} - X_n)_{n\geq 1}$ und Drift 0. Ferner gilt

$$V_\rho := S^*_\rho - S^*_0 - a\rho = \sum_{k=1}^{\rho}(X^*_k - a) \in d\mathbb{Z} \quad P\text{-f.s.}$$

wegen $d(X^*_1 - a) = d$, und $(V_\rho + W_n^\rho)_{n\geq 0}$ wird so zu einem d-arithmetischen rekurrenten Random-Walk. Mit

$$A(\rho) := \{n \in \mathbb{Z};\ a\rho + n = S_0 - S^*_0\}$$

erhalten wir unter Beachtung von $A(\rho) \cap d\mathbb{Z} \neq \emptyset$ P-f.s.:

$$\begin{aligned}\nu &= \inf\{n \geq 0;\ a\rho + V_\rho + W_n^\rho = S_0 - S^*_0\}\\ &= \inf\{n \geq 0;\ V_\rho + W_n^\rho \in A(\rho)\} < \infty \qquad P\text{-f.s.}\end{aligned}$$

□

Lemma 1.42 ([Th] *Constr. 1.1*). *Gegeben seien polnische Räume $(E_i, \mathcal{E}_i)$ für $i = 1, 2, 3$, ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und Zufallsvariablen*

$$(Y_1, Y_2) : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$$

$$(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3) : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (E_2 \times E_3, \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$$

mit der Eigenschaft

$$P^{Y_2} = P^{\hat{Y}_2}.$$

Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_*, \mathcal{A}_*, P_*)$ und eine Zufallsvariable

$$(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*) : (\Omega_*, \mathcal{A}_*) \longrightarrow (E_1 \times E_2 \times E_3, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$$

mit

$$P_*^{(Y_1^*, Y_2^*)} = P^{(Y_1, Y_2)} \quad \textit{und} \quad P_*^{(Y_2^*, Y_3^*)} = P^{(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3)}. \tag{1.8}$$

Hinsichtlich der Verteilungen von (Y_1, Y_2) und $(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3)$ bedeutet es unter den gegebenen Voraussetzungen demnach keine Einschränkung, $Y_2 = \hat{Y}_2$ anzunehmen.

Beweis:
Es sei der stochastische Kern $\mathbb{L} : \Omega \times \mathcal{E}_3 \longrightarrow [0,1]$ eine Version der regulär bedingten Verteilung

$$P^{\hat{Y}_3 \,|\, \hat{Y}_2}$$

und

$$(\Omega_*, \mathcal{A}_*, P_*) := (\Omega \times E_3, \mathcal{A} \otimes \mathcal{E}_3, P \otimes \mathbb{L}).$$

Die Zufallsvariable

$$\big(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*\big)(\omega, y) := \big(Y_1(\omega), Y_2(\omega), y\big),$$

definiert für $(\omega, y) \in \Omega \times E_3$, erfüllt dann die geforderten Verteilungsidentitäten in (1.8), wie die Rechnungen

$$P_*^{(Y_1^*, Y_2^*)}(A) = P \otimes \mathbb{L}\big((Y_1, Y_2)^{-1}(A) \times E_3\big) = P^{(Y_1, Y_2)}(A)$$

für $A \in \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ bzw.

$$\begin{aligned} P_*^{(Y_2^*, Y_3^*)}(B \times C) &= P \otimes \mathbb{L}\big(Y_2^{-1}(B) \times C\big) \\ &= \int_{Y_2^{-1}(B)} P^{\hat{Y}_3 \,|\, \hat{Y}_2}(C)\, dP = \int_B P^{\hat{Y}_3 \,|\, \hat{Y}_2 = x}(C)\; P^{Y_2}(dx) \\ &= \int_B P^{\hat{Y}_3 \,|\, \hat{Y}_2 = x}(C)\; P^{\hat{Y}_2}(dx) = P^{(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3)}(B \times C) \end{aligned}$$

für $B \in \mathcal{E}_2$ und $C \in \mathcal{E}_3$ belegen. □

Beweis von Satz 1.40:
„$\Rightarrow$ “ : Wir zeigen allgemeiner, daß eine Kopplung unter jedem beliebigen Tupel (λ, μ) aus $\mathcal{W}(S) \times \mathcal{W}(S)$ möglich ist. O.B.d.A. sei M in einem Standardmodell mit Regenerationszeiten $(T_n)_{n \geq 0}$ und Notationen wie im Regenerationslemma definiert. Auf dem Raum

$$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P}) = (\Omega^2, \mathcal{A}^2, P_\lambda \otimes P_\mu)$$

erhält man vermöge der Zuordnungen

$$\big((M_n^\lambda)_{n \geq 0}, (T_n^\lambda)_{n \geq 0}\big)(\omega_1, \omega_2) := \big(M, (T_n)_{n \geq 0}\big)(\omega_1),$$

$$\big((M_n^\mu)_{n \geq 0}, (T_n^\mu)_{n \geq 0}\big)(\omega_1, \omega_2) := \big(M, (T_n)_{n \geq 0}\big)(\omega_2)$$

voneinander unabhängige P_λ- und P_μ-Versionen von M mit zugehörigen Regenerationszeiten. Nach Lemma 1.41, angewandt auf die Erneuerungsprozesse $(T_n^\lambda)_{n \geq 1}$ und $(T_n^\mu)_{n \geq 1}$, existieren dann $\hat{P}$-fast sicher $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariablen ρ und ν derart, daß gilt:

(1) Für jedes $n \geq 1$ ist $((M_k^\lambda)_{k\geq T_n^\lambda}, T_0^\lambda, \ldots, T_n^\lambda)$ unabhängig von $(T_0^\mu, \ldots, T_{\rho+n}^\mu)$.

(2) ν ist Stopzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$, gegeben durch $\mathcal{G}_n = \sigma(T_0^\lambda, \ldots, T_n^\lambda, T_0^\mu, \ldots, T_{\rho+n}^\mu)$.

(3) $\nu^* = \nu + \rho$ ist Stopzeit bezüglich $(\mathcal{H}_n)_{n\geq 0} = (T_n^\lambda, T_n^\mu)_{n\geq 0}$.

(4) $T := T_\nu^\lambda = T_{\nu^*}^\mu < \infty$ $\hat{P}$-f.s.

Eigenschaft (4) hat in Verbindung mit den Regenerationseigenschaften von M die $\hat{P}$-fast sicheren Identitäten

$$\hat{P}^{(M_k^\lambda)_{k\geq T_n^\lambda} \,|\, \mathcal{G}_n} = \hat{P}^{(M_k^\lambda)_{k\geq T_n^\lambda} \,|\, T_0^\lambda, \ldots, T_n^\lambda} = P_\phi^M$$

$$\hat{P}^{(M_k^\mu)_{k\geq T_n^\mu} \,|\, \mathcal{H}_n} = \hat{P}^{(M_k^\mu)_{k\geq T_n^\mu} \,|\, T_0^\mu, \ldots, T_n^\mu} = P_\phi^M$$

für beliebiges $n \geq 1$ zur Folge. Benutzt man daneben noch die $\mathcal{G}_\nu$-Meßbarkeit von T und eine Standard-Rechenregel für Stopzeiten[4], so ergibt sich für $A \in \mathcal{S}^\infty$ und $B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$:

$$\begin{aligned}
\hat{P}\big((M_k^\lambda)_{k\geq T} \in A, T \in B\big) &= \hat{E}\Big(\hat{E}\big(\mathbb{1}_B(T) \cdot \mathbb{1}_A((M_k^\lambda)_{k\geq T}) \,|\, \mathcal{G}_\nu\big)\Big) \\
&= \hat{E}\Big(\mathbb{1}_B(T) \cdot \hat{E}\big(\mathbb{1}_A((M_k^\lambda)_{k\geq T}) \,|\, \mathcal{G}_\nu\big)\Big) \\
&= \hat{E}\Big(\mathbb{1}_B(T) \cdot \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{\nu=n\}} \cdot \hat{E}\big(\mathbb{1}_A((M_k^\lambda)_{k\geq T_\nu^\lambda}) \,|\, \mathcal{G}_n\big)\Big) \\
&= \hat{E}\Big(\mathbb{1}_B(T) \cdot \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{\nu=n\}} \cdot \hat{E}\big(\mathbb{1}_A((M_k^\lambda)_{k\geq T_n^\lambda}) \,|\, \mathcal{G}_n\big)\Big) \\
&= \hat{P}(T \in B) \cdot P_\phi(M \in A)
\end{aligned}$$

Ähnlich erhält man mit $(\nu^*, (\mathcal{H}_n)_{n\geq 0})$ anstelle von $(\nu, (\mathcal{G}_n)_{n\geq 0})$ auch

$$\hat{P}\big((M_k^\mu)_{k\geq T} \in A, T \in B\big) = \hat{P}(T \in B) \cdot P_\phi(M \in A),$$

daher kann man Lemma 1.42 auf

$$(Y_1, Y_2) = \Big((M_k^\lambda)_{k<T}, \big(T, (M_k^\lambda)_{k\geq T}\big)\Big)$$

$$(\hat{Y}_2, \hat{Y}_3) = \Big(\big(T, (M_k^\mu)_{k\geq T}\big), (M_k^\mu)_{k<T}\Big)$$

anwenden und ohne Einschränkung

[4] vgl. [Al 3] Anhang, Satz 1.7

$$(M_k^\lambda)_{n\geq T} = (M_k^\mu)_{n\geq T}$$

annehmen. T bildet somit die gesuchte Kopplungszeit.

„$\Leftarrow$ “ : $(M_n)_{n\geq 0}$ lasse sich koppeln unter (ξ^*, δ_x). Mit den eingangs dieses Abschnitts eingeführten Notationen folgt vermöge der sog. Kopplungsungleichung:

$$\begin{aligned} \|P_x^{M_n} - \xi^*\| &= \|\hat{P}^{M_n^{\delta_x}} - \hat{P}^{M_n^{\xi^*}}\| \\ &\leq \hat{P}(M_n^{\delta_x} \neq M_n^{\xi^*}) \leq \hat{P}(T_{\delta_x,\xi^*} > n) \end{aligned}$$

Da T_{δ_x,ξ^*} $\hat{P}$-fast sicher endlich ist, konvergiert die rechte Seite der Abschätzung für $n \to \infty$ gegen 0, somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|P_x^{M_n} - \xi^*\| = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in S.$$

Unter Verwendung der Abschätzung

$$\|P_\lambda^{M_n} - \xi^*\| = \|\int (P_x^{M_n} - \xi^*)\, \lambda(dx)\| \leq \int \|P_x^{M_n} - \xi^*\|\, \lambda(dx)$$

ergibt sich mittels majorisierter Konvergenz sogar allgemeiner die Gültigkeit von

$$\lim_{n\to\infty} \|P_\lambda^{M_n} - \xi^*\| = 0 \qquad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathcal{W}(S).$$

Ist nun $A \in \mathcal{S}$ mit $\xi^*(A) =: 2\varepsilon > 0$, gibt es demnach zu jeder Anfangsverteilung λ eine natürliche Zahl $m(\lambda)$ mit

$$P_\lambda(\tau(A) \leq m(\lambda)) \geq P_\lambda(M_{m(\lambda)} \in A) > \varepsilon.$$

Hierüber definieren wir nun zu beliebigem $x \in S$ rekursiv eine Folge

$$n(1) \leq n(2) \leq n(3) \leq \dots$$

natürlicher Zahlen durch $n(1) = m(\delta_x)$ und

$$n(k+1) = \begin{cases} n(k) &, \quad \text{falls} \quad P_x(\tau(A) > n(k)) = 0 \\ n(k) + m(\psi_k), & \quad \text{falls} \quad P_x(\tau(A) > n(k)) > 0 \end{cases}$$

mit $\psi_k = P_x^{M_{n(k)} \,|\, \{\tau(A) > n(k)\}}$. Im Fall, daß $P_x(\tau(A) > n(k)) = 0$ für ein $k \geq 0$ gilt, folgt sofort

$$P_x(\tau(A) = \infty) \leq P_x(\tau(A) > n(k)) = 0,$$

andernfalls führt die Rechnung

$$\begin{aligned}
P_x(\tau(A) > n(k+1)) = \int_{\{\tau(A)>n(k)\}} & P\Big(\bigcap_{i=1}^{m(\psi_k)} \{M_{n(k)+i} \notin A\} \,\Big|\, \mathcal{F}_{n(k)}\Big) \, dP_x \\
= \int_{\{\tau(A)>n(k)\}} & P_{M_{n(k)}}\Big(\bigcap_{i=1}^{m(\psi_k)} \{M_i \notin A\}\Big) \, dP_x \\
= P_x(\tau(A) > n(k)) \cdot & \int P_y\Big(\bigcap_{i=1}^{m(\psi_k)} \{M_i \notin A\}\Big) \, P_x^{M_{n(k)} \,|\, \{\tau(A)>n(k)\}}(dy) \\
= P_x(\tau(A) > n(k)) \cdot & P_{\psi_k}\Big(\bigcap_{i=1}^{m(\psi_k)} \{M_i \notin A\}\Big) \\
\leq P_x(\tau(A) > n(k)) \cdot & P_{\psi_k}(\tau(A) > m(\psi_k)) \;\leq\; P_x(\tau(A) > n(k)) \cdot (1-\varepsilon)
\end{aligned}$$

induktiv auf

$$P_x(\tau(A) > n(k)) \leq (1-\varepsilon)^k \quad \text{für alle} \quad k \geq 0$$

und damit ebenfalls auf

$$P_x(\tau(A) = \infty) \leq \lim_{k\to\infty} P_x(\tau(A) > n(k)) \leq \lim_{k\to\infty} (1-\varepsilon)^k = 0.$$

Wir haben somit die ξ^*-Rekurrenz, also auch die Harris-Rekurrenz von M nachgewiesen. Null-Rekurrenz ist dabei nicht möglich, weil eine stationäre Verteilung existiert. Besäße M schließlich die Periode $d \geq 2$, so ergäbe sich mit der eindeutig bestimmten zyklischen Zerlegung $S = \bigcap_{j=1}^{d} S_j$ des Zustandsraums gemäß Satz 1.37 für jedes $x \in S_1 \setminus N$

$$P_x(M_{nd} \in S_1) = I\!P_{nd}(x, S_1) = 1 \quad \text{und}$$

$$P_x(M_{nd+1} \in S_1) = I\!P_{nd+1}(x, S_1) = 0$$

für alle $n \geq 0$ im Widerspruch zu

$$\lim_{k\to\infty} P_x(M_k \in S_1) = \xi^*(S_1).$$

□

Ein Argument des obigen Beweises wollen wir noch einmal gesondert festhalten:

Korollar 1.43 (Ergodensatz) ([Al 1] *Satz 8.3.3*). *Für jede ergodische Harris-Kette $(M_n)_{n\geq 0}$ mit stationärer Verteilung ξ^* gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_\lambda^{M_n} - \xi^*\| = 0 \qquad \textit{für alle} \quad \lambda \in \mathcal{W}(S)$$

1.5 Markov-Random-Walks mit steuernder Harris-Kette

Der vorliegende Abschnitt schafft die Verbindung zwischen den eher isolierten Untersuchungen der vorangegangenen beiden Abschnitte und benutzt die dort eingeführten Bezeichnungen.

Will man klassische Resultate über Random-Walks auf einen Markov-Random-Walk $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ mit Zuwächsen $(X_n)_{n\geq 0}$ übertragen, so ist man auf eine gewisse Regelmäßigkeit bei den Zuwachsverteilungen angewiesen, welche wiederum nur über die Steuerkette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ festgelegt werden.

Die Harris-Rekurrenz hat sich in Abschnitt 1.4 als geeignete Eigenschaft von Markov-Ketten auf beliebigen polnischen Zustandsräumen erwiesen, um eine regelmäßige Struktur in Form eines zyklischen Verhaltens beobachten zu können. Es wird sich herausstellen, daß sich positive (Harris-)Rekurrenz von $(M_n)_{n\geq 0}$ auf die Markov-modulierte Folge $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ überträgt und so einerseits eine zyklische Unterteilung der Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ ermöglicht, andererseits die Existenz einer stationären Verteilung ν^* für $(X_n)_{n\geq 0}$ sichert. Mit diesen beiden Werkzeugen läßt sich u.a. zeigen, daß dann die Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ unter jedem P_λ dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt, wobei der fast sichere Limes von $\frac{1}{n}S_n$ - unabhängig von λ - stets $E_{\nu^*}X_1$ entspricht.

Satz 1.44 ([Nu 2] *Lemma 4.1(i)*). *Es sei $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit polnischem Zustandsraum $(S \times \mathbb{R}^d, \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^d)$, $d \geq 1$, Übergangskern $\mathbb{P}$ und positiv Harris-rekurrenter Steuerkette $M = (M_n)_{n\geq 0}$. Dann ist auch $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ positiv Harris-rekurrent mit eindeutig bestimmter stationärer Verteilung*

$$\nu^*(A) := \int \mathbb{P}(x, A)\, \xi^*(dx) \qquad , A \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^d,$$

wobei ξ^* die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von M bezeichnet.
Ferner ist $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ aperiodisch, also insgesamt ergodisch, wenn dies für M der Fall ist.

Beweis:
Für $B \in \mathcal{S}$ gilt wegen der Invarianz von ξ^*

$$\nu^*(B \times \mathbb{R}^d) = \int \mathbb{P}(x, B \times \mathbb{R}^d)\, \xi^*(dx) = \int \mathbb{P}_M(x, B)\, \xi^*(dx) = \xi^*(B),$$

also wird durch ν^* tatsächlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. Die Stationarität von ν^* liefert die kurze Rechnung

$$\int_{S\times \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(x, A)\, \nu^*(dx \times dy) = \int_S \mathbb{P}(x, A)\, \xi^*(dx) = \nu^*(A) \qquad \forall A \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^d.$$

Zum Nachweis der ersten Behauptung erfülle $(M_n)_{n\geq 0}$ eine Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(r, \alpha, \Re, \psi)$ mit $\psi(\Re) = 1$. Da $\Re$ Rekurrenzmenge für $(M_n)_{n\geq 0}$ ist, existiert ein

$k \in I\!N$ mit $P_\psi(M_k \in \Re) > 0$. Definiert man nun auf $S \times I\!R^d$ das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\phi := \psi \circ I\!P_k = \int I\!P_k(y, \bullet)\, \psi(dy)$$

und beachtet, daß $\Re \times I\!R^d$ eine Rekurrenzmenge für $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ mit

$$\phi(\Re \times I\!R^d) = \int I\!P_k(y, \Re \times I\!R^d)\, \psi(dy) = P_\psi(M_k \in \Re) > 0$$

ist, so zeigt die nachstehende Rechnung, daß $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ die Minorisierungsbedingung $\mathcal{M}(r+k, \alpha, \Re \times I\!R^d, \phi)$ erfüllt und damit Harris-rekurrent ist. Seien hierzu $(s,x) \in \Re \times I\!R^d$ und $B \in \mathcal{S} \otimes I\!B^d$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} I\!P_{r+k}(s,B) &= I\!P_r^M \circ I\!P_k(s,B) = \int I\!P_k(y,B)\, I\!P_r^M(s,dy) \\ &\geq \alpha \int I\!P_k(y,B)\, \psi(dy) = \alpha \cdot \phi(B). \end{aligned}$$

Für die positive Rekurrenz von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ genügt ein Hinweis auf die Existenz von ν^*. Unterstellen wir für $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ ein Regenerationsschema mit Regenerationszeiten $(T_n)_{n\geq 0}$, genügt es, zur Aperiodizität von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ bei gleicher Eigenschaft von $(M_n)_{n\geq 0}$ zu notieren, daß $P_\phi^{T_1}$ nach Satz 1.37 1-arithmetisch sein muß, da $(T_n)_{n\geq 0}$ offenbar auch eine Folge von Regenerationszeiten für die aperiodische Kette $(M_n)_{n\geq 0}$ ist. □

Für die weiteren Untersuchungen bleiben wir in der Situation von Satz 1.44 mit positiv Harris-rekurrenter Steuerkette M. Als ebenfalls positiv rekurrente Harris-Kette erfüllt dann $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ insbesondere eine geeignete Minorisierungsbedingung, für die wir die losgelöst von den Bezeichnungen des obigen Beweises die Notation $\mathcal{M}(s, \alpha, \Re, \phi)$ verwenden. Ohne Einschränkung kann wieder angenommen werden, $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ besitze ein entsprechendes Regenerationsschema mit zugehörigen Regenerationszeiten $(T_n)_{n\geq 0}$, so daß sich die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung ν^* auch als normiertes Okkupationsmaß in der Form

$$\nu^*(A) = \int I\!P(x, A)\, \xi^*(dx) = \frac{1}{E_\phi T_1} E_\phi \left(\sum_{n=0}^{T_1 - 1} \mathbb{I}_A\big((M_n, X_n)\big) \right), \tag{1.9}$$

$A \in \mathcal{S} \otimes I\!B^d$, darstellen läßt.

Definition 1.45. In der Situation von Satz 1.44 besitze $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ den Zustandsraum $(S \times I\!R, \mathcal{S} \otimes I\!B)$, und es sei jeweils $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$. Man nennt dann

$$\mu := E_{\xi^*} X_1$$

die *stationäre Drift* des Markov-Random-Walks $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$.

Bemerkungen 1.46. (a) Die erste Gleichheit in 1.9 zeigt, daß für die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung ξ^* von $(M_n)_{n\geq 0}$ gilt:

$$\xi^* = P_{\xi^*}^{M_1} = \int \mathbb{P}_M(x, \bullet)\, \xi^*(dx) = \int \mathbb{P}(x, \bullet \times \mathbb{R})\, \xi^*(dx) = \nu^*(\bullet \times \mathbb{R})$$

ξ^* ist somit also die erste Randverteilung von ν^*.

(b) Man folgert weiter, daß gilt:

$$\mu = E_{\xi^*} X_1 = \int E_s X_1 \, dP_{\xi^*}^{M_0} = \int E_s X_1 \, dP_{\nu^*}^{M_0} = E_{\nu^*} X_1$$

Beachtet man die Stationarität von ν^* für die Folge $(X_n)_{n\geq 0}$, bekommt man auf die gleiche Weise die Identitäten

$$\mu = E_{\xi^*} X_1 = E_{\nu^*} X_1 = E_{\nu^*} X_n = E_{\xi^*} X_n \quad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

Lemma 1.47. *Unter den vorigen Voraussetzungen und Bezeichnungen gilt*

$$E_\phi S_{T_1 - 1} = E_\phi T_1 \cdot \mu$$

Beweis:
Durch getrennte Betrachtung der Markov-modulierten Folgen $(M_n, X_n^+)_{n\geq 0}$ und $(M_n, X_n^-)_{n\geq 0}$ kann o.B.d.A. $X_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$ angenommen werden, und mit Hinweis auf $E_\phi X_{T_1} = E_\phi X_0$ ergibt sich bei Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz:

$$\begin{aligned}
E_\phi S_{T_1-1} &= E_\phi \left(\sum_{n=0}^{T_1-1} X_n \right) = E_\phi \left(\sum_{n=1}^{T_1} X_n \right) = E_\phi \left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_1 > n-1\}} X_n \right) \\
&= \sum_{n\geq 1} \int_{\{T_1 > n-1\}} E(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1})\, dP_\phi = \sum_{n\geq 1} \int_{\{T_1 > n-1\}} E_{M_{n-1}} X_1 \, dP_\phi \\
&= E_\phi \left(\sum_{n=1}^{T_1} E_{M_{n-1}} X_1 \right) = E_\phi \left(\sum_{n=0}^{T_1-1} E_{M_n} X_1 \right) \\
&= E_\phi T_1 \cdot \int E_x X_1 \, \nu^*(dx \times \mathbb{R}) = E_\phi T_1 \cdot E_{\xi^*} X_1 = E_\phi T_1 \cdot \mu
\end{aligned}$$

□

Satz 1.48 (Starkes Gesetz der großen Zahlen für MRWs).
Ist die Situation von Satz 1.44 mit $d = 1$ gegeben, genügt der Markov-Random-Walk $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ mit Zuwächsen $(X_n)_{n\geq 0}$ unter jeder Startverteilung $\lambda \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R})$ dem starken Gesetz der großen Zahlen, genauer gilt unabhängig von λ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu \qquad P_\lambda\text{-f.s.}$$

Beweis:
Wie im Lemma zuvor gelte wieder ohne Einschränkung $X_n \geq 0$ für alle $n \geq 0$. Zunächst folgern wir mit dem Regenerationslemma für Harris-Ketten

$$P_\lambda\left(\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu\right) = P_\lambda\left(\frac{S_{T_1+n} - S_{T_1-1}}{n} \longrightarrow \mu\right) = P_\phi\left(\frac{S_n}{n} \longrightarrow \mu\right),$$

und man kann als Startverteilung $\lambda = \phi$ betrachten. Durch die Zyklen

$$Z_n = \big((M_k, X_k)\big)_{T_n \leq k < T_{n+1}} \quad , n \geq 0,$$

wird eine unter P_ϕ stationäre Folge einsabhängiger Zufallsvariablen definiert, insbesondere besitzt damit auch die Folge

$$(S_n^*)_{n\geq 1} := (S_{T_n - 1})_{n \geq 1}$$

unter P_ϕ einsabhängige Zuwächse

$$X_n^* = \sum_{k=T_{n-1}}^{T_n - 1} X_k \quad , \ n \geq 1.$$

Mit $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist auch $(X_n^*)_{n\geq 1}$ unter P_ϕ stationär, und nach dem Birkhoff'schen Ergodensatz genügt $(S_n^*)_{n\geq 0}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen, d.h. erfüllt die P_ϕ-fast sichere Konvergenz

$$\frac{S_n^*}{n} \longrightarrow E_\phi X_1^* = E_\phi\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} X_k\right) = E_\phi S_{T_1-1} = E_\phi T_1 \cdot \mu.$$

Es sei ferner für $n \geq 0$

$$\tau(n) := \inf\{k \geq 0; T_k > n\}$$

die *Erstaustrittszeit* des SEP (bzgl. P_ϕ) $(T_k)_{k\geq 0}$ aus dem Intervall $[0, n]$. Mit Hilfe von Korollar 1.16 erhält man aus $\tau(n) \uparrow \infty$ und $\tau(n) < \infty$ P_ϕ-f.s. die P_ϕ-fast sicheren Konvergenzen

$$\frac{\tau(n)}{n} \longrightarrow \frac{1}{E_\phi T_1},$$

$$\frac{S^*_{\tau(n)}}{n} = \frac{\tau(n)}{n} \cdot \frac{S^*_{\tau(n)}}{\tau(n)} \longrightarrow \frac{1}{E_\phi T_1} E_\phi T_1 \cdot \mu = \mu,$$

$$\frac{S^*_{\tau(n)-1}}{n} = \frac{\tau(n)-1}{n} \cdot \frac{S^*_{\tau(n)-1}}{\tau(n)-1} \longrightarrow \mu.$$

Da außerdem wegen der vorausgesetzten Nichtnegativität aller X_n, $n \geq 1$,

$$\frac{S^*_{\tau(n)-1}}{n} \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{S^*_{\tau(n)}}{n}$$

gilt, folgt das Gewünschte. □

Korollar 1.49. *Der Markov-Random-Walk $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ aus Satz 1.48 weist unter jeder Anfangsverteilung $\lambda \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R})$ das folgende Driftverhalten auf:*

(a) $\mu < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ $\quad P_\lambda$*-f.s.*

(b) $\mu > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ $\quad P_\lambda$*-f.s.*

Ist die stationäre Drift eines Markov-Random-Walks mit steuernder positiv rekurrenter Harris-Kette von Null verschieden, so dient sie also wie die Drift eines gewöhnlichen Random-Walks als Indikator für das asymptotische Verhalten der Folge $(S_n)_{n\geq 0}$.

Der als *Satz von Chung/Fuchs* bekannten Aussage, daß bei einem nicht deterministischen Random-Walk mit Drift 0 unabhängig von der Auftaktverteilung fast sicher

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$$

gelten, kann ebenfalls ein entsprechendes Resultat für MRWs gegenübergestellt werden. Einen Beweis findet man im angegebenen Artikel.

Satz 1.50 ([Al 4] *Remark (b)*). *Der MRW $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ aus Satz 1.48 besitze die stationäre Drift $\mu = 0$ und sei nicht null-homolog, d.h. es existiere keine meßbare Funktion $\gamma : (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit*

$$X_n = \gamma(M_{n-1}) - \gamma(M_n) \quad P_{\xi^*}\text{-f.s. für alle } n \geq 1.$$

Dann gelten

$$\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty \quad \textit{und} \quad \limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty \qquad P_\lambda\text{-f.s.}$$

für jede Anfangsverteilung $\lambda \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R})$.

Kapitel 2

Das SM/SM/1-Bedienungssystem

Zentrales Ziel dieses Kapitels ist die Ableitung von Stabilitätsaussagen für ein Bedienungssystem, das sich in seiner Arbeitsweise nicht von Systemen unterscheidet, die üblicherweise mit Methoden der klassischen G/G/1-Warteschlangen-Analyse untersucht werden. Im Gegensatz zu derartigen Systemen soll hier jedoch bei der Modellierung ein Inputprozeß mit weniger restriktiven Annahmen zugelassen werden in dem Sinne, daß anstelle der sonst vorausgesetzten Unabhängigkeit der Zwischenankunftszeiten bzw. Bedienungszeiten lediglich noch bedingte Unabhängigkeit dieser Größen unter einer (geeignet zu interpretierenden) Markov-Kette gefordert wird. Abschnitt 1.3 hat gezeigt, daß diese Eigenschaft ein Charakteristikum von Markov-modulierten Folgen ist, die aus diesem Grunde zur Beschreibung des Ankunftsprozesses dienen werden.

Zuvor stellen wir noch einmal kurz die wesentlichen Merkmale zusammen, die die Arbeitsweise des betrachteten Systems betreffen:
Das System besteht aus einem einzelnen Schalter, der die ankommenden Kunden in der Reihenfolge ihres Erscheinens mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bedient und nur dann die Arbeit einstellt, wenn sich keine Kunden im System befinden. Des weiteren steht ein Warteraum mit unbegrenzter Aufnahmekapazität zur Verfügung, in dem die Kunden warten, bis sie an der Reihe sind und dann am Schalter vollständig bedient werden.

2.1 Das allgemeine Modell

Zur Modellierung des Ankunftsprozesses, beschrieben durch die Ausgangssituation sowie die Ankunfts- und Bedienungszeiten der sukzessiv eintreffenden Kunden, führen wir die folgenden Zufallsvariablen ein, alle definiert auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

- Der *Beobachtungsstartpunkt* $T_0 = 0$ sei ein Zeitpunkt, zu dem gerade ein Kunde das System betritt, der die Nummer 0 erhält.
- W_0 sei die *Wartezeit* des Kunden 0, bis er zum Schalter vorgelassen wird, also die anstehende Arbeit, die unmittelbar vor seinem Erscheinen im System vorliegt.
- $T_1, T_2, \ldots$ bezeichnen die *Ankunftszeiten* der *nacheinander* eintreffenden Kunden $1, 2, \ldots$ mit zugehörigen *Zwischenankunftszeiten* $A_n = T_n - T_{n-1}$, $n \geq 1$.
- B_n, $n \geq 0$, stehe für die *Bedienungszeit* des n-ten Kunden.
- $M = (M_n)_{n \geq 0}$ sei eine (geeignet zu interpretierende) Markov-Kette mit meßbarem Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$, die den Ankunftsprozeß „steuert“ (vgl. hierzu die Beispiele in Abschnitt 2.3).

Daneben benutzen wir künftig noch die folgenden Bezeichnungen und Notationen, wobei stets $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in [0, \infty)$ gelte:

W_n = *Wartezeit* des n-ten Kunden, bis er zum Schalter vorgelassen wird

V_t = *anstehende Arbeit* im System zur Zeit t

Q_t = *Schlangenlänge* zur Zeit t = Zahl der wartenden einschließlich des gerade bedienten Kunden

$B_{-1} = A_0 = 0$

$X_n = B_{n-1} - A_n$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$

Die **Grundannahmen** für unser SM/SM/1-Modell sind:

(A.1) $A_1, A_2, \ldots$ und $B_0, B_1, \ldots$ sind positiv.

(A.2) $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n \geq 0}$ ist eine Markov-modulierte Folge mit Steuerkette M, d.h. $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n \geq 0}$ bildet eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $(S \times [0, \infty)^2, \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^2_{|[0,\infty)^2})$ und Übergangskern

$$\mathbb{P} : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathbb{B}^2_{|[0,\infty)^2}) \longrightarrow [0, 1].$$

Wir nennen im folgenden auch $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n \geq 0}$ *Ankunftsprozeß* und $\mathbb{P}$ *Ankunftsübergangskern*

(A.3) $(S, \mathcal{S})$ ist polnisch.

(A.4) M ist eine ergodische Harris-Kette mit eindeutig bestimmter stationärer Verteilung ξ^*. Insbesondere bildet damit nach Kapitel 3, Satz 3.1, auch $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n \geq 0}$ eine ergodische Harris-Kette.

(A.5) W_0 und $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ sind stochastisch unabhängig.

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 1 erhalten wir direkt

Satz 2.1. *$(M_n, A_n)_{n\geq 0}, (M_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ und $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ sind ebenfalls Markov-modulierte Folgen mit Steuerkette M und damit auch ergodische Harris-Ketten mit Zustandsräumen $(S \times [0,\infty), \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$ bzw. $(S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathbb{B})$ im Fall von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ und Übergangskernen $\mathbb{P}_A, \mathbb{P}_B$ und $\mathbb{P}_X$, definiert durch*

$$\mathbb{P}_A(s, C \times D) = \mathbb{P}(s, C \times D \times [0,\infty))$$

$$\mathbb{P}_B(s, C \times D) = \mathbb{P}(s, C \times [0,\infty) \times D)$$

$$\mathbb{P}_X(s, C \times E) = \int_{S\times[0,\infty)^2} \mathbb{1}_{C\times E}(x, z-y) \mathbb{P}(s, dx \times dy \times dz)$$

für $C \in \mathcal{S}, D \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ und $E \in \mathbb{B}$.

Wann immer wir von jetzt an lediglich Aussagen über die Verteilungen des Ankunftsprozesses $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ bzw. von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$, vollständig determiniert durch die jeweilige Anfangsverteilung und den Übergangskern $\mathbb{P}$ bzw. $\mathbb{P}_X$, treffen wollen, können wir wieder ohne Einschränkung annehmen, die entsprechende Markov-Kette sei in einem Standardmodell

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)}\Big)$$

bzw.

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, X_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(S\times\mathbb{R})}\Big)$$

definiert. Für die rein definitorisch eingeführten Zufallsvariablen (A_0, B_{-1}) bzw. X_0 lassen wir damit zwar allgemeinere Verteilungen als die Dirac-Verteilung im Punkt (0,0) bzw. 0 zu, jedoch wird die Verteilung der weiteren Folge jeweils sowieso nur durch die erste Randverteilung der Anfangsverteilung bestimmt.

