Westfälische Wilhelms-Universität
Münster
Mathematisches Institut

Eine Verallgemeinerung der Itô-Formel und ihre Anwendung auf ausgewählte Stopprobleme der Finanzmathematik

Wissenschaftliche Arbeit
zur Diplom-Hauptprüfung
im Fach Mathematik

vorgelegt von

Markus Jaeger

Thema gestellt von

Prof. Dr. G. Alsmeyer

21. Februar 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In vielen Bereichen der angewandten Mathematik, insbesondere der Wahrscheinlichkeitstheorie, treten Probleme des optimalen Stoppens auf. Speziell in der Finanzmathematik wird in vielen Fällen die Berechnung fairer Preise und optimaler Ausübungsstrategien von Finanzderivaten, z.B. *Amerikanische* oder *Europäische Optionen*, auf das Problem des optimalen Stoppens stochastischer Prozesse zurückgeführt (vgl. [Irle], [Ell], [Mus] und [Kal]).
Ein Vorgehen zur Lösung dieser Probleme liegt manchmal darin, zunächst eine optimale Strategie für das Ausüben dieser Derivate zu „erraten“ und anschließend mittels martingaltheoretischer Methoden nachzuweisen, daß diese Strategie wirklich optimal ist. Versucht man diese Problemstellung in einem mathematischen Modell zu erfassen, so besteht dieses Modell in der Regel aus folgenden Hauptbestandteilen:

(a) einer Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^+$, die die Zeitachse symbolisiert,

(b) einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$,

(c) dem Preisprozeß des Finanzguts $(X_t)_{t \geq 0}$, der zu $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert ist und

(d) einem Auszahlungsprozeß $(\psi_t)_{t \geq 0} = (\psi(X_t))_{t \geq 0}$ der Option.

Die Suche nach einer optimalen Ausübungsstrategie bedeutet in diesem Zusammenhang, daß versucht wird, eine Stopzeit τ zu finden, die den erwarteten, diskontierten Wert des Auszahlungsprozesses $Ee^{-r\tau}\psi_\tau$ maximiert. Daß die Strategie durch eine Stopzeit charakterisiert wird, begründet sich darin, daß der Besitzer der Option den Zeitpunkt τ, zu dem er die Option ausübt, natürlich unabhängig von der Zukunft bzw. unabhängig von zukünftigen Informationen zu wählen hat, denn zu einem bestimmten Zeitpunkt t verfügt der Besitzer lediglich über Informationen, die er bis t sukzessive gesammelt hat. Diese gesammelten Informationen werden im folgenden durch die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ repräsentiert.

Die angesprochene martingaltheoretische Beweismethode basiert darauf, mit Hilfe der bekannten Itô-Formel (vgl. [Rev]) nachzuweisen, daß der Prozeß $(e^{-rt}V(X_t))_{t\geq 0}$ mit $V(x) := \sup_\tau E_x e^{-r\tau}\psi_\tau$ in einem gewissen Bereich ein Martingal bildet. Problematisch an dieser Vorgehensweise erscheint allerdings, daß die Funktion V nur bis auf Ausnahmepunkte zweimal stetig differenzierbar ist und daher die Anwendung der Itô-Formel nicht gerechtfertigt erscheint.

An diesem Punkt setzt nun die vorliegende Arbeit an. Nachdem im ersten Kapitel einige grundlegende, benötigte Hilfsmittel bereitgestellt werden, widmen wir uns im zweiten Kapitel, dem Kern dieser Arbeit, einer auf diese Problematik zugeschnittenen Verallgemeinerung der Itô-Formel und liefern damit eine Rechtfertigung der oben skizzierten Beweismethode. Zunächst stellen wir einen bekannten Beweis ([Chu]) für die Gültigkeit der Itô-Formel für eindimensionale Standard-Brownsche Bewegungen vor, wobei lediglich vorausgesetzt wird, daß die Ableitung der betrachteten Funktion absolut stetig ist. Sodann zeigen wir an diesen Beweis anlehnend unter etwas stärkeren Bedingungen an die Funktion, daß eine Verallgemeinerung der Itô-Formel auch im mehrdimensionalen Fall möglich ist, falls in einer Komponente der Funktion ein geeignetes stetiges Semimartingal und in den anderen Komponenten der Funktion ein stetiger (Vektor-)Prozeß von lokal beschränkter Variation vorliegt.

In den folgenden Kapiteln sind einige Anwendungen dieser Formel in der Finanzmathematik zusammengestellt. Das dritte Kapitel befaßt sich mit dem Problem des optimalen Stoppens des Preisprozesses eines Finanzgutes im Modell von Bachelier. Es wird eine optimale Stopzeit vorgestellt und der zu erwartende Gewinn berechnet.

Im vierten Kapitel betrachten wir eine *Amerikanische Put-Option* in dem populären und allgemein anerkannten Modell von Black und Scholes (vgl. [Bla1] und [Bla2]). Auch hier stellen wir die optimale Stopstrategie vor und berechnen die bei Anwendung dieser Strategie erwartete Auszahlung.

Als letztes widmen wir uns dann zwei weiteren Stopproblemen, die durch Shepp und Shiryaev ([She1] und [She2]) bzw. Guo und Shepp ([Guo]) bekannt wurden.

1993 führten Shepp und Shiryaev eine neue Put-Option ein, die sie abgrenzend zur Amerikanischen und Europäischen Option als *Russische Option* bezeichneten. Der Käufer dieses Finanzderivats erwirbt dabei das Recht, sich zu einem von ihm wählbaren Ausübungszeitpunkt τ entweder den maximalen Wert, zu dem ein Finanzgut bis dahin gehandelt wurde, oder alternativ einen vorher festgesetzten Mindestbetrag s auszahlen zu lassen. Mithilfe des „*Principle of Smooth Fit*“ gelangten Shepp und Shiryaev zu einer optimalen Stopzeit und der erwarteten Auszahlung. Dieses Prinzip beruht auf folgender heuristischer Vorgehensweise: Es wird zunächst die optimale Stopstrategie „geraten“. Aufgrund der Gestalt dieser Strategie kann dann die Auszahlungsfunktion, abhängig von s und dem Startwert x der Aktie, in einem gewissen Bereich angegeben werden und letztlich anhand von intuitiv hergeleiteten Differentialgleichungen exakt bestimmt werden.
Eine Abwandlung dieser Option führt uns schließlich zu dem von Guo und Shepp betrachteten Stopproblem, bei dem sich der Käufer einer Option zwischen dem aktuellen Kurs einer Vermögensanlage und einem vorher vereinbarten Mindestbetrag s entscheiden kann. Auch dieses Problem läßt sich mit Hilfe des „Principle of Smooth Fit“ vollständig lösen.

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Professor Dr. G. Alsmeyer für die gute Betreuung dieser Arbeit bedanken. Er hat mein Interesse für das Thema geweckt, und seine wertvollen Hinweise haben mir über manche Hürde hinweggeholfen.

Kapitel 1

Stochastische Prozesse und stochastische Integration

Anliegen dieses Kapitels ist es, eine kurze Übersicht über die wichtigsten in dieser Arbeit benötigten Resultate der Theorie der stochastischen Prozesse und stochastischen Integration zu geben. Die hier dargelegten Definitionen und Sätze folgen dabei weitestgehend den Darstellungen in den Werken von [Rev], [Chu] und [Irle], wobei wir allerdings auf die meisten Beweise verzichten und stattdessen auf die Quelle verweisen.