Für $i \in S$, $x, y \in [0,\infty)$ und $z \in \mathbb{R}$ schreiben wir in gewohnter Weise wieder kurz

$$P_{i,x,y} \quad \text{für} \quad P_{\delta_{(i,x,y)}} \qquad \text{bzw.} \qquad P_{i,z} \quad \text{für} \quad P_{\delta_{(i,z)}}.$$

Wird nur die Anfangsverteilung von M spezifiziert, so sei stets $(A_0, B_{-1}) = (0,0)$ bzw. $X_0 = 0$ unterstellt, also

$$P_\nu := P_{\nu\otimes\delta_{(0,0)}} \qquad \text{bzw.} \qquad P_\nu := P_{\nu\otimes\delta_0}.$$

In diesem Fall wird gleichzeitig

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (M_n)_{n\geq 0}, (P_\nu)_{\nu\in\mathcal{W}(S)}\Big)$$

zu einem Standardmodell für M. Die Indizierung der zugehörigen Erwartungswertoperatoren erfolgt entsprechend.

Sofern aus dem Kontext und der Indizierung der P_λ klar ist, daß implizit eines der beiden eben aufgeführten Standardmodelle unterstellt wird, verzichten wir im folgenden auf einen gesonderten Hinweis.

Die **Grundannahmen** unseres Modells ergänzen wir abschließend um

(A.6) $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ ist nicht null-homolog, d.h. es gibt keine meßbare Funktion $\gamma : (S, \mathcal{S}) \to (I\!R, I\!B)$ mit

$$X_n = \gamma(M_{n-1}) - \gamma(M_n) \quad P_{\xi^*}\text{-f.s.}$$

für alle $n \geq 1$. (Diese Forderung ist im Fall $E_{\xi^*}X_1 \neq 0$ wegen der Stationarität von M unter P_{ξ^*} automatisch erfüllt.)

(A.7)

$$E_{\xi^*}A_1 = \int_S E_s A_1 \, \xi^*(ds) < \infty$$

$$E_{\xi^*}B_0 = \int_S E_s B_0 \, \xi^*(ds) < \infty$$

Da für jedes $n \geq 1$ die Beziehungen $E_{\xi^*}A_n = E_{\xi^*}A_1$ und $E_{\xi^*}B_n = E_{\xi^*}B_0$ gelten (vgl. Bemerkungen zur *stationären Drift* eines MRW), macht es an dieser Stelle Sinn, von der *mittleren Zwischenankunftszeit* und *mittleren Bedienungszeit im Gleichgewicht (von M)* zu sprechen. Hierüber wird die folgende zentrale Kenngröße zur Untersuchung der langfristigen Stabilität im SM/SM/1-System definiert:

Definition 2.2. Mit den zuvor erläuterten Notationen heißt der Quotient

$$\rho := \frac{E_{\xi^*}B_0}{E_{\xi^*}A_1}$$

Verkehrsintensität des SM/SM/1-Systems.

Die Größe ρ steht also für das Verhältnis von mittlerer Bedienungszeit eines Kunden zur mittleren Zeit bis zum Eintreffen des nächsten Kunden im Gleichgewicht der Steuerkette M. Anschaulich erscheint es bereits an dieser Stelle plausibel, daß im Fall $\rho < 1$ langfristig keinerlei Probleme bei der Arbeitsbewältigung auftreten dürften, wohingegen der Fall $\rho > 1$ einer dauerhaften Überlastung des Systems entspricht. Die Formalisierung dieser ersten Überlegung ist Gegenstand späterer Abschnitte.

2.2 Integration speziellerer Modelle

Das soeben eingeführte allgemeine Modell erlaubt gleichzeitig die Analyse speziellerer Bedienungssysteme. Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen an den Ankunftsübergangskern $\mathbb{P}$ bzw. den Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ von M lassen sich nämlich auch solche Systeme modellieren, in denen die Abhängigkeitsstruktur des Prozesses $(A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ in wesentlich vereinfachter Form vorliegt.

Auf drei speziellere Modelle wollen wir etwas näher eingehen:

2.2.1 Das SM/G/1-Modell

Der Unterschied zum allgemeinen SM/SM/1-Modell besteht darin, daß die Markov-Kette M hier lediglich die Folge der Zwischenankunftszeiten $(A_n)_{n\geq 1}$ steuert. Die Folge $(B_n)_{n\geq 0}$ setzt sich hingegen aus u.i.v. Zufallsgrößen zusammen und ist zudem unabhängig von $(M_n, A_n)_{n\geq 0}$. Die hierfür erforderliche Zusatzvoraussetzung an den Ankunftsübergangskern $\mathbb{P}$ beschreibt

Satz 2.3. *Q sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0,\infty), \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathbb{P}$ läßt sich faktorisieren zu $\mathbb{P} = \mathbb{P}_A \otimes Q$, d.h. für alle $C \in (\mathcal{S} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$, $D \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ und $s \in S$ gilt:

$$\mathbb{P}(s, C \times D) = Q(D) \cdot \mathbb{P}_A(s, C) = Q(D) \cdot \mathbb{P}(s, C \times [0,\infty))$$

(b) Unter jedem $P_\lambda, \lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, sind die Folgen $(B_n)_{n\geq 0}$ und $(M_n, A_n)_{n\geq 0}$ stochastisch unabhängig und die Zufallsgrößen $B_0, B_1, \ldots$ u.i.v. mit Verteilung

$$P_\lambda^{B_0} = Q.$$

Beweis:
„$\Rightarrow$ “ : Offenbar reicht es zu zeigen, daß für eine beliebige Wahl von P_λ mit $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, $n \geq 1$, $C_0, \ldots, C_n \in (\mathcal{S} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$ und $D_0, \ldots, D_n \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ gilt:

$$\begin{aligned} & P_\lambda\big((M_k, A_k) \in C_k, B_k \in D_k,\ k = 0 \ldots n\big) \\ & \qquad = P_\lambda\big((M_k, A_k) \in C_k,\ k = 0, \ldots n\big) \cdot \prod_{k=0}^{n} Q(D_k) \end{aligned}$$

Es sei vorab angemerkt, daß sich per Funktionserweiterungsargument für alle $D \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$, $s \in S$ und jede $\mathbb{P}_A(s, \bullet)$-integrable Funktion f die Gültigkeit der Formel

$$\int \mathbb{1}_D(z) \cdot f(x,y)\ \mathbb{P}_A \otimes Q(s, dx \times dy \times dz) = Q(D) \cdot \int f(x,y)\ \mathbb{P}_A(s, dx \times dy)$$

ergibt und für alle $k \in \{0, \dots n-1\}$

$$I\!P^{n-k}\Big(M_k, (C_{k+1} \times D_k) \times \big(\times_{i=k+2}^{n} (C_i \times [0,\infty))\big)\Big) = Q(D_k) \cdot I\!P_A^{n-k}(M_k, \times_{i=k+1}^{n} C_i)$$

folgt, was im Fall $k < n-1$ die Rechnung

$$\begin{aligned}
& I\!P^{n-k}\Big(M_k, (C_{k+1} \times D_k) \times \big(\times_{i=k+2}^{n} (C_i \times [0,\infty))\big)\Big) \\
&= \int \mathbb{1}_{D_k}(z) \cdot (I\!P_A \otimes Q)^{n-k-1}\big(x, \times_{i=k+2}^{n}(C_i \times [0,\infty))\big) \\
&\qquad\qquad\qquad \times \mathbb{1}_{C_{k+1}}(x,y)\; I\!P_A \otimes Q(M_k, dx \times dy \times dz) \\
&= Q(D_k) \cdot \int_{C_{k+1}} I\!P_A^{n-k-1}\left(x, \times_{i=k+2}^{n}(C_i \times [0,\infty))\right) I\!P_A(M_k, dx \times dy) \\
&= Q(D_k) \cdot I\!P_A^{n-k}\left(M_k, \times_{i=k+1}^{n}(C_i \times [0,\infty))\right)
\end{aligned}$$

zeigt.

Damit ergibt sich dann für $0 \le k < n$ mit $E_k := \cap_{i=1}^{k-1}\{(M_i, A_i, B_i) \in C_i \times D_i\} \cap \{(M_k, A_k) \in C_k\}$

$$\begin{aligned}
& P_\lambda\big((M_i, A_i) \in C_i, B_j \in D_j, i = 0, \dots n, j = 0, \dots k\big) \\
&= \int_{E_k} I\!P^{n-k}\Big(M_k, (C_{k+1} \times D_k) \times \big(\times_{i=k+2}^{n} (C_i \times [0,\infty))\big)\Big) dP_\lambda \\
&= Q(D_k) \cdot \int_{E_k} I\!P_A^{n-k}\big(M_k, \times_{i=k+1}^{n}(C_i \times [0,\infty))\big)\, dP_\lambda \\
&= Q(D_k) \cdot P_\lambda\big((M_i, A_i) \in C_i, B_j \in D_j, i = 0, \dots n, j = 0, \dots k-1\big)
\end{aligned}$$

und somit induktiv

$$\begin{aligned}
& P_\lambda\big((M_k, A_k) \in C_k, B_k \in D_k, k = 0, \dots n\big) \\
&= \int_{E_n} I\!P\left(M_n, S \times [0,\infty) \times D_n\right) dP_\lambda \\
&= Q(D_n) \cdot P_\lambda\big((M_k, A_k) \in C_k, B_j \in D_j,\ k = 0, \dots n,\ j = 0, \dots n-1\big) \\
&= P_\lambda\big((M_k, A_k) \in C_k,\ k = 1, \dots n\big) \cdot \prod_{k=0}^{n} Q(D_k)
\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“ : Man rechnet sofort nach, daß für $s \in S$, $C \in (\mathcal{S} \otimes I\!B_{|[0,\infty)})$ und $D \in I\!B_{|[0,\infty)}$ gilt:

$$\begin{aligned}
I\!P(s, C \times D) &= P_s((M_1, A_1) \in C, B_0 \in D) \\
&= P_s((M_1, A_1) \in C) \cdot P_s(B_0 \in D) \\
&= I\!P(s, C \times [0,\infty)) \cdot Q(D)
\end{aligned}$$

□

2.2.2 Das G/SM/1-Modell

Im Gegensatz zum SM/G/1-Modell steuert die Markov-Kette M nun lediglich die Folge $(B_n)_{n\geq 0}$, während die Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ aus u.i.v. Zufallsgrößen besteht und zusätzlich unabhängig von $(M_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ ist. Das analoge Gegenstück zu Satz 2.3 geben wir nur an, da zum Beweis lediglich ein Rollentausch der Folgen $(A_n)_{n\geq 1}$ und $(B_n)_{n\geq 0}$ vorgenommen werden muß.

Satz 2.4. *Q sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0,\infty), \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Für alle $D, E \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$, $C \in \mathcal{S}$ und $s \in S$ gilt:

$$\mathbb{P}(s, C \times D \times E) = Q(D) \cdot \mathbb{P}(s, C \times [0,\infty) \times E) = \mathbb{P}_B \otimes Q(s, C \times E \times D)$$

(b) Unter jedem $P_\lambda, \lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, sind die Folgen $(M_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ und $(A_n)_{n\geq 1}$ stochastisch unabhängig und die Zufallsgrößen $A_1, A_2, \ldots$ u.i.v. mit Verteilung

$$P_\lambda^{A_1} = Q.$$

2.2.3 Das klassische G/G/1-Modell

Um das klassische G/G/1-Modell mit voneinander unabhängigen iid-Folgen $(A_n)_{n\geq 1}$ und $(B_n)_{n\geq 0}$ in das allgemeine SM/SM/1-Modell einzubetten, setzen wir zunächst S als einelementig voraus, etwa $S = \{i_0\}$. Der Ankunftsübergangskern $\mathbb{P}$ wird so zu einem gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsmaß

$$G := \mathbb{P}(i_0, \{i_0\} \times \bullet)$$

auf $([0,\infty)^2, \mathbb{B}^2_{|[0,\infty)^2})$, dessen notwendige und hinreichende Eigenschaft für das G/G/1-Modell sich direkt aus den Sätzen 2.3 und 2.4 folgern läßt.

Satz 2.5. *Unter obigen Voraussetzungen seien Q_1 und Q_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $([0,\infty), \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $G = Q_1 \otimes Q_2$

(b) Unter jedem P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(\{i_0\} \times [0,\infty)^2)$, sind $(A_n)_{n\geq 1}$ und $(B_n)_{n\geq 0}$ voneinander unabhängige iid-Folgen mit

$$P_\lambda^{A_1} = Q_1 \qquad \text{und} \qquad P_\lambda^{B_0} = Q_2.$$

2.3 Beispiele

Die nachfolgende Auswahl von Modellierungsbeispielen soll ein Gefühl dafür vermitteln, in welchem Ausmaß durch die vorgenommene Verallgemeinerung der sehr restriktiven und eher als realitätsfern einzustufenden Modell-Annahmen im G/G/1-Fall eine größere Komplexität von Bedienungssystemen berücksichtigt werden kann. In diesem Zusammenhang werden zugleich diverse Interpretationsmöglichkeiten für die bislang nur nominell eingeführte steuernde Markov-Kette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ vorgestellt.

2.3.1 Systeme mit periodischen Schwankungen

Eine Vielzahl von Bedienungssystemen unterliegt Schwankungen in der Besuchsfrequenz und im Servicebedarf einzelner Kunden, jedoch weisen diese Größen häufig zumindest periodisch wiederkehrend eine vergleichbare Struktur auf. Man denke dabei exemplarisch an Kundenströme in Geschäften für den täglichen Bedarf mit Spitzen zur Feierabendzeit und an Wochenenden oder an Anbieter von eher jahreszeitabhängigen Freizeitprodukten (Reisebüros, Sportartikelgeschäfte etc.).

Zur Modellierung derartiger Phänomene sei unterstellt, die Bedienungszeit eines Kunden und die Zeit bis zur Ankunft des nachfolgenden Kunden hänge einzig und allein von der *Phase* seines Ankunftszeitpunkts ab. Unter der Phase eines Zeitpunkts z im n-ten Zeitintervall $[n, n+1)$, $n \geq 0$, verstehen wir dabei den Wert $z \ mod\ 1$. Kanonischer Kandidat für die steuernde Markov-Kette M ist dann gerade die Folge $(M_n)_{n\geq 0} = (T_n \ mod\ 1)_{n\geq 0}$.

Für eine entsprechende Konstruktion des Ankunftsprozesses[1] sei zunächst $\mathbb{K}$ ein stochastischer Kern von $([0,1), \mathbb{B}_{|[0,1)})$ nach $([0,\infty)^2, \mathbb{B}^2_{|[0,\infty)^2})$. Bei festem $x \in [0,1)$ stehe dabei die erste Randverteilung

$$F_x = \mathbb{K}\big(x, \bullet \times [0,\infty)\big)$$

für die *Zwischenankunftszeit-Verteilung in Phase x* und die zweite Randverteilung

$$Q_x = \mathbb{K}\big(x, [0,\infty) \times \bullet\big)$$

für die *Bedienungszeit-Verteilung in Phase x.*

Nach dem Satz von Ionescu-Tulcea[2] läßt sich dann die Folge $(A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ so definieren, daß ihre Verteilung bereits durch Vorgabe der bedingten Verteilungen

[1] vgl. hierzu auch [As/Th] Sec. 4
[2] vgl. [Al 2] Satz 48.4

$$P^{(A_{n+1},B_n)\,|\,(A_k,B_{k-1})_{0\le k\le n}} := I\!\!K(T_n \; mod \; 1, \bullet)$$

für $n \geq 0$ eindeutig bestimmt ist. Mit $M_n = T_n \; mod \; 1$ für $n \geq 0$ folgt dann aus $M_{n+1} = (M_n + A_{n+1}) \; mod \; 1$ leicht, daß $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit Steuerkette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ und Übergangskern $I\!\!P$ ist, gegeben durch

$$I\!\!P(x, A) = \int 1\!\!1_A\big((x+a) \; mod \; 1, a, b\big) \; I\!\!K(x, da \times db)$$

für $x \in [0,1)$ und $A \in I\!\!B_{|[0,1)} \otimes I\!\!B^2_{|[0,\infty)^2}$.

2.3.2 Systeme mit mehreren Inputkanälen

Wir betrachten ein System mit $m \geq 1$ Inputkanälen. Die Prozesse der sukzessiven Ankunftszeiten an den einzelnen Kanälen seien voneinander unabhängige Erneuerungsprozesse $(T_n^{(k)})_{n\geq 0}$, $k = 1, \ldots, m$, jeweils mit stetiger Zuwachsverteilung $F^{(k)}$. Für die Startvariablen gelte

$$T_0^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad T_0^{(k)} - T_{-1}^{(k)} \sim F^{(k)}$$

für $k = 2, \ldots, m$ und negative Zufallsgrößen $T_{-1}^{(2)}, \ldots, T_{-1}^{(m)}$, jeweils unabhängig von allen übrigen eingeführten Zufallsvariablen. Der *aggregierte Ankunftszeiten-Prozeß* $(T_n)_{n\geq 0}$ ergibt sich dann offenkundig als Überlagerung der Prozesse $(T_n^{(k)})_{n\geq 0}$, $k = 1, \ldots, m$, erfüllt $T_0 = 0$ und besitzt wegen der Stetigkeit sämtlicher Zuwachsverteilungen bis auf Nullmengen selbst nur positive Zuwächse.

Im allgemeinen bildet $(T_n)_{n\geq 0}$ keinen Erneuerungsprozeß mehr, läßt sich aber zu einem MEP erweitern. Hierzu seien $(R_t^{(k)})_{t\geq 0}$ der *Prozeß der Rückwärtsrekurrenzzeiten*

$$R_t^{(k)} = t - \sup\{T_n^{(k)};\; T_n^{(k)} \leq t\}$$

zu $(T_n^{(k)})_{n\geq -1}$,

$$M_0 = (R_0^{(1)}, \ldots, R_0^{(m)}) \quad \text{und} \quad M_n = (R_{T_n}^{(1)}, \ldots, R_{T_n}^{(m)})$$

für $n \geq 1$. Man kann zeigen[3], daß dann $M = (M_n)_{n\geq 0}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \times_{k=1}^m (0, c_k)$,

$$c_k = \sup\{t > 0;\; F^{(k)}(t, \infty) > 0\},$$

bildet. Beachtet man

$$A_n = T_n - T_{n-1} = \max_{1\leq k\leq m} (R_{T_n}^{(k)} - R_{T_{n-1}}^{(k)}) =: f(M_{n-1}, M_n)\;,\; n \geq 1,$$

[3] vgl. [Al 3] Bsp. VIII/2.5

so zeigt ein späteres Resultat (Lemma 2.24), daß obendrein $(M_n, A_n)_{n\geq 0}$ zu einer Markov-modulierten Folge mit Steuerkette M wird. Wählt man zur Beschreibung der Bedienungszeiten eine von $(T_n)_{n\geq 0}$ unabhängige iid-Folge $(B_n)_{n\geq 0}$ und setzt $B_{-1} := 0$, bildet auch $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge, weiterhin gesteuert durch die Markov-Kette M.

Eine *Interpretationsmöglichkeit* ist die Identifizierung eines Inputkanals mit einer bestimmten Kundengruppe, die sich durch eine für sie spezifische Besuchsfrequenz auszeichnet.

2.3.3 Systeme mit Gruppenankünften

Im betrachteten Bedienungssystem bestehe die Möglichkeit, daß mehrere Kunden gleichzeitig als zusammengehörige Gruppe eintreffen und auch als solche bedient werden. Einzeln eintreffende Kunden werden als Gruppe der Gruppenstärke 1 aufgefaßt. Für $n \geq 0$ ist T_n als Ankunftszeit der n-ten Gruppe, B_n als deren Gesamt-Servicebedarf und W_n als deren Wartezeit aufzufassen.

Die Bedienungszeit einer k-köpfigen Gruppe sei jeweils verteilt gemäß einer Verteilung Q_k, und $(T_n)_{n\geq 0}$ bilde einen von $(B_n)_{n\geq 0}$ unabhängigen SEP mit Zuwachsverteilung F. Eine Möglichkeit zur Modellierung des Ankunftsprozesses ist die Beschreibung der Gruppenstärken über eine Markov-Kette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und Übergangskern $\mathbb{P}_M$, so daß $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit Übergangskern

$$\mathbb{P}(k, \bullet) = \mathbb{P}_M \otimes F \otimes Q_k$$

bildet.

Beschränkt sich die Analyse eines Systems auf die Untersuchung des Prozesses $(V_t)_{t\geq 0}$ der anstehenden Arbeit, so kann anstelle der allgemein postulierten *FIFO-Disziplin* (*first in first out*, d.h. Bedienung der Kunden in der Reihenfolge ihres Erscheinens) alternativ jede weitere Bedienungsstrategie unterstellt werden, die sich davon lediglich durch eine Umsortierung der anwesenden wartenden Kunden unterscheidet. Zwei bereits vorgestellte Beispiele lassen sich unter einer derartigen veränderten Sichtweise als Modelle für die folgenden beiden Beispiele heranziehen.

2.3.4 Kundeneinteilung in Prioritätsklassen

Die Kunden des Bedienungssystems mögen sich in $m \geq 1$ verschiedene *Prioritätsklassen* einteilen lassen. Kunden der Prioritätsklasse $k + 1$ haben dabei stets das Recht, sich in der Warteschlange vor anwesenden Kunden aus den Klassen $1, \ldots, k$

einzureihen. Die Bedienung des am Schalter befindlichen Kunden wird dabei nicht unterbrochen. Beispiele derartiger Systeme sind etwa in speziellen Telekommunikationsnetzen zu finden.

Als Modell wählen wir das in 2.3.2 vorgestellte Modell für m Inputkanäle. Jeden Inputkanal fassen wir diesmal als isolierte Betrachtung einer speziellen Prioritätsklasse auf.

2.3.5 Systeme mit Feedback

Der Prozeß $(T_n)_{n\geq 0}$ der Ankunftszeitpunkte neueintreffender Kunden sei ein von allen übrigen Größen unabhängiger SEP. Ist ein Kunde am Schalter bedient worden, verlasse er das System nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ und stelle sich mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ zu einer weiteren Bedienung an. Die Entscheidung, sich erneut in die Warteschlange einzuordnen, treffe jeder Kunde unabhängig von den übrigen Kunden und allen vorangegangenen Entscheidungen seinerseits. Der Gesamt-Servicebedarf eines Kunden mit insgesamt k Schalterbesuchen genüge jeweils einer näher zu präzisierenden Verteilung Q_k.

Bei isolierter Betrachtung des Prozesses $(V_t)_{t\geq 0}$ kann ohne Einschränkung angenommen werden, ein Kunde genieße beim Nichtverlassen des Systems uneingeschränkte Priorität vor sämtlichen sonstigen anwesenden Kunden. Als Modell kann in diesem Fall erneut das aus Beispiel 2.3.3 gewählt werden, wenn man in der dortigen Notation M_n als Anzahl der Schalterbesuche vom Kunden n interpretiert und $M = (M_n)_{n\geq 0}$ eine iid-Folge bildet mit

$$P^{M_0-1} = \mathcal{NB}(1, 1-p) = \sum_{n\geq 0} (1-p)p^n \cdot \delta_n.$$

2.4 Die Folge der Wartezeiten

Lemma 2.6 ([Al 1] *Lemma 11.1.1*). *Die Folge $(W_n)_{n\geq 0}$ genügt den rekursiven Gleichungen*

$$W_n = (W_{n-1} + X_n)^+ = \max\left(\max_{1\leq k\leq n} S_n - S_k, W_0 + S_n\right) \tag{2.1}$$

für $n \geq 1$.

Beweis:
$W_n = 0$ ist offenbar äquivalent dazu, daß Kunde n erst dann das System betritt, wenn Kunde $n-1$ bereits vollständig bedient wurde, also $T_{n-1} + W_{n-1} + B_{n-1} \leq T_n$ bzw. $W_{n-1} \leq A_n - B_{n-1} = -X_n$ gilt. Andernfalls ergibt sich die Wartezeit W_n des n-ten Kunden formal aus der Summe von W_{n-1} und B_{n-1} abzüglich der Zeit, die seit

Erscheinen des $(n-1)$-ten Kunden vergangen ist, also $W_n = W_{n-1} + B_{n-1} - A_{n-1} = W_{n-1} + X_n$. Insgesamt folgt $W_n = (W_{n-1} + X_n)^+$.

Die zweite Gleichheit ergibt sich induktiv. Im Induktionsschluß $n \to n+1$ gehe man dabei wie folgt vor:

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= (W_n + X_{n+1})^+ = \Big(\max\Big(\max_{1\le k\le n} S_n - S_k, W_0 + S_n\Big) + X_{n+1}\Big)^+ \\ &= \Big(\max\Big(\max_{1\le k\le n} S_{n+1} - S_k, W_0 + S_{n+1}\Big)\Big)^+ = \max\Big(0, \max_{1\le k\le n} S_{n+1} - S_k, W_0 + S_{n+1}\Big) \\ &= \max\Big(\max_{1\le k\le n+1} S_{n+1} - S_k, W_0 + S_{n+1}\Big) \end{aligned}$$

□

Eine erste Konsequenz dieser rekursiven Beziehungen ist folgende Aussage über das Langzeitverhalten von $(W_n)_{n\ge 0}$ für den Fall, daß im Gleichgewicht der Steuerkette unter P_{ξ^*} die mittlere Zwischenankunftszeit kürzer als die mittlere Bedienungszeit eines Kunden ist. Wie erwartet kann sich das System nicht stabilisieren, sondern die Wartezeiten der Kunden konvergieren langfristig fast sicher gegen ∞.

Satz 2.7. *Gilt für die Verkehrsintensität ρ im SM/SM/1-System $\rho > 1$, so folgt stets*

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \infty \qquad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
Wir machen Gebrauch von der Beziehung

$$W_n = \max(W_0 + S_n, K_n)$$

mit $K_n = \max_{1\le k\le n} S_n - S_k$. Gilt $\rho > 1$, so besitzt der Markov-Random-Walk $(M_n, S_n)_{n\ge 0}$ positive stationäre Drift und es folgt gemäß Korollar 1.49

$$P(\lim_{n\to\infty} W_n = \infty) \ge P(\lim_{n\to\infty} K_n = \infty) \ge P(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$$

□

Zur Grenzsituation $\rho = 1$ kann notiert werden:

Satz 2.8. *Unter der Voraussetzung $\rho = 1$ folgt stets*

$$\liminf_{n\to\infty} W_n = 0 \quad \textit{und} \quad \limsup_{n\to\infty} W_n = \infty \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis[4]**:**
Mit $L := \sup\{n \ge 0; W_n = 0\}$ folgt gemäß (2.1) offenbar für jedes $n \ge 1$ auf der Menge $\{L < \infty\}$: $W_{L+n} = S_{L+n} - S_L > 0$. Dies führt auf die Inklusionskette

$$\{\liminf_{n\to\infty} W_n > 0\} \subset \{W_n = 0 \quad \infty\text{-oft}\}^c = \{L < \infty\} \subset \{\liminf_{n\to\infty} S_n > -\infty\}.$$

[4] vgl. Beweis zu [Al 1] Kor. 11.1.4

Nun ist $\rho = 1$ äquivalent dazu, daß der Markov-Random-Walk $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ die stationäre Drift 0 besitzt und damit nach Satz 1.50 das letzte Ereignis unter P die Wahrscheinlichkeit 0 hat.

Ähnlich folgt aus $W_n = \max(W_0 + S_n, \max_{1\leq k\leq n} S_n - S_k) \geq S_n$

$$\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\} \subset \{\limsup_{n\to\infty} W_n = \infty\},$$

wobei in diesem Fall das erste Ereignis Wahrscheinlichkeit 1 unter P hat. □

Man erkennt: In der Grenzsituation, daß im Gleichgewichtszustand des Ankunftsprozesses die mittlere Zwischenankunftszeit mit der mittleren Bedienungszeit eines Kunden übereinstimmt, kann sich das System ebenfalls nicht stabilisieren. Zwar wird die Wartezeit eines Kunden zwischenzeitlich immer wieder mal beliebig kurz, jedoch folgen darauf auch stets Phasen, in denen beliebig lange Wartezeiten in Kauf genommen werden müssen.

Die Analyse von $(W_n)_{n\geq 0}$ im subkritischen Fall $\rho < 1$ bedarf einer ganzen Reihe von Zusatzüberlegungen. Beginnen wollen wir mit

Satz 2.9. *$(M_n, X_n, W_n)_{n\geq 0}$ ist eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $(S \times \mathbb{R} \times [0,\infty), \mathcal{S} \otimes \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$ und Übergangskern*

$$\mathbb{K} : \big(S \times [0,\infty)\big) \times \big(\mathcal{S} \otimes \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)}\big) \longrightarrow [0,1)\,,$$

definiert durch

$$\begin{aligned}&\mathbb{K}\big((m,w), A \times B \times C\big)\\ &\qquad = \mathbb{1}_C(0) \cdot \mathbb{P}_X\big(m, A \times B \cap (-\infty, -w)\big) + \mathbb{P}_X\big(m, A \times B \cap (C - w)\big)\end{aligned}$$

für $(m,w) \in S \times [0,\infty)$, $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathbb{B}$ und $C \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$.

Beweis:
Die Markov-Eigenschaft und die zeitliche Homogenität ergeben sich mittels der entsprechenden Eigenschaften von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ unmittelbar aus der Darstellung

$$(M_{n+1}, X_{n+1}, W_{n+1}) = (M_{n+1}, X_{n+1}, (X_{n+1} + W_n)^+) =: f(M_{n+1}, X_{n+1}, W_n)$$

und der Inklusion

$$\sigma(W_n) \subset \sigma((M_k, X_k)_{0\leq k\leq n}, W_0)$$

für $n \geq 0$ (vgl. (2.1)) sowie der Unabhängigkeit von $(M_k, X_k)_{k\geq 0}$ und W_0.

Mit denselben Argumenten erhält man über folgende Umformungen auch die explizite Gestalt von $\mathbb{K}$ auf $\mathcal{S} \times \mathbb{B} \times \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$:

$$\begin{aligned}
&P\big((M_1, X_1, W_1) \in A \times B \times C \,\big|\, (M_0, X_0, W_0) = (m, x, w)\big) \\
&= \; P\big((M_1, X_1, (X_1 + w)^+) \in A \times B \times C \,\big|\, M_0 = m\big) \\
&= \; P\big(M_1 \in A, X_1 \in B, (X_1 + w)^+ \in C, X_1 < -w \,\big|\, M_0 = m\big) \\
&\quad + P\big(M_1 \in A, X_1 \in B, (X_1 + w)^+ \in C, X_1 \geq -w \,\big|\, M_0 = m\big) \\
&= \; \mathbb{1}_C(0) \cdot \mathbb{P}_X\big(m, A \times B \cap (-\infty, -w)\big) + \mathbb{P}_X\big(m, A \times B \cap (C - w)\big) \qquad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen 2.10. (a) An der speziellen Struktur von $\mathbb{K}$ ist abzulesen, daß auch $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette bildet, und zwar mit Zustandsraum $(S \times [0, \infty), \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$ und Übergangskern

$$\mathbb{K}_W : \big(S \times [0, \infty)\big) \times \big(\mathcal{S} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)}\big) \longrightarrow [0, 1]\,,$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\mathbb{K}_W\big((m, w), A \times C\big) = \mathbb{K}\big((m, w), A \times \mathbb{R} \times C\big) \\
&\quad = \; \mathbb{1}_C(0) \cdot \mathbb{P}_X\big(m, A \times (-\infty, -w)\big) + \mathbb{P}_X\big(m, A \times (C - w)\big)
\end{aligned}$$

für $(m, w) \in S \times [0, \infty)$, $A \in \mathcal{S}$ und $C \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$. Außerdem definiert $(M_n, W_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ als Steuerkette und einem Übergangskern $\tilde{\mathbb{K}}$, den man bei fester erster Komponente auf dem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathcal{S} \times \mathbb{B}_{|[0,\infty)} \times \mathbb{B}$ von $\mathcal{S} \otimes \mathbb{B}_{|[0,\infty)} \otimes \mathbb{B}$ aus $\mathbb{K}$ über eine Permutation der Argumente gemäß

$$\tilde{\mathbb{K}}\big((m, w), A \times C \times B\big) := \mathbb{K}\big((m, w), A \times B \times C\big)$$

erhält.

(b) Auf ganz ähnliche Weise wie in Satz 2.9 und Teil (a) kann verifiziert werden, daß auch $(M_n, W_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ eine (zweidimensionale) Markov-modulierte Folge mit der Steuerkette $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ bildet.

Es sei nun

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (\tilde{M}_n, \tilde{X}_n, \tilde{W}_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R} \times [0,\infty))}\Big)$$

das kanonische Standardmodell für den Übergangskern $\mathbb{K}$. Wie gewohnt benutzen wir wieder die abkürzenden Schreibweisen $P_{m,x,w}$ anstelle von $P_{\delta_m \otimes \delta_x \otimes \delta_w}$ bzw. P_μ anstelle von $P_{\mu \otimes \delta_0}$ für $\mu \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R})$. So bildet dann zugleich

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (\tilde{M}_n, \tilde{X}_n)_{n\geq 0}, (P_\mu)_{\mu \in \mathcal{W}(S \times \mathbb{R})}\Big)$$

ein Standardmodell für $\mathbb{P}_X$.

Der Kern $I\!P_X$ besitzt laut Satz 1.44 in Kapitel 1 die stationäre Verteilung

$$\nu^*(A) = \int I\!P_X(s,A)\,\xi^*(ds) \qquad , A \in \mathcal{S} \otimes I\!B.$$

Wir führen die *doppelt unendliche Folge* $(M^*, X^*) = (M_n^*, X_n^*)_{n \in Z\!\!Z}$ ein, die als Koordinatenprozeß auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, versehen mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß Q, definiert ist mit der Eigenschaft

$$Q^{(M_k^*, X_k^*)_{k \geq n}} = P_{\nu^*}^{(\tilde{M}_k, \tilde{X}_k)_{k \geq 0}} \qquad \forall n \in Z\!\!Z.$$

Die Existenz einer derartigen Folge folgt aus dem *Kolmogoroff'schen Konsistenzsatz*[5]: Man wähle $Q^{(M^*, X^*)}$ als projektiven Limes der Familie

$$\{Q_I = P_{\nu^*}^{(\tilde{M}_n, \tilde{X}_n)_{n \in I_0}};\ I \subset Z\!\!Z, |I| < \infty\},$$

wobei $I_0 = \{0, i_1 - i_0, \ldots, i_m - i_0\}$ im Fall $I = \{i_0, \ldots, i_m\}$ mit $i_0 < \cdots < i_m$.

Weiterhin setzen wir für $n \in Z\!\!Z$

$$W_n^* := (\sup_{-\infty < k \leq n} X_k^* + \cdots + X_n^*)^+.$$

Satz 2.11 ([As/Th] *Prop. 3.2*). *Gilt $\rho < 1$, so ist der Prozeß $(M_n^*, X_n^*, W_n^*)_{n \geq 0}$ eine stationäre, zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum*

$$(S \times I\!R \times [0,\infty), \mathcal{S} \otimes I\!B \otimes I\!B_{|[0,\infty)})$$

und Übergangskern $I\!K$.

Insbesondere besitzt also die Markov-Kette $(M_n, X_n, W_n)_{n \geq 0}$ die stationäre Verteilung

$$\zeta^* := Q^{(M_0^*, X_0^*, W_0^*)}.$$

Beweis:
Der Beweis gliedert sich in 4 Schritte.