1.1 Brownsche Bewegungen und Martingale

Es werden in dieser Arbeit häufig stochastische Prozesse auftreten. Ein stochastischer Prozeß ist eine Familie von Abbildungen $(X_t)_{t \in T}$ mit $T \subset \mathbb{R}^+$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die Werte in einem meßbaren Raum $(E, \mathcal{E})$ annehmen. Da für die von uns betrachteten Probleme immer $T = [0, \infty)$ gilt, beschränken wir uns bei den folgenden Darstellungen auf diesen Spezialfall.

Bei den hier betrachteten stochastischen Prozessen handelt es sich in der Regel um Brownsche Bewegungen bzw. Funktionale Brownscher Bewegungen, wobei einige Eigenschaften dieser speziellen Prozesse für uns von besonderem Interesse sind. Wir formulieren daher an dieser Stelle zunächst deren Definition:

1.1 Definition. Ein stochastischer Prozeß $(B_t)_{t\geq 0}$ heißt *Brownsche Bewegung mit Drift* $\mu \in \mathbb{R}$ *und Volatilität* $\sigma > 0$, falls er folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $B_0 = 0$.

(b) Für alle $t > 0$ besitzt B_t eine $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)-$Verteilung.

(c) $(B_t)_{t\geq 0}$ besitzt stochastisch unabhängigen Zuwächse.

(d) $(B_t)_{t\geq 0}$ ist ein Prozeß mit stationären Zuwächsen.

Gilt $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, so sprechen wir von einer *Standard-Brownschen Bewegung.* Diesen Prozeß bezeichnen wir im folgenden mit $(W_t)_{t\geq 0}$. Ein Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ der Form

$$X_t = x \exp\left(\sigma W_t + \mu t\right), \qquad t \geq 0,$$

mit $x > 0$ heißt *geometrische Brownsche Bewegung mit Drift* μ, *Volatilität* σ *und Startwert* x .

Abbildung 1.1: Pfad einer geometrischen Brownsche Bewegung mit Drift $\mu = 0,15$ und Volatilität $\sigma = 0.5$

Für spätere Zwecke notieren wir eine Eigenschaft der geometrische Brownschen Bewegung, die sich aus dem Gesetz vom iterierten Logarithmus ergibt.

1.2 Satz. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift μ, Volatilität σ und Startwert x. Dann gilt*

(a) $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ *und* $\sup_{0\leq t<\infty} X_t < \infty$ *f.s., falls* $\mu < \frac{1}{2}\sigma^2$.

(b) $\inf_{0\leq t<\infty} X_t > 0$ *und* $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$ *f.s., falls* $\mu > \frac{1}{2}\sigma^2$.

(c) $\inf_{0\leq t<\infty} X_t = 0$ *und* $\sup_{t\to\infty} X_t = \infty$ *f.s., falls* $\mu = \frac{1}{2}\sigma^2$.

Beweis. Vgl. Satz 9.23, S. 112 und Aufgabe 5.31, S. 349 in [Kar1]. □

Es sei nun eine isotone Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ gegeben, d.h. es ist $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ für alle $s < t$. Eine solche Familie wird auch als *Filtration* bezeichnet. Stellt man sich t als Zeitparameter vor, so kann $\mathcal{F}_t$ als ein System von Ereignissen interpretiert werden, die bis zum Zeitpunkt t beobachtbar sind.
Betrachten wir weiter eine Familie $(X_t)_{t\geq 0}$ meßbarer Abbildungen auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so können wir folgende nützliche Definition festhalten:

1.3 Definition. Eine Familie $(X_t)_{t\geq 0}$ meßbarer Abbildungen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt *adaptiert bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, wenn X_t für alle $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$-meßbar ist.

Für die Untersuchung stochastischer Prozesse, insbesondere auch für unsere Anwendungen der verallgemeinerten Itô-Formel (Satz 2.3), nehmen Zufallszeiten eine zentrale Rolle ein. Häufig handelt es sich dabei um Zufallszeiten der Form

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$$

mit einer geeigneten meßbaren Menge A. Wichtig dabei ist, daß τ nicht auf zukünftige Informationen zurückgreift. Dies führt zu

1.4 Definition. Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine isotone Familie von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$. Eine Abbildung $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ heißt *Stopzeit bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ gilt. Im Fall $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$ für eine Familie meßbarer Abbildungen nennt man τ auch *Stopzeit bezüglich* $(X_t)_{t\geq 0}$.

Von besonderem Interesse für diese Arbeit sind Stopzeiten bzgl. Brownscher Bewegungen. Für die in dieser Arbeit am häufigsten verwendeten Stopzeiten legen wir bis auf weiteres folgende Bezeichnungen fest:

1.5 Definition. Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung $a, \mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Wir definieren

$$\tau_{a,\mu} := \inf\{t \geq 0 : W_t + \mu t \geq a\}$$

sowie speziell für $\mu = 0$

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\}.$$

Für eine geometrische Brownsche Bewegung mit Startwert $x \in \mathbb{R}$ setzen wir ferner

$$T_{a,x} := \inf\{t \geq 0 : x \exp(\sigma W_t + \mu t) \geq a\},$$

wobei jeweils die Konvention $\inf \emptyset := \infty$ gelte.

Ein Beweis, daß es sich hierbei wirklich um Stopzeiten handelt, findet sich z.B. in [Rev] (Satz 4.6, S. 43).
Eine weitere, wichtige Eigenschaft einer Brownsche Bewegung mit Drift $\mu = 0$ ist, daß sie ein Martingal bzgl. ihrer kanonischen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ bildet. Dies bedeutet:

1.6 Definition. Es sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß, der bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert sei. $(M_t)_{t\geq 0}$ heißt *Martingal* bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls

(a) $E(M_t) < \infty$ für alle $t \geq 0$,

(b) $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ P-$f.s$ für alle $s, t \geq 0$ mit $s \leq t$.

Ferner wird $(M_t)_{t\geq 0}$ als *Submartingal* (bzw. *Supermartingal*) bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ bezeichnet, falls in Bedingung (b) $E(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$ (bzw. $E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$) P-$f.s.$ für alle $s, t \geq 0$ mit $s \leq t$ gilt.
Für $p \in [1, \infty)$ nennt man $(M_t)_{t\geq 0}$ L^p-*Martingal*, falls $M_t \in L^p$ für alle t.

1.7 Bemerkungen. (a) Eine Brownsche Bewegung mit Drift $\mu = 0$ bildet ein Martingal.

(b) Eine geometrische Brownsche Bewegung bildet genau dann ein Martingal, wenn $\mu = -\sigma^2/2$ gilt (vgl. Satz 1.2, S. 52 in [Rev]).