Schritt 1: W_n^* ist Q-f.s endlich für alle $n \in Z\!\!Z$:

Sei $n \in Z\!\!Z$ beliebig. Offensichtlich reicht es zu zeigen, daß dann

$$\lim_{k \to -\infty} X_k^* + \cdots X_n^* = -\infty \quad Q\text{-f.s.}$$

bzw. die hierzu äquivalente Aussage

$$\lim_{k \to -\infty} X_k^* + \cdots X_{-1}^* = -\infty \quad Q\text{-f.s.}$$

[5] vgl. [Al 2] Satz 48.7

gilt. Für $k > 0$ setzen wir

$$Y_k^* := X_{-k}^*, \quad S_k^* := \sum_{j=1}^k X_j^* \quad \text{und} \quad V_k^* := \sum_{j=1}^k Y_j^*.$$

Die Stationarität von $(X_k^*)_{k\in\mathbb{Z}}$ impliziert dann direkt auch die Stationarität von $(Y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$, und nach dem Birkhoff'schen Ergodensatz konvergiert daher $(\frac{1}{k}V_k^*)_{k\geq 1}$ wegen $E_Q|Y_1^*| = E_{\nu^*}|\tilde{X}_1| = E_{\xi^*}|\tilde{X}_1| < \infty$ Q-f.s. gegen eine Version $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ des bedingten Erwartungswertes von Y_1^* gegeben die σ-Algebra der unter $(Y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ invarianten Ereignisse. Wir zeigen nun $f = E_{\xi^*}X_1 =: \mu < 0$ Q-f.s.; dann folgt nämlich bereits

$$\lim_{k\to-\infty} X_k^* + \cdots + X_{-1}^* = \lim_{k\to-\infty} V_{-k}^* = -\infty \qquad \text{Q-f.s.}$$

Zunächst hat man nach dem starken Gesetz der großen Zahlen für Markov-Random-Walks mit steuernder positiv rekurrenter Harris-Kette (Satz 1.48) $Q(A) = 1$ für

$$A = \{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} S_k^* = \mu\}.$$

Die Beziehung

$$\Big\{f \neq \mu\Big\} \subset \Big\{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}V_k^* = f\Big\}^c \cup \bigcup_{k\geq 0}\bigcap_{m\geq k} \Big\{\Big|\frac{1}{m}V_m^* - \mu\Big| > \frac{1}{k}\Big\}$$

zeigt dann, da $\{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}V_k^* = f\}^c$ eine Q-Nullmenge ist,

$$\begin{aligned}
Q(f \neq \mu) &\leq \sum_{k\geq 0} Q\left(\bigcap_{m\geq k}\left\{\left|\frac{1}{m}V_m^* - \mu\right| > \frac{1}{k}\right\}\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \lim_{r\to\infty} Q\left(\bigcap_{m=k}^{r}\left\{\left|\frac{1}{m}V_m^* - \mu\right| > \frac{1}{k}\right\}\right) \\
&\leq \sum_{k\geq 0} \limsup_{r\to\infty} Q\left(\left\{\left|\frac{1}{r}V_r^* - \mu\right| > \frac{1}{k}\right\}\right) \\
&= \sum_{k\geq 0} \limsup_{r\to\infty} Q\left(\left\{\left|\frac{1}{r}S_r^* - \mu\right| > \frac{1}{k}\right\} \cap A\right) \\
&\leq \sum_{k\geq 0} \int \limsup_{r\to\infty} \mathbb{I}_{\{|\frac{1}{r}S_r^* - \mu| > \frac{1}{k}\}\cap A}\, dQ \;=\; 0.
\end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile ist zu beachten, daß wegen $(X_{-r}^*, \ldots, X_{-1}^*) \sim (X_1^*, \ldots, X_r^*)$ auch $V_r^* \sim S_r^*$ gilt. Die letzte Abschätzung ergibt sich nach Anwendung des Lemmas von Fatou.

Schritt 2:

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(W_n^* + X_{n+1}^*)^+ &= \left(\left(\sup_{-\infty<k\le n}(X_k^* + \cdots + X_n^*)\right)^+ + X_{n+1}^*\right)^+ \\
&= \left(\max\left(\sup_{-\infty<k\le n}(X_k^* + \cdots + X_{n+1}^*), X_{n+1}^*\right)\right)^+ \\
&= \left(\sup_{-\infty<k\le n+1}(X_k^* + \cdots + X_{n+1}^*)\right)^+ = W_{n+1}^*
\end{aligned}$$

Schritt 3: $(M_n^*, X_n^*, W_n^*)_{n\ge 0}$ *ist eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Übergangskern* $\mathbb{K}$:

Der Beweis hierzu verläuft analog zu dem von Satz 2.9, wenn man berücksichtigt, daß für $n \ge 0$

$$\sigma((M_k^*, X_k^*, W_k^*)_{0\le k\le n}) \subset \sigma((M_k^*, X_k^*)_{-\infty<k\le n}) \quad \text{und}$$

$$Q^{(M_{n+1}^*, X_{n+1}^*)\,|\,(M_k^*, X_k^*)_{-\infty<k\le n}} = Q^{(M_{n+1}^*, X_{n+1}^*)\,|\,M_n^*} \qquad Q\text{-f.s.}$$

gelten. Letzteres sieht man folgendermaßen ein:

Für jede Zylindermenge $Z = (S \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}} \times A$, $A \in (\mathcal{S} \otimes \mathbb{B})^m$, $m \ge 1$ und $B \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{B}$ erhält man

$$\begin{aligned}
&Q\big((M_k^*, X_k^*)_{-\infty<k\le n} \in Z, (M_{n+1}^*, X_{n+1}^*) \in B\big) \\
&= \int_{\{(M_k^*, X_k^*)_{n-m<k\le n} \in A\}} Q^{(M_{n+1}^*, X_{n+1}^*)\,|\,(M_k^*, X_k^*)_{n-m<k\le n}}(B)\, dQ \\
&= \int_{\{(M_k, X_k)_{n-m<k\le n} \in A\}} P_{\nu^*}^{(\tilde{M}_m, \tilde{X}_m)\,|\,(\tilde{M}_k, \tilde{X}_k)_{0\le k\le m-1}}(B)\, dQ \\
&= \int_{\{(M_k, X_k)_{n-m<k\le n} \in A\}} P_{\nu^*}^{(\tilde{M}_m, \tilde{X}_m)\,|\,\tilde{M}_{m-1}}(B)\, dQ \\
&= \int_{\{(M_k^*, X_k^*)_{n-m<k\le n} \in A\}} Q^{(M_{n+1}^*, X_{n+1}^*)\,|\,M_n^*}(B)\, dQ \\
&= \int_{\{(M_k^*, X_k^*)_{-\infty<k\le n} \in Z\}} Q^{(M_{n+1}^*, X_{n+1}^*)\,|\,M_n^*}(B)\, dQ.
\end{aligned}$$

Weil die Zylindermengen eine Algebra bilden und $(\mathcal{S} \otimes \mathbb{B})^{\mathbb{N}}$ erzeugen, führt ein Dynkin-System-Argument zum Gewünschten.

Schritt 4: $(M_n^*, X_n^*, W_n^*)_{n\geq 0}$ ist stationär:

Wegen Schritt 3 ist lediglich $(M_0^*, X_0^*, W_0^*) \sim (M_1^*, X_1^*, W_1^*)$ zu verifizieren. Dies gilt aber offensichtlich wegen der Definition von W_0^* und W_1^* als Funktion von $(X_n^*)_{n\leq 0}$ bzw. $(X_n^*)_{n\leq 1}$ und der Stationarität des Prozesses $(M_{-n}^*, X_{-n}^*)_{n\geq 0}$.
Der Satz ist damit vollständig bewiesen. □

Satz 2.12 ([As/Th] *Th. 3.1*). *Im Fall $\rho < 1$ ist $(M_n, X_n, W_n)_{n\geq 0}$ (und damit nach Bemerkung 2.10 auch $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$) eine ergodische Harris-Kette.*

Beweis:
Wie soeben gezeigt, ist $(M_n, X_n, W_n)_{n\geq 0}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette mit stationärer Verteilung ζ^*, so daß gemäß Satz 1.40 aus Kapitel 1 nur noch der Nachweis erbracht werden muß, daß sich bei beliebig gewähltem $(m, x, w) \in S \times \mathbb{R} \times [0, \infty)$ der Übergangskern $\mathbb{K}$ koppeln läßt unter $(\zeta^*, \delta_{(m,x,w)})$. Wir beginnen mit der Feststellung, daß die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung ν^* von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ mit der Randverteilung von ζ^* in den ersten beiden Komponenten übereinstimmen muß. Da $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine ergodische Harris-Kette ist, läßt sich diese - wiederum nach Satz 1.40, Kapitel 1 - koppeln unter $(\nu^*, \delta_{(m,x)})$, d.h. es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ sowie eine P_{ν^*}-Version $(M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}$, eine $P_{m,x}$-Version $(M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)})_{n\geq 0}$ von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ und eine $\tilde{P}$-fast sicher endliche Kopplungszeit T auf $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ mit $(M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)}) = (M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)})$ für $n \geq T$.

Der Kern $\mathbb{L} : (S \times \mathbb{R})^{\mathbb{N}} \times \mathbb{B}_{|[0,\infty)} \longrightarrow [0, 1]$ sei eine Version der regulär bedingten Verteilung

$$Q^{W_0^* \,|\, (M_n^*, X_n^*)_{n\geq 0} = \bullet}.$$

Wir erweitern dann $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ zu $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, P^*)$, definiert durch die Festsetzungen

$$(\Omega^*, \mathcal{A}^*, P^*) = \Big(\tilde{\Omega} \times [0, \infty)^{\tilde{\Omega}}, \tilde{\mathcal{A}} \otimes \bigotimes_{\omega \in \tilde{\Omega}} \mathbb{B}_{|[0,\infty)}, \tilde{P} \otimes \bigotimes_{\omega \in \tilde{\Omega}} \tilde{\mathbb{L}}(\omega, \bullet)\Big)$$

mit

$$\tilde{\mathbb{L}}(\omega, \bullet) := \mathbb{L}\big((M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}(\omega), \bullet\big).$$

Die Folgen $(M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}$ und $(M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)})_{n\geq 0}$ lassen sich dann auffassen als Zufallsvariablen auf $(\Omega^*, \mathcal{A}^*)$ vermöge der Zuordnungen

$$\omega^* = (\omega, (t_{\tilde{\omega}})_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}}) \mapsto (M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}(\omega),$$

$$\omega^* = (\omega, (t_{\tilde{\omega}})_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}}) \mapsto (M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)})_{n\geq 0}(\omega).$$

Sie haben unter P^* dieselbe Verteilung wie unter $\tilde{P}$, und auch die Kopplungseigenschaft und Kopplungszeit bleiben unter einer analogen Einbettung erhalten.

Wir definieren weiter $W_0^{(\zeta^*)} : (\Omega^*, \mathcal{A}^*) \longrightarrow ([0,\infty), I\!B_{|[0,\infty)})$ durch

$$W_0^{(\zeta^*)}(\omega, (t_{\tilde{\omega}})_{\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}}) := t_\omega.$$

Dann gilt für alle $A \in (\mathcal{S} \otimes I\!B)^{I\!N}$ und $B \in I\!B_{|[0,\infty)}$:

$$\begin{aligned}
&P^*\big((M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0} \in A, W_0^{\zeta^*} \in B\big) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}\times[0,\infty)^{\tilde{\Omega}}} 1\!\!1_A\big((M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}(\omega)\big) \cdot 1\!\!1_B(t_\omega) P^*(d\omega \times d(t_{\tilde{\omega}})_{\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}}) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} 1\!\!1_A\big((M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}(\omega)\big) \int_{[0,\infty)^{\tilde{\Omega}}} 1\!\!1_B \circ p_\omega \, d\big(\bigotimes_{\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}} \tilde{I\!L}(\tilde{\omega}, \bullet)\big) \tilde{P}(d\omega) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} 1\!\!1_A\big((M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}(\omega)\big) \, \tilde{I\!L}(\omega, B) \, \tilde{P}(d\omega) \\
&= \int_A I\!L\big((x_n, y_n)_{n\geq 0}, B\big) \, \tilde{P}^{(M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}}\big(d(x_n, y_n)_{n\geq 0}\big) \\
&= \int_A Q^{W_0^* \,|\, (M_n^*, X_n^*)_{n\geq 0} = (x_n, y_n)_{n\geq 0}}(B) \, Q^{(M_n^*, X_n^*)_{n\geq 0}}\big(d(x_n, y_n)_{n\geq 0}\big) \\
&= Q\big((M_n^*, X_n^*)_{n\geq 0} \in A, W_0^* \in B\big)
\end{aligned}$$

Damit hat man also $(P^*)^{((M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}, W_0^{(\zeta^*)})} = Q^{((M_n^*, X_n^*)_{n\geq 0}, W_0^*)}$, und die rekursive Definition

$$W_n^{(\zeta^*)} := (W_{n-1}^{(\zeta^*)} + X_n^{(\nu^*)})^+ \qquad \text{für} \quad n \geq 1$$

liefert uns, daß dann $(M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)}, W_n^{(\zeta^*)})_{n\geq 0}$ eine P_{ζ^*}-Version von $(M_n, X_n, W_n)_{n\geq 0}$ ist. Ebenso erhält man auf $(\Omega^*, \mathcal{A}^*)$ eine $P_{m,x,w}$-Version $(M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)}, W_n^{(w)})_{n\geq 0}$ von $(M_n, X_n, W_n)_{n\geq 0}$ über die Festsetzungen $W_0^{(w)} \equiv w$ und

$$W_n^{(w)} = (W_{n-1}^{(w)} + X_n^{(m,x)})^+ \qquad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Um den Beweis abzuschließen, benötigen wir nun noch eine P^*-fast sicher endliche Kopplungszeit $T^* : (\Omega^*, \mathcal{A}^*) \longrightarrow (I\!N, \mathcal{P}(I\!P))$ mit $(M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)}, W_n^{(w)}) = (M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)}, W_n^{(\zeta^*)})$ für alle $n \geq T^*$. Hierzu seien für $n \geq 0$

$$S_n^{(\nu^*)} := \sum_{k=0}^n X_k^{(\nu^*)} \quad , \quad S_n^{(m,x)} := \sum_{k=0}^n X_k^{(m,x)}$$

sowie unter Berücksichtigung der Kopplungseigenschaft von $(M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)})_{n\geq 0}$ und $(M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)})_{n\geq 0}$

$$S_n^{(T)} := S_{T+n}^{(\nu^*)} - S_T^{(\nu^*)} = S_{T+n}^{(m,x)} - S_T^{(m,x)}.$$

Aus $\rho < 1$ folgt $S_n^{(\nu^*)} \longrightarrow -\infty$ P^*-f.s., damit wegen $T < \infty$ P^*-f.s. offenbar auch $S_n^{(T)} \longrightarrow -\infty$ P^*-f.s. und schließlich

$$T_1 := \inf\Big\{k \geq 1; S_n^{(T)} \leq \min\big(-W_T^{(\zeta^*)}, -W_T^{(w)}\big) \quad \forall n \geq k\Big\} < \infty \quad P^*\text{-f.s.}$$

Weiter ergibt sich aus den Definitionen von $(W_n^{(\zeta^*)})_{n\geq 0}$ und $(W_n^{(w)})_{n\geq 0}$ leicht

$$W_{T+n}^{(\zeta^*)} = \max\left\{W_T^{(\zeta^*)} + S_n^{(T)}, S_n^{(T)} - S_1^{(T)}, \ldots, S_n^{(T)} - S_{n-1}^{(T)}, 0\right\}$$

$$W_{T+n}^{(w)} = \max\left\{W_T^{(w)} + S_n^{(T)}, S_n^{(T)} - S_1^{(T)}, \ldots, S_n^{(T)} - S_{n-1}^{(T)}, 0\right\},$$

so daß für $n \geq T_1$ der erste Term bei der Maximumbildung jeweils vernachlässigt werden kann und damit $W_{T+n}^{(\zeta^*)} = W_{T+n}^{(w)}$ gilt. $T^* = T + T_1$ ist also die gesuchte Kopplungszeit für $(M_n^{(m,x)}, X_n^{(m,x)}, W_n^{(w)})_{n\geq 0}$ und $(M_n^{(\nu^*)}, X_n^{(\nu^*)}, W_n^{(\zeta^*)})_{n\geq 0}$. □

Korollar 2.13. *Für die Verkehrsintensität ρ im SM/SM/1-Modell gelte $\rho < 1$. Dann definiert*

$$(M_n, W_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$$

eine ergodische Harris-Kette mit eindeutig bestimmter stationärer Verteilung π^*, und es gelten die Konvergenzen

$$\lim_{n\to\infty} \|P^{(M_n,W_n,A_n,B_{n-1})} - \pi^*\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|P^{(M_n,X_n,W_n)} - \zeta^*\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|P^{W_n} - \zeta_W^*\| = \lim_{n\to\infty} \|P^{W_n} - \pi_W^*\| = 0,$$

wobei ζ_W^* für die dritte Randverteilung von ζ^* und π_W^* für die zweite Randverteilung von π^* steht.

Es bleibt festzuhalten, daß die Eindeutigkeit des Limes in Totalvariation sofort

$$\zeta_W^* = \pi_W^*$$

impliziert. Ferner hängen die Grenzverteilungen π^* und π_W^* nicht mehr von der speziellen Wahl von P^{W_0} ab, zur genaueren Beschreibung derselben kann somit o.B.d.A.

(C.1) $W_0 = 0$

und vorerst auch generell

(C.2) $\rho < 1$

vorausgesetzt werden. Durch diese deterministische Festsetzung genügt es, zur Untersuchung der Markov-Kette $(M_n, W_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ ein gewohntes Standardmodell

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)}\Big)$$

für den Ankunftsübergangskern $I\!\!P$ mit unveränderten Notationen für die auftretenden Zufallsgrößen zu unterstellen und die Wartezeitenfolge über die übliche Rekursionsbeziehung $W_{n+1} = (W_n + X_{n+1})^+$ induktiv aus $W_0 = 0$ zu konstruieren.

In Analogie zur klassischen Erneuerungstheorie heißt die Folge $(\sigma_n)_{n\geq 0}$, gegeben über die Festsetzungen $\sigma_0 := 0$ und

$$\sigma_n := \begin{cases} \inf\{k > \sigma_{n-1}; S_k - S_{\sigma_{n-1}} \leq 0\} & , \quad \text{falls} \quad \sigma_{n-1} < \infty \\ \infty & , \quad \text{falls} \quad \sigma_{n-1} = \infty \end{cases}$$

für $n \geq 1$ *Folge der schwach absteigenden Leiterindizes von* $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$.

Genau wie in der Erneuerungstheorie sieht man, daß $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ Stopzeiten für $(S_n)_{n\geq 0}$ und damit auch für den Ankunftsprozess $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ sind. Zudem sind diese im Fall $\rho < 1$, also bei negativer stationärer Drift von $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$, unter jedem P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, fast sicher endlich wegen $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ P_λ-f.s.
Es bedeutet keine Einschränkung, in der vorliegenden Situation die schwach absteigenden Leiterindizes (nach jeweiliger Reduktion des Grundraums Ω) generell als endliche Stopzeiten anzusehen, so daß es auch Sinn macht, diese zur Indizierung der verschiedenen Zufallsgrößen zu verwenden.

Es gibt einen nützlichen Zusammenhang zwischen diesen Leiterindizes und der Wartezeitenfolge $(W_n)_{n\geq 0}$:

Lemma 2.14 ([Al 1] *Kor. 11.1.2*). *In der zuvor beschriebenen Situation gilt für alle* $n \geq 1$*:*

$$\sigma_n = \inf\{k > \sigma_{n-1}; W_k = 0\}$$

Beweis:
Aus der Beziehung $W_n = (W_{n-1} + X_n)^+$, $n \geq 1$, und $W_0 = 0$ folgt sofort
$W_k = S_k - S_0 > 0$ für $k = 1, \ldots, \sigma_1 - 1$ und

$$W_{\sigma_1} = (S_{\sigma_1 - 1} - S_0 + X_{\sigma_1})^+ = (S_{\sigma_1} - S_{\sigma_0})^+ = 0,$$

also stimmt die Behauptung für den Fall $n = 1$. Der Rest ergibt sich induktiv mit

$$W_k = S_k - S_{\sigma_{n-1}}$$

für $k = \sigma_{n-1}, \ldots, \sigma_n - 1$. □

Dieses Ergebnis zeigt, daß unter jedem P_λ fast sicher unendlich viele Kunden bei ihrer Ankunft ein leeres System vorfinden. Es liegt die Vermutung nahe, daß sich die Folge $(W_n)_{n\geq 0}$ mit jedem Index eines derartigen Kunden regeneriert, sofern dies gleichzeitig auch für die Steuerkette M der Fall ist. Eine Bestätigung und nähere Präzisierung dieser Idee ist Inhalt des nächsten Satzes.

Satz 2.15. *Unter den Zusatzannahmen* (C.1) *und* (C.2) *kann das Standardmodell für* $I\!P$ *so gewählt werden, daß ein W-Maß* ϕ *auf* $S \times [0,\infty)^2$ *und eine Folge* $(\nu_n)_{n\geq 0}$ *von auf* Ω *definierten Regenerationszeiten für* $(M_n, W_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ *existieren, die unter jeder Verteilung* P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)$, *die folgenden Eigenschaften besitzen:*

(a) $\nu_0 = 0$

(b) $(\nu_n)_{n\geq 1}$ *ist ein Erneuerungsprozeß mit Zuwachsverteilung* $P_\phi^{\nu_1}$.

(c) $W_{\nu_n} = 0$ *für alle* $n \geq 0$

(d) Die Zyklen

$$\tilde{Z}_n := \Big(\nu_{n+1} - \nu_n, (M_k, W_k, A_k, B_{k-1})_{\nu_n \leq k < \nu_{n+1}}\Big) \quad , n \geq 0,$$

sind 1-abhängig. Überdies ist die Folge $(\tilde{Z}_n)_{n\geq 1}$ *stationär mit*

$$P_\lambda^{(\tilde{Z}_n)_{n\geq 1}} = P_\phi^{(\tilde{Z}_n)_{n\geq 0}},$$

und $(\tilde{Z}_n)_{n\geq k}$ *ist für jedes* $k \geq 0$ *unabhängig von* $(\nu_0, \ldots, \nu_k)$.

Beweis:
Gemäß Lemma 2.14 läßt sich der erste schwach absteigende Leiterindex von $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ auch schreiben als

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \inf\{n > 0; W_n = 0\} \\ &= \inf\{n > 0; (M_n, W_n, A_n, B_{n-1}) \in S \times \{0\} \times [0,\infty)^2\}\end{aligned}$$

Die Endlichkeit von σ_1 bedeutet daher nichts anderes, als daß

$$S \times \{0\} \times [0,\infty)^2$$

eine Rekurrenzmenge für die Harris-Kette $(M_n, W_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ bildet. Diese enthält nach Satz 1.36 eine Regenerationsmenge

$$\Re \subset S \times \{0\} \times [0,\infty)^2,$$

und sämtliche Behauptungen ergeben sich als Konsequenzen des Regenerationslemmas für Harris-Ketten. □

Korollar 2.16. *In der Situation von Satz 2.15 ist die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung* π^* *von* $(M_n, W_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ *gegeben durch*

$$\pi^* = \frac{1}{E_\phi \nu_1} E_\phi \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{I}_{\{(M_k, W_k, A_k, B_{k-1}) \in \bullet\}} \right).$$

Die Grenzverteilung der Wartezeitenfolge $(W_n)_{n\geq 0}$ *im SM/SM/1-Modell bestimmt sich damit zu*

$$\pi_W^* = \frac{1}{E_\phi \nu_1} E_\phi \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{I}_{\{W_k \in \bullet\}} \right).$$

Eine noch explizitere Angabe der Regenerationsmenge $\Re$ und der Regenerationszeiten $(\nu_n)_{n\geq 0}$ erfordert weitere Voraussetzungen an die Steuerkette $(M_n)_{n\geq 0}$. Mit diesem Aspekt beschäftigt sich Kapitel 3.

2.5 Die anstehende Arbeit

Untersuchungsgegenstand dieses Abschnitts ist der zeitstetige Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$ der anstehenden Arbeit im System. Da V_t im Falle eines zum Zeitpunkt t eintreffenden Kunden gerade dessen Wartezeit beschreibt, bis er zum Schalter vorgelassen wird, nennt man V_t vielfach auch *virtuelle Wartezeit zur Zeit t*. Eine formale Definition für V_t über die übrigen Zufallsgrößen ist offenbar gegeben durch

$$V_t = \sum_{n\geq 0} (T_n + W_n + B_n - t)^+ \cdot 1\!\!1_{[T_n, T_{n+1})}(t). \tag{2.2}$$

Damit bildet $(V_t)_{t\geq 0}$ einen sogenannten *càdlàg-Prozeß*, dessen Pfade sich auszeichnen durch rechtsseitige Stetigkeit und überall existierende linksseitige Limiten. Die rechtsseitige Stetigkeit ergibt sich dabei direkt daraus, daß die Funktionen $x \mapsto x^+$ und $x \mapsto 1\!\!1_{[a,b)}(x)$ mit $a < b$ diese Eigenschaft besitzen. Was die linksseitigen Limiten angeht, ist vor allem der jeweilige Wert an einem Ankunftszeitpunkt $T_n$von Interesse. Dort ergibt sich nämlich wie erwartet der Wert

$$\lim_{t\uparrow T_n} V_t = \lim_{t\uparrow T_n} (T_{n-1} + W_{n-1} + B_{n-1} - t)^+ = (W_{n-1} + B_{n-1} - A_n)^+ = W_n.$$

Regularitätseigenschaften, verbunden mit näher zu präzisierenden asymptotischen Entwicklungen gegen eine Grenzverteilung, des Prozesses $(V_t)_{t\geq 0}$ scheinen daher zumindest diejenigen Voraussetzungen zu erfordern, die zum Nachweis entsprechender Eigenschaften beim Wartezeitenprozeß $(W_n)_{n\geq 0}$ erforderlich waren. Wir erweitern aus diesem Grunde zunächst erneut die Grundannahmen des SM/SM/1-Modells generell um folgende Zusatzvereinbarungen:

(C.1) $W_0 = 0$

(C.2) Für die Verkehrsintensität ρ gilt $\rho < 1$.

(C.3) Es liegt ein Standardmodell mit den üblichen Notationsvereinbarungen für den Ankunftsprozeß $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ vor.

So ist im folgenden stets gewährleistet, daß $(M_n, W_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ als ergodische Harris-Kette mit Regenerationszeiten $(\nu_n)_{n\geq 0}$ vorausgesetzt werden kann und wir wieder mit Regenerationstechniken arbeiten können, die auf der zyklischen Zerlegung dieses Prozesses gemäß Satz 2.15 beruhen.

Lemma 2.17. *Unter den Voraussetzungen* (C.1) *bis* (C.3) *definieren unter jeder Verteilung* P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ *die Zyklen*

$$Z_n := \Big(\nu_{n+1} - \nu_n, (M_k, W_k, A_{k+1}, B_k)_{\nu_n \le k < \nu_{n+1}}\Big) \quad , n \ge 0,$$

eine Folge 2-abhängiger Zufallsvariablen. Überdies ist die Folge $(Z_n)_{n\ge 1}$ *stationär mit*

$$P_\lambda^{(Z_n)_{n\ge 1}} = P_\phi^{(Z_n)_{n\ge 0}},$$

und für beliebiges $k \ge 0$ *ist* $(Z_n)_{n\ge k}$ *unabhängig von* $(\nu_0, \ldots, \nu_k)$.

Beweis:
Offenkundig besitzt der Zyklus Z_n für beliebiges $n \ge 0$ eine Darstellung der Form

$$Z_n = f(\tilde{Z}_n, \tilde{Z}_{n+1}) = g((\tilde{Z}_k)_{k\ge n})$$

mit meßbaren Funktionen f und g, deren exakter Definition keine Bedeutung für die weiteren Überlegungen zukommt. Definiert man hierüber die meßbare Abbildung

$$h := (g \circ s^m)_{m\ge 0}$$

mit Hilfe der Shiftfunktion s und der Vereinbarung $s^0 = id$, so zeigt die Gleichungskette

$$P_\lambda^{(Z_n)_{n\ge k}} = P_\lambda^{h((\tilde{Z}_n)_{n\ge k})} = \big(P_\lambda^{(\tilde{Z}_n)_{n\ge k}}\big)^h = \big(P_\phi^{(\tilde{Z}_n)_{n\ge 0}}\big)^h = P_\phi^{h((\tilde{Z}_n)_{n\ge 0})} = P_\phi^{(Z_n)_{n\ge 0}}$$

für $\lambda \in \mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)$ und $k \ge 1$ die Stationarität von $(Z_n)_{n\ge 1}$. Die 2-Abhängigkeit der Z_n, $n \ge 0$, resultiert wie folgt aus der 1-Abhängigkeit der Elemente von $(\tilde{Z}_n)_{n\ge 0}$:

$$\begin{aligned} P_\lambda^{((Z_n)_{n\le k},(Z_n)_{n>k+2})} &= P_\lambda^{((f(Z_{n-1},Z_n))_{1\le n\le k+1},h((Z_n)_{n>k+2}))} \\ &= P_\lambda^{(f(Z_{n-1},Z_n))_{1\le n\le k+1}} \otimes P_\lambda^{h((Z_n)_{n>k+2})} \\ &= P_\lambda^{(Z_n)_{n\le k}} \otimes P_\lambda^{(Z_n)_{n>k+2}} \end{aligned}$$

□

Folgerung 2.18. *Die Folge* $(T_{\nu_n})_{n\ge 0}$ *besitzt unter jedem* P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, *2-abhängige Zuwächse* $(T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n})_{n\ge 0}$, *die für* $n \ge 1$ *identisch verteilt sind gemäß* $P_\phi^{T_{\nu_1}}$ *mit endlichem Erwartungswert*

$$E_\lambda(T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n}) = E_\phi T_{\nu_1} < \infty.$$

Beweis:
Der n-te Zuwachs

$$T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n} = \sum_{k=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} A_{k+1}$$

ist jeweils eine Funktion des n-ten Zyklus Z_n. Daher lassen sich die Aussagen für $(Z_n)_{n\geq 0}$ aus Lemma 2.17 direkt auf die Folge der Zuwächse von $(T_{\nu_n})_{n\geq 0}$ übertragen.

Die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung ψ^* der ergodischen Harris-Kette $(M_n, A_n)_{n\geq 0}$ ist nach Korollar 2.16 gegeben durch

$$\psi^* = \frac{1}{E_\phi \nu_1} \, E_\phi \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{1}_{\{(M_k, A_k) \in \bullet\}} \right),$$

so daß unter Verwendung von $P_\phi^{A_0} = P_\phi^{A_{\nu_1}}$ folgt:

$$\begin{aligned} E_\phi T_{\nu_1} &= E_\phi \left(\sum_{k=1}^{\nu_1} A_k \right) = E_\phi \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} A_k \right) = E_\phi \nu_1 \cdot \int y \; \psi^*(dx \times dy) \\ &= E_\phi \nu_1 \cdot \int y \; P_{\psi^*}^{(M_1, A_1)}(dx \times dy) = E_\phi \nu_1 \cdot E_{\psi^*} A_1 \\ &= E_\phi \nu_1 \cdot \int E_s A_1 \; P_{\psi^*}^{M_0}(ds) = E_\phi \nu_1 \cdot \int E_s A_1 \; P_{\xi^*}^{M_0}(ds) = E_\phi \nu_1 \cdot E_{\xi^*} A_1 < \infty \end{aligned}$$

□

Satz 2.19. *Der càdlàg-Prozeß* $(V_t)_{t\geq 0}$ *erfüllt unter den Voraussetzungen* (C.1) *bis* (C.3) *die Stationaritätseigenschaft*

$$P_\lambda^{\left((T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k})_{k\geq n}, (V_{T_{\nu_n}+t})_{t\geq 0}\right)} = P_\phi^{\left((T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k})_{k\geq 0}, (V_t)_{t\geq 0}\right)} \tag{2.3}$$

für alle $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ *und* $n \geq 1$.
Man nennt $(V_t)_{t\geq 0}$ *aus diesem Grund auch* semi-regenerativ mit Regenerationszeiten $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$.

Beweis[6]**:**
Wir beginnen mit der Feststellung, daß sich für $n \geq 1$, $t \geq 0$ und $k \geq n$ die funktionalen Zusammenhänge

$$\begin{aligned} V_{T_{\nu_n}+t} &= \sum_{i\geq 0} (T_i + W_i + B_i - T_{\nu_n} - t)^+ \cdot \mathbb{1}_{[T_i, T_{i+1})}(T_{\nu_n} + t) \\ &= \sum_{i\geq \nu_n} (T_i + W_i + B_i - T_{\nu_n} - t)^+ \cdot \mathbb{1}_{[T_i, T_{i+1})}(T_{\nu_n} + t) \\ &= \sum_{i\geq 0} \mathbb{1}_{[T_{\nu_n+i} - T_{\nu_n}, T_{\nu_n+i+1} - T_{\nu_n})}(t) \\ &\qquad \times \left(T_{\nu_n+i} + B_{\nu_n+i} + \max_{0\leq s\leq i} \left\{ S_{\nu_n+i} - S_{\nu_n+s} \right\} - T_{\nu_n} - t \right)^+ \end{aligned}$$

[6] vgl. Beweis zu [Al 1] Satz 11.3.1

$$= \sum_{i\geq 0} 1\!\!1_{[T_{\nu_{n+i}}-T_{\nu_n}, T_{\nu_{n+i+1}}-T_{\nu_n})}(t)\Big(\max_{0\leq s\leq i}\{\sum_{j=s}^{i-1} B_{\nu_n+j} + \sum_{j=1}^{s} A_{\nu_n+j}\} + B_{\nu_n+i} - t\Big)^+$$
$$=: f_t\Big((Z_j)_{j\geq n}\Big)$$

und

$$T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k} = \sum_{s=\nu_k}^{\nu_{k+1}-1} A_{s+1} =: g_k\Big((Z_j)_{j\geq n}\Big)$$

ergeben. Damit erhalten wir für alle $t_1,\dots,t_s \in [0,\infty)$ und $k_1,\dots,k_r, n \in I\!N$ mit $0 \leq t_1 < \dots < t_s$ und $0 \leq k_1 < \dots < k_r$ aus der Stationarität der Folge $(Z_n)_{n\geq 1}$, daß der Vektor

$$\big((T_{\nu_{n+k_j+1}} - T_{\nu_{n+k_j}})_{j=1,\dots,r}, (V_{T_{\nu_n}+t_i})_{i=1,\dots,s}\big) = \big(g_{n+k_1},\dots,g_{n+k_r}, f_{t_1},\dots,f_{t_s}\big)\big((Z_i)_{i\geq n}\big)$$

unter jedem P_λ dieselbe Verteilung besitzt wie der Vektor

$$\big((T_{\nu_{k_j+1}} - T_{\nu_{k_j}})_{j=1,\dots,r}, (V_{t_i})_{i=1,\dots,s}\big) = \big(g_{n+k_1},\dots,g_{n+k_r}, f_{t_1},\dots,f_{t_s}\big)\big((Z_i)_{i\geq 0}\big)$$

unter P_ϕ. Alle endlich-dimensionalen Randverteilungen der Wahrscheinlichkeitsmaße in (2.3) stimmen also überein, was zum Nachweis der behaupteten Verteilungsidentität bereits ausreicht. □

Unter den getroffenen Annahmen „regeneriert" sich der Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$ demnach immer dann, wenn ein Kunde bei seinem Erscheinen ein leeres System vorfindet und sich zur gleichen Zeit auch der Ankunftsprozeß $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ „regeneriert".