Eines der wichtigsten Resultate über Martingale bidet das sogenannte

1.8 Optional Sampling Theorem. *Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsseitig-stetiges Martingal und σ, τ beschränkte Stopzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt*

$$M_\sigma = E(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \quad P-f.s.$$

Ist $(M_t)_{t\geq 0}$ zusätzlich gleichgradig integrierbar, so existiert eine integrierbare Zufallsgröße M_∞ mit $M_t \to M_\infty$ in L^1. Für beliebige Stopzeiten σ, τ mit $\sigma \leq \tau$ gilt

$$M_\sigma = E(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = E(M_\infty|\mathcal{F}_\sigma) \quad P-f.s.$$

Beweis. Siehe Satz 3.2, S. 69 in [Rev]. □

1.9 Korollar. *Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein nichtnegatives, rechtseitigstetiges Supermartingal und σ, τ beliebige Stopzeiten, so gilt mit $X_\infty = 0$*

$$X_\sigma \geq E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \quad P-f.s.$$

Beweis. Siehe Korollar 3.3, S. 70 in [Rev]. □

Sind eine Stopzeit τ und ein Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ gegeben, so definiert $X_t^\tau(\omega) := X_{t\wedge\tau}(\omega)$ den sogenannten *gestoppten Prozeß* X^τ. Im folgenden verzichten wir häufiger auf die Angabe des Zeitparameters, falls deutlich ist, daß es sich um einen stochastischen Prozeß mit $T = [0, \infty)$ handelt. Sei weiter eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gegeben, bzgl. der der Prozeß X adaptiert ist.
Es ist wünschenswert, daß der gestoppte Prozeß X^τ nun auch $\mathcal{F}_\tau$-meßbar ist, wobei $\mathcal{F}_\tau$ definiert wird durch $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \in [0, \infty]\}$ mit $\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht immer erfüllt. Den Schlüssel zu dieser Eigenschaft liefert nachstehende Definition:

1.10 Definition. Ein Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *progressiv meßbar* oder einfach *progressiv* bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, falls die Abbildung $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ von $[0, t] \times \Omega$ nach $(E, \mathcal{E})$ $\quad (\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$-meßbar ist.

Wir erhalten

1.11 Folgerungen. *Es seien* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *eine Filtration,* $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein stochastischer Prozeß, der zu* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *adaptiert ist, und* τ *eine Stopzeit. Dann gilt:*

(a) Besitzt X *rechtsseitig- oder linksseitig-stetige Pfade, so ist er progressiv meßbar bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

(b) Ist X *progressiv meßbar bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, so ist* X^τ $\mathcal{F}_\tau$*-meßbar auf der Menge* $\{\tau < \infty\}$.

(c) Ist X *progressiv meßbar bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, so ist* X^τ *progressiv meßbar bezüglich der Filtration* $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$.

Beweis. Siehe S. 44 ff. in [Rev]. □

Wir notieren noch eine weitere nützliche Definition:

1.12 Definition. Ein progressiv meßbarer Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *lokal beschränkt*, falls eine Folge von Stopzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $T_n \uparrow \infty$ *f.s.* und eine Folge von Konstanten $C_n \geq 0$ existieren, so daß $|X_{T_n}| \leq C_n$ gilt.

1.13 Bemerkung. Wählen wir $T_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n\}$, so sehen wir, daß jeder stetige adaptierte Prozeß X lokal beschränkt ist.

1.2 Stochastische Integration und die Itô-Formel

Die Definition von stochastischen Integralen bedarf einiges an Vorarbeit und es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, eine ausführliche Darstellung dieser Theorie zu geben. Für eine detaillierte Betrachtung von stochastischen Integralen verweisen wir daher auf die Werke [Rev], [Chu] und [Irle], die einen für unsere Zwecke guten Einblick in die stochastische Integration liefern.
Einen wichtigen Aspekt für spätere Beweise gewährt allerdings die Verallgemeinerung der stochastischen Integration bzgl. rechtsseitig-stetiger L^2-Martingale auf rechtsseitig-stetige lokale L^2-Martingale mit Hilfe des sogenannten *Lokalisationsprinzips.* Diese Vorgehensweise wird daher kurz skizziert. Im weiteren beschränken wir uns darauf, einige grundlegende Resultate der stochastischen Integrationstheorie, die für die vorliegende Arbeit von besonderem Interesse sind, ohne Beweis vorzustellen.
Es sei nun zunächst an die Definition lokaler L^p-Martingale erinnert:

1.14 Definition. Es sei $p \in [1, \infty)$. Ein reellwertiger stochastischer Prozeß $(M_t)_{t \geq 0}$, der bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert ist, heißt *lokales L^p-Martingal* bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, falls eine Folge von Stopzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, so daß $\tau_n \uparrow \infty$ *f.s.* und der Prozeß

$$M_t^k = M_{t \wedge \tau_k} - M_0$$

für jedes k ein L^p-Martingal bildet. Die Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *lokalisierende Folge* für $(M_t)_{t \geq 0}$.

Sind ein stetiges lokales Martingal und ein stetiger Prozeß gegeben, so erlaubt uns folgendes Lemma eine Lokalisationsfolge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so zu wählen, daß die beiden Prozesse für $0 \leq t \leq \tau_n$ beschränkt bleiben.

1.15 Lemma. *Es seien $(M_t)_{t \geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit einer Lokalisationsfolge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Z_t)_{t \geq 0}$ ein stetiger Prozeß und*

$$\sigma_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \vee |Z_t| \geq n\}.$$

Dann ist auch $(\tau_n \wedge \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Lokalisationsfolge für $(M_t)_{t \geq 0}$, d.h. $M_{t \wedge (\tau_n \wedge \sigma_n)} - M_0$ bildet für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal.

Beweis. Da $(M_t)_{t \geq 0}$ und $(Z_t)_{t \geq 0}$ stetige Prozesse sind gilt $\sigma_n \to \infty$ *f.s.* für $n \to \infty$ und daher auch $\tau_n \wedge \sigma_n \to \infty$ *f.s.* Aus Korollar 1.7 (ii), S. 17 in [Chu] folgt, daß $M_{t \wedge (\tau_n \wedge \sigma_k)} - M_0$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ein Martingal bildet. □

Wir geben zunächst einige Bezeichnungen an, mit denen wir im folgenden arbeiten:

1.16 Definition. Es seien eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und ein Prozeß $M \in L^2$ gegeben. Das System

$$\mathcal{R} = \{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(s, t] \times F_s : F_s \in \mathcal{F}_s; s, t \in [0, \infty) \text{ mit } s < t\}$$

wird als *System der vorhersagbaren Rechtecke* bezeichnet. Durch $\mathcal{P} := \sigma(\mathcal{R})$ wird die *vorhersagbare σ-Algebra* definiert, und ihre Elemente heißen *vorhersagbare Mengen*. Einen Prozeß $X : [0, \infty) \times \Omega \to E$ nennt man *vorhersagbar*, falls er $\mathcal{P}$-meßbar ist. Abkürzend setzen wir

$$\mathcal{L}^2(M) := L^2([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$$

für den Raum der $\mathcal{P}$-meßbaren, quadrat-integrierbaren Funktionen bezüglich μ_M, wobei μ_M das sogenannte *Doléansmaß* (siehe [Chu] S. 33 ff.) bezeichnet, das für die Definition stochastischer Integrale eine besondere Rolle spielt.

Es sei nun gemäß [Chu] das stochastische Integral $\int_{[0,t]} X_s dM_s \in L^2$ als lineare Isometrie von $\mathcal{L}^2(M)$ nach L^2 definiert. Da es ein Element von L^2 ist, handelt es sich streng genommen um eine Äquivalenzklasse von Zufallsgrößen bzgl. der fast sicheren Gleichheit. Dies spielt für den folgenden Satz eine entscheidende Rolle.

1.17 Satz. *Es seien M ein rechtsseitig-stetiges L^2-Martingal und $X \in \mathcal{L}^2(M)$. Dann existiert eine Version des stochastischen Integrals $\int \mathbb{1}_{[0,t]} X_s \, dM_s$, die rechtsseitig-stetige Pfade besitzt.*

Beweis. Vgl. Satz 2.5, S. 38 in [Chu]. □

1.18 Bemerkungen. (a) Besitzt der Prozeß M stetige Pfade, so existiert eine stetige Version von $\int \mathbb{1}_{[0,t]} X_s \, dM_s$.

(b) Im folgenden werden wir solche stetigen bzw. rechtsseitig-stetigen Versionen mit $\int_{[0,t]} X_s \, dM_s$ bezeichnen und sie in der Regel benutzen, ohne dies vorher explizit zu erwähnen.

Wir kommen nun zu der angekündigten Verallgemeinerung des stochastische Integrals auf rechtsseitig-stetige lokale L^2-Martingale. Dazu notieren wir das sogenannte *Lokalisationslemma*:

1.19 Lokalisationslemma. *Es seien M ein rechtsseitig-stetiges L^2-Martingal, $X \in \mathcal{L}^2(M)$ und τ eine beliebige Stopzeit. Dann gilt*

(a) $\mathbb{1}_{[0,\tau]} X \in \mathcal{L}^2(M^\tau)$ *und*

(b) $\int \mathbb{1}_{[0,\tau]} X_s \, dM_s = \int \mathbb{1}_{[0,\tau]} X_s \, dM_s^\tau$.

Beweis. Vgl. Lemma 10.15, S .190 in [Irle]. □

Dieses Lemma führt zur Definition:

1.20 Definition. Es sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsseitig-stetiges lokales L^2-Martingal. Definiere

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(M) \quad := \quad &\{X : X \text{ ist vorhersagbar, und es existiert eine lokalisierende Folge} \\ &\text{von Stopzeiten } (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \in \mathcal{L}^2(M^{\tau_n}) \text{ für alle } n\},\end{aligned}$$

Für $X \in \mathcal{O}(M)$ setze

$$Z_t^n := \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X_s \, dM_s^{\tau_n}, \quad t \geq 0.$$

Das Lokalisationslemma liefert, daß der Prozeß Z^{n+k} eine Fortsetzung von Z^n bildet, d.h. es gilt

$$Z_t^{n+k} = Z_t^n \quad f.s. \quad \text{für } 0 \leq t \leq \tau_n.$$

Zumindest außerhalb einer Nullmenge kann daher der Prozeß

$$Z_t := \lim_{n\to\infty} Z_t^n$$

definiert werden. Auf der Nullmenge wird $Z_t := 0$ gesetzt. Das stochastische Integral von X bezüglich M wird dann durch den Prozeß

$$\int_{[0,t]} X_s \, dM_s := Z_t$$

für alle $t \geq 0$ definiert.

1.21 Bemerkungen. (a) Mit Hilfe des Lokalisationslemmas sehen wir, daß dieses Integral nicht von der gewählten Lokalisationsfolge abhängt, d.h die Prozesse stimmen für unterschiedliche lokalisierende Folgen fast sicher überein. Das Integral ist somit wohldefiniert.

(b) Aus der obigen Definition des stochastischen Integrals ergibt sich für $X \in \mathcal{O}(M)$ und eine Lokalisationsfolge $(\tau_n)_{n\geq 0}$ die Gleichheit

$$\int_{[0,t\wedge\tau_n]} X_s \, dM_s = \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X_s \, dM_s = \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X_s \, dM_s^{\tau_n}$$

für alle $t \geq 0$. Unter Rückgriff auf Satz 1.17 bildet $\int_{[0,t]} X_s \, dM_s$ daher ein rechtsseitig-stetiges lokales L^2-Martingal.

1.22 Definition. Es sei $(V_t)_{t\geq 0}$ ein rechtssetig-stetiger Prozeß mit beschränktem V_0. V heißt Prozeß von *lokal beschränkter Variation*, wenn sämtliche Pfade $t \mapsto V_t(\omega)$ auf jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation sind.

Als nächstes wird der Begriff des stochastischen Integrals auf stetige Semimartingale erweitert.

1.23 Definition. Ein stetiger Prozeß $(Z_t)_{t\geq 0}$ wird als stetiges *Semimartingal* bezeichnet, falls ein stetiges lokales Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ und ein stetiger Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$ von lokal beschränkter Variation existieren, so daß gilt

$$Z = M + V.$$

Weiter definieren wir das stochastische Integral für $X \in \mathcal{O}(M)$ bezüglich eines stetigen Semimartingals durch

$$\int_{[0,t]} X_s \, dZ_s = \int_{[0,t]} X_s \, dM_s + \int_{[0,t]} X_s \, dV_s.$$

Wir kommen zu einigen wichtigen Eigenschaften stochastischer Integrale, die wir im Laufe dieser Arbeit benötigen. Zunächst stellen wir ein Analogon zum Satz von der majorisierten Konvergenz für stochastische Integrale vor:

1.24 Satz. *Es sei $(Z_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Semimartingal und $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X^n = (X^n_t)_{t\geq 0}$, eine Folge lokal beschränkter Prozesse mit $X^n \to 0$ punktweise für $n \to \infty$. Ferner existiere ein lokal beschränkter Prozeß K mit $|X^n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\int_{[0,\cdot]} X^n_s \, dZ_s \xrightarrow{P} 0$$

gleichmäßig auf jedem kompakten Intervall.

Beweis. Siehe Satz 2.12, S. 142 in [Rev]. □

Eine bedeutende Rolle in der stochastischen Integration spielt der sogenannte *quadratische Variationsprozeß*, der folgendermaßen definiert wird.

1.25 Satz und Definition. Es sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal. Dann wird durch

$$\langle M \rangle_t := M_t^2 - M_0^2 - 2 \int_{[0,t]} M_s dM_s$$

der *quadratische Variationsprozeß* $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ definiert. Der quadratische Variationsprozeß ist stetig, und es gilt $\langle M \rangle_0 = 0$. Ferner bildet der Prozeß $M^2 - \langle M \rangle$ ein stetiges lokales Martingal.

Beweis. Siehe Satz 4.7, S. 89 in [Chu]. □

1.26 Beispiel. Für eine Standard-Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$ gilt

$$\langle W \rangle_t = t \qquad f.s.$$

Ein Beweis findet sich z.B. auf S. 76 ff. in [Chu].

Der quadratische Variationsprozeß läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Sind M und N stetige lokale Martingale, so sind auch $M + N$ und $M - N$ stetige lokale Martingale. Satz 4.7, S. 89 in [Chu] liefert, daß auch $(M + N)^2 - \langle M + N \rangle$ und $(M - N)^2 - \langle M - N \rangle$ lokale Martingale bilden und daher auch der Prozeß

$$\begin{aligned} MN - \frac{1}{4}(\langle M+N \rangle - \langle M-N \rangle) \\ &= \frac{1}{4}((M+N)^2 - \langle M+N \rangle + (M-N)^2 - \langle M-N \rangle). \end{aligned}$$

Dies gibt Anlaß zu nachstehender Definition.