In natürlicher Weise stellt sich die Frage, ob ähnlich wie bei der Folge $(W_n)_{n\geq 0}$ geeignete Bedingungen an die Zuwachsverteilung der Regenerationszeiten $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$ (beispielsweise hinsichtlich ihrer Arithmetik) den Nachweis für die Konvergenz von $(P_\lambda^{V_t})_{t\geq 0}$ in Verteilung oder gar in Totalvariation gegen eine von $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ unabhängige Grenzverteilung ermöglichen.

Im Fall, daß $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$ einen Erneuerungsprozeß bildet, läßt sich dies bejahen (vgl. hierzu Kapitel 3), in der hier vorliegenden allgemeineren Situation mit 2-abhängigen Zuwächsen $(T_{\nu_n} - T_{\nu_{n-1}})_{n\geq 1}$ ist dies jedoch i.a. - zumindestens mit vergleichbaren Methoden - nicht mehr möglich.

Nichtsdestoweniger erlaubt die semi-regenerative Struktur des Prozesses $(V_t)_{t\geq 0}$ Aussagen über das asymptotische Verhalten von Zeitmitteln, und zwar sowohl bei *pfadweiser* Untersuchung von

$$\frac{1}{t}\int_{[0,t)} 1\!\!1_A(V_s)\, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \quad , A \in I\!B,$$

für $t \to \infty$ als auch *in Erwartung unter beliebigem* P_λ, d.h. bei Betrachtung von

$$\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} 1\!\!1_A(V_s)\, \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) = \frac{1}{t}\int P_\lambda(V_s \in A)\, \lambda\!\!\lambda_0(ds).$$

Theorem 2.20. *In der Situation von Satz 2.19 bezeichne π_V^* die Verteilung*

$$\pi_V^* = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} \cdot E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_{\{V_s \in \bullet\}} \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \right),$$

und es sei $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ eine beliebige Startverteilung des Ankunftsprozesses. Für jede beschränkte, meßbare Funktion $g : I\!R \to [0,\infty)$ besitzt der Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$ dann die asymptotischen Eigenschaften

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{[0,t)} g(V_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) = \int_{[0,\infty)} g(s) \, \pi_V^*(ds) \quad P_\lambda\text{-f.s.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|f|\leq g} \left| \frac{1}{t} E_\lambda \left(\int_{[0,t)} f(V_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \right) - \int_{[0,\infty)} f(s) \, \pi_V^*(ds) \right| = 0$$

Beweis:
Die Beweisideen entstammen im wesentlichen den Ausführungen von P. Glynn und K. Sigman zu vergleichbaren Aussagen in einem allgemeineren Kontext in [Gl/Si], Prop. 3.1 und Th. 3.1.

Definiert man die Zufallsvariablen

$$\tau(t) = \inf\{n \geq 1; \; T_{\nu_n} > t\},$$

$$U_0 = \int_{[0,t\wedge T_{\nu_1})} g(V_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \quad , \quad U_n = \int_{[T_{\nu_n}, T_{\nu_{n+1}})} g(V_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds),$$

$$\Delta_t = 1\!\!1_{\{t > T_{\nu_1}\}} \cdot \int_{[T_{\nu_{\tau(t)-1}}, t)} g(V_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds)$$

für $t \geq 0$ und $n \in I\!N$, gilt stets

$$\frac{1}{t} \int_{[0,t)} g(V_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) = \frac{1}{t} \left(U_0 + \sum_{n=1}^{\tau(t)-1} U_n + \Delta_t \right).$$

Sowohl $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$ als auch $(U_n)_{n\geq 1}$ sind unter P_λ stationäre Folgen mit 2-abhängigen Zuwächsen, genügen daher dem starken Gesetz der großen Zahlen. Außerdem gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{t} = \frac{1}{E_\lambda(T_{\nu_2} - T_{\nu_1})} = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} \quad P_\lambda\text{-f.s.}$$

(vgl. Satz 1.16, Kapitel 1) und deshalb

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\tau(t)-1}U_n &= \lim_{t\to\infty}\frac{\tau(t)}{t}\cdot\frac{\sum_{n=1}^{\tau(t)-1}U_n}{\tau(t)}\\ &= \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}}\cdot E_\lambda U_1 = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}}\cdot E_\phi\left(\int_{[0,T_{\nu_1})}g(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)\\ &= \int_{[0,\infty)}g(s)\,\pi_V^*(ds)\quad P_\lambda\text{-f.s.}\end{aligned}$$

Zum Nachweis der ersten Behauptung muß somit nur noch

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot U_0 = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\cdot\Delta_t = 0\quad P_\lambda\text{-f.s.}$$

gezeigt werden. Das folgt aber leicht aus den Abschätzungen

$$\left|\frac{1}{t}\cdot U_0\right| \le \frac{1}{t}\cdot\|g\|_\infty\cdot T_{\nu_1}\qquad\text{und}$$

$$\left|\frac{1}{t}\cdot\Delta_t\right| \le \frac{1}{t}\int_{T_{\nu_{\tau(t)-1}}}^{T_{\nu_{\tau(t)}}}|g(V_s)|\,\lambda\!\!\lambda_0(ds) \le \|g\|_\infty\cdot\frac{1}{\tau(t)-1}\cdot\left(T_{\nu_{\tau(t)}}-T_{\nu_{\tau(t)-1}}\right)$$

unter Verwendung der P_λ-fast sicheren Endlichkeit von T_{ν_1} und des starken Gesetzes der großen Zahlen für $(T_{\nu_n})_{n\ge1}$, weil damit die Terme auf der rechten Seite jeweils P_λ-f.s. gegen 0 konvergieren.

Die zweite Behauptung wird zunächst für P_ϕ gezeigt. Nach Zerlegung in Positiv- und Negativteil kann man sich bei der Bildung des Supremums auf Funktionen f mit $0\le f\le g$ beschränken. Mit

$$\beta = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}}\in(0,\infty)\quad\text{und}$$

$$\lfloor x\rfloor := \max\{n\in\mathbb{Z};\ n\le x\}$$

folgt für jede derartige Funktion und beliebiges $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t)}f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)\\ &= \frac{1}{t}\int_{\{\tau(t)<(\beta+\varepsilon)t\}}\int_{[0,t)}f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\phi\\ &\quad+\frac{1}{t}\int_{\{\tau(t)\ge(\beta+\varepsilon)t\}}\int_{[0,t)}f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\phi\\ &\le \frac{1}{t}\int_{\{T_{\nu_{\lfloor(\beta+\varepsilon)t\rfloor}}>t\}}\int_{[0,t)}f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\phi+\|g\|_\infty\cdot\int 1\!\!1_{\{\frac{\tau(t)}{t}\ge\beta+\varepsilon\}}\,dP_\phi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\lfloor(\beta+\varepsilon)t\rfloor} E_\phi\left(\int_{[T_{\nu_{k-1}},T_{\nu_k})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) + \|g\|_\infty \cdot P_\phi\Big(\frac{\tau(t)}{t} \ge \beta+\varepsilon\Big)\\
&\le \frac{(\beta+\varepsilon)t}{t} E_\phi\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) + \|g\|_\infty \cdot P_\phi\Big(\frac{\tau(t)}{t} \ge \beta+\varepsilon\Big)\\
&= \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds) + \frac{\varepsilon}{\beta}\int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds) + \|g\|_\infty \cdot P_\phi\Big(\frac{\tau(t)}{t} \ge \beta+\varepsilon\Big)\\
&\le \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds) + \frac{\varepsilon}{\beta}\cdot\|g\|_\infty + \|g\|_\infty \cdot P_\phi\Big(\frac{\tau(t)}{t} \ge \beta+\varepsilon\Big).
\end{aligned}
$$

Mit majorisierter Konvergenz folgt unter Verwendung von

$$
\lim_{t\to\infty} \frac{\tau(t)}{t} = \beta \quad P_\phi\text{-f.s.}
$$

(vgl. Kor 1.16) daraus

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \sup_{0\le f\le g} \frac{1}{t} E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds)\\
&\quad\le \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\cdot\|g\|_\infty + \|g\|_\infty\cdot P_\phi\Big(\frac{\tau(t)}{t}\ge\beta+\varepsilon\Big)\right)\\
&\quad= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\cdot\|g\|_\infty + \|g\|_\infty\cdot P_\phi\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{\tau(t)}{t}\ge\beta+\varepsilon\Big)\right)\\
&\quad= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\varepsilon}{\beta}\cdot\|g\|_\infty \;=\; 0.
\end{aligned}
$$

Umgekehrt führt die Rechnung

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \;\ge\; \frac{1}{t}\int_{\left\{\tau(t)>(\beta-\varepsilon)t\right\}}\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\phi\\
&\quad\ge \frac{1}{t}\int_{\left\{T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}}\le t\right\}}\int_{[0,T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\phi\\
&\quad= \frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)\\
&\qquad -\frac{1}{t}\int_{\left\{T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}}>t\right\}}\int_{[0,T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\phi\\
&\quad\ge \frac{(\beta-\varepsilon)t-1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)\\
&\qquad -\frac{1}{t}\int_{\left\{\tau(t)\le(\beta-\varepsilon)t\right\}}\int_{[0,T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}})} g(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\phi\\
&\quad\ge \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds) - \left(\varepsilon+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{\beta}\cdot\|g\|_\infty - \|g\|_\infty\int\frac{T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}}}{t}\mathbb{1}_{\left\{\frac{\tau(t)}{t}\le\beta-\varepsilon\right\}}\,dP_\phi
\end{aligned}
$$

mit beliebigem $\varepsilon \in (0, \beta)$ unter zusätzlicher Verwendung von

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}{t} \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}}}{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor} = (\beta-\varepsilon)E_\phi T_{\nu_1} = 1 - \frac{\varepsilon}{\beta} \quad P_\phi\text{-f.s.}$$

(Anwendung des Birkhoff'schen Ergodensatzes) auf die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\liminf_{t\to\infty} \sup_{0\le f\le g} \frac{1}{t} E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds) \\
&\ge \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{t\to\infty}\left(\left(\varepsilon + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{\beta}\cdot\|g\|_\infty - \|g\|_\infty \cdot \int \frac{T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}}}{t} 1\!\!1_{\left\{\frac{\tau(t)}{t}\le\beta-\varepsilon\right\}}\,dP_\phi\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(-\|g\|_\infty \cdot \int \lim_{t\to\infty}\frac{T_{\nu_{\lfloor(\beta-\varepsilon)t\rfloor}}}{t}\cdot\lim_{t\to\infty} 1\!\!1_{\left\{\frac{\tau(t)}{t}\le\beta-\varepsilon\right\}}\,dP_\phi\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(-\|g\|_\infty\cdot\int\left(1-\frac{\varepsilon}{\beta}\right)\cdot 0\,dP_\phi\right) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt muß folglich

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{0\le f\le g}\left|\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds)\right| = 0$$

gelten.

Nun zum Nachweis der Behauptung für beliebiges P_λ:
Einerseits gelangt man über

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\
&\le \frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t\wedge T_{\nu_1})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) + \frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[T_{\nu_1},T_{\nu_1}+t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\
&= \frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t\wedge T_{\nu_1})} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) + \frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\
&\le \|g\|_\infty\cdot E_\lambda\left(1\wedge\frac{T_{\nu_1}}{t}\right) + \frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)
\end{aligned}$$

zur Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\sup_{0\le f\le g}\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\
&\qquad \le \lim_{t\to\infty}\|g\|_\infty\cdot E_\lambda\left(1\wedge\frac{T_{\nu_1}}{t}\right) = \|g\|_\infty\cdot E_\lambda\left(\lim_{t\to\infty} 1\wedge\frac{T_{\nu_1}}{t}\right) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für beliebiges $\varepsilon \in (0,1)$

$$\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \;\ge\; \frac{1}{t}\int_{\{T_{\nu_1}\le\varepsilon t\}}\int_{[T_{\nu_1},t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\lambda$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{t}\int_{\{T_{\nu_1}\leq\varepsilon t\}}\int_{[T_{\nu_1},T_{\nu_1}+(t-\varepsilon t))} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\lambda \\
&= \frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[T_{\nu_1},T_{\nu_1}+(t-\varepsilon t))} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\
&\quad -\frac{1}{t}\int_{\{T_{\nu_1}>\varepsilon t\}}\int_{[T_{\nu_1},T_{\nu_1}+(t-\varepsilon t))} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\,dP_\lambda \\
&\geq \frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t-\varepsilon t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - (1-\varepsilon)\cdot\|g\|_\infty\cdot P_\lambda(T_{\nu_1}>\varepsilon t) \\
&\geq \frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \varepsilon\cdot\|g\|_\infty - (1-\varepsilon)\cdot\|g\|_\infty\cdot P_\lambda(T_{\nu_1}>\varepsilon t)
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\begin{aligned}
&\liminf_{t\to\infty}\sup_{0\leq f\leq g}\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \frac{1}{t}E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\
&\quad\geq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{t\to\infty}\Big(-\varepsilon\cdot\|g\|_\infty - (1-\varepsilon)\cdot\|g\|_\infty\cdot P_\lambda(T_{\nu_1}>\varepsilon t)\Big) \\
&\quad= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(-\varepsilon\cdot\|g\|_\infty - (1-\varepsilon)\cdot\|g\|_\infty\cdot\lim_{t\to\infty}P_\lambda(T_{\nu_1}>\varepsilon t)\Big) \;=\; 0
\end{aligned}$$

und schließlich auch

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\sup_{0\leq f\leq g}\left|\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds)\right| \\
&\quad\leq \lim_{t\to\infty}\sup_{0\leq f\leq g}\left(\left|\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)\right|\right. \\
&\qquad\left. + \left|E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds)\right|\right) \\
&\quad\leq \lim_{t\to\infty}\sup_{0\leq f\leq g}\left|\frac{1}{t}E_\lambda\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)\right| \\
&\qquad + \lim_{t\to\infty}\sup_{0\leq f\leq g}\left|E_\phi\left(\int_{[0,t)} f(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\,\pi_V^*(ds)\right| \;=\; 0.
\end{aligned}$$

□

Im obigen Satz ergibt sich bei spezieller Wahl von g als Indikatorfunktion bzw. $g\equiv 1$:

Korollar 2.21. *Gegeben die Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes, gilt*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{[0,t)} 1\!\!1_A(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds) = \pi_V^*(A) \quad P_\lambda\text{-f.s.}$$

für jede Menge $A\in I\!\!B_{|[0,\infty)}$ *sowie*

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\frac{1}{t}\int_{[0,t)} P_\lambda^{V_s}\,\lambda\!\!\lambda_0(ds) - \pi_V^*\right\| = 0.$$

2.6 Die Warteschlangenlänge

Die Schlangenlänge Q_t, d.h. die Zahl der wartenden einschließlich des gerade bedienten Kunden zum Zeitpunkt $t \geq 0$, kann mit den bereits eingeführten Zufallsgrößen formal definiert werden über die Beziehung

$$Q_t = \sum_{n \geq 0} 1\!\!1_{\{T_n \leq t, T_n + W_n + B_n > t\}}.$$

Die Analyse des Prozesses $(Q_t)_{t\geq 0}$ kann ebenfalls mit den Methoden des letzten Abschnitts erfolgen. Das liegt daran, daß er unter den Voraussetzungen (C.1) bis (C.3) von seiner Struktur her im wesentlichen dem Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$ der anstehenden Arbeit ähnelt.
Zum einen handelt es sich ebenfalls um einen *càdlàg-Prozeß*, abzulesen an der o.g. formalen Definition, zum anderen deuten bereits die Beziehungen

$$\{V_t = 0\} = \{Q_t = 0\} \quad \forall t \in [0, \infty),$$

$$Q_{T_{\nu_n}-} = V_{T_{\nu_n}-} = W_{\nu_n} = 0 \quad \forall n \geq 0$$

an, daß erneut den Eigenschaften der Folge $(T_{\nu_n})_{n\geq 0}$ eine entscheidende Bedeutung bei den nachfolgenden Resultaten zukommt.

Satz 2.22. *Die Folge* $(T_{\nu_n})_{n\geq 0}$ *macht den càdlàg-Prozeß* $(Q_t)_{t\geq 0}$ *unter den Voraussetzungen* (C.1) *bis* (C.3) *zu einem semi-regenerativen Prozeß, genauer gilt*

$$P_\lambda^{\left((T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k})_{k\geq n}, (Q_{T_{\nu_n}+t})_{t\geq 0}\right)} = P_\phi^{\left((T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k})_{k\geq 0}, (Q_t)_{t\geq 0}\right)}$$

für alle $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ *und* $n \geq 1$.

Beweis:
Der Beweis bildet eine Adaption des Beweises von Satz 2.19, wenn man nachrechnet, daß sich $Q_{T_{\nu_n}+t}$ für $n \geq 1$ und $t \geq 0$ darstellen läßt als

$$\begin{aligned}
Q_{T_{\nu_n}+t} &= \sum_{k\geq 0} 1\!\!1_{\{T_k \leq T_{\nu_n}+t, T_k + W_k + B_k > T_{\nu_n}+t\}} \\
&= \sum_{k\geq 0} 1\!\!1_{\{T_{\nu_n+k} \leq T_{\nu_n}+t, T_{\nu_n+k} + W_{\nu_n+k} + B_{\nu_n+k} > T_{\nu_n}+t\}} \\
&= \sum_{k\geq 0} 1\!\!1_{\{\sum_{j=1}^k A_{\nu_n+j} \leq t, W_{\nu_n+k} + B_{\nu_n+k} + \sum_{j=1}^k A_{\nu_n+j} > t\}} \\
&=: f_t\big((Z_i)_{i\geq n}\big)
\end{aligned}$$

Benutzt haben wir in der zweiten Zeile, daß für $k < \nu_n$ der Abgangszeitpunkt des k-ten Kunden wegen $W_{\nu_n} = 0$ vor dem Ankunftszeitpunkt des ν_n-ten Kunden liegen muß, d.h. es gilt

$$T_k + W_k + B_k \leq T_{\nu_n} \leq T_{\nu_n} + t \quad \forall t \geq 0. \qquad \square$$

Da der Schlangenlänge-Prozeß $(Q_t)_{t\geq 0}$ damit dieselben „Regenerationseigenschaften" besitzt wie der Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$, kann ohne Angabe des Beweises das folgende Analogon zu den Zeitmittel-Resultaten aus Theorem 2.20 und Korollar 2.21 notiert werden.

Theorem 2.23. *In der Situation von Satz 2.22 bezeichne π_Q^* die Verteilung*

$$\pi_Q^* = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} \cdot E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_{\{Q_s \in \bullet\}} \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \right),$$

und es sei $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ eine beliebige Startverteilung des Ankunftsprozesses. Für jede beschränkte, meßbare Funktion $g : I\!\!R \longrightarrow [0,\infty)$ besitzt der Prozeß $(Q_t)_{t\geq 0}$ dann die asymptotischen Eigenschaften

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{[0,t)} g(Q_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) = \int_{[0,\infty)} g(s) \, \pi_Q^*(ds) \quad P_\lambda\text{-f.s.},$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|f|\leq g} \left| \frac{1}{t} E_\lambda \left(\int_{[0,t)} f(Q_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \right) - \int_{[0,\infty)} f(s) \, \pi_Q^*(ds) \right| = 0.$$

Bei spezieller Wahl von g als Indikatorfunktion bzw. $g \equiv 1$ folgt außerdem

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{[0,t)} 1\!\!1_A(Q_s) \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) = \pi_Q^*(A) \quad P_\lambda\text{-f.s.}$$

für jede Menge $A \in I\!\!B_{|[0,\infty)}$ sowie

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \frac{1}{t} \int_{[0,t)} P_\lambda^{Q_s} \, \lambda\!\!\lambda_0(ds) - \pi_Q^* \right\| = 0.$$

2.7 Der Abgangsprozeß

Die Resultate dieses und des folgenden Abschnitts sind sinngemäß dem Artikel [Nu 2] entnommen. Das dort vorgestellte Modell beinhaltet jedoch etwas restriktivere Annahmen hinsichtlich der Bedienungszeiten-Folge $(B_n)_{n\geq 0}$. Genauer wird für jedes $n \geq 0$ vorausgesetzt, daß - gegeben M_n - B_n bedingt unabhängig von *allen* übrigen Grßen des Ankunftsprozesses ist. Insbesondere erfolgt ein konkreter Verweis auf das SM/G/1-Modell.

Erfreulicherweise lassen sich die Ergebnisse direkt auf unser allgemeines SM/SM/1-Modell ausweiten.

Losgelöst von den Notationen des Modells gilt folgendes

Lemma 2.24. *Es seien $M = (M_n)_{n\geq 0}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ sowie X_0 ein von $(M_n)_{n\geq 0}$ unabhängiger Zufallsvektor mit Werten in $\mathbb{R}^d$ oder $X_0 = g(M_0)$ für eine meßbare Funktion $g : S \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Weiter seien $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine meßbare Funktion und X_n, $n \geq 1$, definiert durch*

$$X_n = f(M_{n-1}, M_n).$$

Dann bildet $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit Steuerkette M.

Beweis:
Für beliebiges $n \geq 0$ sowie $A \in \mathcal{S}$ und $B \in \mathbb{B}^d$ gilt:

$$\begin{aligned}
&P(M_{n+1} \in A, X_{n+1} \in B \mid M_0, \ldots, M_n, X_0, \ldots, X_n) \\
&= P(M_{n+1} \in A, f(M_n, M_{n+1}) \in B \mid M_0, \ldots, M_n, X_0) \\
&= P(M_{n+1} \in A, f(M_n, M_{n+1}) \in B \mid M_0, \ldots, M_n) \\
&= P(M_{n+1} \in A, f(M_n, M_{n+1}) \in B \mid M_n) \\
&= P(M_{n+1} \in A, X_{n+1} \in B \mid M_n)
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Markov-Eigenschaft von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$, die zeitliche Homogenität erhält man aus derjenigen von M und der vorletzten Zeile obiger Rechnung. Außerdem hängt die errechnete bedingte Wahrscheinlichkeit nur von M_n ab. $\square$

Nach diesem allgemeinen Hilfsresultat gelten im weiteren Verlauf wieder sämtliche Vereinbarungen des SM/SM/1-Modells. Zusätzlich bezeichnen wir mit D_n den *Abgangszeitpunkt* des n-ten Kunden. Offenbar ergibt sich D_n formal aus

$$D_n = T_n + W_n + B_n.$$

Das folgende Theorem zeigt, daß sich eine Markov-Kette $(\tilde{M}_n)_{n\geq 0}$ definieren läßt, so daß neben $(M_n, T_n)_{n\geq 0}$ auch $(\tilde{M}_n, D_n)_{n\geq 0}$ zu einem Markov-Erneuerungsprozeß mit steuernder Harris-Kette wird.

Theorem 2.25. *Gilt für die Verkehrsintensität ρ im SM/SM/1-Modell $\rho < 1$, so definiert die Folge $\tilde{M} = (\tilde{M}_n)_{n\geq 0}$ mit*

$$\tilde{M}_n := (M_n, A_n, B_n, W_n)$$

eine ergodische Harris-Kette und $(\tilde{M}_n, D_n)_{n\geq 0}$ einen Markov-Erneuerungsprozeß. Für den Übergangskern $\mathbb{P}_D$ der zugehörigen Markov-modulierten Folge

$$(\tilde{M}_n, D_n - D_{n-1})_{n\geq 0} \qquad [D_{-1} := 0]$$

gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_D\big((m, a, b, w), C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 \times D\big) \\
&= \int_{C_1\times C_2\times C_3} \mathbb{1}_{C_4}\big((w + b - y)^+\big) \cdot \mathbb{1}_D\big((w + b - y)^- + z\big)\,\mathbb{L}(m, ds \times dy \times dz),
\end{aligned}$$

wobei $C_1 \in \mathcal{S}$, $C_2, C_3, C_4, D \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$, $m \in S$, $a, b, w \in [0, \infty)$ seien und $\mathbb{L}$ für den Übergangskern der Markov-Kette $(M_n, A_n, B_n)_{n\geq 0}$ steht.

Der MEP $(\tilde{M}_n, D_n)_{n\geq 0}$ wird als Abgangsprozeß bezeichnet.

Beweis:
Man sieht sofort, daß mit $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ auch $\hat{M} = (\hat{M}_n)_{n\geq 0} = (M_n, A_n, B_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit Steuerkette M und damit zugleich auch eine ergodische Harris-Kette ist. Lemma 2.24 besagt, daß dies dann auch für die Folge $(\hat{M}_n, X_n)_{n\geq 0}$ der Fall ist, so daß sich wie in Satz 2.12 mit $\hat{M}$ statt M ergibt, daß damit $(\hat{M}_n, W_n)_{n\geq 0} = \tilde{M}$ eine ergodische Harris-Kette ist. Aus den Darstellungen $D_0 = W_0 + B_0 =: g(\tilde{M}_0)$ und

$$\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= W_n + B_n + T_n - W_{n-1} - B_{n-1} - T_{n-1} \\ &= W_n + B_n + A_n - W_{n-1} - B_{n-1} =: f(\tilde{M}_{n-1}, \tilde{M}_n) \end{aligned}$$

für $n \geq 1$ folgt erneut mit Lemma 2.24: $(\tilde{M}, D_n - D_{n-1})_{n\geq 0}$ ist eine Markov-modulierte Folge mit Steuerkette $\tilde{M}$ und Werten in $(S \times [0,\infty)^3) \times [0,\infty)$. Deshalb ist $(\tilde{M}_n, D_n)_{n\geq 0}$ ein Markov-Erneuerungsprozeß.

Berechnung von $I\!P_D$:

Mit der Darstellung

$$\begin{aligned} D_1 - D_0 &= W_1 - W_0 + B_1 - B_0 + A_1 = (W_0 + B_0 - A_1)^+ - W_0 + B_1 - B_0 + A_1 \\ &= (W_0 + B_0 - A_1)^- + B_1 \end{aligned}$$

und der Unabhängigkeit des Ankunftsprozesses von W_0 kommt man folgendermaßen auf die Struktur des Übergangskerns $I\!P_D$:

$$\begin{aligned} &I\!P_D\big((m,a,b,w), C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 \times D\big) \\ &= P\Big((M_1, A_1, B_1, W_1) \in \times_{k=1}^4 C_k, D_1 \in D \,\Big|\, (M_0, A_0, B_0, W_0) = (m,a,b,w)\Big) \\ &= P\Big(\big\{(M_1, A_1, B_1) \in \times_{k=1}^3 C_k, (W_0 + B_0 - A_1)^+ \in C_4\big\} \\ &\qquad\qquad \cap \big\{(W_0 + B_0 - A_1)^- + B_1 \in D\big\} \,\Big|\, (M_0, A_0, B_0, W_0) = (m,a,b,w)\Big) \\ &= P\Big(\big\{(M_1, A_1, B_1) \in \times_{k=1}^3 C_k, (w + b - A_1)^+ \in C_4\big\} \\ &\qquad\qquad \cap \big\{(w + b - A_1)^- + B_1 \in D\big\} \,\Big|\, (M_0, A_0, B_0, W_0) = (m,a,b,w)\Big) \\ &= P\Big(\big\{(M_1, A_1, B_1) \in \times_{k=1}^3 C_k, (w + b - A_1)^+ \in C_4\big\} \\ &\qquad\qquad\qquad \cap \big\{(w + b - A_1)^- + B_1 \in D\big\} \,\Big|\, (M_0, A_0, B_0) = (m,a,b)\Big) \\ &= \int_{C_1 \times C_2 \times C_3} 1\!\!1_{C_4}\big((w+b-y)^+\big) \cdot 1\!\!1_D\big((w+b-y)^- + z\big) \\ &\qquad\qquad \times P^{(M_1,A_1,B_1)\,|\,(M_0,A_0,B_0)=(m,a,b)}(ds \times dy \times dz) \\ &= \int_{C_1 \times C_2 \times C_3} 1\!\!1_{C_4}\big((w+b-y)^+\big) \cdot 1\!\!1_D\big((w+b-y)^- + z\big) I\!L(m, ds \times dy \times dz) \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 2.26. Man sieht, daß der Übergangskern $I\!P_D$ vom Vektor (m, a, b, w) nur über (m, b, w) abhängt. Aus diesem Grunde ist auch $((M_n, B_n, W_n), D_n)_{n\geq 0}$ ein Markov-Erneuerungsprozeß, und zwar mit Übergangskern $\tilde{I\!P}_D$, gegeben durch

$$\tilde{I\!P}_D\big((m,b,w), C_1 \times C_2 \times C_3 \times D\big) = I\!P_D\big((m,a,b,w), C_1 \times [0,\infty) \times C_2 \times C_3 \times D\big)$$

für $m \in S$, $a, b, w \in [0, \infty)$, $C_1 \in \mathcal{S}$, $C_1, C_2, C_3, D \in I\!B_{|[0,\infty)}$.

Zum Abschluß werfen wir noch einen Blick auf die mittlere Zeit zwischen zwei Abgangszeitpunkten. Vage formuliert besagt der nächste Satz, daß im Gleichgewichtszustand des Systems die mittlere Zeit zwischen zwei derartigen Zeitpunkten mit der mittleren Zwischenankunftszeit übereinstimmt.

Satz 2.27. *In der Situation von Theorem 2.25 bezeichne $\tilde{\nu}$ die stationäre Verteilung von $\tilde{M}$. Für $n \geq 0$ folgt dann*

$$E_{\tilde{\nu}}(D_n - D_{n-1}) = E_{\tilde{\nu}} A_1 = E_{\xi^*} A_1.$$

Beweis:
Die Aussage ergibt sich unmittelbar aus $D_n - D_{n-1} = W_n - W_{n-1} + B_n - B_{n-1} + A_n$, weil für jedes $n \geq 1$ aufgrund der Invarianzeigenschaft von $\tilde{\nu}$

$$P_{\tilde{\nu}}^{(W_n, B_n)} = P_{\tilde{\nu}}^{(W_{n-1}, B_{n-1})}$$

und

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\nu}} A_n = E_{\tilde{\nu}} A_1 &= \int E(A_1 \mid M_0 = s)\, dP_{\tilde{\nu}}^{M_0}(ds) \\ &= \int E(A_1 \mid M_0 = s)\, dP_{\xi^*}^{M_0}(ds) = E_{\xi^*} A_1 \end{aligned}$$

gelten. Die letzte Gleichheit kommt zustande, weil ξ^* als eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von M mit der ersten Randverteilung von $\tilde{\nu}$ übereinstimmen muß. □

2.8 SM/SM/1-Tandem-Systeme

Die Tatsache, daß sich unter der Voraussetzung $\rho < 1$ die Struktur des Ankunftsprozesses auf den Abgangsprozeß überträgt, erleichtert die mathematische Behandlung von sogenannten *Tandem-Systemen*, in denen die Kunden nacheinander $m \geq 2$ Stationen durchlaufen. Der Abgangsprozeß einer Station ist dann zugleich der Ankunftsprozeß der dahinterliegenden Stationen, die dadurch isoliert betrachtet auch jeweils wieder ein SM/SM/1-System bilden. Für den n-ten Kunden bezeichne in diesem Abschnitt

- T_n den Ankunftszeitpunkt an Station 1
- $T_n^{(i)}$ die Abgangszeit an Station i
- $W_n^{(i)}$ die Wartezeit an Station i
- $B_n^{(i)}$ die Bedienungszeit an Station i
- $A_n^{(i)} := T_n^{(i)} - T_{n-1}^{(i)}$, $A_n^{(0)} := A_n$
- $A_n^* := (A_n^{(0)}, \ldots, A_n^{(m-1)})$
- $W_n^* := (W_n^{(1)}, \ldots, W_n^{(m)})$
- $B_n^* := (B_n^{(1)}, \ldots, B_n^{(m)})$

Schreibe weiter $D_n := T_n^{(m)}$ für den Zeitpunkt, an dem Kunde n das Gesamtsystem verläßt.

Theorem 2.28. *Gegeben ein Tandem-System der oben beschriebenen Art, erfülle der Ankunftsprozeß an Station 1 die Voraussetzungen eines SM/SM/1-Ankunftsprozesses mit $\rho < 1$. Ferner sei für $n \geq 0$ und $i \in \{2, \ldots, m\}$ die Zufallsgröße $B_n^{(i)}$ bedingt unabhängig von allen weiteren Zufallsgrößen gegeben M_n, und es gelte $E_{\xi^*} A_1 > E_{\xi^*} B_0^{(i)}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $M^* = (M_n^*)_{n \geq 0}$ *mit* $M_n^* := (M_n, A_n^*, B_n^*, W_n^*)$ *ist eine ergodische Harris-Kette.*

(b) $(M_n^*, D_n)_{n \geq 0}$ *ist ein Markov-Erneuerungsprozeß.*

(c) Bezeichnet ψ^* die stationäre Verteilung von $(M_n^*)_{n \geq 0}$, so gilt für jedes $n \geq 1$ und $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$E_{\psi^*} A_n^{(i)} = E_{\xi^*} A_1,$$

also insbesondere auch $\quad E_{\psi^*}(D_n - D_{n-1}) = E_{\xi^*} A_1.$

Beweis:
Wir führen eine Induktion über die Anzahl m der Stationen durch. Im Fall $m = 1$ hat man exakt die Aussage von Theorem 2.25. Im Induktionsschluß von $m-1$ auf m, $m > 1$, kann man zunächst nach Induktionsvoraussetzung $(M_n')_{n \geq 0}$ mit

$$M_n' = (M_n, A_n^{(0)}, \ldots, A_n^{(m-2)}, B_n^{(1)}, \ldots, B_n^{(m-1)}, W_n^{(1)}, \ldots, W_n^{(m-1)})$$

als ergodische Harris-Kette und $(M_n', T_n^{(m-1)})_{n \geq 0}$ als MEP annehmen. Die Voraussetzung an die bedingten Verteilungen von $B_n^{(m)}$ gegeben M_n für $n \geq 0$ sichert dann, daß $(M_n', A_n^{(m-1)}, B_{n-1}^{(m)})_{n \geq 0}$ $[B_{-1}^{(m)} := 0]$ eine Markov-modulierte Folge ist. Da diese gerade den Ankunftsprozeß an Station m beschreibt, ist Station m isoliert betrachtet wieder ein SM/SM/1-System. ψ bezeichne die stationäre Verteilung von $(M'_n)_{n\geq 0}$. Nach Induktionsvoraussetzung hat man

$$E_\psi A_1^{(m-1)} = E_{\xi^*} A_1 > E_{\xi^*} B_0^{(m)} = E_\psi B_0^{(m)},$$

und man kann erneut Theorem 2.25 anwenden, d.h.

$$(M'_n, A_n^{(m-1)}, B_n^{(m)}, W_n^{(m)})_{n\geq 0} \cong (M_n^*)_{n\geq 0}$$

bildet eine ergodische Harris-Kette ($\cong$ meint dabei, die Komponenten der Folgen sind gleich bis auf Permutation) und $(M_n^*, D_n)_{n\geq 0}$ einen MEP mit

$$E_{\psi^*} A_n^{(m)} = E_\psi A_n^{(m-1)} = E_{\xi^*} A_1 \qquad \forall n \geq 1.$$

$\square$

Bemerkung 2.29. In der Situation von Theorem 2.28 zeigt eine erneute Induktion über m zusammen mit der Bemerkung im Anschluß an Theorem 2.25, daß anstelle von $(M_n^*, D_n)_{n\geq 0}$ auch die Folge $((M_n, B_n^*, W_n^*), D_n)_{n\geq 0}$ ein MEP ist, auf den Vektor A_n^* in M_n^* kann also wiederum verzichtet werden.