1.27 Definition. Es seien M und N stetige lokale Martingale. Dann heißt der Prozeß

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{4}(\langle M+N \rangle - \langle M-N \rangle)$$

quadratischer Kovariationsprozeß von M und N. Für zwei stetige Semimartingale $X = M + A$ und $Y = N + B$ mit einer Zerlegung gemäß Definition 1.23 wird der gemeinsame quadratische Variationsprozeß durch

$$\langle X, Y \rangle := \langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M+N \rangle - \langle M-N \rangle)$$

definiert.

Einen der größten Meilensteine in der stochastischen Integrationstheorie stellt wohl die bekannte Itô-Formel dar, die wir hier in folgender Form angeben wollen:

1.28 Satz. ***(Itô-Formel)***
Es seien $X = (X^1, \cdots, X^n)$ ein stetiges (Vektor-)Semimartingal, d.h. jede Komponente X^i $(1 \leq i \leq n)$ bildet ein stetiges Semimartingal, und f eine Funktion mit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Dann bildet $f(X)$ ein stetiges Semimartingal, und es gilt

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(X_s)\, d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

Beweis. Satz 3.3, S. 147 in [Rev]. □

1.29 Bemerkungen. (a) Sind einige der Prozesse X^i von lokal beschränkter Variation, so gilt die Formel entsprechend, wenn die Funktion f in den jeweiligen Komponenten nur einmal stetig partiell differenzierbar ist. Ist beispielsweise X ein stetiges Semimartingal, V ein stetiger Prozeß von lokal beschränkter Variation und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion derart, daß $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ existieren und stetig sind, so gilt

$$\begin{aligned} f(X_t, V_t) - f(X_0, V_0) &= \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x} f(X_s, V_s)\, dX_s + \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial y} f(X_s, V_s)\, dV_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s, V_s)\, d\langle X_s \rangle_s. \end{aligned}$$

(b) Nimmt der Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ *f.s.* nur Werte in einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ an, so gilt die Itô-Formel entsprechend für eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit den obigen Differenzierbarkeitseigenschaften.

Ein weiteres zentrales Resultat bildet das *Girsanov-Theorem*. Es beschreibt das Verhalten eines stetigen lokalen Martingals bei einem Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes. Für unsere Zwecke ist es hinreichend, die Formel für den Fall einer Brownschen Bewegung zu formulieren:

1.30 Satz. ***(Girsanov)***
Es sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung, die zu einer gegebenen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert sei. Ferner sei $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptierter Prozeß derart, daß $\int_{[0,T]} \theta_s^2 \lambda\!\!\lambda(ds) < \infty$ gilt und der Prozeß

$$Y_t := \exp\left(- \int_{[0,t]} \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2} \int_{[0,t]} \theta_s^2\, \lambda\!\!\lambda(ds) \right)$$

unter P für $0 \leq t \leq T$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ bildet. Definiere ein neues Maß Q_θ durch

$$\frac{dQ_\theta}{dP} = Y_t.$$

Dann bildet der Prozeß

$$\widetilde{W_t} := W_t + \int_{[0,t]} \theta_s \, \lambda\!\!\lambda(ds), \quad 0 \leq t \leq T,$$

unter Q_θ eine Standard-Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Beweis. Vgl. Satz 7.2.3, S. 138 in [Ell]. □

Zum Abschluß unserer Vorbereitungen definieren wir die sogenannte *Lokalzeit* einer Brownschen Bewegung, die das Verhalten dieses Prozesses in einer kleinen Umgebung eines jeden Punktes beschreibt. Für diesen Zweck benötigen wir das folgende Lemma.

1.31 Lemma. *Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Dann existieren eine Familie von Zufallsvariablen $J(t,x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ sowie eine Menge Ω_0 mit $P(\Omega_0) = 1$, so daß die Abbildung $(t,x) \mapsto J(t,x)(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega_0$ stetig ist und für festes (t,x) gilt:*

$$P\left(\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[x,\infty)}(W_s)\, dW_s = J(t,x)\right) = 1.$$

Beweis. Siehe Lemma 7.2, S 146 in [Chu]. □

Verkleinert man den Grundraum Ω auf Ω_0, so dürfen wir im weiteren annehmen, daß J bereits für alle ω stetig ist.

1.32 Definition. Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Der Prozeß $(t,x) \mapsto L(t,x)$, definiert durch

$$\frac{1}{2}L(t,x) = (W_t - x)^+ - (W_0 - x)^+ - J(t,x),$$

mit $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ heißt *Lokalzeit* von $(W_t)_{t\geq 0}$.

1.33 Satz. *Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung mit Lokalzeit L. Dann gilt*

$$\begin{aligned} L(t,x) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}(W_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \lambda\!\!\lambda\{s\in[0,t] : W_s \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe S. 141 ff. in [Chu]. □

Da das Bild von $W_s(\omega)$ aus Stetigkeitsgründen kompakt ist, zeigt diese Darstellung unter Beachtung von Lemma 1.31, daß für festes ω die Lokalzeit eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist.
Eine interessante Rolle spielt für uns die folgende Eigenschaft der Lokalzeit einer Standard-Brownschen Bewegung.

1.34 Satz. *Es sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung mit Lokalzeit $L(t,x)$. Dann gilt für jede positive, Borel-meßbare und lokal integrierbare Funktion f und für jedes $t \geq 0$*

$$\int_{[0,t]} f(W_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) = \int_{-\infty}^{\infty} L(t,x)\, f(x)\, \lambda\!\!\lambda(dx) \quad f.s.$$

Beweis. Vgl. Korollar 7.4, S. 149 in [Chu]. □

Kapitel 2

Eine Verallgemeinerung der Itô-Formel

In diesem Kapitel stellen wir eine Verallgemeinerung der bekannten Itô-Formel vor. Bei der eigentlichen Itô-Formel wird benötigt, daß die Funktion f in den Komponenten, in denen Prozesse von unbeschränkter Variation vorliegen, zweimal stetig partiell differenzierbar ist.

Wir betrachten nun den Fall, daß nur ein Prozeß von unbeschränkter Variation vorliegt. Besitzt dieser Prozeß einige zusätzliche Eigenschaften, so können die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen der Funktion derartig abgeschwächt werden, daß die zweite partielle Ableitung nur bis auf eine diskrete Ausnahmemenge existieren und stetig sein muß.

2.1 Ein eindimensionaler Fall für Brownsche Bewegungen

Wir betrachten zunächst eine Verallgemeinerung der eindimensionalen Itô-Formel speziell für Standard-Brownsche Bewegungen. Der Beweis[1] präsentiert eine Methodik mit deren Hilfe auch der Nachweis der oben grob skizzierten Verallgemeinerung gelingt.

[1] vgl. Satz 9.2 und Bemerkung 1, S. 185 in [Chu]

2.1 Satz. *Es seien eine Standard-Brownsche Bewegung* $(W_t)_{t\geq 0}$ *und eine Funktion* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben, die folgende Eigenschaften besitzt:*

(a) $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$.

(b) f' *ist absolut stetig. Dies bedeutet insbesondere, daß die zweite Ableitung* f'' $\lambda\!\!\lambda$*-f.ü. existiert und lokal integrierbar ist.*

Dann gilt

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_{[0,t]} f'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2}\int_{[0,t]} f''(W_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \quad f.s. \tag{2.1}$$

Beweis. Wir beweisen diese Aussage, indem wir auf eine geeignete Approximationsfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ aus $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Itô-Formel anwenden. Für $n \geq 1$ definieren wir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(t) := \varphi_n * f(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t-x) f(x)\, \lambda\!\!\lambda(dx),$$

wobei $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} c_n \exp\left(-\frac{1}{n^{-2}-x^2}\right), & \text{falls} \quad |x| < 1/n, \\ 0, & \text{falls} \quad |x| \geq 1/n \end{cases} \tag{2.2}$$

definiert ist. Dabei seien die Konstanten c_n so gewählt, daß $\|\varphi_n\|_1 = 1$ für alle n erfüllt ist. Für f_n gilt:

(i) $f_n \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f_n \to f$ und $f_n' \to f'$ kompakt gleichmäßig.

Zum Beweis dieser Eigenschaften setzen wir $h_n(t,x) := \varphi_n(t-x)f(x)$. Für h_n gelten folgende Aussagen:

(1) $h_n(t,\cdot) \in L^1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn φ_n besitzt einen kompakten Träger.

(2) $\frac{\partial}{\partial t} h_n(t,x)$ existiert für alle $t \in \mathbb{R}$, da $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

(3) Wegen der Stetigkeit der Funktionen f und φ_n' gilt bei festem $t_0 \in \mathbb{R}$ für alle $t \in (t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n})$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} h_n(t,x) \right| &= |f(x)\varphi_n'(t-x)| \leq |f(x)||\varphi_n'(t-x)|\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(t-x) \\ &\leq M\mathbb{1}_{[t_0-\frac{2}{n},t_0+\frac{2}{n}]}(x) \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten $M > 0$. Dabei ist die rechte Funktion integrierbar.

Daher darf man unter dem Integral differenzieren[1], d.h.

$$f_n'(t) = \frac{d}{dt}(\varphi_n * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(t-x)f(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx). \tag{2.3}$$

Wegen $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ erhalten wir durch eine sukzessive Fortsetzung dieser Schlußweise die Behauptung (i).
Für den Beweis von (ii) seien $\varepsilon > 0$ und $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Die Funktion f ist auf dem Kompaktum K gleichmäßig stetig. Es existiert also ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in K$ und für alle $|y| < \delta$ die Ungleichung

$$|f(x+y) - f(x)| < \varepsilon$$

besteht. Wir wählen n_0 so groß, daß $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset [-\delta, \delta]$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Es folgt für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |\varphi_n * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)f(x-y)\,\lambda\!\!\lambda(dy) - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{[-\delta,\delta]} \varphi_n(y)(f(x-y) - f(x))\,\lambda\!\!\lambda(dy) \right| \\ &\leq \int_{[-\delta,\delta]} \varphi_n(y)\,|f(x-y) - f(x)|\,\lambda\!\!\lambda(dy) \\ &\leq \int_{[-\delta,\delta]} \varphi_n(y)\varepsilon\,\lambda\!\!\lambda(dy) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

und damit die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f. Mittels Gleichung (2.3) und partieller Integration, wobei $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ zu berücksichtigen ist, erhalten wir

[1] Vgl. Satz 5.7 und Zusatz S. 146 in [Els]

$$f_n'(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n'(t-x) f(x)\, \lambda\!\!\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t-x) f'(x)\, \lambda\!\!\lambda(dx) = (\varphi_n * f')\,(t).$$

Die Ableitung f' ist ebenfalls stetig, so daß sich durch ein analoges Vorgehen die gleichmäßige Konvergenz von f_n' gegen f' ergibt.
Wenden wir nun die Itô-Formel auf f_n an, so liefert uns dies

$$f_n(W_t) - f_n(W_0) = \int_{[0,t]} f_n'(W_s)\, dW_s + \frac{1}{2} \int_{[0,t]} f_n''(W_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Aussage (ii) erhalten wir

$$f_n(W_t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(W_t) \quad f.s. \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$\tau_k := \inf\{t > 0 : |W_t| > k\}. \tag{2.4}$$

Die Ableitung f' ist aus Stetigkeitsgründen auf $[-k, k]$ beschränkt, und die Folge $(f_n')_{n\geq 1}$ konvergiert dort gleichmäßig gegen f'. Daher ist $(f_n')_{n\geq 1}$ auf $[-k, k]$ gleichmäßig beschränkt, so daß der Satz von der majorisierten Konvergenz für stochstische Integrale (Satz 1.24)

$$\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,t\wedge\tau_k]}(f_n'(W_s^{\tau_k}) - f'(W_s^{\tau_k}))\, dW_s \xrightarrow{P} 0$$

liefert und folglich

$$\int_{[0,t\wedge\tau_k]} f_n'(W_s^{\tau_k})\, dW_s \xrightarrow{P} \int_{[0,t\wedge\tau_k]} f'(W_s^{\tau_k})\, dW_s$$

gilt. Seien nun $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ beliebig. Wähle k so groß, daß $P(\tau_k \leq t) < \frac{\varepsilon}{2}$ und n_0 derart, daß $P\left(\left|\int_{[0,t\wedge\tau_k]}(f_n'(W_s) - f'(W_s))\, dW_s\right| > \delta\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit ergibt sich für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\int_{[0,t]}(f_n'(W_s)dW_s - \int_{[0,t]} f'(W_s))\, dW_s\right| > \delta\right)& \\
= P\left(\left|\int_{[0,t]}(f_n'(W_s) - f'(W_s))\, dW_s\right| > \delta, \tau_k \leq t\right)& \\
+P\left(\left|\int_{[0,t]}(f_n'(W_s) - f'(W_s))\, dW_s\right| > \delta, \tau_k > t\right)& \qquad (2.5)\\
\leq P(\tau_k \leq t) + P\left(\left|\int_{[0,t\wedge\tau_k]}(f_n'(W_s) - f'(W_s))\, dW_s\right| > \delta\right)& \\
\leq \varepsilon,&
\end{aligned}$$

und wir erhalten die gewünschte Konvergenz

$$\int_{[0,t]} f_n'(W_s)\,dW_s \xrightarrow{P} \int_{[0,t]} f'(W_s)\,dW_s \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Es sei noch angemerkt, daß der Grenzwert $\int_{[0,t]} f'(W_s)\,dW_s$ $f.s.$ eindeutig bestimmt ist. Als letztes bleibt

$$\int_{[0,t]} f_n''(W_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,t]} f''(W_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) \quad f.s.$$

nachzuweisen. Dazu sei $g \in \mathcal{C}_0^{(2)}(\mathbb{R})$ beliebig. Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\geq 0}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} g(x)f_n''(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}} g''(x)f_n(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} g''(x)f(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(x)f''(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx).
\end{aligned}$$

Die erste und die letzte Identität erhalten wir mittels partieller Integration unter Beachtung der absoluten Stetigkeit[1] der Funktion f. Es konvergiert also $f_n''(x)\lambda\!\!\lambda$ vage gegen das signierte Maß $f''(x)\lambda\!\!\lambda$. Die Funktion $x \mapsto L(t,x)(\omega)$, wobei $L(t,x)$ die Lokalzeit der Brownschen Bewegung bezeichnet, ist stetig für fast alle $\omega \in \Omega$ und besitzt einen kompakten Träger, so daß aus der vagen Konvergenz und Satz 1.34

$$\begin{aligned}
\int_{[0,t]} f_n''(W_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) &= \int_{\mathbb{R}} L(t,x)f_n''(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} L(t,x)f''(x)\,\lambda\!\!\lambda(dx) \\
&= \int_{[0,t]} f''(W_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) \qquad f.s.
\end{aligned}$$

folgt, was den Beweis des Satzes abschließt. □

[1] Vgl. Satz 4.16, S. 303 in [Els]