Kapitel 3

Das SM/SM/1-System bei endlicher Steuerung

Unter Beibehaltung des allgemeinen SM/SM/1-Modells sei fortan der Zustandsraum S der steuernden Markov-Kette $M = (M_n)_{n \geq 0}$ endlich und M eine positiv rekurrente DMK (d.h. M ist irreduzibel und aperiodisch, und jeder Zustand $i \in S$ ist positiv rekurrent). Die stationäre Verteilung ξ^* von M ergibt sich dann unabhängig von $i \in S$ zu

$$\xi^*(A) = \frac{1}{E_i \tau_1(i)} E_i \left(\sum_{k=0}^{\tau_1(i)-1} \mathbb{1}_A(M_n) \right) \quad , A \in \mathcal{S},$$

wenn $\tau_1(i) := \inf\{k \geq 1;\ M_k = i\}$ die erste Rekurrenzzeit von M in den Zustand i bezeichnet.

Diese einfachere Struktur der Steuerkette erlaubt eine genauere Analyse aller Markov-modulierten Folgen im SM/SM/1-Modell, was u.a. eine explizitere Darstellung der Grenzverteilungen π_W^*, π_V^* und π_Q^* im Falle ihrer Existenz zuläßt. Die dafür relevanten besonderen Eigenschaften einer Markov-modulierten Folge mit diskreter Steuerkette stellen wir in allgemeiner Form - losgelöst vom Kontext des SM/SM/1-Modells - in Abschnitt 3.1 zusammen.

Des weiteren ermöglicht es die gewählte Modellvariante, Bedingungen abzuleiten, die neben den bereits nachgewiesenen Konvergenzen der Zeitmittel

$$\frac{1}{t} \int_{[0,t)} P_\lambda^{V_s}\, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \quad \text{und} \quad \frac{1}{t} \int_{[0,t)} P_\lambda^{Q_s}\, \lambda\!\!\lambda_0(ds)$$

gegen π_V^* bzw. π_Q^* auch noch ein entsprechendes Grenzverhalten der *ungemittelten* Verteilungen

$$P_\lambda^{V_t} \quad \text{bzw.} \quad P_\lambda^{Q_t}$$

für $t \to \infty$ implizieren. Die Basis hierfür bildet die Theorie der schon mehrfach erwähnten *regenerativen Prozesse*, die im notwendigen Umfang ebenfalls vorab in Abschnitt 3.2 behandelt wird.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels ist diversen Verteilungsidentitäten zwischen den auftretenden Grenzverteilungen gewidmet.

3.1 Markov-Random-Walks bei diskreter Steuerung

Ungeachtet der Bezeichnungen des SM/SM/1-Modells sei allgemein $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit positiv rekurrenter diskreter Steuerkette.

Anders als im Fall einer positiv Harris-rekurrenten Steuerkette, wo für $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine Zerlegung in stationäre, jedoch nicht notwendigerweise unabhängige Zyklen existiert, erlaubt die hier vorliegende spezielle Gestalt von M eine Zerlegung in unabhängige Zyklen, jedoch nur für die in der zweiten Komponente verschobene Folge $(M_n, X_{n+1})_{n\geq 0}$.

Satz 3.1 ([Al 3] *Satz VIII/3.1*). *Gegeben eine (d-dimensionale) Markov-modulierte Folge $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ mit positiv rekurrenter diskreter Steuerkette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ und einen beliebigen Zustand $i \in S$, sei $(\tau_n(i))_{n\geq 0}$ der Erneuerungsprozeß (bzgl. P_i) der sukzessiven Rückkehrzeiten von M nach i, also $\tau_0(i) = 0$ und*

$$\tau_n(i) = \inf\{k > \tau_{n-1}(i); M_k = i\}$$

für $n \geq 1$. Dann sind die Zyklen

$$Z_n := \big(\tau_{n+1}(i) - \tau_n(i), (M_k, X_{k+1})_{\tau_n(i)\leq k<\tau_{n+1}(i)}\big) \quad , n \geq 0$$

unter jedem P_λ stochastisch unabhängig und für $n \geq 1$ außerdem identisch verteilt gemäß $P_i^{Z_0}$. Die mittlere Zykluslänge $E_i\tau_1(i)$ ist endlich.

Beweis:
Wir schreiben kurz τ_n statt $\tau_n(i)$. $\lambda \in \mathcal{W}(S \times I\!R^d)$ sei eine beliebige Auftaktverteilung, $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ die kanonische Filtration von $(M_k, X_k)_{k\geq 0}$ und $n \geq 1$. Dann liefert die starke Markov-Eigenschaft für Markov-modulierte Folgen

$$P_\lambda^{(M_{\tau_n+k}, X_{\tau_n+k})_{k\geq 1}\,|\,\mathcal{F}_{\tau_n}} = P_\lambda^{(M_{\tau_n+k}, X_{\tau_n+k})_{k\geq 1}\,|\,M_{\tau_n}} = P_i^{(M_k, X_k)_{k\geq 1}},$$

d.h. $(M_{\tau_n+k}, X_{\tau_n+k})_{k\geq 1}$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_{\tau_n}$. Die Behauptungen folgen nun aus den Darstellungen

$$\tau_{n+1} - \tau_n = 1 + \sum_{k\geq 1} 1\!\!1_{\{M_{\tau_n+r}\neq i, 1\leq r\leq k\}} =: f\big((M_{\tau_n+k})_{k\geq 1}\big),$$

$$Z_n = \Big(f\big((M_{\tau_n+k})_{k\geq 1}\big), \big((i, X_{\tau_n+1}), (M_{\tau_n+r}, X_{\tau_n+r+1}), 1 \leq r < f\big((M_{\tau_n+k})_{k\geq 1}\big)\big)\Big)$$
$$=: g\big((M_{\tau_n+k}, X_{\tau_n+k})_{k\geq 1}\big)$$

für alle $n \geq 0$, der $\mathcal{F}_{\tau_{n+1}}$-Meßbarkeit von Z_n und der positiven Rekurrenz von M. □

Korollar 3.2. *In der Situation von Satz 3.1 seien $d = 1$, $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ der Markov-Random-Walk mit Zuwächsen $(X_n)_{n\geq 0}$ und $\mu = E_{\xi^*}X_1$ dessen stationäre Drift. Gilt dann $\mu < 0$, so folgt*

$$E_i\sigma < \infty$$

für alle $i \in S$ und den ersten absteigenden Leiterindex

$$\sigma = \inf\{n \geq 1;\ S_n < 0\}$$

von $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$.

Beweis:
Es seien $i \in S$, U das Erneuerungsmaß des SRW (bzgl. P_i) $(S_{\tau_n(i)})_{n\geq 0}$ und

$$\tilde\sigma = \inf\{n \geq 1;\ S_{\tau_n(i)} < 0\}$$

der erste schwach absteigende Leiterindex von $(S_{\tau_n(i)})_{n\geq 0}$. Die Drift dieses SRW berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
E_iS_{\tau_1(i)} &= E_i\left(\sum_{k=1}^{\tau_1(i)} X_k\right) = \sum_{k\geq 1} E_i(X_k \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_1(i)>k-1\}}) \\
&= \sum_{k\geq 1} \int_{\{\tau_1(i)>k-1\}} E(X_k \,|\, \mathcal{F}_{k-1})\, dP_i \\
&= \sum_{k\geq 1} \int_{\{\tau_1(i)>k-1\}} E_{M_{k-1}}X_1\, dP_i \\
&= E_i\left(\sum_{k=0}^{\tau_1(i)-1} E_{M_k}X_1\right) = E_i\tau_1(i) \cdot E_{\xi^*}X_1 = E_i\tau_1(i) \cdot \mu < 0.
\end{aligned}$$

Demnach[1] gilt $E_i\tilde\sigma < \infty$. Nun ist $\tilde\sigma$ Stopzeit bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n(i)})_{n\geq 0}$ und $(\tau_n(i))_{n\geq 0}$ bezüglich P_i ein $(\mathcal{F}_{\tau_n(i)})_{n\geq 0}$-adaptierter Erneuerungsprozeß mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \geq 0$ $(\tau_k(i))_{k>n}$ unabhängig von $\mathcal{F}_{\tau_n(i)}$ ist. Die Beziehung

$$\sigma \leq \tau_{\tilde\sigma}(i)$$

und die 1. Waldsche Gleichung implizieren daher

$$E_i\sigma \leq E_i\tau_{\tilde\sigma}(i) = E_i\tau_1(i) \cdot E_i\tilde\sigma < \infty.$$

□

[1] vgl. [Al 1] Kor. 14.2.3

3.2 Regenerative Prozesse

Auch in diesem Abschnitt ignorieren wir noch die Notationen und Interpretationen des SM/SM/1-Modells.

Definition 3.3 ([Al 1] *Def. 10.1.1*). Es sei $T = [0,\infty)$ bzw. $T = \mathbb{N}_0$. Ein stochastischer Prozeß $(R_t)_{t\in T}$ mit beliebigem Zustandsraum $(\mathcal{Y},\mathcal{G})$ heißt *regenerativer Prozeß*, falls ein Erneuerungsprozeß $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ mit Zuwächsen $\tau_1,\tau_2,\ldots$ existiert, so daß gilt:

(a) $((R_{\sigma_n+t})_{t\in T},(\tau_k)_{k>n})$ und $(\sigma_0,\ldots,\sigma_n)$ sind stoch. unabhängig für alle $n\geq 0$.

(b) $((R_{\sigma_n+t})_{t\in T},(\tau_k)_{k>n})$, $n\geq 0$, sind identisch verteilt.

$(\sigma_n)_{n\geq 0}$ heißt auch *eingebetteter Erneuerungsprozeß*, die σ_n für $n\geq 0$ bezeichnet man als *Regenerationszeiten* von $(R_t)_{t\in T}$.

Bemerkung 3.4. Die Forderung (b) charakterisiert sogenannte *semi-regenerative Prozesse*, wobei $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ dann auch von allgemeinerer Struktur sein kann. Beispiele hierzu sind der Schlangenlängeprozeß und der Prozeß der anstehenden Arbeit aus Kapitel 2, deren „Regenerationszeiten“ 2-abhängige Zuwächse besitzen.

Im Hinblick auf später vorzufindende Situationen im SM/SM/1-Modell nehmen wir einerseits ohne Einschränkung an, daß es sich bei $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ um einen echt verschobenen Erneuerugsprozeß handelt (betrachte ansonsten alternativ den Erneuerungsprozeß $(\sigma_n)_{n\geq 1}$), zum anderen setzen wir auf dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$ die Existenz eines weiteren W-Maßes P_0 mit den folgenden Eigenschaften voraus:

(1) Auch unter P_0 ist $(R_t)_{t\in T}$ ein regenerativer Prozeß mit eingebettetem EP $(\sigma_n)_{n\geq 0}$.

(2) Es gelten die Verteilungsidentitäten

$$P^{(R_{\sigma_0+t})_{t\in T}} = P_0^{(R_{\sigma_0+t})_{t\in T}} = P_0^{(R_t)_{t\in T}} \quad , \quad P_0^{\sigma_0} = P_0^{\tau_1} = P^{\tau_1}$$

Im Fall endlicher mittlerer Zykluslänge $\mu = E_0\sigma_0 < \infty$ besitzen regenerative Prozesse asymptotische Eigenschaften, die an diejenigen von positiv-rekurrenten Harris-Ketten erinnern.

Wir beginnen mit dem Fall stetiger Zeit:

Satz 3.5 ([Al 1] *Satz 10.2.1*). $(R_t)_{t\geq 0}$ *sei ein regenerativer Prozeß mit polnischem Zustandsraum* $(\mathcal{Y},\mathcal{G})$*, rechtsseitig stetigen Pfaden und endlicher mittlerer*

Zykluslänge $\mu = E_0\sigma_0 \in (0,\infty)$. $P_0^{\sigma_0}$ *sei nichtarithmetisch. Dann gilt für jede beschränkte, stetige Funktion* $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} Eg(R_t) = \lim_{t\to\infty} E_0 g(R_t) = \int_{\mathcal{Y}} g(s)\, \xi^*(ds), \tag{3.1}$$

wobei die Verteilung ξ^* *definiert ist durch*

$$\xi^*(A) := \frac{1}{\mu} E_0 \left(\int_{[0,\sigma_0)} \mathbb{1}_A(R_t)\, \lambda_0(dt) \right) = \frac{1}{\mu} \int_{[0,\infty)} P_0(\sigma_0 > t, R_t \in A)\, \lambda_0(dt)$$

für $A \in \mathcal{G}$. *Dies ist offenbar äquivalent dazu, daß für* $t \to \infty$ *die Konvergenzen*

$$P^{R_t} \xrightarrow{d} \xi^* \quad \textit{und} \quad P_0^{R_t} \xrightarrow{d} \xi^*$$

gelten.

Beweis:
Ohne Einschränkung sei $0 \le g \le 1$, ansonsten betrachte $\frac{g}{\|g\|_\infty}$ anstelle von g und zerlege diese Funktion in Positiv- und Negativteil. Wir setzen für $t \ge 0$

$$Z(t) := E_0 g(R_t) \quad \text{und} \quad z(t) := E_0\big(g(R_t)\cdot \mathbb{1}_{\{\sigma_0 > t\}}\big).$$

Dann führt die Rechnung

$$\begin{aligned}
E\big(g(R_t)\cdot \mathbb{1}_{\{\sigma_0 \le t\}}\big) &= \int_{[0,t]} E\big(g(R_{\sigma_0+(t-\sigma_0)}) \mid \sigma_0 = s\big) P^{\sigma_0}(ds) \\
&= \int_{[0,t]} E\big(g(R_{\sigma_0+(t-s)}) \mid \sigma_0 = s\big) P^{\sigma_0}(ds) \\
&= \int_{[0,t]} Eg(R_{\sigma_0+(t-s)}) P^{\sigma_0}(ds) \\
&= \int_{[0,t]} Z(t-s) P^{\sigma_0}(ds)
\end{aligned}$$

auf die Gleichung

$$Eg(R_t) = E\big(g(R_t)\cdot \mathbb{1}_{\{\sigma_0 > t\}}\big) + \int_{[0,t]} Z(t-s) P^{\sigma_0}(ds). \tag{3.2}$$

Ersetzen wir hierin P durch P_0, so erhalten wir die Erneuerungsgleichung

$$Z(t) = z(t) + Z * Q_0(t)$$

mit $Q_0 = P_0^{\sigma_0}$ und eindeutig bestimmter Lösung $Z = z * U$. U bezeichnet dabei das zu Q_0 gehörige Erneuerungsmaß.

$(R_t)_{t\geq 0}$ hat rechtsseitig stetige Pfade und g ist stetig, deshalb ist auch z rechtsseitig stetig und somit sogar $\lambda\!\!\lambda_0$-fast überall stetig. Zudem gilt $z(t) \leq P_0(\sigma_0 > t) =: f(t)$, und f ist als monotone Funktion wegen

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \lambda\!\!\lambda_0(dx) = E_0\sigma_0 < \infty$$

direkt Riemann-integrierbar (siehe Satz 1.3 (d)). Es folgt die direkte Riemann-Integrierbarkeit von z (siehe Satz 1.3 (c)) und dann aus dem 2. Erneuerungstheorem für $Z(t) = z * U(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} E_0 g(R_t) = \lim_{t\to\infty} Z(t) = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\infty)} z(t)\, \lambda\!\!\lambda_0(dt) = \int_{\mathcal{Y}} g(s)\, \xi^*(ds) \tag{3.3}$$

Schließlich erhält man aus den Abschätzungen

$$\sup_{t\geq 0} g(R_t)\cdot \mathbb{I}_{\{\sigma_0>t\}} \leq 1 \quad \text{und} \quad \sup_{t\geq 0} \mathbb{I}_{[0,t]}\cdot E_0 g(R_t) \leq 1$$

zusammen mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz aus Gleichung (3.2):

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} Eg(R_t) &= E\big(\lim_{t\to\infty} g(R_t)\cdot \mathbb{I}_{\{\sigma_0>t\}}\big) + \int \lim_{t\to\infty} \mathbb{I}_{[0.t]}(s)\cdot \lim_{t\to\infty} Z(t-s)P^{\sigma_0}(ds)\\ &= \lim_{t\to\infty} Z(t) \;=\; \lim_{t\to\infty} E_0 g(R_t)\end{aligned}$$

□

Ist $Q_0 = P_0^{\sigma_0}$ quasi λ_0-stetig und g lediglich beschränkt und meßbar, so ist in obigem Beweis $z(t)$ weiterhin beschränkt durch $f(t) = P_0(\sigma_0 > t)$. Es ist ferner $f \in L_1 \cap L_\infty$ mit $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$. Wir erhalten aus Satz 1.8, Kapitel 1, weiterhin die Gültigkeit von (3.3) und als Verschärfung folgendes

Korollar 3.6 ([Al 1] *Kor. 10.2.2*). *Ist in der Situation von Satz 3.5 $P_0^{\sigma_0}$ quasi $\lambda\!\!\lambda_0$-stetig, so folgen die Gültigkeit der dortigen Aussagen für alle beschränkten und meßbaren Funktionen $g : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie*

$$\lim_{t\to\infty} \|P^{R_t} - \xi^*\| = \lim_{t\to\infty} \|P_0^{R_t} - \xi^*\| = 0.$$

Beweis:
Nachzuweisen ist lediglich die Konvergenz in Totalvariation. Für $A \in \mathcal{G}$ definieren wir Z_A und z_A durch Z und z im Beweis des vorangegangenen Satzes mit $g = \mathrm{I}_A$. Die Erneuerungsgleichung $Z_A = z_A + Z_A * Q_0$ besitzt wiederum die eindeutige Lösung $Z_A = z_A * U$, ferner gilt für jedes $A \in \mathcal{G}$

$$z_A(t) \leq f(t) := P_0(\sigma_0 > t) \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty,$$

und aus Satz 1.8 folgt somit

$$\lim_{t\to\infty} \|P_0^{R_t} - \xi^*\| = \lim_{t\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{G}} \left| z_A * U(t) - \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} z_A(x)\lambda\!\!\lambda_0(dx)\right| = 0.$$

Die entsprechende Aussage für P^{R_t} zeigt man wieder mit majorisierter Konvergenz. Zuvor benutze man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|P(R_t \in A) - P_0(R_t \in A)| \\
&\qquad \le P(\sigma_0 > t) + \int_{[0,t]} |Z_A(t-s) - Z_A(t)| P^{\sigma_0}(ds) \\
&\qquad \le P(\sigma_0 > t) + \int_{[0,t]} \|P_0^{R_{t-s}} - \xi^*\| + \|P_0^{R_t} - \xi^*\| P^{\sigma_0}(ds).
\end{aligned}$$

□

Abschließend gibt der folgende Satz Auskunft über den Fall diskreter Zeit:

Satz 3.7 ([Al 1] *Satz 10.2.3*). *$(R_n)_{n\ge 0}$ sei ein regenerativer Prozeß in diskreter Zeit mit polnischem Zustandsraum $(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ und endlicher mittlerer Zykluslänge $\mu = E_0\sigma_0 \in (0, \infty)$. Ist σ_0 1-arithmetisch unter P_0, so gilt für jede beschränkte, meßbare Funktion $g : \mathcal{Y} \longrightarrow I\!R$*

$$\lim_{n\to\infty} Eg(R_n) = \lim_{n\to\infty} E_0 g(R_n) = \int_{\mathcal{Y}} g(s)\, \xi^*(ds)$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \|P^{R_n} - \xi^*\| = \lim_{n\to\infty} \|P_0^{R_n} - \xi^*\| = 0,$$

wobei die Verteilung ξ^* definiert ist durch

$$\xi^*(A) := \frac{1}{\mu} E_0 \left(\sum_{j=0}^{\sigma_0 - 1} 1\!\!1_A(R_j) \right) = \frac{1}{\mu} \sum_{j\ge 0} P_0(\sigma_0 > j, R_j \in A)$$

für $A \in \mathcal{G}$.

Beweis:
Der Beweis läßt sich analog zu den Beweisen von Satz 3.5 und Korollar 3.6 führen. Anstatt des 2. Erneuerungstheorems und Satz 1.8 verwende man hier lediglich Satz 1.6 aus Kapitel 1 und definiere die Funktionen z, Z durch

$$Z(t) := \sum_{n\ge 0} E_0 g(R_n) \cdot 1\!\!1_{[n,n+1)}(t),$$

$$z(t) := \sum_{n\ge 0} E_0 g(R_n) \cdot 1\!\!1_{\{\sigma_0 > n\}} \cdot 1\!\!1_{[n,n+1)}(t).$$

□

3.3 Die Folge der Wartezeiten bei endlicher Steuerung

Nach den kurzen Einschüben allgemeiner Theorie betrachten wir fortan wieder das allgemeine SM/SM/1-Modell mit endlicher, positiv rekurrenter Steuerkette M. Gegeben sei erneut die Situation, die im allgemeinen Modell eine erste Beschreibung der im Falle $\rho < 1$ existierenden Grenzverteilung π_W^* zuließ. Unser Ziel ist die Herleitung einer expliziteren Darstellung von π_W^* unter

- **(C.1)** $W_0 = 0$
- **(C.2)** Für die Verkehrsintensität ρ gilt $\rho < 1$.
- **(C.3)** Es liegt ein Standardmodell mit den üblichen Notationsvereinbarungen für den Ankunftsprozeß $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ vor. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sei die kanonische Filtration von $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$.
- **(C.4)** M ist eine positiv rekurrente EMK.

Satz 2.15 in Kapitel 2 hat gezeigt, daß der Prozeß

$$(M_n, W_n, A_{n+1}, B_n)_{n\geq 0}$$

unter jedem P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)$ als regenerativer Prozeß im Sinne von Definition 3.3 angesehen werden kann, und zwar mit einer Folge $(\nu_n)_{n\geq 1}$ von Regenerationszeiten, die sich durch

$$W_{\nu_n} = 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1$$

auszeichnen.

Mit Voraussetzung (C.4) kann gezeigt werden, daß sich die Zeiten ν_n, $n \geq 1$, so wählen lassen, daß sie den Prozeß $(M_k, W_k, A_{k+1}, B_k)_{k\geq 0}$ statt in 2-abhängige Zyklen wie im besagten Satz sogar in unabhängige Zyklen zerlegen und ferner eine genauere Angabe der Verteilung

$$P_\lambda^{(M_{\nu_1}, W_{\nu_1}, A_{\nu_1+1}, B_{\nu_1})}.$$

zulassen.

Den Schlüssel hierzu stellt die Überlegung dar, daß die Markov-Kette M nach Ausdünnung hinsichtlich derjenigen Zeitpunkte n, zu denen $W_n > 0$ ist, immer noch eine zeitlich homogene, endliche Markov-Kette bildet.

Satz 3.8. *Mit den bisher eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen sei*

$$M^\sigma := (M_n^\sigma)_{n\geq 0} := (M_{\sigma_n})_{n\geq 0}$$

die Teilfolge von M, die man mit Indizierung durch die schwach absteigenden Leiterindizes von $(M_n, S_n)_{n\geq 0}$ erhält. Dann bildet M^σ unter jeder Verteilung P_λ mit $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ eine zeitlich homogene EMK mit Zustandsraum S und besitzt damit insbesondere einen positiv rekurrenten Zustand $i_0 \in S$.

Beweis:
Ist $n \geq 0$ und $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, lassen sich die P_λ-fast sichere Endlichkeit von σ_n und die starke Markov-Eigenschaft von M ausnutzen, so daß

$$P_\lambda^{M_{n+1}^\sigma \,|\, \mathcal{F}_{\sigma_n}} = P_\lambda^{M_{\sigma_{n+1}} \,|\, \mathcal{F}_{\sigma_n}} = P_\lambda^{M_{\sigma_{n+1}} \,|\, M_{\sigma_n}} = P_\lambda^{M_{n+1}^\sigma \,|\, M_n^\sigma}$$

und damit die Markov-Eigenschaft für M^σ aufgrund der $\mathcal{F}_{\sigma_n}$-Meßbarkeit des Vektors $(M_{\sigma_0}, \ldots, M_{\sigma_n})$ folgt. Vermöge der rekursiven Definition der Leiterindizes besitzen σ_{n+1} und damit auch M_{n+1}^σ Darstellungen der Form

$$\sigma_{n+1} = f\big((M_{\sigma_n+k}, X_{\sigma_n+k})_{k\geq 1}\big) \quad \text{bzw.} \quad M_{n+1}^\sigma = g\big((M_{\sigma_n+k}, X_{\sigma_n+k})_{k\geq 1}\big)$$

mit geeignet zu wählenden meßbaren Funktionen f und g. Die zeitliche Homogenität von $(M_n^\sigma)_{n\geq 0}$ ergibt sich als Konsequenz der starken Markov-Eigenschaft und Homogenität von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ aus folgender Gleichungskette:

$$P_\lambda^{M_{n+1}^\sigma \,|\, M_n^\sigma} = P_\lambda^{g((M_{\sigma_n+k}, X_{\sigma_n+k})_{k\geq 1}) \,|\, M_{\sigma_n}} = P_{M_{\sigma_n}}^{g((M_k, X_k)_{k\geq 1})} = P_{M_n^\sigma}^{M_1^\sigma}$$

□

An dieser Stelle ist die Endlichkeit des Zustandsraums S wesentlich, da ansonsten nicht unbedingt die Existenz eines positiv rekurrenten Zustands i_0 für M^σ gesichert wäre, der im weiteren Verlauf noch eine entscheidende Rolle bei der Wahl der Folge $(\nu_n)_{n\geq 1}$ spielen wird.

Satz 3.9. *Gegeben einen positiv rekurrenten Zustand i_0 von M^σ in der Situation des vorigen Satzes bezeichne $(\nu_n)_{n\geq 0} := (\nu_n(i_0, 0))_{n\geq 0}$ die Folge der sukzessiven Rekurrenzzeiten der Markov-Kette $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ in den Zustand $(i_0, 0)$ und $(\tau_n(i_0))_{n\geq 1}$ die Folge der Rekurrenzzeiten von M^σ nach i_0. Des weiteren sei $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ derart, daß $P_\lambda(\tau_1(i_0) < \infty) = 1$ erfüllt ist (ist etwa unter P_{i_0} der Fall).*

Dann gilt: Unter P_λ sind sämtliche ν_n, $n \geq 1$, fast sicher endliche Stopzeiten für $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ und die Zyklen

$$Z_n := \big(\nu_{n+1} - \nu_n, (M_k, W_k, A_{k+1}, B_k,)_{\nu_n \leq k < \nu_{n+1}}\big),$$

$n \geq 0$ stochastisch unabhängig. Für $n \geq 1$ besitzen diese Zyklen ferner allesamt die Verteilung $P_{i_0}^{Z_0}$.

Beweis:
Sei P_λ mit $P_\lambda(\tau_1(i_0) < \infty) = 1$ vorgegeben. Offenbar läßt sich für jedes $n \geq 1$ die Rekurrenzzeit ν_n schreiben als $\nu_n = \sigma_{\tau_n(i_0)}$ und man erhält so

$$P_\lambda(\nu_n < \infty) = P_\lambda(\tau_n(i_0) < \infty).$$

Letztere Wahrscheinlichkeit hat den Wert 1, da nach Definition der $\tau_n(i_0)$ und der starken Markov-Eigenschaft von M^σ die Rechnung

$$\begin{aligned}
P_\lambda(\tau_n(i_0) < \infty) &= P_\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{n}\{\tau_k(i_0) < \infty\}\right) \\
&= \int_{\bigcap_{k=1}^{n-1}\{\tau_k(i_0)<\infty\}} P_{M^\sigma_{\tau_{n-1}(i_0)}}(\tau_1(i_0) < \infty)dP_\lambda \\
&= \int_{\bigcap_{k=1}^{n-1}\{\tau_k(i_0)<\infty\}} P_{i_0}(\tau_1(i_0) < \infty)dP_\lambda \\
&= P_{i_0}(\tau_1(i_0) < \infty)\cdot P_\lambda(\bigcap_{k=1}^{n-1}\{\tau_k(i_0) < \infty\})
\end{aligned}$$

induktiv auf die Gleichung

$$P_\lambda(\tau_n(i_0) < \infty) = P_\lambda(\tau_1(i_0) < \infty)\cdot\left(P_{i_0}(\tau_1(i_0) < \infty)\right)^{n-1} = 1$$

führt. Damit ist der erste Teil der Aussagen bewiesen.

Jedes ν_n ist Stopzeit für $(M_k, W_k)_{k\geq 0}$ und damit auch für $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$. Beachtet man noch, daß wegen $M_{\nu_n} \equiv i_0$ und

$$W_{\nu_n+k} = \max_{0\leq s\leq k}(S_{\nu_n+k} - S_{\nu_n+s}) =: f((X_{\nu_n+s})_{s\geq 1}$$

für beliebiges $k \geq 0$ jeweils $(M_k, W_k, A_{k+1}, B_k,)_{\nu_n\leq k<\nu_{n+1}}$ eine geeignete meßbare Funktion von $(M_{\nu_n+k}, A_{\nu_n+k}, B_{(\nu_n-1)+k})_{k\geq 1}$ bildet, ergibt sich der Rest in völliger Analogie zum Beweis von Satz 3.1. □

Bemerkung 3.10. In der Situation des Satzes bildet offenbar der stochastische Prozeß $(M_k, W_k, A_{k+1}, B_k)_{k\geq 0}$ unter P_λ einen regenerativen Prozeß mit Regenerationszeiten $(\nu_n)_{n\geq 1}$, die sich wie die Elemente der gleichnamigen Folge aus Kapitel 2 auszeichnen durch

$$W_{\nu_n} = 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

Weil die Zyklen sogar stochastisch unabhängig sind, bildet ferner die Folge $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$ unter P_λ einen Erneuerungsprozeß, denn für alle $n \geq 0$ ist der Zuwachs

$$T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n} = \sum_{k=\nu_n}^{\nu_{n+1}-1} A_{k+1}$$

eine meßbare Funktion des Zyklus Z_n. Unter P_{i_0} wird so sogar $(T_{\nu_n})_{n\geq 0}$ zu einem Standard-Erneuerungsprozeß.

Satz 3.11. *In der Situation von Satz 3.9 gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $E_{i_0}\nu_1 < \infty$, und ν_1 ist 1-arithmetisch unter P_{i_0}.

(b) Alle (positiv) rekurrenten Zustände von M^σ sind verbunden.

Beweis:
(a) $\tau_1(i_0)$ ist Stopzeit bzgl. $(\mathcal{F}_{\sigma_n})_{n\geq 0}$ und $E_j\sigma$ nach Korollar 3.2 für jedes $j \in S$ endlich. Die starke Markov-Eigenschaft von $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ und die Endlichkeit des Zustandsraums S begründen dann die Rechnung

$$
\begin{aligned}
E_{i_0}\nu_1 = E_{i_0}\sigma_{\tau_1(i_0)} &= E_{i_0}\left(\sum_{n\geq 1}\sigma_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_1(i_0)=n\}}\right) \\
&= E_{i_0}\left(\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n}(\sigma_j - \sigma_{j-1}) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_1(i_0)=n\}}\right) \\
&= E_{i_0}\left(\sum_{j\geq 1}(\sigma_j - \sigma_{j-1}) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_1(i_0)>j-1\}}\right) \\
&= \sum_{j\geq 1}\int_{\{\tau_1(i_0)>j-1\}} P(\sigma_j - \sigma_{j-1} \,|\, \mathcal{F}_{\sigma_{j-1}})\, dP_{i_0} \\
&= \sum_{j\geq 1}\int_{\{\tau_1(i_0)>j-1\}} E_{M^\sigma_{j-1}}\sigma_1\, dP_{i_0} \\
&\leq \left(\max_{i\in S} E_i\sigma_1\right) \cdot \sum_{j\geq 1} P_{i_0}(\tau_1(i_0) > j-1) = \left(\max_{i\in S} E_i\sigma_1\right) \cdot E_{i_0}\tau_1(i_0) < \infty.
\end{aligned}
$$

Unter P_{i_0} zerlegt demnach die Folge $(\nu_n)_{n\geq 0}$ die Harris-Kette $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ in u.i.v. Zyklen mit endlicher mittlerer Zykluslänge $E_{i_0}\nu_1 < \infty$. Daher definiert

$$\varrho^* := \frac{1}{E_{i_0}\nu_1} E_{i_0}\left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{1}_{\{(M_k, W_k)\in \bullet\}}\right)$$

die eindeutig bestimmte stationäre Verteilung von $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$. $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ ist nach Satz 2.12, Kapitel 2, ergodisch, konvergiert daher unter jeder Anfangsverteilung in Totalvariation gegen ϱ^*. Insbesondere gilt somit

$$\lim_{n\to\infty} P_j\big((M_n, W_n) = (i_0, 0)\big) = \varrho^*(\{(i_0, 0)\}) = \frac{1}{E_{i_0}\nu_1} > 0 \tag{3.4}$$

für jeden weiteren Zustand j von M^σ. Wir setzen für $n \geq 0$

$$p^{(n)}_{(i_0,0)(i_0,0)} = P_{i_0}\big((M_n, W_n) = (i_0, 0)\big)$$

und bezeichnen mit

$$d(i_0, 0) = \mathrm{ggT}\,\{n \geq 1;\ p^{(n)}_{(i_0,0)(i_0,0)} > 0\}$$

die Periode des Zustands $(i_0, 0)$ von $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$. Nach (3.4) gilt dann insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{(i_0,0)(i_0,0)} > 0$$

und folglich $d(i_0, 0) = 1$. Eine einfache Anwendung der starken Markov-Eigenschaft (vgl. [Al 3], Beispiel I/3.9) zeigt

$$p^{(n)}_{(i_0,0)(i_0,0)} = \sum_{k=1}^{n} P_{i_0}(\nu_1 = k) \cdot p^{(n-k)}_{(i_0,0)(i_0,0)}$$

für alle $n \geq 1$, so daß sich wie in [Al 3], Lemma I/6.11,

$$1 = d(i_0, 0) = \mathrm{ggT}\,\{n \geq 1;\ P_{i_0}(\nu_1 = n) > 0\}$$

ergibt. Dies ist äquivalent zur 1-Arithmetik von ν_1 unter P_{i_0}.