2.2 Ein mehrdimensionaler Fall für stetige Semimartingale

Betrachtet man die Itô-Formel im mehrdimensionalen Fall, so läßt sich erkennen, daß durch ein ähnliches Vorgehen wie im vorherigen Abschnitt auch hier die Formel auf eine größere Klasse von Funktionen erweitert werden kann.
Der Nachweis dieser Verallgemeinerung gelingt, indem man die betrachtete Funktion wieder durch eine geeignete Funktionenfolge, hier aus $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^{d+1})$, approximiert, auf die man die Itô-Formel anwendet, und dann einen Grenzübergang durchführt. Für den Beweis dieser Verallgemeinerung benutzen wir folgendes Lemma:

2.2 Lemma. *Es sei $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) Es gebe eine diskrete Menge $A \subset \mathbb{R}$, so daß die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1} f$ für alle $x \notin A \times \mathbb{R}^d$ existiert und stetig ist.

(b) Definiert man $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) := 0$ für $x \in A \times \mathbb{R}^d$, so ist $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)$ lokal beschränkt.

Dann gilt für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{d+1})$ und für alle $x \notin A \times \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi * f(x)) = \varphi * \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x)\right). \tag{2.6}$$

Beweis. Siehe Anhang. □

Wir formulieren nun die angekündigte Verallgemeinerung der Itô-Formel:

2.3 Satz. *Es sei $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften:*

(a) $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^{d+1})$.

(b) Es gibt eine diskrete Menge $A \subset \mathbb{R}$, so daß die partielle Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x)$ für alle $x \notin A \times \mathbb{R}^d$ existiert und stetig ist.

(c) Definiert man $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) := 0$ für $x \in A \times \mathbb{R}^d$, so ist $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x)$ lokal beschränkt.

Weiter seien ein stetiger (Vektor-)Prozeß $V := (V^1, \ldots, V^d)$ von lokal beschränkter Variation (d.h. jede Komponente $V^i = (V_t^i)_{t \geq 0}$ bildet einen stetigen Prozeß von lokal beschränkter Variation) und ein stetiges Semimartingal $(M_t)_{t \geq 0}$ gegeben. $(M_t)_{t \geq 0}$ erfülle die Bedingungen:

(1) Für den quadratischen Variationsprozeß gilt $d\langle M\rangle_t = h(t)\lambda\!\!\lambda(dt)$ *mit einer Lebesgue-meßbaren, nichtnegativen Funktion* h.

(2) Für festes $t \in \mathbb{R}^+$ *gilt* $\lambda\!\!\lambda(\{0 \le s \le t : M_s \in A\}) = 0 \quad f.s.$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(M_t, V_t) - f(M_0, V_0) &= \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f(M_s, V_s)\, dM_s + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s, V_s)\, dV_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(M_s, V_s)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \quad f.s. \end{aligned} \tag{2.7}$$

für alle $t \ge 0$.

Beweis. Die Prozesse $(M_t)_{t\ge 0}$ und $(V_t)_{t\ge 0}$ seien zunächst als beschränkt vorausgesetzt. Den allgemeinen Fall werden wir daraus mit Hilfe des Lokalisationsprinzips herleiten. Es existiere also ein $K > 0$, so daß $|(M_s, V_s)| < K$ $f.s.$ gilt, wobei $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ die euklidische Norm bezeichne. Wir definieren

$$f_0 := f_{|\overline{B_{K+1}(0)}} \in L^1$$

und eine Folge von Funktionen $\varphi_n : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} c_n \exp(-\frac{1}{n^{-2} - |x|^2}) & \text{falls} \quad |x| < 1/n, \\ 0 & \text{falls} \quad |x| \ge 1/n, \end{cases} \tag{2.8}$$

wobei die c_n so gewählt seien, daß $\int \varphi_n(x)\lambda\!\!\lambda^{d+1}(dx) = 1$ gilt. Außerdem setzen wir

$$f_n(x) := \varphi_n * f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi_n(x-t) f_0(t)\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dt). \tag{2.9}$$

Es gelten folgende Aussagen:

(i) $f_n \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^{d+1})$.

(ii) $f_n \to f_0$ gleichmäßig auf $B_K(0)$.

(iii) $\frac{\partial}{\partial x_i} f_n \to \frac{\partial}{\partial x_i} f_0$ gleichmäßig auf $B_K(0)$ für $1 \le i \le d+1$.

(iv) $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(x) \to \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x)$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in B_K(0)$ mit $x_1 \notin A$.

Da $f_0 \in L^1$ und $\varphi_n \in \mathcal{C}_0^{(\infty)}(\mathbb{R}^{d+1})$ sind, ergibt sich Aussage (i) aus Satz 3.7, S. 193 in [Els].

Für den Nachweis von (ii) wählen wir $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f_0 auf $B_{K+1}(0)$ existiert ein $0 < \delta < 1$ derart, daß für alle $x \in \overline{B_K(0)}$ und für alle $y \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $|y| < \delta$ die Ungleichung

$$|f_0(x+y) - f_0(x)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Wähle n_0 so groß, daß $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset B_\delta(0)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann erhalten wir für alle $x \in B_K(0)$ und $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
|\varphi_n * f_0(x) - f_0(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi_n(y) f_0(x-y)\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) - f_0(x) \right| \\
&= \left| \int_{B_\delta(0)} \varphi_n(y) f_0(x-y)\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) - f_0(x) \right| \\
&= \left| \int_{B_\delta(0)} \varphi_n(y)(f_0(x-y) - f_0(x))\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \right| \\
&\leq \int_{B_\delta(0)} \varphi_n(y)\, |f_0(x-y) - f_0(x)|\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \\
&\leq \int_{B_\delta(0)} \varphi_n(y) \varepsilon\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

und folglich (ii). Für die partiellen Ableitungen gilt nach Lemma 2.2

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_n(x) = \varphi_n * \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_0(x) \right)$$

für alle $x \in B_{K+1}(0)$ $(i = 1, \ldots, d+1)$. Die partiellen Ableitungen sind wiederum stetig, so daß sich (iii) analog zu (ii) ergibt.