(b) Gemäß (3.4) gilt

$$P_{i_1}(\nu_1(i_0, 0) < \infty) > 0$$

für jeden weiteren positiv rekurrenten Zustand i_1 von M^σ. Vermöge

$$\bigcap_{n\geq 1} \{M_{\sigma_n} \neq i_0\} = \bigcap_{n \geq 1} \{(M_n, W_n) \neq (i_0, 0)\}$$

kommt man dann auf die Abschätzung

$$\begin{aligned} P_{i_1}(\tau_1(i_0) = \infty) &= P_{i_1}\big(\bigcap_{n\geq 1} \{M_{\sigma_n} \neq i_0\}\big) \\ &= P_{i_1}\big(\bigcap_{n\geq 1} \{(M_n, W_n) \neq (i_0, 0)\}\big) \\ &= P_{i_1}(\nu_1(i_0, 0) = \infty) < 1, \end{aligned}$$

i_0 ist also erreichbar von i_1. Wir müssen nun lediglich die Rollen von i_0 und i_1 vertauschen, um zu sehen, daß diese Zustände sogar verbunden sind. □

Die Verbundenheit aller (positiv) rekurrenten Zustände von M^σ ist äquivalent dazu, daß diese eine abgeschlossene Äquivalenzklasse $\mathcal{R}$ bilden und für $i, j \in \mathcal{R}$ stets

$$P_i(\tau_1(j) < \infty) = 1$$

erfüllt ist[2]. Bezeichnen wir weiter mit $\mathcal{T}$ die Menge der für M^σ transienten Zustände, so besitzt S die disjunkte Zerlegung

$$S = \mathcal{T} + \mathcal{R}.$$

Korollar 3.12. *Die Aussagen von Satz 3.9 und Bemerkung 3.10 gelten uneingeschränkt für* jede *Anfangsverteilung* $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0, \infty)^2)$ *und implizieren zudem*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P_\lambda^{(M_n, W_n, A_{n+1}, B_n)} - \frac{1}{E_{i_0}\nu_1} E_{i_0} \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{I}_{\{(M_k, W_k, A_{k+1}, B_k) \in \bullet\}} \right) \right\| = 0,$$

ebenfalls bei beliebigem $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0, \infty)^2)$.

[2] vgl. [Al 3] Satz I/8.3

Beweis:
Wir notieren als erstes, daß es ausreicht, für jeden Zustand $x \in S$

$$P_x(\tau_1(i_0) < \infty) = 1$$

zu verifizieren. Dies impliziert nämlich bereits, daß damit die Voraussetzung

$$P_\lambda(\tau_1(i_0) < \infty) = 1$$

in Satz 3.9 für jede Verteilung $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ erfüllt ist und die dortigen Aussagen keiner weiteren Einschränkung an λ unterliegen.

Weil nach dem vorangegangenen Satz ν_1 unter P_{i_0} 1-arithmetisch ist und endliche Erwartung besitzt, läßt sich die Konvergenzaussage dann direkt aus dem Ergodensatz für regenerative Prozesse in diskreter Zeit ableiten.

Sei also $x \in S$ fixiert. Jeder für M^σ transiente Zustand $j \in \mathcal{T}$ zeichnet sich dadurch aus, daß er von M^σ nur P_x-f.s. endlich oft aufgesucht wird. Formal bedeutet dies

$$P_x(N(j) < \infty) = 1$$

für die Zählvariable

$$N(j) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{M_n^\sigma = j\}}.$$

Die Endlichkeit von $|\mathcal{T}|$ hat zur Folge, daß auch

$$P_x\left(\bigcap_{j \in \mathcal{T}} \{N(j) < \infty\}\right) = 1$$

erfüllt ist und auf der Menge $\bigcap_{j \in \mathcal{T}} \{N(j) < \infty\}$ gilt:

$$N(\mathcal{T}) := \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{M_n^\sigma \in \mathcal{T}\}} = \sum_{n \geq 1} \sum_{j \in \mathcal{T}} \mathbb{1}_{\{M_n^\sigma = j\}} = \sum_{j \in \mathcal{T}} N(j) < \infty$$

Dies zeigt

$$P_x(N(\mathcal{T}) < \infty) \geq P_x\left(\bigcap_{j \in \mathcal{T}} \{N(j) < \infty\}\right) = 1,$$

d.h. für $\tau_1(\mathcal{R}) = \inf\{k > 0;\ M_k^\sigma \in \mathcal{R}\}$ muß gelten

$$P_x(\tau_1(\mathcal{R}) < \infty) = 1.$$

Abschließend bedarf es nur noch einer Anwendung der starken Markov-Eigenschaft für M^σ und des Arguments $P_i(\tau_1(i_0) < \infty) = 1\ \forall i \in \mathcal{R}$, denn so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
P_x\big(\tau_1(i_0) < \infty\big) &\geq P_x\Big(\inf\{k > \tau_1(\mathcal{R});\, M_k^\sigma = i_0\} < \infty, \tau_1(\mathcal{R}) < \infty\Big) \\
&= \int_{\{\tau_1(\mathcal{R})<\infty\}} P\Big(\inf\{k > \tau_1(\mathcal{R});\, M_k^\sigma = i_0\} < \infty \,\Big|\, M^\sigma_{\tau_1(\mathcal{R})}\Big)\, dP_x \\
&= \int_{\{\tau_1(\mathcal{R})<\infty\}} P_{M^\sigma_{\tau_1(\mathcal{R})}}\big(\tau_1(i_0) < \infty\big)\, dP_x \\
&= \int_{\mathbb{N}\times\mathcal{R}} P_i(\tau_1(i_0) < \infty)\, P_x^{(\tau_1(\mathcal{R}), M^\sigma_{\tau_1(\mathcal{R})})}(dx \times di) \\
&= P_x\Big(\tau_1(\mathcal{R}) < \infty, M^\sigma_{\tau_1(\mathcal{R})} \in \mathcal{R}\Big) = 1
\end{aligned}
$$

□

Zum Abschluß kombinieren wir das vorstehende Ergebnis mit der Erkenntnis aus Kapitel 2, daß im Fall der Konvergenz von $(P^{W_n})_{n\geq 0}$ im SM/SM/1-Modell die Grenzverteilung π_W^* unabhängig von P^{W_0} ist.

Korollar 3.13. *Besitzt im SM/SM/1-Modell die Steuerkette M einen endlichen Zustandsraum und ist positiv rekurrent, so konvergiert die Folge der Wartezeitverteilungen im Fall $\rho < 1$ stets in Totalvariation gegen die Verteilung*

$$
\pi_W^*(B) = \frac{1}{E_{i_0}\nu_1} E_{i_0}\left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{1}_B(W_k)\right) \qquad , B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)},
$$

mit $\nu_1 = \inf\{n > 0;\ (M_n, W_n) = (i_0, 0)\}$ für einen beliebigen rekurrenten Zustand i_0 der Markov-Kette $(M_n^\sigma)_{n\geq 0}$.

3.4 Die anstehende Arbeit bei endlicher Steuerung

Grundlage der Untersuchungen soll erneut die spezielle zyklische Zerlegung von

$$
(M_k, W_k, A_{k+1}, B_k)_{k\geq 0}
$$

aus dem letzten Abschnitt sein. Die Zusatzannahmen (C.1) bis (C.4) mögen aus diesem Grunde weiterhin ihre Gültigkeit behalten und werden ergänzt um die Notationsvereinbarung

(C.5) i_0 sei ein (stets existierender) positiv rekurrenter Zustand der Markov-Kette $(M_n^\sigma)_{n\geq 0}$ und $(\nu_n)_{n\geq 0}$ die Folge der sukzessiven Rekurrenzzeiten von $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ in den Zustand $(i_0, 0)$.

Der entscheidende Unterschied zu den allgemeineren Ausführungen in Kapitel 2 ist der, daß jetzt wegen der Unabhängigkeit der Zyklen $Z_0, Z_1, \ldots$ die Folge $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$ sogar einen Erneuerungsprozeß bildet und sich damit Satz 2.19 verschärfen läßt zu

Satz 3.14. *Unter den Voraussetzungen* (C.1) *bis* (C.5) *bildet* $(V_t)_{t\geq 0}$ *unter jedem* P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)$, *einen regenerativen Prozeß mit Regenerationszeiten* $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$.

Beweis:
Nachzuweisen bleibt lediglich die stochastische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $((V_{T_{\nu_n}+t})_{t\geq 0}, (T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k})_{k\geq n})$ und $(T_{\nu_1}, \ldots, T_{\nu_n})$ für beliebiges $n \geq 1$. Unter Verwendung von

$$T_{\nu_k} = \sum_{j=0}^{\nu_k - 1} A_{j+1} =: h_k(Z_0, \ldots, Z_{n-1}) \quad \text{für} \quad k \leq n$$

genügt hierzu ein Hinweis auf die Unabhängigkeit der Zyklen Z_k, $k \geq 0$ und die im Beweis zu Satz 2.19 hergeleitete Darstellung von $V_{T_{\nu_n}+t}$ als Funktion von $(Z_i)_{i\geq n}$ für jedes $t \geq 0$. □

In Verbindung mit den Ergodensätzen für regenerative Prozesse lassen sich nach dieser Erkenntnis die Aussagen aus Korollar 2.21 über die asymptotische Entwicklung der Zeitmittel

$$\frac{1}{t}\int_{[0,t)} P_\lambda^{V_s}\, \lambda\!\!\lambda_0(ds)$$

wie folgt ergänzen im Hinblick auf die ungemittelten Verteilungen $P_\lambda^{V_t}$, $t \geq 0$.

Theorem 3.15. *In der Situation von Satz 3.14 besitzt der regenerative Prozeß* $(V_t)_{t\geq 0}$ *rechtsseitig stetige Pfade und endliche mittlere Zykluslänge* $E_{i_0}T_{\nu_1} < \infty$. *Es sei* d *die Spanne von* T_{ν_1} *unter* P_{i_0} *und* $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ *beliebig.*

(a) Im Fall d=0 gilt

$$\lim_{t\to\infty} E_\lambda g(V_t) = \int_{[0,\infty)} g(s)\, \pi_V^*(ds) \tag{3.5}$$

für jede beschränkte und stetige Funktion $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *bzw. - äquivalent dazu -*

$$P_\lambda^{V_t} \xrightarrow{d} \pi_V^*,$$

wobei für $A \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ *gelte:*

$$\begin{aligned}
\pi_V^*(A) &= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_A(V_t)\, \lambda\!\!\lambda_0(dt)\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} \int_{[0,\infty)} P_{i_0}(T_{\nu_1} > t, V_t \in A)\, \lambda\!\!\lambda_0(dt)
\end{aligned}$$

Ist überdies $P_{i_0}^{T_{\nu_1}}$ *quasi* $\lambda\!\!\lambda_0$*-stetig, so folgen sogar die Gültigkeit von* (3.5) *für alle beschränkten und meßbaren Funktionen* $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *sowie die Konvergenz von* $P_\lambda^{V_t}$ *gegen* π_V^* *in Totalvariation für* $t \to \infty$.

(b) Im Fall $d > 0$ gilt unter der Zusatzvoraussetzung $P_\lambda(T_{\nu_1} \in d\mathbb{Z}) = 1$ für jedes $a \in [0, d)$ und jede beschränkte meßbare Funktion $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda g(V_{nd+a}) = \int_{[0,\infty)} g(s)\ \pi^*_{V(d,a)}(ds),$$

wobei für $A \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ gelte:

$$\begin{aligned} \pi^*_{V(d,a)}(A) &= \frac{d}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\sum_{j=0}^{\frac{1}{d}T_{\nu_1}-1} \mathbb{1}_A(V_{jd+a})\right) \\ &= \frac{d}{E_{i_0}T_{\nu_1}} \sum_{j\geq 0} P_{i_0}(T_{\nu_1} > jd, V_{jd+a} \in A) \end{aligned}$$

Ferner folgt in der beschriebenen Situation

$$\lim_{n\to\infty} \|P_\lambda^{V_{nd+a}} - \pi^*_{V(d,a)}\| = 0.$$

(c) Unabhängig von d gelten für jede beschränkte und meßbare Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ die folgenden Zeitmittel-Konvergenzen:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{[0,t)} g(V_s)\ \lambda_0(ds) = \int_{[0,\infty)} g(s)\ \pi^*_V(ds) \quad P_\lambda\text{-f.s.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|f|\leq g} \left| \frac{1}{t} E_\lambda \left(\int_{[0,t)} f(V_s)\ \lambda_0(ds) \right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\ \pi^*_V(ds) \right| = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \frac{1}{t} \int_{[0,t)} P_\lambda^{V_s}\ \lambda_0(ds) - \pi^*_V \right\| = 0$$

Beweis:
Die Endlichkeit der mittleren Zykluslänge ist an der Darstellung

$$E_{i_0}T_{\nu_1} = E_{i_0}\nu_1 \cdot E_{\xi^*}A_1$$

abzulesen, die rechtsseitige Stetigkeit der Pfade und Teil (c) wurden schon bei der allgemeineren Untersuchung von $(V_t)_{t\geq 0}$ gezeigt. Aussage (a) wiederholt lediglich die Aussagen der Ergodensätze für regenerative Prozesse in stetiger Zeit (vgl. Abschnitt 2.1), übertragen auf die hier vorliegende Situation.
Kernidee zum Beweis von Teil (b) ist die, daß neben $(V_t)_{t\geq 0}$ auch der Prozeß

$$(V_{(a,n)})_{n\geq 0} := (V_{nd+a})_{n\geq 0}$$

einen regenerativen Prozeß bildet, allerdings in diskreter Zeit und mit eingebettetem Erneuerungsprozeß $(T_{\nu_n}/d)_{n\geq 1}$. Die Spanne von T_{ν_1}/d unter P_{i_0} ist 1, so daß sich die Aussagen diesmal direkt aus dem Ergodensatz für regenerative Prozesse in diskreter Zeit ergeben.

□

3.5 Die Schlangenlänge bei endlicher Steuerung

Alle nachfolgend aufgeführten Ergebnisse bedürfen keiner gesonderten Nachweise, weil sie entweder schon in allgemeinerer Form in Kapitel 2 bewiesen worden sind oder darauf beruhen, daß der Prozeß $(Q_t)_{t\geq 0}$ dieselben Regenerationseigenschaften besitzt wie der Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$.

Satz 3.16. *Unter den Voraussetzungen* (C.1) *bis* (C.5) *bildet* $(Q_t)_{t\geq 0}$ *unter jedem* P_λ, $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, *einen regenerativen Prozeß mit Regenerationszeiten* $(T_{\nu_n})_{n\geq 1}$.

Theorem 3.17. *In der Situation von Satz 3.16 besitzt der regenerative Prozeß* $(Q_t)_{t\geq 0}$ *rechtsseitig stetige Pfade und endliche mittlere Zykluslänge* $E_{i_0}T_{\nu_1} < \infty$. *Es sei* d *die Spanne von* T_{ν_1} *unter* P_{i_0} *und* $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ *beliebig.*

(a) Im Fall d=0 gilt

$$\lim_{t\to\infty} E_\lambda g(Q_t) = \int_{[0,\infty)} g(s)\ \pi_Q^*(ds) \tag{3.6}$$

für jede beschränkte und stetige Funktion $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *bzw. - äquivalent dazu -*

$$P_\lambda^{Q_t} \xrightarrow{d} \pi_Q^*,$$

wobei für $A \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ *gelte:*

$$\begin{aligned}
\pi_Q^*(A) &= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} \mathbb{1}_A(Q_t)\ \lambda_0(dt)\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} \int_{[0,\infty)} P_{i_0}(T_{\nu_1} > t, Q_t \in A)\ \lambda_0(dt)
\end{aligned}$$

Ist überdies $P_{i_0}^{T_{\nu_1}}$ *quasi* λ_0*-stetig, so folgen sogar die Gültigkeit von* (3.6) *für alle beschränkten und meßbaren Funktionen* $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *sowie die Konvergenz von* $P_\lambda^{Q_t}$ *gegen* π_V^* *in Totalvariation für* $t \to \infty$.

(b) Im Fall $d > 0$ *gilt unter der Zusatzvoraussetzung* $P_\lambda(T_{\nu_1} \in d\mathbb{Z}) = 1$ *für jedes* $a \in [0,d)$ *und jede beschränkte meßbare Funktion* $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} E_\lambda g(Q_{nd+a}) = \int_{[0,\infty)} g(s)\ \pi_{Q(d,a)}^*(ds),$$

wobei für $A \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ *gelte:*

$$\begin{aligned}
\pi^*_{Q(d,a)}(A) &= \frac{d}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\sum_{j=0}^{\frac{1}{d}T_{\nu_1}-1} \mathbb{1}_A(Q_{jd+a})\right) \\
&= \frac{d}{E_{i_0}T_{\nu_1}} \sum_{j\geq 0} P_{i_0}(T_{\nu_1} > jd, Q_{jd+a} \in A)
\end{aligned}$$

Ferner folgt in der beschriebenen Situation

$$\lim_{n\to\infty} \|P_\lambda^{Q_{nd+a}} - \pi^*_{Q(d,a)}\| = 0.$$

(c) Unabhängig von d gelten für jede beschränkte und meßbare Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$ die folgenden Zeitmittel-Konvergenzen:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{[0,t)} g(Q_s)\, \lambda\!\!\lambda_0(ds) = \int_{[0,\infty)} g(s)\, \pi^*_Q(ds) \quad P_\lambda\text{-f.s.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|f|\leq g} \left| \frac{1}{t} E_\lambda \left(\int_{[0,t)} f(Q_s)\, \lambda\!\!\lambda_0(ds) \right) - \int_{[0,\infty)} f(s)\, \pi^*_Q(ds) \right| = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \frac{1}{t}\int_{[0,t)} P_\lambda^{Q_s}\, \lambda\!\!\lambda_0(ds) - \pi^*_Q \right\| = 0.$$

3.6 Stabilität im G/G/1-Modell

Bei weiterhin unveränderten Bezeichnungen sind nachfolgend einige wohlbekannte und schon vielfach veröffentlichte Stabilitätsergebnisse für das klassische G/G/1-Modell zusammengestellt. Ohne gesonderte Angaben sei auf [Al 1], Kap. 11, und [As], Ch. VIII, verwiesen.

Vorrangig soll hiermit aufgezeigt werden, daß diese Resultate im Rahmen der vorliegenden Arbeit gewissermaßen als „Kuppelprodukte" der in den Abschnitten 3.3 bis 3.5 hergeleiteten Aussagen angesehen werden können. Die einstmals eigenständige G/G/1-Theorie erhält auf diesem Wege den veränderten Charakter eines besonders einfachen Unterkonzepts.

Formal besteht im G/G/1-Modell der Zustandsraum S von M nur aus dem für M^σ positiv rekurrenten Zustand i_0, und wir erhalten

$$(\nu_n)_{n\geq 0} = (\sigma_n)_{n\geq 0} \quad \text{und} \quad (T_{\nu_n})_{n\geq 0} = (T_{\sigma_n})_{n\geq 0}.$$

Satz 3.18. *Gegeben $\rho < 1$ im klassischen G/G/1-Modell, ist $(W_n)_{n\geq 0}$ ein regenerativer Prozeß mit Regenerationszeiten $(\sigma_n)_{n\geq 1}$. Er besitzt stets die Grenzverteilung*

$$\pi^*_W = \frac{1}{E\sigma_1} E\left(\sum_{k=0}^{\sigma_1-1} \mathbb{1}_{\{W_k\in\bullet\}}\right) = P^{S^>} \tag{3.7}$$

mit $S^> = \sup_{n\geq 0} S_n$.

Beweis:
Mit Hinweis auf Korollar 3.13 ist nur noch die zweite Identität in (3.7) zu verifizieren. Wegen der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung von $X_1, X_2, \dots$ gilt im Fall $W_0 = X_0 = 0$:

$$W_n = \max_{0 \le j \le n} (S_n - S_j) \sim \max(S_0, \dots, S_n) =: K_n$$

Weil $\rho < 1$ vorausgesetzt ist, hat man zudem $K_n \uparrow \sup_{n \ge 0} S_n < \infty$ P-f.s. und deshalb auch $W_n \xrightarrow{d} \sup_{n \ge 0} S_n$. Die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeit des Verteilungslimes. $\square$

Eine anschauliche Interpretation für die Folge $(T_{\sigma_n})_{n \ge 0}$ erhält man über die sogenannten *Leerzeiten* und *Beschäftigungsperioden* des Systems:

Sprechen wir vereinbarungsgemäß auch dann von einer Leerzeit (der Länge 0), wenn ein bedienter Kunde ohne Warteschlange hinter sich im selben Moment das System verläßt, zu dem ein neuer Kunde dieses betritt, erhalten wir als formale Definition von η_n^B bzw. η_n^L als Beginn von n-ter Beschäftigungsperiode Z_n^B bzw. n-ter Leerzeit Z_n^L:

$$\eta_1^B = 0$$

$$\eta_{n+1}^B = \inf\{t > \eta_n^B; V_{t-} = 0, V_t > 0\} \quad , n \ge 1$$

$$\eta_n^L = \inf\{t > \eta_n^B; V_{t-} = 0\} \quad , n \ge 1$$

Für $n \ge 1$ gilt demnach:

$$\eta_n^B = T_{\sigma_{n-1}} \quad , \quad \eta_n^L = T_{\sigma_{n-1}} + \sum_{k=\sigma_{n-1}}^{\sigma_n - 1} B_k$$

Aus den Sätzen 3.14 und 3.16 erhalten wir

Satz 3.19. *Im G/G/1-Modell bilden die Prozesse $(V_t)_{t \ge 0}$ und $(Q_t)_{t \ge 0}$ unter den Voraussetzungen $W_0 = 0$ und $\rho < 1$ regenerative Prozesse mit Regenerationszeiten $(\eta_n^B)_{n \ge 1}$.*

Definieren wir weiter den *n-ten Arbeitszyklus* Z_n durch

$$Z_n := Z_n^B + Z_n^L,$$

so bildet $(Z_n)_{n \ge 1}$ im G/G/1-Modell eine Folge u.i.v. Zufallsgrößen mit

$$P^{Z_n} = P^{\eta_{n+1}^B - \eta_n^B} = P^{\eta_2^B}.$$

Die mittlere Länge eines Arbeitszyklus ergibt sich wie im Beweis von Theorem 3.15 zu

$$EZ_1 = E\eta_2^B = ET_{\sigma_1} = E\sigma_1 \cdot EA_1.$$

Der folgende Satz erweitert diese Feststellungen um entsprechende Resultate für die Folgen $(Z_n^B)_{n\geq 1}$ und $(Z_n^L)_{n\geq 1}$ und berücksichtigt zudem den kritischen Fall $\rho = 1$.

Satz 3.20. *Im G/G/1-Modell bilden unter den Voraussetzungen $W_0 = 0$ und $\rho \leq 1$ $(Z_n)_{n\geq 1}$, $(Z_n^B)_{n\geq 1}$ und $(Z_n^L)_{n\geq 1}$ Folgen u.i.v. Zufallsgrößen mit*

$$Z_1 = \eta_2^B = T_{\sigma_1},$$

$$Z_1^B = \eta_1^L = \sum_{k=0}^{\sigma_1 - 1} B_k,$$

$$Z_1^L = Z_1 - Z_1^B = -S_{\sigma_1}.$$

Die mitleren Längen eines Arbeitszyklus, einer Beschäftigungsperiode bzw. einer Leerzeit sind gegeben durch:

$$EZ_1 = E\sigma_1 \cdot EA_1$$

$$EZ_1^B = E\sigma_1 \cdot EB_0$$

$$EZ_1^L = -ES_{\sigma_1} \quad [= E\sigma_1 \cdot E(A_1 - B_0) \quad \textit{im Fall} \quad \rho = 1]$$

Beweis:
Gilt $\rho < 1$, sind nur noch die Aussagen für $(Z_n^B)_{n\geq 1}$ und $(Z_n^L)_{n\geq 1}$ zu zeigen. Gemäß Satz 3.9 bildet $(T_{\sigma_n}, \sum_{k=0}^{\sigma_n - 1} B_k)_{n\geq 0}$ einen 2-dimensionalen Standard-Random-Walk, dessen Zuwächse wir mit $(A_n^\sigma, B_{n-1}^\sigma)_{n\geq 1}$ bezeichnen. Die Unabhängigkeit und die identische Verteilung von $Z_1^B, Z_2^B, \ldots$ bzw. $Z_1^L, Z_2^L, \ldots$ ergeben sich dann direkt aus den Beziehungen

$$Z_n^B = \eta_n^L - \eta_n^B = \sum_{k=\sigma_{n-1}}^{\sigma_n - 1} B_k = B_{n-1}^\sigma \qquad \text{bzw.}$$

$$Z_n^L = \eta_{n+1}^B - \eta_n^L = T_{\sigma_n} - T_{\sigma_{n-1}} - \sum_{k=\sigma_{n-1}}^{\sigma_n - 1} B_k = A_n^\sigma - B_{n-1}^\sigma.$$

Die Formeln für die Erwartungswerte liefert die 1.Waldsche Gleichung. Sie ist sowohl für $(T_n)_{n\geq 0}$ als auch für $(\sum_{k=0}^{n-1} B_k)_{n\geq 0}$ anwendbar, denn diese Folgen sind im

G/G/1-Modell stochastisch unabhängig und σ_1 bildet eine Stopzeit (mit endlichem Erwartungswert) für $(T_n, \sum_{k=0}^{n-1} B_k)_{n\geq 0}$.

Der Übergang zum kritischen Fall $\rho = 1$ ($\iff$ $EX_1 = 0$) hat keinerlei Auswirkungen auf die Verteilungsaussagen, da $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ nach wie vor eine Folge fast sicher endlicher Zufallsgrößen bildet und damit weiterhin Satz 3.9 seine Gültigkeit behält. Zu beachten ist nun lediglich $E\sigma_1 = \infty$. Vermöge des Satzes von der monotonen Konvergenz erhalten wir aber wiederum nach Anwendung der 1.Waldschen Gleichung

$$EZ_1 = \lim_{n\to\infty} ET_{\sigma_1\wedge n} = \lim_{n\to\infty} E(\sigma_1 \wedge n)\cdot EA_1 = \infty = E\sigma_1 \cdot EA_1,$$

$$EZ_1^B = \lim_{n\to\infty} E\left(\sum_{k=0}^{(\sigma_1\wedge n)-1} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} E(\sigma_1\wedge n)\cdot EB_0 = \infty = E\sigma_1\cdot EB_0$$

und damit ebenfalls das Gewünschte. □

Zum Grenzverhalten von $(V_t)_{t\geq 0}$ und $(Q_t)_{t\geq 0}$ halten wir noch fest:

Satz 3.21. *Gelten im G/G/1-Modell $W_0 = 0$, $\rho < 1$, und ist A_1 nichtarithmetisch, so folgen für jede beschränkte, stetige Funktion $g : [0,\infty) \longrightarrow I\!R$*

$$\lim_{t\to\infty} Eg(V_t) = \frac{1}{EZ_1} E\left(\int_{[0,Z_1)} g(V_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \quad \textit{und}$$

$$\lim_{t\to\infty} Eg(Q_t) = \frac{1}{EZ_1} E\left(\int_{[0,Z_1)} g(Q_s)\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right).$$

Äquivalent hierzu sind die Aussagen

$$P^{V_t} \xrightarrow{d} \pi_V^* \quad \textit{und} \quad P^{Q_t} \xrightarrow{d} \pi_Q^*$$

für $t\to\infty$, wobei π_V^* und π_Q^* hier definiert sind durch

$$\pi_V^* = \frac{1}{EZ_1} E\left(\int_{[0,Z_1)} 1\!\!1_{\{V_s\in\bullet\}}\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right).$$

$$\pi_Q^* = \frac{1}{EZ_1} E\left(\int_{[0,Z_1)} 1\!\!1_{\{Q_s\in\bullet\}}\,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right).$$

Beweis:
Unter Beachtung der Theoreme 3.15, 3.17 und der Beziehung $Z_1 = T_{\sigma_1}$ ist man fertig, wenn man nachweist, daß Z_1 nichtarithmetisch ist, wenn dies für A_1 der

Fall ist. Hierzu notieren wir, daß zwischen den Erneuerungsmaßen U_T und U_T^σ der Erneuerungsprozesse $(T_n)_{n\geq 0}$ bzw. $(T_{\sigma_n})_{n\geq 1} = (Z_n)_{n\geq 1}$ die Relation

$$U_T = E\left(\sum_{n\geq 0} \delta_{T_n}(\bullet)\right) \geq E\left(\sum_{n\geq 0} \delta_{T_{\sigma_n}}(\bullet)\right) = U_T^\sigma$$

besteht. Wäre nun A_1 nichtarithmetisch, Z_1 hingegen d-arithmetisch für ein $d > 0$, so müßte nach dem Blackwell'schen Erneuerungstheorem[3] für jedes $a < d$ gelten:

$$\begin{aligned}\frac{a}{EA_1} = \frac{\lambda_0([0,a])}{EA_1} &= \lim_{n\to\infty} U_T\big([nd, nd+a]\big)\\ &\geq \lim_{n\to\infty} U_T^\sigma\big([nd, nd+a]\big) = \frac{\lambda_d([0,a])}{EZ_1} = \frac{d}{EZ_1} > 0\end{aligned}$$

Der Grenzübergang $a \to 0$ führt dann zum gewünschten Widerspruch. □

3.7 Identitäten zwischen den Grenzverteilungen

Um in jedem Fall das zuvor beschriebene asymptotische Verhalten der drei Prozesse $(W_n)_{n\geq 0}$, $(V_t)_{t\geq 0}$ und $(Q_t)_{t\geq 0}$ zu garantieren, seien auch hier weiterhin die Zusatzannahmen (C.1) bis (C.5) erfüllt. Es wird sich als hilfreich herausstellen, wenn sich auftretende Grenzverteilungen ebenfalls über Zufallsgrößen darstellen lassen, ohne daß dazu das unterstellte Standardmodell

$$\Big(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)}\Big) \tag{3.8}$$

aufgegeben werden muß. Vor der formalen Umsetzung stellen wir hierfür folgende Überlegung an:

Zu einer beliebig vorgegebenen Verteilung ψ auf einem beliebigen meßbaren Raum $(\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ können wir als Erweiterung des Standardmodells (3.8) das Modell

$$\Big(\hat\Omega, \hat{\mathcal{A}}, \big((\hat M_n, \hat A_n, \hat B_{n-1})_{n\geq 0}, Y\big), (\hat P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(S\times[0,\infty)^2)}\Big)$$

mit $\hat\Omega = \Omega \times \mathcal{Y}$, $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{C}$, $\hat P_\lambda = P_\lambda \otimes \psi$ und

$$\big((\hat M_n, \hat A_n, \hat B_{n-1})_{n\geq 0}, Y\big)(\omega, y) := \big((M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}(\omega), y\big)$$

für $\omega \in \Omega$ und $y \in \mathcal{Y}$ betrachten. Unter jedem $\hat P_\lambda, \lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$, ist dann Y stochastisch unabhängig von $(\hat M_n, \hat A_n, \hat B_{n-1})_{n\geq 0}$ mit

$$\hat P_\lambda^{((\hat M_n, \hat A_n, \hat B_{n-1})_{n\geq 0}, Y)} = P_\lambda^{(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}} \otimes \psi.$$

[3]vgl. [Al 1] Satz 2.4.1; obwohl historisch älter, erhält man dieses Resultat auch als Spezialfall des 2. Erneuerungstheorems mit Funktionen der Form $g = \mathbb{1}_{[a,b]}$, wobei $-\infty < a \leq b < \infty$.

Wir verzichten aus notationstechnischen Gründen bei einer derartigen Erweiterung auf das „Dach“ und sprechen von einer *unabhängigen Erweiterung des Standardmodells um die Zufallsgröße Y bzw. die Verteilung ψ.*

Bei festem $n \geq 1$ erweitern wir unser Standardmodell (3.8) auf diese Weise nun sukzessive um die Zufallsvariablen

$$A, (W, B, T^{(n)}), V, Q, A^*, B^*, \zeta,$$

deren Verteilungen unabhängig von $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ wie folgt definiert seien:

$$P_\lambda^A = P^A := P_{\xi^*}^{A_1}$$

$$P_\lambda^{(W,B,T^{(n)})} = P^{(W,B,T^{(n)})} := \frac{1}{E_{i_0}\nu_1} E_{i_0}\left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{1}_{\{(W_k, B_k, T_{k+n} - T_k) \in \bullet\}}\right)$$

$$P_\lambda^V = P^V := \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} \mathbb{1}_{\{V_s \in \bullet\}} \,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)$$

$$P_\lambda^Q = P^Q := \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} \mathbb{1}_{\{Q_s \in \bullet\}} \,\lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)$$

$$P_\lambda(A^* \leq t) = P(A^* \leq t) := \frac{1}{E_{\xi^*} A_1} \int_0^t P_{\xi^*}(A_1 > s) ds \qquad , t \geq 0$$

$$P_\lambda(B^* \leq t) = P(B^* \leq t) := \frac{1}{E_{\xi^*} B_0} \int_0^t P_{\xi^*}(B_0 > s) ds \qquad , t \geq 0$$

$$P_\lambda^\zeta = P^\zeta := \mathcal{B}(1, \rho)$$

Die erste Rekurrenzzeit ν_1 von $(M_n, W_n)_{n\geq 0}$ in den Zustand $(i_0, 0)$ ist 1-arithmetisch unter P_{i_0} (vgl. Satz 3.11), und gemäß Satz 3.9 bildet $(M_k, W_k, B_k, T_{k+n} - T_k)_{k\geq 0}$ für jedes $n \geq 0$ einen regenerativen Prozeß mit Regenerationszeiten $(\nu_n)_{n\geq 0}$. Wir nehmen ferner an, T_{ν_1} sei nichtarithmetisch unter P_{i_0}.
Dies hat zur Folge, daß unter jedem P_λ die folgenden Konvergenzen für $k \to \infty$ bzw. $t \to \infty$ vorliegen:

$$P_\lambda^{(W_k, B_k, T_{k+n} - T_k)} \xrightarrow{TV} P^{(W,B,T^{(n)})},$$

$$P_\lambda^{V_t} \xrightarrow{d} P^V \quad , \quad P_\lambda^{Q_t} \xrightarrow{d} P^Q$$

Ist die Verteilung von T_{ν_1} unter P_{i_0} sogar quasi $\lambda\!\!\lambda_0$-stetig, gelten *sämtliche* Konvergenzen in Totalvariation.

Satz 3.22. *Unter den zuvor gemachten Voraussetzungen gilt für die asymptotisch anstehende Arbeit V*

(a) im SM/SM/1-Modell:

$$\boxed{P(V > t) = \frac{1}{EA} \cdot E\Big((W+B) \vee t - W \vee t\Big) \quad ,t \geq 0}$$

(b) im SM/G/1-Modell:

$$\boxed{V \sim \zeta(W + B^*)}$$

(c) im G/G/1-Modell:

$$\boxed{V \sim \zeta(W+B^*) \sim (W + B - A^*)^+ \sim (S^> + B - A^*)^+}$$

mit $S^> = \sup_{n \geq 0} S_n$.

Beweis[4]**:**
(a) Zunächst sei an die Beziehungen $\nu_1 = \sigma_{\tau_1(i_0)}$ mit $\tau_1(i_0) = \inf\{k \geq 1; M_k^\sigma = i_0\}$, $W_{\sigma_j} = 0$ für alle $j \geq 0$, $E_{i_0} T_{\nu_1} = E_{\xi^*} A_1 \cdot E_{i_0} \nu_1$ sowie $W_{k+1} = W_k + B_k - A_{k+1}$ für $\sigma_j \leq k < \sigma_{j+1}$ erinnert. Es folgt damit für jedes $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
P(V > t) &= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0} \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} \mathbb{1}_{\{W_k + B_k + T_k - s > t\}} ds \right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0} \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \int_0^{A_{k+1}} \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - s > t\}} ds \right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0} \left(\sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - s > t\}} - \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - A_{k+1} - s > t\}} ds \right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0} \left(\sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - s > t\}} - \mathbb{1}_{\{W_{k+1} - s > t\}} ds \right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0} \left(\sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - s > t\}} - \mathbb{1}_{\{W_k - s > t\}} ds \right) \\
&= \frac{1}{E_{\xi^*} A_1} \int_0^\infty \frac{1}{E_{i_0} \nu_1} E_{i_0} \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{1}_{\{W_k + B_k > s+t\}} \right) - \frac{1}{E_{i_0} \nu_1} E_{i_0} \left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{1}_{\{W_k > s+t\}} \right) ds \\
&= \frac{1}{EA} \int_0^\infty P(W + B > s + t) - P(W > s + t) \, ds
\end{aligned}$$

[4]vgl. Beweis zu [Al 1] Satz 11.3.2 für eine ähnliche Argumentation

Für die vorletzte Gleichheit verwende man den Satz von Fubini. Die Behauptung ergibt sich nun aus der Tatsache, daß für jede nichtnegative Zufallsgröße Y und $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} E(Y \vee t) &= \int_0^\infty P((Y \vee t) > s)ds \\ &= \int_0^t P((Y \vee t) > s)ds + \int_t^\infty P((Y \vee t) > s)ds \\ &= t + \int_t^\infty P(Y > s)ds \; = \; t + \int_0^\infty P(Y > t + s)ds \end{aligned}$$

(b) Im SM/G/1-Modell ist für jedes $k \geq 0$ B_k unabhängig von $W_k \in \mathcal{F}_k$ und somit auch B unabhängig von W mit

$$P^B = P_{\xi^*}^{B_0}.$$

Eine weitere Umformung der Rechnung aus Teil (a) mit Hilfe des Satzes von Fubini liefert

$$\begin{aligned} P(V > t) &= \frac{1}{E_{\xi^*} A_1} E\left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{(W+B>s+t\}} - \mathbb{1}_{\{(W>s+t\}} ds\right) \\ &= \rho \cdot \frac{1}{E_{\xi^*} B_0} E\left(\int_{-B}^0 \mathbb{1}_{\{W>s+t\}} ds\right) = \rho \cdot \frac{1}{E_{\xi^*} B_0} E\left(\int_0^B \mathbb{1}_{\{W>t-s\}} ds\right) \\ &= \rho \cdot \frac{1}{E_{\xi^*} B_0} \int_0^\infty P(B > s, W > t - s)\; ds \\ &= \rho \cdot \int_0^\infty \frac{1}{E_{\xi^*} B_0} P_{\xi^*}(B_0 > s) \cdot P(W > t - s)\; ds \\ &= \rho \cdot P(B^* + W > t) = P(\zeta(B^* + W) > t). \end{aligned}$$

Am Ende geht dabei die Unabhängigkeit von ζ und (B^*, W) ein.

(c) Die zweite Identität erhält man, wenn man benutzt, daß im G/G/1-Modell für jedes $k \geq 0$ unter $P = P_{i_0}$ die Zufallsgröße A_{k+1} unabhängig von $\sigma(\mathcal{F}_k \cup \sigma(B_k))$ ist und die Verteilung

$$P^A = P_{\xi^*}^{A_1}$$

besitzt. Damit läßt sich die zweite Zeile der Umformungen aus (a) auch alternativ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(V > t) &= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \int_0^{A_{k+1}} \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - s > t\}}\; ds\right) \\ &= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - s > t, A_{k+1} > s\}}\; ds\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} \sum_{k\geq 0} \int_0^\infty P_{i_0}(W_k + B_k - s > t, \nu_1 > k, A_{k+1} > s)\, ds \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} \sum_{k\geq 0} \int_0^\infty P_{i_0}(W_k + B_k - s > t, \nu_1 > k) \cdot P_{\xi^*}(A_{k+1} > s)\, ds \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{E_{i_0}\nu_1} E_{i_0}\left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} \mathbb{1}_{\{W_k + B_k > t+s\}} \right) \cdot \frac{1}{E_{\xi^*}A_1} P_{\xi^*}(A_1 > s)\, ds \\
&= \int_0^\infty P(W + B > t + s) \cdot \frac{1}{E_{\xi^*}A_1} P_{\xi^*}(A_1 > s)\, ds \\
&= P(W + B - A^* > t)
\end{aligned}
$$

Die dritte Verteilungsidentität der Behauptung erhält man aus $W \sim S^>$ (vgl. Satz 3.18). □

Aus Teil (c) ergibt sich speziell für das M/G/1-System mit exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten die interessante

Folgerung 3.23. *Im M/G/1-Modell gilt die Beziehung $W \sim V$.*

Beweis:
Es gelte $P^{A_1} = \mathrm{Exp}(\mu)$ mit $\mu > 0$. Für $t \geq 0$ folgt dann:

$$
\begin{aligned}
P(A^* \leq t) &= \frac{1}{EA_1} \int_0^t P(A_1 > s)\, ds = \int_0^t \mu e^{-\mu s} ds = 1 - e^{-\mu t} \\
&= P(A_1 \leq t) = P(T^{(1)} \leq t)
\end{aligned}
$$

Also gilt $A^* \sim T^{(1)}$ und somit auch

$$
V \sim (W + B - A^*)^+ \sim (W + B - T^{(1)})^+ \sim W
$$

unter Verwendung der Unabhängigkeit all dieser Zufallsgrößen, der Beziehung $W_{k+1} = (W_k + B_k - A_{k+1})^+$ und der Stetigkeit von $x \mapsto x^+$. □

Satz 3.24. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.22 hat die asymptotische Schlangenlänge Q die Eigenschaften*

$$
\boxed{EQ = \frac{1}{EA} \cdot E(W + B) \qquad \text{„Formel von Little“}}
$$

und

$$
\boxed{P(Q = 0) = 1 - \rho.}
$$

Außerdem gilt für alle $n \geq 1$

(a) im SM/SM/1-Modell:

$$
\boxed{P(Q \geq n) = \frac{1}{EA} \cdot \int_0^\infty P(W + B - T^{(n-1)} > t) - P(W - T^{(n-1)} > t)\, dt}
$$

(b) im G/SM/1-Modell:

$$\boxed{P(Q \geq n) = P(W + B > A^* + T^{(n-1)})}$$

$(T^{(n)})_{n\geq 0}$ ist hier unabhängig vom Vektor (W, B).

(c) im G/G/1-Modell:

$$\boxed{\begin{aligned} P(Q \geq n) &= P(W + B > A^* + T^{(n-1)}) \\ &= \rho \cdot P(W + B^* > T^{(n-1)}) = P(V > T^{(n-1)}) \end{aligned}}$$

Beweis[5]**:**
Für jede stetige und P^Q-quasiintegrable Funktion $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ gilt

$$Ef(Q) = \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} \left(\int_0^{T_{\nu_1}} f(Q_s) ds \right)$$

und somit speziell bei Anwendung auf $f = id$:

$$\begin{aligned} EQ &= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0} \left(\int_0^{T_{\nu_1}} Q_s \, ds \right) \\ &= \frac{1}{E_{i_0} T_{\nu_1}} E_{i_0} \left(\int_0^{T_{\nu_1}} \sum_{n=0}^{\nu_1 - 1} 1\!\!1_{\{T_n + W_n + B_n > s, T_n \leq s\}} \, ds \right) \\ &= \frac{1}{E_{\xi^*} A_1} \cdot \frac{1}{E_{i_0} \nu_1} E_{i_0} \left(\sum_{n=0}^{\nu_1 - 1} (W_n + B_n) \right) = \frac{1}{EA} \cdot E(W + B) \end{aligned}$$

Da $\{Q_t = 0\} = \{V_t = 0\}$ für alle $t \geq 0$ gilt, folgt zudem sofort aus Satz 3.22:

$$\begin{aligned} P(Q = 0) &= \lim_{t \to \infty} P_{i_0}(Q_t = 0) = \lim_{t \to \infty} P_{i_0}(V_t = 0) = P(V = 0) \\ &= 1 - \frac{1}{EA} \cdot \big(E(W + B) - EW \big) = 1 - \frac{EB}{EA} = 1 - \rho \end{aligned}$$

(a) Seien $j \geq 1, k \in \{\sigma_{j-1}, \ldots, \sigma_j - 1\}$ und $t \in [T_k, T_{k+1})$. Es gilt dann mit Hinweis auf $W_n = \sum_{i=\sigma_{j-1}+1}^{n} B_{i-1} - A_i$ für $\sigma_{j-1} \leq n \leq k$ aus der formalen Definition von Q_t:

$$\begin{aligned} Q_t &= \sum_{n=\sigma_{j-1}}^{k} 1\!\!1_{\{T_n + W_n + B_n > t\}} = \sum_{n=\sigma_{j-1}}^{k} 1\!\!1_{\{\sum_{i=\sigma_{j-1}}^{n} B_i + T_{\sigma_{j-1}} > t\}} \\ &= \sum_{n=0}^{k-\sigma_{j-1}} 1\!\!1_{\{\sum_{i=\sigma_{j-1}}^{\sigma_{j-1}+n} B_i + T_{\sigma_{j-1}} > t\}} =: \sum_{n=0}^{k-\sigma_{j-1}} 1\!\!1_{\{L_{j,n} > t\}} \end{aligned}$$

[5]vgl. Beweis zu [Al 1] Satz 11.4.2 für eine ähnliche Argumentation

Setzt man $L_{j,i} := 0$ im Fall $i < 0$, so folgt wegen $L_{j,0} < L_{j,1} < \cdots$ für alle $n \geq 0$:

$$\{Q_t \geq n\} = \{L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} > t\}$$

Eine vergleichbare Rechnung wie im Beweis zu Satz 3.22 ergibt nun für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
P(Q \geq n) &= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} \mathbb{1}_{\{Q_t \geq n\}} dt\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} \mathbb{1}_{\{L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} > t\}} dt\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_0^\infty \sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \mathbb{1}_{\{L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} - T_k > t\}} - \mathbb{1}_{\{L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} - T_{k+1} > t\}} dt\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_0^\infty \sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \mathbb{1}_{\{L_{j,k-\sigma_{j-1}} - T_{k+n-1} > t\}} - \mathbb{1}_{\{L_{j,k-\sigma_{j-1}} - T_{k+n} > t\}} dt\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_0^\infty \sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - (T_{k+n-1} - T_k) > t\}} - \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - (T_{k+n} - T_k) > t\}} dt\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} E_{i_0}\left(\int_0^\infty \sum_{j=1}^{\tau_1(i_0)} \sum_{k=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} \mathbb{1}_{\{W_k + B_k - (T_{k+n-1} - T_k) > t\}} - \mathbb{1}_{\{W_{k+1} - (T_{k+n} - T_{k+1}) > t\}} dt\right) \\
&= \frac{1}{E_{i_0}T_{\nu_1}} \int_0^\infty E_{i_0}\left(\sum_{k=0}^{\nu_1 - 1} (\mathbb{1}_{\{W_k + B_k - (T_{k+n-1} - T_k) > t\}} - \mathbb{1}_{\{W_k - (T_{k+n-1} - T_k) > t\}})\right) dt \\
&= \frac{1}{EA} \int_0^\infty P(W + B > t + T^{(n-1)}) - P(W > t + T^{(n-1)})\, dt.
\end{aligned}$$

Für einige Umformungen bedarf es noch kurzer Erläuterungen:

Zeile 4: Die Differenz der Indikatorfunktionen für entfernte bzw. ergänzte Indizes hat jeweils den Wert 0. Begründung:

- Ist $k \in \{\sigma_{j-1}, \ldots, \sigma_{j-1} + n - 2\}$, so folgt:

$$L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} - T_{k+1} \leq L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} - T_k < L_{j,-1} = 0 \leq t$$

- Ist $k \in \{\sigma_j, \ldots, \sigma_j + n - 2\}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} - T_{k+1} \leq L_{j,k-\sigma_{j-1}-n+1} - T_k &= \sum_{i=\sigma_{j-1}}^{k-n+1} B_i + T_{\sigma_{j-1}} - T_k \\
&< \sum_{i=\sigma_{j-1}}^{\sigma_j - 1} B_i - A_{i+1} = S_{\sigma_j} - S_{\sigma_{j-1}} \leq 0 \leq t
\end{aligned}$$

Zeile 6: Einerseits hat man für $k \in \{\sigma_{j-1}, \dots, \sigma_j - 2\}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} W_k + B_k - (T_{k+n} - T_k) &= W_k + B_k - A_{k+1} - (T_{k+n} - T_{k+1}) \\ &= W_{k+1} - (T_{k+n} - T_{k+1}), \end{aligned}$$

andererseits gilt für den Index $k = \sigma_j - 1$:

$$\mathbb{1}_{\{W_{\sigma_j - 1} + B_{\sigma_j - 1} - (T_{\sigma_j - 1 + n} - T_{\sigma_j - 1}) > t\}} = 0 = \mathbb{1}_{\{W_{\sigma_j} - (T_{\sigma_j - 1 + n} - T_{\sigma_j}) > t\}}$$

Zeile 7: Man benötigt die Regenerationseigenschaft des Prozesses $(W_k, B_k, T_{k+n-1} - T_k)_{k \geq 0}$.

Für Teil b) genügt der Hinweis, daß im G/SM/1-Modell $T^{(n-1)}$ unabhängig von (W, B) ist und sich daher nach Bedingen unter $T^{(n-1)}$ die verlangte Identität über die gleichen Rechnungen wie im Beweis zu Satz 3.22 (a),(c) ergibt. Ebenso zeigt man Aussage (c) unter Verwendung der Rechnung aus dem Beweis zu Satz 3.22 (b). $\square$

Kapitel 4

Verbindungen zur Theorie markierter Punktprozesse

Dieses Kapitel beleuchtet einige Aspekte vorangegangener Untersuchungen aus einer alternativen Sichtweise. Während bisher im Prinzip die Anschauung vertreten wurde, die steuernde Markov-Kette $M = (M_n)_{n\geq 0}$ im SM/SM/1-Modell erzeuge sukzessive die einzelnen Zwischenankunftszeiten $(A_n)_{n\geq 1}$, und erst in einem zweiten Schritt werde durch deren Addition schrittweise die Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ der Ankunftszeiten ermittelt, stelle man sich im folgenden vor, die gesamte Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ werde in einem einzigen Schritt mit Hilfe eines *stochastischen Punktprozesses auf* $[0,\infty)$ generiert.

Ein derartiger Punktprozeß ist eine Zufallsvariable N von $(\Omega, \mathcal{A})$ in die Menge $\mathcal{I}$ der *Zählmaße auf* $[0,\infty)$, versehen mit einer geeigneten σ-Algebra $\Im$. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist das Zählmaß $N(\omega)$ eindeutig bestimmt durch seine diskrete Trägermenge, deshalb existiert eine eindeutig bestimmte, monoton wachsende Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ von $[0,\infty]$-wertigen Zufallsgrößen mit

$$N = \sum_{n\geq 0} \delta_{T_n} \qquad [\delta_\infty := 0]. \tag{4.1}$$

Für $B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ gibt dann die Zufallsgröße

$$N(\cdot, B) := N(\cdot)(B) = \sum_{n\geq 0} \delta_{T_n(\cdot)}(B)$$

gerade die Anzahl derartiger *Punkte* T_n *von* N in der Menge B an.

Umgekehrt korrespondiert zu jeder monoton wachsenden Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsgrößen mit Werten in $[0,\infty)^{\mathbb{N}}$ und $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ P-fast sicher, speziell zur Folge der Ankunftszeiten im SM/SM/1-Modell, vermöge (4.1) in eindeutiger Weise ein Punktprozeß, so daß $T_0, T_1, \ldots$ dessen Punkte bilden (im folgenden stets als Beobachtungszeitpunkte interpretiert).

Zusätzliche Informationen zu den Zeitpunkten $T_0, T_1, \ldots$, in unserem Fall etwa die Bedienungszeit des entsprechenden Kunden oder der jeweils aktuelle Zustand der steuernden Markov-Kette, können in Form von *Marken* sogenannter *markierter Punktprozesse* erfaßt werden. Die Einführung dieser allgemeineren Prozesse bildet Inhalt des ersten Abschnitts. Eine zentrale Rolle spielen die Begriffe der *Stationarität von markierten Punktprozessen* und der *Palm-Wahrscheinlichkeit*. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der angedeuteten Verbindung zum SM/SM/1-Ankunftsprozeß, im letzten Paragraphen schließlich beschäftigen wir uns noch einmal eingehender mit den Grenzverteilungen π_V^* und π_Q^* der Prozesse $(V_t)_{t\geq 0}$ und $(Q_t)_{t\geq 0}$. Auch hier bilden die markierten Punktprozesse ein geeignetes Instrument; als Punkte dienen dabei die „Regenerationszeiten“ $(T_{\nu_n})_{n\geq 0}$ dieser semi-regenerativen Prozesse (vgl. Sätze 2.19 und 2.22), als Marken die dadurch gegebenen Zyklen $(V_t)_{T_{\nu_n}\leq t<T_{\nu_{n+1}}}$ bzw. $(Q_t)_{T_{\nu_n}\leq t<T_{\nu_{n+1}}}$, $n \geq 0$.

4.1 Punktprozesse in stetiger Zeit

4.1.1 Bezeichnungen und Definitionen

Ein Maß $\nu \neq 0$ auf $([0,\infty), \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$ mit den Eigenschaften $\nu(B) \in \overline{\mathbb{N}_0}$ für alle $B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ und $\nu(B) < \infty$ für jede beschränkte Menge $B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ heißt *Zählmaß auf* $[0,\infty)$. $\mathcal{I}$ stehe im folgenden für die Menge aller Zählmaße auf $([0,\infty), \mathbb{B}_{|[0,\infty)})$, versehen mit der von sämtlichen Projektionen

$$p_B : \mathcal{I} \to \overline{\mathbb{N}_0}\ ,\ \nu \mapsto \nu(B)$$

erzeugten σ-Algebra

$$\Im = \sigma(p_B;\ B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}). \tag{4.2}$$

K sei ein vollständiger und separabler metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{K}$ und $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$ der Raum aller $\overline{\mathbb{N}_0}$-wertigen Maße $\mu \neq 0$ auf $([0,\infty) \times K, \mathbb{B}_{|[0,\infty)} \otimes \mathcal{K})$ mit $\mu(B \times K) < \infty$ für jede beschränkte Menge $B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$, der sogenannten *Zählmaße auf* $[0,\infty)\times K$. Die σ-Algebra $\Im_K$ ist hierbei in Analogie zu (4.2) definiert durch

$$\Im_K = \sigma(p_{B\times C};\ B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}, C \in \mathcal{K}).$$

Jedes Element von $(\mathcal{I}, \Im)$ läßt sich auch auffassen als Element von $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$, sofern K als entarteter, einelementiger Raum gewählt wird.

Die Tatsache, daß jedes Maß $\mu \in \mathcal{I}_K$ eine diskrete Trägermenge besitzt, erlaubt die Identifizierung von μ mit einer Folge $(t_n(\mu), z_n(\mu))_{n\geq 0}$ in $[0,\infty] \times K$, die den Relationen

$$0 \leq t_0(\mu) \leq t_1(\mu) \leq \cdots \leq \infty \quad \text{und}$$

$$\mu = \sum_{n \geq 0} \delta_{(t_n(\mu), z_n(\mu))} \quad , \delta_{(\infty,k)} := 0 \ \ \forall k \in K,$$

genügt. Für $n \geq 0$ heißt $t_n(\mu)$ *n-ter Punkt von* μ und $z_n(\mu)$ *n-te Marke von* μ. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} t_n(\cdot) &: \mathcal{I}_K \to [0,\infty], \ \mu \mapsto t_n(\mu) \quad \text{und} \\ z_n(\cdot) &: \mathcal{I}_K \to K, \ \mu \mapsto z_n(\mu) \end{aligned}$$

sind meßbar. Man nennt $\mu \in \mathcal{I}_K$ *einfach*, falls die Bedingung

$$\mu(\{x\} \times K) \leq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in [0,\infty)$$

erfüllt ist bzw. die Menge $\{t_n(\mu);\ |t_n(\mu)| < \infty\}$ streng aufsteigend geordnet werden kann.

Definition 4.1 ([F/K] *Def. 1.1.1*). $(\Omega, \mathcal{A})$ sei ein meßbarer Raum. Ein *Punktprozeß* (kurz: *PP*) *auf* $[0,\infty)$ ist eine meßbare Abbildung

$$N : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{I}, \Im).$$

Die meßbare Abbildung $T_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to ([0,\infty), I\!B_{|[0,\infty)})$,

$$T_n(\omega) = t_n\big(N(\omega)\big) \quad , \ n \geq 0,$$

heißt *n-ter Punkt von N*. Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{A})$, nennt man ferner (N, P) einen *stochastischen Punktprozeß (SPP) auf* $[0,\infty)$. Ein *einfacher SPP auf* $[0,\infty)$ zeichnet sich durch die Eigenschaft

$$P(\{\omega;\ N(\omega) \text{ ist einfach}\}) = 1 \tag{4.3}$$

aus.

Anstelle des Bildraums $(\mathcal{I}, \Im)$ kann auch allgemeiner der Raum $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$ zugelassen werden, was zu folgender Begriffsbildung führt:

Definition 4.2 ([F/K] *Def. 1.1.5*). Eine Abbildung

$$N : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{I}_K, \Im_K)$$

von einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ in die Menge der Zählmaße auf $[0,\infty) \times K$ heißt *markierter Punktprozeß (MPP) auf* $[0,\infty)$ *mit Markenraum K*. Für $n \geq 0$ heißt die meßbare Abbildung $T_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to ([0,\infty), I\!B_{|[0,\infty)})$,

$$T_n(\omega) = t_n\big(N(\omega)\big),$$

n-ter Punkt von N und $Z_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (K, \mathcal{K})$,

$$Z_n(\omega) = z_n\big(N(\omega)\big),$$

n-te Marke von N. Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so nennt man das Tupel (N, P) einen *stochastischen markierten Punktprozeß (SMPP) auf* $[0,\infty)$ *mit Markenraum K*. Ein SMPP N mit der Eigenschaft (4.3) heißt *einfach*.

Bemerkung 4.3. Auf die gleiche Weise wie bei den eingangs behandelten Zählmaßen kann jeder PP auf $[0,\infty)$ auch als spezieller MPP auf $[0,\infty)$ mit deterministischen Marken aufgefaßt wrden.

KONVENTIONEN:
Der Begriff eines *SMPP N* beinhaltet fortan stets implizit, daß es sich um einen einfachen SMPP (N,P) auf $[0,\infty)$ mit Markenraum K handelt. Überdies sei P^N konzentriert auf der Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_K^\infty &= \{\mu \in \mathcal{I}_K;\ \mu([0,\infty)) = \infty\} \\ &= \{\mu \in \mathcal{I}_K;\ t_n(\mu) < \infty \quad \text{für alle } n \geq 0\}\end{aligned}$$

derjenigen Zählmaße auf $[0,\infty) \times K$ mit ausschließlich endlichen Punkten. Durch eine Reduktion des Grundraums Ω kann o.B.d.A. angenommen werden, N besitze ausnahmslos Werte in $\mathcal{I}_K^\infty$.
Bei festem $C \in I\!B_{|[0,\infty)} \otimes \mathcal{K}$ stehe $N(C)$ für die Zufallsgröße

$$N(\bullet, C) : \Omega \to \overline{I\!N_0},\ N(\omega, C) := N(\omega)(C).$$

Die Punkte eines SMPP gemäß obiger Vereinbarungen können als zufällig auf der nichtnegativen reellen Achse verteilte Zeitpunkte (etwa Beobachtungszeitpunkte eines Bedienungssystems) interpretiert werden. Die zugehörigen Marken lassen sich dann als (interne oder auch externe) Zusatzinformationen deuten, die zu den entsprechenden Beobachtungszeiten vorliegen.

Bemerkungen 4.4. (a) Sind auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine Folge $(\hat{T}_n)_{n\geq 0}$ von nichtnegativen Zufallsgrößen mit $\lim_{n\to\infty} \hat{T}_n = \infty$ P-fast sicher und fast sicher positiven Zuwächsen sowie eine Folge $(\hat{Z}_n)_{n\geq 0}$ von K-wertigen Zufallsvariablen gegeben, so ist durch die Definition von $\Im_K$ gesichert, daß das zufällige Zählmaß

$$\hat{N} = \sum_{n\geq 0} \delta_{(\hat{T}_n, \hat{Z}_n)}$$

meßbar ist und somit einen SMPP bildet.

(b) Umgekehrt gilt für jeden SMPP N und $C \in I\!B_{|[0,\infty)} \otimes \mathcal{K}$

$$N(C) = \sum_{n\geq 0} \delta_{(T_n, Z_n)}(C) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{I}_C(T_n, Z_n)$$

und nach Anwendung des Funktionserweiterungsarguments auch allgemeiner

$$\int f\, dN = \sum_{n\geq 0} f(T_n, Z_n) \tag{4.4}$$

für jede N-integrierbare Funktion $f : [0,\infty) \times K \to I\!R$.

(c) Die Verteilung P^N eines SMPP ist eindeutig bestimmt durch die endlich-dimensionalen „Randverteilungen“

$$P^{N(B_1\times C_1),\ldots,N(B_n\times C_n)}$$

mit $n \in I\!N$, $B_i \in I\!B_{|[0,\infty)}$, $C_i \in \mathcal{K}$, $i = 1,\ldots,n$.[1]

Definition 4.5 ([F/K] *Def. 1.1.14*). Das *Intensitätsmaß* U_N eines SMPP N ist definiert durch

$$U_N(C) := EN(C) \tag{4.5}$$

für $C \in I\!B_{|[0,\infty)}$.

Ist in (4.5) C von der Form $A \times B$ mit $A \in I\!B_{|[0,\infty)}$ und $B \in \mathcal{K}$, so gibt $U_N(C) = U_N(A \times B)$ gerade die erwartete Anzahl von Punkten in A an, deren Marken in der Menge B liegen.
Bilden die Punkte von N einen Erneuerungsprozeß, so entspricht $U_N(\bullet \times K)$ offenbar genau dem Erneuerungsmaß zu $(T_n)_{n\geq 0}$.

4.1.2 Stationarität und Intensität eines SMPP

Für $t \geq 0$ bezeichne $\theta_t : \mathcal{I}_K \to \mathcal{I}_K$,

$$\mu = \sum_{n\geq 0} \delta_{(t_n(\mu),z_n(\mu))} \mapsto \theta_t\mu = \sum_{\substack{n\geq 0\\ t_n(\mu)\geq t}} \delta_{(t_n(\mu)-t,z_n(\mu))} \qquad [\infty - t := \infty],$$

den *Shift-Operator auf* $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$. Offenkundig gilt

$$\theta_t \circ \theta_s = \theta_{t+s} \quad \text{für alle} \quad s,t \geq 0,$$

und man sieht leicht ein, daß für $\mu \in \mathcal{I}_K$, $A \in I\!B_{|[0,\infty)}$, $C \in \mathcal{K}$ und $t \geq 0$

$$\theta_t\mu(A \times C) = \mu(A + t, C) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ t_n(\mu)\geq t}} 1\!\!1_{A\times C}(t_n(\mu) - t, z_n(\mu))$$

bzw. allgemeiner für jede $\mu(\bullet \times K)$-quasi integrierbare Funktion $f : [0,\infty) \to I\!R$

$$\int_{[0,\infty)} f(x)\ (\theta_t\mu)(dx \times K) = \int_{[t,\infty)} f(x-t)\ \mu(dx \times K) = \sum_{\substack{n\geq 0\\ t_n(\mu)\geq t}} f(t_n(\mu) - t)$$

gelten. Den n-ten Punkt $t_n(\theta_t\mu)$ von $\theta_t\mu$ bildet der n-te Punkt von μ rechts von t, bezeichnet mit $t_{n(+t)}(\mu)$, abzüglich t. Die n-te Marke von $\theta_t\mu$ ist diejenige von μ,

[1] vgl. hierzu [M/K/M] Prop. 1.3.2

die zu $t_{n(+t)}(\mu)$ gehört. Der Operator θ_t kann somit gedeutet werden als eine Verschiebung des Nullpunktes um den Betrag t nach rechts. Punkte eines Zählmaßes $\mu \in \mathcal{I}_K$ unterhalb von t werden dabei entfernt, die übrigen Punkte behalten ihre alten Marken.

In Analogie zu reellwertigen stochastischen Prozessen in stetiger Zeit nennt man einen SMPP *stationär*, wenn eine derartige „zeitliche Verschiebung“ des Beobachtungsstartpunkts keinen Einfluß auf seine Verteilung hat.

Definition 4.6 ([F/K] *Def. 1.2.1*). Ein SMPP N (bzw. seine Verteilung P^N) heißt *stationär*, wenn P^N invariant ist gegenüber der Familie $(\theta_t)_{t\geq 0}$, also

$$P^{\theta_t N} = P^N \quad \text{für alle} \quad t \geq 0$$

gilt.

Aufgrund seiner Invarianzeigenschaft besitzt ein stationärer SMPP in Intervallen gleicher Länge auf $[0,\infty)$ immer dieselbe mittlere Anzahl von Punkten, mit anderen Worten, $U_N(\bullet \times K)$ ist auf $B_{|[0,\infty)}$ translationsinvariant. Es macht daher Sinn, von einer *mittleren Anzahl von Punkten pro Zeiteinheit*, der sogenannten *Intensität von N*, zu sprechen.

Definition 4.7 ([F/K] *Def. 1.2.3*). Gegeben einen stationären SMPP N mit Intensitätsmaß U_N, heißt

$$\lambda_N := U_N((0,1] \times K) \in (0,\infty]$$

Intensität von N.

Verallgemeinernd kann auf $(K,\mathcal{K})$ das Maß

$$\Lambda_N = U_N((0,1] \times \bullet) \tag{4.6}$$

eingeführt werden. Es gilt dann $\lambda_N = \Lambda_N(K)$, und für festes $L \in \mathcal{K}$ ist $\Lambda_N(L)$ die Intensität des SMPP mit Markenraum L, der aus N via Entfernung derjenigen Punkte mit Marken außerhalb von L hervorgeht.

Satz 4.8 ([F/K] *Th. 1.2.4*). *Für jeden stationären SMPP N mit endlicher Intensität λ_N gilt die Gleichung*

$$U_N(B \times C) = \lambda\!\!\lambda_0(B) \cdot \Lambda_N(C),$$

$B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$, $C \in \mathcal{K}$.

Beweis:
Für festes $C \in \mathcal{K}$ ist das Maß $U_N(\bullet \times C)$ wegen der Stationarität von N translationsinvariant auf $\mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ mit $U_N((0,1] \times C) \leq \lambda_N < \infty$. Daher ist $U_N(\bullet \times C)$ ein Vielfaches von $\lambda\!\!\lambda_0(\bullet \cap [0,\infty))$, d.h. für alle $B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ gilt

$$\frac{U_N(B \times C)}{\lambda\!\!\lambda_0(B)} = \frac{U_N((0,1] \times C)}{\lambda\!\!\lambda_0((0,1])} = U_N((0,1] \times C) = \Lambda_N(C).$$

$\square$

4.1.3 Die Palm-Wahrscheinlichkeit

Mit dem Konzept der *Palm-Wahrscheinlichkeit* wird der Überlegung Rechnung getragen, daß stationäre SMPPs, „invariant unter beliebigen Zeitachsenverschiebungen in die Zukunft“, in Verbindung gebracht weden können mit solchen SMPPs, deren 0-ter Punkt fast sicher mit dem Beobachtungsstartpunkt zusammenfällt und deren Verteilung sich nicht ändert, wenn eine Zeitachsenverschiebung um einen beliebigen anderen seiner Punkte T_n, $n \geq 1$, vorgenommen wird.

Letztgenannte Eigenschaften sind charakteristisch für die Palm-Wahrscheinlichkeit P_N^0 eines stationären SMPP mit endlicher Intensität. Wir verweisen hierzu auf Theorem 4.14. Andererseits ist die Verteilung P^N durch P_N^0 bereits eindeutig bestimmt, wie die Umkehrformel 4.13 zeigen wird.

Sei zunächst N ein stationärer SMPP, dessen Intensität λ_N von nun an generell als endlich vorausgesetzt wird. Seine Marken Z_n, $n \geq 0$, ersetzen wir durch die Zufallsvariablen

$$\tilde{Z}_n(\omega) := \theta_{T_n(\omega)} N(\omega).$$

Diese neuen Marken haben jeweils Werte in

$$\mathcal{I}_K^0 := \{\mu \in \mathcal{I}_K^\infty;\ t_0(\mu) = 0\}.$$

Motiviert durch die Beziehung

$$Z_n = z_0(\theta_{T_n} N) = z_0(\tilde{Z}_n) \quad \text{für alle } n \geq 0$$

nennt man $(\tilde{Z}_n)_{n \geq 0}$ auch *universelle Markenfolge von N.*

Durch den vorgenommenen Markenaustausch erhält man einen neuen SMPP

$$\tilde{N} = \sum_{n \geq 0} \delta_{(T_n, \tilde{Z}_n)},$$

diesmal mit Werten in $(\mathcal{I}_{\mathcal{I}_K}, \Im_{\mathcal{I}_K})$. Dieser ist wegen

$$\begin{aligned}
\theta_t \tilde{N} &= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ T_n \geq t}} \delta_{(T_n - t, \tilde{Z}_n)} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ T_n - t \geq 0}} \delta_{(T_n - t, z_0(\theta_{T_n} N))} \\
&= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ t_n(\theta_t N) \geq 0}} \delta_{(t_n(\theta_t N), z_0(\theta_{T_n - t} \circ \theta_t N))} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ t_n(\theta_t N) \geq 0}} \delta_{(t_n(\theta_t N), z_0(\theta_{t_n(\theta_t N)} \circ \theta_t N))}
\end{aligned}$$

offenbar wieder stationär mit der Intensität

$$\lambda_{\tilde{N}} = U_{\tilde{N}}((0,1] \times \mathcal{I}_K) = E\left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{I}_{(0,1]}(T_n)\right) = U_N((0,1] \times K) = \lambda_N.$$

Definition 4.9 ([F/K] *Def. 1.2.6*). In der vorstehend beschriebenen Situation heißt das auf $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_N^0(C) = \frac{1}{\lambda_{\tilde{N}}} \cdot \Lambda_{\tilde{N}}(C) = \frac{1}{\lambda_N} \cdot U_{\tilde{N}}((0,1] \times C) \quad , C \in \Im_{\mathcal{I}_K},$$

Palm-Wahrscheinlichkeit von N.

Bemerkungen 4.10. (a) Die Gesamtmasse von P_N^0 ist konzentriert auf

$$\mathcal{I}_K^0 = \{\mu \in \mathcal{I}_K^\infty;\ t_0(\mu) = 0\},$$

weil die universellen Marken $\tilde{Z}_n$, $n \geq 0$, von N nur Werte in dieser Menge annehmen.

(b) Nach Satz 4.8 gilt für alle $B \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$ mit $\lambda\!\!\lambda_0(B) < \infty$ und $C \in \mathcal{I}_K$

$$\begin{aligned} P_N^0(C) &= \frac{1}{\lambda_N} \cdot \Lambda_{\tilde{N}}(C) = \frac{1}{\lambda_N \cdot \lambda\!\!\lambda_0(B)} \cdot U_{\tilde{N}}(B \times C) \\ &= \frac{1}{\lambda_N \cdot \lambda\!\!\lambda_0(B)} \cdot E\left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_B(T_n) \cdot \mathbb{1}_C(\theta_{T_n} N)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_N \cdot \lambda\!\!\lambda_0(B)} \cdot \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_B(t_n(\mu)) \cdot \mathbb{1}_C(\theta_{t_n(\mu)}\mu)\ P^N(d\mu). \end{aligned}$$

Mit dem Funktionserweiterungsargument folgt ferner die Gültigkeit von

$$\int_{\mathcal{I}_K^0} f(\mu)\ P_N^0(d\mu) = \frac{1}{\lambda_N \cdot \lambda\!\!\lambda_0(B)} \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_B(x) f(\theta_x \mu)\ \mu(dx \times K)\ P^N(d\mu) \tag{4.7}$$

für jede P_N^0-quasi integrierbare Funktion $f : \mathcal{I}_K \to \mathbb{R}$.

Es sei

$$\theta : \mathcal{I}_K \to \mathcal{I}_K, \quad \theta\mu := \theta_{t_1(\mu)}\mu,$$

der Shift-Operator auf $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$, der eine Verschiebung um den jeweils ersten Punkt eines Zählmaßes auf $[0,\infty) \times K$ vornimmt. Wir kommen zu einer wichtigen Invarianzeigenschaft der Palm-Wahrscheinlichkeit.

Satz 4.11 ([F/K] *Th. 1.2.7*). *In der Situation von Definition 4.9 gilt*

$$(P_N^0)^\theta = P_N^0.$$

Beweis:
Für $t > 0$ und $\mu \in \mathcal{I}_K$ setzen wir $n(t,\mu) = \mu([0,t) \times K)$. Unter Verwendung von Gleichung (4.7) gilt für jedes $C \in \Im_K$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&|P_N^0(C) - (P_N^0)^\theta(C)| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_N \cdot t} \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \left| \sum_{j=0}^{n(t,\mu)} \mathbb{1}_C(\theta_{t_j(\mu)}\mu) - \mathbb{1}_C(\theta_{t_1(\mu)} \circ \theta_{t_j(\mu)}\mu) \right| P^N(d\mu) \\
&= \frac{1}{\lambda_N \cdot t} \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \left| \sum_{j=0}^{n(t,\mu)} \mathbb{1}_C(\theta_{t_j(\mu)}\mu) - \mathbb{1}_C(\theta_{t_{j+1}(\mu)}\mu) \right| P^N(d\mu) \\
&= \frac{1}{\lambda_N \cdot t} \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \left| \mathbb{1}_C(\theta_{t_0(\mu)}\mu) - \mathbb{1}_C(\theta_{t_{n(t,\mu)+1}(\mu)}\mu) \right| P^N(d\mu) \leq \frac{2}{\lambda_N \cdot t}.
\end{aligned}
$$

Der Grenzübergang $t \to \infty$ liefert das Gewünschte. □

Satz 4.12 (Verallgemeinerte Campbell-Formel) ([F/K] *Th. 1.2.8*).
Ist N ein stationärer SMPP mit zugehöriger Palm-Wahrscheinlichkeit P_N^0, so folgt

$$
\int_{[0,\infty)} \int_{\mathcal{I}_K^0} g(s,\mu)\ P_N^0(d\mu)\ \lambda_0(ds) = \frac{1}{\lambda_N} \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \int_{[0,\infty)} g(s,\theta_s\mu)\ \mu(ds \times K)\ P^N(d\mu)
$$

für jede nichtnegative, meßbare Funktion $g : ([0,\infty) \times \mathcal{I}_K, \mathbb{B}_{|[0,\infty)} \otimes \Im_K) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

Beweis:
Mit Hinweis auf das Funktionserweiterungsargument, die σ-Endlichkeit von λ_0 und den Satz von der monotonen Konvergenz genügt der Nachweis der Formel für Funktionen der Form

$$
g(s,\mu) = \mathbb{1}_A(s) \cdot \mathbb{1}_C(\mu)
$$

mit $A \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$, $0 < \boldsymbol{\lambda}_0(A) < \infty$, und $C \in \Im_K$. Für eine derartige Funktion ergeben sich die nachstehenden Umformungen unter Verwendung des Satzes von Fubini und Gleichung (4.7).

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} \int_{\mathcal{I}_K^0} g(s,\mu)\ P_N^0(d\mu)\ \lambda_0(ds) &= \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_A(s) \int_{\mathcal{I}_K^0} \mathbb{1}_C(\mu)\ P_N^0(d\mu)\ \lambda_0(ds) \\
&= \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_A(s) \cdot P_N^0(C)\ \lambda_0(ds) = \lambda_0(A) \cdot P_N^0(C) \\
&= \frac{1}{\lambda_N} \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_A(s) \cdot \mathbb{1}_C(\theta_s\mu)\ \mu(ds \times K)\ P^N(d\mu) \\
&= \frac{1}{\lambda_N} \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \int_{[0,\infty)} g(s,\theta_s\mu)\ \mu(ds \times K)\ P^N(d\mu)
\end{aligned}
$$

□

Korollar 4.13 (Umkehrformel) ([F/K] ***(1.2.19), Cor. 1.2.10)*****.**
Unter den Voraussetzungen der verallgemeinerten Campbell-Formel gilt

$$\begin{aligned} P^N(A) &= \lambda_N \int_{[0,\infty)} P_N^0\big(\{\mu \in \mathcal{I}_K^0;\ t_1(\mu) > s, \theta_s\mu \in A\}\big)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds) \\ &= \lambda_N \int_{\mathcal{I}_K^0} \int_{[0,t_1(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ P_N^0(d\mu) \end{aligned}$$

für alle $A \in \Im_K$. Weiter folgt daraus

$$\int_{\mathcal{I}_K^0} t_1(\mu)\ P_N^0(d\mu) = \frac{1}{\lambda_N}.$$

Beweis:
Man wende die verallgemeinerte Campbell-Formel wie folgt auf die Funktion

$$g(t,\mu) = 1\!\!1_{[0,1)}(t) \cdot \int_{[0,t_1(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)$$

an (es sei $t_{+1}(\mu) = \inf\{t_n(\mu);\ t_n(\mu) \geq 1\}$):

$$\begin{aligned} &\lambda_N \cdot \int_{\mathcal{I}_K^0} \int_{[0,t_1(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ P_N^0(d\mu) \\ &= \lambda_N \int_{[0,\infty)} \int_{\mathcal{I}_K^0} 1\!\!1_{[0,1)}(t) \cdot \int_{[0,t_1(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ P_N^0(d\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(dt) \\ &= \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \int_{[0,\infty)} 1\!\!1_{[0,1)}(t) \cdot \int_{[0,t_1(\theta_t\mu))} 1\!\!1_A(\theta_{t+s}\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ \mu(dt \times K)\ P^N(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \int_{[0,\infty)} 1\!\!1_{[0,1)}(t) \cdot \int_{[t,t+t_1(\theta_t\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ \mu(dt \times K)\ P^N(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \sum_{n\geq 0} 1\!\!1_{[0,1)}(t_n(\mu)) \cdot \int_{[t_n(\mu),t_{n+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ P^N(d\mu) \\ &= \int_{\mathcal{I}_K^\infty} \int_{[t_0(\mu),t_{+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ P^N(d\mu) \\ &= E\left(\int_{[0,1)} 1\!\!1_A(\theta_s N)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) + E\left(\int_{[1,t_{+1}(N))} 1\!\!1_A(\theta_s N)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\ &\quad - E\left(\int_{[0,t_0(N))} 1\!\!1_A(\theta_s N)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) \\ &= \int_{[0,1)} P^{\theta_s N}\ \lambda\!\!\lambda_0(ds) \ = \ P^N(A) \end{aligned}$$

Beim Übergang zur letzten Zeile beachte man dabei

$$E\left(\int_{[1,t_{+1}(N))} 1\!\!1_A(\theta_s N)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) = E\left(\int_{[0,t_{+1}-1(N))} 1\!\!1_A(\theta_s \circ \theta_1 N)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right)$$

$$= E\left(\int_{[0,t_0(\theta_1 N)} \mathbb{I}_A(\theta_s \circ \theta_1 N)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right) = E\left(\int_{[0,t_0(N))} \mathbb{I}_A(\theta_s N)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\right).$$

Die soeben gezeigte Umkehrformel kann jetzt zusammen mit einer bekannten Integrationsformel folgendermaßen zum Beweis der noch ausstehenden Behauptung benutzt werden:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}_K^0} t_1(\mu)\ P_N^0(d\mu) &= \int_0^\infty P_N^0\big(\{\mu \in \mathcal{I}_K^0;\ t_1(\mu) > x\}\big)\ dx \\ &= \int_0^\infty P_N^0\big(\{\mu \in \mathcal{I}_K^0;\ t_1(\mu) > x, \theta_x\mu \in \mathcal{I}_K\}\big)\ dx \\ &= \frac{1}{\lambda_N} \cdot P^N(\mathcal{I}_K) = \frac{1}{\lambda_N}\end{aligned}$$

□

Theorem 4.14 ([F/K] *Th. 1.3.1*). *Für eine eine Verteilung Q auf $\mathcal{I}_K$ mit*

$$Q(\mathcal{I}_K^0) = Q(\{\mu \in \mathcal{I}_K^\infty;\ t_0(\mu) = 0\}) = 1$$

sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Es gibt einen stationären SMPP N mit Intensität $\lambda \in (0,\infty)$ und

$$P_N^0 = Q.$$

(b) Q ist invariant gegenüber der Transformation θ und

$$\int_{\mathcal{I}_K^0} t_1(\mu)\ Q(d\mu) = \frac{1}{\lambda} < \infty.$$

Beweis:
Es ist nur noch die Richtung (b)$\Rightarrow$(a) zu verifizieren. Die einzig mögliche Gestalt für P^N ist nach der Umkehrformel gegeben durch

$$P^N(A) = \lambda \int_{\mathcal{I}_K^0} \int_{[0,t_1(\mu))} \mathbb{I}_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ Q(d\mu).$$

Die so definierte Mengenfunktion P^N auf $\Im_K$ erfüllt offenbar die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. Zum Nachweis der Invarianz gegenüber der Familie $(\theta_t)_{t\geq 0}$ nutzen wir zunächst die θ-Invarianz von Q und die Beziehung $\theta^j\mu = \theta_{t_j(\mu)}\mu$ für $\mu \in \mathcal{I}_K^0$ aus. Diese Eigenschaften ergeben

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{\lambda}{n+1}\sum_{j=0}^n \int_{\mathcal{I}_K^0}\int_{[0,t_1(\theta_{t_j(\mu)}\mu))} \mathbb{I}_A(\theta_{s+t_j(\mu)}\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ Q(d\mu) \\ &= \frac{\lambda}{n+1}\sum_{j=0}^n \int_{\mathcal{I}_K^0}\int_{[0,t_{j+1}(\mu)-t_j(\mu))} \mathbb{I}_A(\theta_{s+t_j(\mu)}\mu)\ \lambda\!\!\lambda_0(ds)\ Q(d\mu)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\int_{\mathcal{I}_K^0}\int_{[t_j(\mu),t_{j+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\ Q(d\mu)\\
&= \frac{\lambda}{n+1}\int_{\mathcal{I}_K^0}\int_{[0,t_{n+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\ Q(d\mu).
\end{aligned}$$

Analog folgt für $t \geq 0$

$$P^{\theta_t N}(A) = \frac{\lambda}{n+1}\int_{\mathcal{I}_K^0}\int_{[0,t_{n+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_{t+s}\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\ Q(d\mu)$$

und somit

$$\begin{aligned}
&|P^{\theta_t N}(A) - P^N(A)|\\
&\leq \frac{\lambda}{n+1}\int_{\mathcal{I}_K^0}\left|\int_{[0,t_{n+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_{t+s}\mu) - 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\right|\ Q(d\mu)\\
&= \frac{\lambda}{n+1}\int_{\mathcal{I}_K^0}\left|\int_{[t,t+t_{n+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds) - \int_{[0,t_{n+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\right|\ Q(d\mu)\\
&= \frac{\lambda}{n+1}\int_{\mathcal{I}_K^0}\left|\int_{[t_{n+1}(\mu),t+t_{n+1}(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds) - \int_{[0,t)} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\right|\ Q(d\mu)\\
&\leq \frac{2t\cdot\lambda}{n+1}.
\end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0 und es ergibt sich notwendigerweise $P^{\theta_t N}(A) = P^N(A)$. Abschließend muß noch gezeigt werden, daß N die Intensität λ besitzt und Q tatsächlich mit der Palm-Wahrscheinlichkeit P_N^0 übereinstimmt.

Definiert man wieder das Wahrscheinlichkeitsmaß $\Lambda_{\tilde{N}}$ gemäß (4.6) zum SMPP $\tilde{N}$, der sich aus N via Markenaustausch mit den universellen Marken ergibt, so lassen sich die Beweise von Satz 4.11, der verallgemeinerten Campbell-Formel und der Umkehrformel analog mit „$\Lambda_{\tilde{N}}$" anstelle von „$\lambda_N \cdot P_N^0$" führen, was auf die Formel

$$P^N(A) = \int_{\mathcal{I}_K^0}\int_{[0,t_1(\mu))} 1\!\!1_A(\theta_s\mu)\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\ \Lambda_{\tilde{N}}(d\mu)$$

für beliebiges $A \in \Im_K$ führt. Unter Beachtung von

$$\theta_{t_0(\theta_s\mu)} \circ \theta_s\mu = \tilde{z}_0(\theta_s\mu) = \tilde{z}_1(\mu) = \theta_{t_1(\mu)}\mu = \theta\mu$$

für alle $s \in (0, t_1(\mu))$ zeigt dies

$$P^{\theta_{T_0}N} = \int_{\mathcal{I}_K^0} t_1(\mu)\cdot 1\!\!1_{\{\theta\mu\in\bullet\}}\ \Lambda_{\tilde{N}}(d\mu).$$

Ebenso führt die Definition von P^N mittels Q auf

$$P^{\theta_{T_0}N} = \int_{\mathcal{I}_K^0} t_1(\mu)\cdot 1\!\!1_{\{\theta\mu\in\bullet\}}\ (\lambda Q)(d\mu).$$

Da $t_1(\mu)$ stets echt positiv ist, muß damit bereits $\Lambda_{\tilde{N}} = \lambda Q$ gelten. Insbesondere folgt für die Intensität λ_N von N

$$\lambda_N = \lambda_{\tilde{N}} = \Lambda_{\tilde{N}}(\mathcal{I}_K) = \lambda Q(\mathcal{I}_K) = \lambda < \infty$$

und

$$Q = \frac{\Lambda_{\tilde{N}}}{\lambda} = \frac{\Lambda_{\tilde{N}}}{\lambda_N} = P_N^0.$$

□

Definition 4.15. Gegeben seien ein stationärer SMPP N^* mit endlicher Intensität $\lambda_{N^*} \in (0, \infty)$ und ein SMPP N mit

$$P^N = P_{N^*}^0.$$

Man nennt dann N eine *Palm-Version* von N^* und N^* *stationäre Version* von N.

4.2 Der SM/SM/1-Input als markierter Punktprozeß

Wir identifizieren den Ankunftsprozeß $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ des SM/SM/1-Modells, gegeben in einem Standardmodell, mit dem SMPP

$$N = \sum_{n\geq 0} \delta_{\left((T_n,(B_n,M_n)\right)},$$

der Werte im Raum $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$ mit $K = [0, \infty) \times S$ annimmt. Die Ankunftszeitpunkte $(T_n)_{n\geq 0}$ bilden die Punkte von N, die n-te Marke von N ist jeweils das Tupel (B_n, M_n) aus n-ter Bedienungszeit und Zustand der Steuerkette zum Zeitpunkt T_n.

Unter P_{ξ^*} (zur Erinnerung: ξ^* ist die stationäre Verteilung von $M = (M_n)_{n\geq 0}$) ist die Folge $(M_n, A_{n+1}, B_n)_{n\geq 0}$ stationär, weil $(M_n, A_n, B_{n-1})_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit Steuerkette M bildet. Folglich gilt für die Shift-Funktion θ, $\mu \mapsto \theta\mu = \theta_{t_1(\mu)}\mu$, auf $\mathcal{I}_K$ und beliebiges $A \in \Im_K$

$$\begin{aligned}
&P_{\xi^*}(\theta N \in A) = P_{\xi^*}\left(\sum_{n\geq 1} \delta_{\left(T_n - T_1,(B_n,M_n)\right)} \in A\right) \\
&= P_{\xi^*}\left(\sum_{n\geq 1} \delta_{\left(\sum_{k=2}^n A_k,(B_n,M_n)\right)} \in A\right) = P_{\xi^*}\Big(f(M_n, B_n, A_{n+1})_{n\geq 1} \in A\Big) \\
&= P_{\xi^*}\Big(f(M_n, B_n, A_{n+1})_{n\geq 0} \in A\Big) = P_{\xi^*}\left(\sum_{n\geq 0} \delta_{\left(T_n,(B_n,M_n)\right)} \in A\right) = P_{\xi^*}(N \in A),
\end{aligned}$$

d.h. $P_{\xi^*}^N$ ist invariant unter θ. In Verbindung mit

$$P_{\xi^*}^N\big(\{\mu \in \mathcal{I}_K^\infty;\ t_0(\mu) = 0\}\big) = P_{\xi^*}(T_0 = 0) = 1 \quad \text{und}$$

$$\int_{\mathcal{I}_K^0} t_1(\mu)\ P_{\xi^*}^N(d\mu) = E_{\xi^*}T_1 = E_{\xi^*}A_1 < \infty \tag{4.8}$$

erfüllt N unter P_{ξ^*} daher die nach Theorem 4.14 hinreichenden Eigenschaften einer Palm-Version zu einem stationären SMPP N^* mit endlicher Intensität λ_{N^*}.

Identifiziert man diesen stationären SMPP N^* mit seinen Punkten $(T_n^*)_{n\geq 0}$ und Marken $(B_n^*, M_n^*)_{n\geq 0}$ und interpretiert für $n \geq 0$ wiederum T_n^* als Ankunftszeitpunkt eines Kunden mit Servicebedarf B_n^* in einem Bedienungssystem, ergibt sich eine alternative Interpretation für die SM/SM/1-Verkehrsintensität

$$\rho = \frac{E_{\xi^*}B_0}{E_{\xi^*}A_1}.$$

Die Intensität λ_{N^*} von N^* ergibt sich nach Theorem 4.14 und (4.8) zu

$$\lambda_{N^*} = \frac{1}{E_{\xi^*}A_1},$$

deshalb besitzt ρ die Darstellung

$$\rho = \frac{E_{\xi^*}B_0}{E_{\xi^*}A_1} = \lambda_{N^*} \cdot E_{\xi^*}B_0 = \lambda_{N^*} \cdot E_{N^*}^0 B_0^*.$$

Zur Definition der Palm-Wahrscheinlichkeit $P_{N^*}^0$ diente das Intensitätsmaß U_{N^*} von N^*. Dies zeigte, daß für $L \in \mathbb{B}_{|[0,\infty)}$

$$\lambda_{N^*} \cdot P_{N^*}^0(B_0^* \in L) = U_{N^*}\big((0,1] \times (L \times S)\big)$$

den mittleren Servicebedarf der Größe L angibt, der pro Zeiteinheit im von N^* beschriebenen Bedienungssystem neu eintrifft. Demnach läßt sich $\rho = \lambda_{N^*} \cdot E_{N^*}^0 B_0^*$ deuten als *mittlere neueintreffende Arbeitsbelastung, gemessen in Zeiteinheiten, pro Zeiteinheit.*
Auch diese Sichtweise steht im Einklang mit der Notwendigkeit von $\rho < 1$ für die Stabilität des SM/SM/1-Systems.

4.3 Stationarität spezieller Grenzverteilungen im SM/SM/1-Modell

Gegeben sei der Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$ der anstehenden Arbeit in der Form, wie er in Kapitel 2, Abschnitt 2.5, vorausgesetzt wurde. Eines seiner wesentlichen Merkmale ist die

Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes ϕ auf $S \times [0,\infty)^2$ sowie einer Folge von „Regenerationszeiten“ $(T_{\nu_n})_{n\geq 0}$ mit $T_{\nu_0} = 0$ und 2-abhängigen Zuwächsen, so daß für alle $n \geq 1$ und $\lambda \in \mathcal{W}(S \times [0,\infty)^2)$ die Verteilungsidentität

$$P_\lambda^{\left((T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k})_{k\geq n}, (V_{T_{\nu_n}+t})_{t\geq 0}\right)} = P_\phi^{\left((T_{\nu_{k+1}} - T_{\nu_k})_{k\geq 0}, (V_t)_{t\geq 0}\right)} \tag{4.9}$$

gilt. Als Konsequenz konvergieren die zeitlich gemittelten Verteilungen

$$\frac{1}{t}\int_{[0,t)} P_\lambda^{V_s}\, \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)$$

in Totalvariation gegen die Grenzverteilung

$$\pi_V^* = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} \cdot E_\phi\left(\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_{\{V_s \in \bullet\}}\, \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\right)\right).$$

Es seien $\mathcal{C}$ die Menge aller meßbaren Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\overline{I\!R} = I\!R \cup \{\infty\}$ und

$$K := \{f \in \mathcal{C};\ \exists \tau(f) > 0:\ f(t) \in I\!R\ \forall\, t \leq \tau(f),\ f(t) = \infty\ \forall\, t > \tau(f)\}.$$

Für jedes $n \geq 0$ kann dann der Zyklus

$$Z_n^V = (V_{T_{\nu_n}+t})_{0\leq t < T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n}}$$

nach der kanonischen Erweiterung

$$Z_n^V = (Z_n^V(\cdot,t))_{t\geq 0} = \begin{cases} V_{T_{\nu_n}+t} & \text{für} \quad t < T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n} \\ \infty & \text{für} \quad t \geq T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n} \end{cases}$$

als Zufallsvariable mit Werten in K und

$$N_V = \sum_{n\geq 0} \delta_{(T_{\nu_n}, Z_n^V)}$$

als SMPP mit Werten in $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$, Punkten $(T_{\nu_n})_{n\geq 0}$ und Marken $(Z_n^V)_{n\geq 0}$ aufgefaßt werden.

Für festes $s \geq 0$ erfüllt die auf $(\mathcal{I}_K, \Im_K)$ definierte reellwertige Funktion

$$h_s(\mu) = \sum_{n\geq 0} 1\!\!1_{\left\{t_n(\mu) \leq s < t_{n+1}(\mu)\right\}} z_n\big(\mu, s - t_n(\mu)\big)$$

die Eigenschaft

$$h_s(\mu) = h_0(\theta_s \mu).$$

Ferner besitzt für beliebiges $\omega \in \Omega$ der Wert $V_s(\omega)$ die Darstellung

$$V_s(\omega) = \sum_{n\geq 0} 1\!\!1_{\left\{T_{\nu_n}(\omega) \leq s < T_{\nu_{n+1}}(\omega)\right\}} Z_n^V\big(\omega, s - T_{\nu_n}(\omega)\big) = h_s\big(N_V(\omega)\big).$$

Satz 4.16. *Unter P_ϕ ist*

$$N_V = \sum_{n\geq 0} \delta_{(T_{\nu_n}, Z_n^V)}$$

die Palm-Version eines stationären SMPP N_V^*.

Beweis:
Wir notieren zunächst

$$P_\phi^{N_V}\big(\{\mu \in \mathcal{I}_K^\infty;\ t_0(\mu) = 0\}\big) = P_\phi(T_{\nu_0} = 0) = 1 \quad \text{und}$$

$$\int_{\mathcal{I}_K^0} t_1(\mu)\ P_\phi^{N_V}(d\mu) = E_\phi T_{\nu_1} < \infty.$$

Darüber hinaus ist $P_\phi^{N_V}$ invariant unter der Shift-Funktion θ, $\mu \mapsto \theta\mu = \theta_{t_1(\mu)}\mu$, auf $\mathcal{I}_K$, was unter Benutzung von (4.9) die Rechnung

$$\begin{aligned}
P_\phi(\theta N_V \in A) &= P_\phi\left(\sum_{n\geq 1} \delta_{(T_{\nu_n} - T_{\nu_1}, Z_n^V)} \in A\right) \\
&=: P_\phi\Big(f\big((T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n})_{n\geq 1}, (V_{T_{\nu_1}+t})_{t\geq 0}\big) \in A\Big) \\
&= P_\phi\Big(f\big((T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n})_{n\geq 0}, (V_t)_{t\geq 0}\big) \in A\Big) \\
&= P_\phi\left(\sum_{n\geq 0} \delta_{(T_{\nu_n}, Z_n^V)} \in A\right) = P_\phi(N_V \in A)
\end{aligned}$$

für beliebiges $A \in \Im_K$ belegt. Die Behauptung folgt somit unmittelbar aus Theorem 4.14. $\square$

Als Anwendung der Umkehrformel ergibt sich daraus das folgende Korollar, dessen Aussagen verwandt sind mit den Hauptargumenten im Beweis von Theorem 1 in [Si].

Korollar 4.17. *Die stationäre Version N_V^* von N_V besitzt die Intensität*

$$\lambda_{N_V^*} = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}}$$

und die Verteilung

$$\begin{aligned}
P^{N_V^*} &= \lambda_{N_V^*} \int_{\mathcal{I}_K^0} \int_{[0,t_1(\mu))} \mathbb{1}_{\{\theta_s\mu \in \bullet\}}\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\ P_\phi^{N_V}(d\mu) \\
&= \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} E_\phi\left(\int_{[0,T_{\nu_1})} \mathbb{1}_{\{\theta_s N_V \in \bullet\}}\ \lambda\!\!\!\lambda_0(ds)\right).
\end{aligned}$$

Die Zufallsgröße $h_0(N_V^*)$ ist verteilt gemäß

$$P^{h_0(N_V^*)} = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_{\{h_0(\theta_s N_V) \in \bullet\}} \lambda\!\!\!\lambda_0(ds) \right) \tag{4.10}$$
$$= \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_{\{h_s(N_V) \in \bullet\}} \lambda\!\!\!\lambda_0(ds) \right)$$
$$= \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_{\{V_s \in \bullet\}} \lambda\!\!\!\lambda_0(ds) \right) = \pi_V^*.$$

Abschließend sei bemerkt, daß sich alle Ergebnisse dieses Abschnitts - ähnlich wie in Kapitel 2 - analog für den Schlangenlänge-Prozeß $(Q_t)_{t\geq 0}$ formulieren lassen, weil dieser die gleiche „semi-regenerative“ Struktur aufweist wie der Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$. Hierfür seien

$$Z_n^Q = (Z_n^Q(\cdot,t))_{t\geq 0} = \begin{cases} Q_{T_{\nu_n}+t} & \text{für} \quad t < T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n} \\ \infty & \text{für} \quad t \geq T_{\nu_{n+1}} - T_{\nu_n} \end{cases}, \; n \geq 0, \quad \text{und}$$

$$N_Q = \sum_{n\geq 0} \delta_{(T_{\nu_n}, Z_n^Q)}$$

Satz 4.18. *Unter P_ϕ ist N_Q die Palm-Version eines stationären SMPP N_Q^* mit Intensität*

$$\lambda_{N_Q^*} = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}},$$

der den Verteilungseigenschaften

$$P^{N_Q^*} = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} 1\!\!1_{\{\theta_s N_Q \in \bullet\}} \lambda\!\!\!\lambda_0(ds) \right),$$

$$P^{h_0(N_Q^*)} = \pi_Q^* \tag{4.11}$$

genügt.

Die Grenzverteilungen π_V^* und π_Q^* lassen sich also interpretieren als *Verteilungen von Funktionen stationärer stochastischer markierter Punktprozesse.*

Die Tatsache, daß die Verteilungen von N_V^* und N_Q^* invariant sind unter $(\theta_t)_{t\geq 0}$ kann zusammen mit den Relationen

$$V_{s+t} = h_{s+t}(N_V^*) = h_0(\theta_s \circ \theta_t N_V^*) \quad \text{und}$$

$$Q_{s+t} = h_0(\theta_s \circ \theta_t N_Q^*)$$

für $s, t \geq 0$ benutzt werden, um aus (4.10) und (4.11) folgende *Stationaritätseigenschaft* von π_V^* und π_Q^* abzuleiten:

Korollar 4.19. *Für alle $t \geq 0$ gelten die Gleichungen*

$$\pi_V^* = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} \mathbb{1}_{\{V_{s+t} \in \bullet\}} \, \lambda_0(ds) \right),$$

$$\pi_Q^* = \frac{1}{E_\phi T_{\nu_1}} E_\phi \left(\int_{[0,T_{\nu_1})} \mathbb{1}_{\{Q_{s+t} \in \bullet\}} \, \lambda_0(ds) \right).$$

Schlußwort

Mit dem noch jungen Konzept der Markov-Modulation stellt die Wahrscheinlichkeitstheorie Methoden zur Verfügung, die sich als geeignet erwiesen haben, die klassische Stabilitätstheorie für Bedienungssysteme mit einem Server auf Modelle mit einem niedrigeren Abstraktionsniveau auszuweiten.

Aufbauend auf den Grundannahmen des SM/SM/1-Modells ist es im zweiten Kapitel gelungen, Bedingungen für die Existenz von Grenzverteilungen für die Prozesse der Wartezeiten, der anstehenden Arbeit im System und der Warteschlangenlänge herzuleiten. Die im ersten Kapitel entwickelten Regenerationstechniken für Harris-Ketten und Markov-Random-Walks mit steuernder Harris-Kette bildeten die Basis zur Klärung der formalen Struktur dieser asymptotischen Verteilungen: Sie besitzen jeweils eine Darstellung als Okkupationsmaß, beruhend auf einer zyklischen Zerlegung des jeweiligen Prozesses. Das dritte Kapitel dokumentiert u.a. eine nahezu vollständige Einbettung der Stabilitätstheorie für das klassische G/G/1-Modell in den allgemeineren Kontext.

Die erzielten Resultate können aber nicht ganz kritiklos stehengelassen werden. Bei der Bewertung des Nutzens für realitätsrelevante Schlüsse und praktische Anwendungen stellt sich vor allem die Frage, inwieweit die dargestellten Formeln für die Grenzgrößen eine brauchbare Grundlage für deren explizite Berechnung bei näher spezifizierten Verteilungsannahmen bilden. Die Kenntnis der formalen Strukturen und Zusammenhangskomponenten eines Modells ist zwar stets als Basis für die Entwicklung effizienter Algorithmen anzusehen, jedoch müßten in der vorliegenden Situation zur expliziten Ermittlung der Okkupationsmaße Regenerationszeiten simuliert werden, über die teilweise nur recht ungenaue Informationen vorliegen. Mit derartigen numerischen Aspekten haben sich beispielsweise Regterschot und Smit[2] beschäftigt, die den Prozeß der Ankunftszeiten über einen gemischten Poisson-Prozeß mit Intensitätswechseln zu den Ankunftszeiten beschreiben. Ihre Analyse fußt jedoch - abweichend von den vorliegenden Ausführungen - fast ausschließlich auf Fourrier-analytischen Methoden.

Aus mathematischer Sicht bestehen darüber hinaus vielfältige Ausweitungsmöglichkeiten des SM/SM/1-Modells. So sind etwa eine Modellierung von Schwankungen in der Bedienungsrate des Servers, der Übergang zu SM/SM/s-Modellen mit $s \geq 2$ Servern oder die Untersuchung von komplexeren Vernetzungen derartiger Systeme vorstellbar.

Abschließend kann somit festgehalten werden, daß auf dem Gebiet der Analyse von Bedienungssystemen nach wie vor ein nahezu unerschöpfliches Terrain für weiterführende Forschungen besteht.

[2] vgl. [R/S]

Literaturverzeichnis

[Al 1] **Alsmeyer, G.** *Erneuerungstheorie: Analyse stochastischer Regenerationsschemata.*
Teubner, Stuttgart (1991)

[Al 2] **Alsmeyer, G.** *Wahrscheinlichkeitstheorie.*
Universität Münster (1995)

[Al 3] **Alsmeyer, G.** *Stochastische Prozesse.*
Universität Münster (1996)

[Al 4] **Alsmeyer, G.** *Recurrence Theorems for Markov Random Walks.*
Technical Report, Universität Münster (1997)

[As] **Asmussen, S.** *Applied Probability and Queues.*
Wiley, New York (1987)

[As/Th] **Asmussen, S./Thorisson, H.** *A Markov chain approach to periodic queues.*
J. Appl. Prob. 24, 215-225 (1987)

[A/N] **Athreya, K.B./Ney, P.** *A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains.*
Trans. Amer. Math. 245, 493-501 (1978)

[Bo] **Bosch, S.** *Algebra.*
Springer Verlag, Berlin/Heidelberg (1993)

[Du] **Durrett, R.** *Probability: Theory and applications*
Wadsworth, Belmont (1991)

[F/K] **Franken, P./König, D.** *Queues and Point Processes.*
Akademie-Verlag, Berlin (1982)

[Gl/Si] **Glynn, P./Sigman, K.** *Uniform Cesaro limit theorems for synchronous processes with applications to queues.*
Stoch. Proc. Appl. 40, 29-43 (1992)

[M/K/M] **Matthes, K./Kerstan, J./Mecke, J.** *Infinitely Divisible Point Processes.*
Wiley, New York (1978)

[Nu 1] **Nummelin, E.** *A splitting technique for Harris recurrent Markov chains.*
Z. Wahrsch. verw. Gebiete 43, 309-318 (1978)

[Nu 2] **Nummelin, E.** *A conservation property for general GI/G/1 queues with an application to tandem queues.*
Adv. Appl. Prob. 11, 660-672 (1979)

[Nu 3] **Nummelin, E.** *General irreducible Markov chains and non-negative operators.*
Cambridge University Press (1984)

[Or] **Orey, S.** *Limit theorems for Markov chain transition probabilities.*
Van Nostrand, New York (1971)

[R/S] **Regterschot, G.J.K./de Smit, J.H.A.** *The queue M/G/1 with Markov-modulated arrivals and services.*
Math. Oper. Res. 11, 465-483 (1986)

[Sch] **Schmitz, N.** *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie.*
Universität Münster (1990)

[Si] **Sigman, K.** *One-dependent regenerative processes and queues in continuous time.*
Math. Oper. Res. 15(1), 175-189 (1990)

[Th] **Thorisson, H.** *The coupling of regenerative processes.*
Adv. Appl. Prob. 15, 531-561 (1983)

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die den Ausführungen anderer Autoren wörtlich oder sinngemäß entnommen sind, habe ich durch Angaben der Quellen als solche kenntlich gemacht.

Münster, den 3. August 1998