Für den Beweis von (iv) führen wir eine abkürzende Bezeichnung ein:

$$C := \{x = (x_1, \ldots, x_{d+1}) \in D_K(0) : x_1 \in A\}.$$

Als weitere Konsequenz aus Lemma 2.2 erhalten wir für alle $x \in C$ die Identität

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(x) = \varphi_n * \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x) \right).$$

Sei nun $x_0 \in C$ beliebig. Wir zeigen

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(x_0) \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0)$$

für $n \to \infty$. Da die Menge C offen ist, können wir n_0 so groß wählen, daß $B_{\frac{1}{n}}(x_0) \subset C$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so existiert wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0$ in x_0 ein $\delta > 0$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $|y| < \delta$ die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0 - y) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0) \right| < \varepsilon$$

besteht. Dies liefert für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(x_0) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0) \right| \\
&\qquad = \left| \varphi_n * \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0) \right| \\
&\qquad = \left| \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi_n(y) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0 - y)\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0) \right| \\
&\qquad = \left| \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \varphi_n(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0 - y) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0) \right) \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \right| \\
&\qquad \leq \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \varphi_n(y) \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0 - y) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x_0) \right| \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \\
&\qquad \leq \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \varphi_n(y) \varepsilon\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \\
&\qquad = \varepsilon.
\end{aligned}$$

was schließlich Aussage (iv) bestätigt.
Wir wenden nun die Itô-Formel 1.28 auf f_n an und erhalten die fast sichere Identität

$$\begin{aligned}
f_n(M_t, V_t) - f_n(M_0, V_0) = &\int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(M_s, V_s)\, dM_s + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f_n(M_s, V_s)\, dV_s^i \\
&+ \frac{1}{2} \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(M_s, V_s)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds).
\end{aligned}$$

Aus Aussage (ii) folgt

$$f_n(M_t, V_t) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f_0(M_t, V_t) \quad f.s. \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1} f_0$ ist auf $B_K(0)$ beschränkt, und die Folge der Ableitungen $(\frac{\partial}{\partial x_1} f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert dort gleichmäßig gegen $\frac{\partial}{\partial x_1} f_0$. Daher ist die Folge $(\frac{\partial}{\partial x_1} f_n)_{n\geq 0}$ auf $B_K(0)$ gleichmäßig beschränkt. Ferner gilt nach (iii)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_n(M_s, V_s) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial x_1} f_0(M_s, V_s) \quad f.s.,$$

so daß sich aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz für stochastische Integrale 1.24

$$\int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f_n(M_s, V_s)\, dM_s \xrightarrow{P} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f_0(M_s, V_s)\, dM_s$$

ergibt. Die Folge $(\frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f_n)_{n\geq 0}$, $1 \leq i \leq d$, ist ebenfalls gleichmäßig beschränkt, und nach Aussage (iii) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f_n(M_s, V_s) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f_0(M_s, V_s) \quad f.s.$$

für $1 \leq i \leq d$. Der Satz von der majorisierten Konvergenz impliziert daher

$$\int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f_n(M_s, V_s)\, dV_s^i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f_0(M_s, V_s)\, dV_s^i \quad f.s.$$

Betrachten wir zuletzt die Folge der Integrale $\int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(M_s, V_s)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds)$. Es sei L das Supremum von $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0$ auf $B_1(0)$. Unter Verwendung von Lemma 2.2 erhalten wir für $x \in C$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(x) &= \varphi_n * \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(y) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(x-y)\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \\
&\leq \int_{D_1(0)} \varphi_n(y) L\, \lambda\!\!\lambda^{d+1}(dy) \\
&= L,
\end{aligned}$$

woraus in Verbindung mit der Stetigkeit von $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n$ die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n)_{n\geq 0}$ auf $B_K(0)$ folgt. Unter Hinweis auf

$$\lambda\!\!\lambda\left(\{0 \leq s \leq t : M_s \in A\}\right) = 0 \quad f.s. \tag{2.10}$$

und Aussage (iv) folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(M_s, V_s) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(M_s, V_s) \quad f.s.$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert wiederum die gewünschte Konvergenz

$$\int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_n(M_s, V_s)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_0(M_s, V_s)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \quad f.s.$$

Für beschränktes M und V haben wir somit Behauptung (2.7) bestätigt. Für den allgemeinen Fall sei gemäß Definition 1.23 eine Zerlegung $M = Z + N$ in ein stetiges lokales Martingal Z und einen stetigen Prozeß N von lokal beschränkter Variation gegeben. Gemäß Lemma 1.15 können wir eine Lokalisationsfolge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für M derart wählen, daß die jeweiligen durch τ_n gestoppten Prozesse, für die wir kurz M^n, Z^n, N^n und $V^n = (V^{1,n}, \ldots, V^{d,n})$ schreiben, beschränkt sind für jedes n. Nach dem gerade Bewiesenen gilt

$$\begin{aligned} f(M_t^n, V_t^n) - f(M_0^n, V_0^n) &= \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dM_s^n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s^n, V_s^n)\, dV_s^{i,n} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_s^n, V_s^n)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \qquad f.s. \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Grenzübergang $n \to \infty$ liefert wegen $\tau_n \to \infty$ $f.s.$

$$f(M_t^n, V_t^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(M_t, V_t) \quad f.s.$$

Weiter gilt für die pfadweise gebildeten Integrale

$$\begin{aligned} \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s^n, V_s^n)\, dV_s^{i,n} &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s^n, V_s^n)\, dV_s^{i,n} \\ &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s, V_s)\, dV_s^{i} \\ &= \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s, V_s)\, dV_s^{i}, \end{aligned}$$

so daß sich durch eine analoge Rechnung wie in (2.5) wegen $P(\tau_n \geq t) \to 1$

$$\int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s^n, V_s^n)\, dV_s^{i,n} \quad \xrightarrow{P} \quad \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(M_s, V_s)\, dV_s^i$$

ergibt. Ebenso erhalten wir

$$\int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_s^n, V_s^n)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \xrightarrow{P} \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(M_s, V_s)\, h(s)\, \lambda\!\!\lambda(ds).$$

Für das stochastische Integral gilt

$$\begin{aligned} \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dM_s^n &= \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dZ_s^n \\ &\quad + \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dN_s^n. \end{aligned}$$

Das letzte Integral konvergiert nach Wahrscheinlichkeit gegen $\int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s, V_s)\, dN_s$, was man durch eine identische Rechnung wie bei den anderen pfadweise gebildeten Integralen verifiziert. Für das stochastische Integral $\int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dZ_s^n$ erhalten wir unter Hinweis auf das Lokalisationslemma 1.19 sowie Bemerkung 1.21 (b) die Identität

$$\begin{aligned} \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dZ_s^n &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dZ_s^n \\ &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s, V_s)\, dZ_s \\ &= \int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s, V_s)\, dZ_s, \end{aligned}$$

woraus nun auch

$$\int_{[0,t\wedge\tau_n]} \frac{\partial}{\partial x} f(M_s^n, V_s^n)\, dZ_s^n \xrightarrow{P} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f(M_s, V_s)\, dZ_s \quad \text{für alle } t \geq 0$$

folgt. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes garantiert dies letztlich die gewünschte Behauptung (2.7). □

2.4 Bemerkung. Man verifiziert leicht, daß analog zu Bemerkung 1.29 (b) auch hier gilt: Nimmt der Prozeß (M, V) *f.s.* nur Werte in einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}^{d+1}$ an und weist $f : I \to \mathbb{R}$ dort die obigen Differenzierbarkeitseigenschaften auf, so gilt Satz 2.3 entsprechend.

Von besonderem Interesse für unsere späteren Anwendungen sind die Spezialfälle, in denen eine Brownsche Bewegung mit Drift bzw. eine geometrische Brownsche Bewegung vorliegt. Wir notieren daher die Verallgemeinerung der Itô-Formel für diese Semimartingale in den folgenden beiden Korollaren:

2.5 Korollar. *In der Situation von Satz 2.3 sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ, d.h. B_t besitze die Gestalt*

$$B_t = \sigma W_t + \mu t, \qquad t \geq 0,$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(B_t, V_t) - f(B_0, V_0) = &\int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f(B_s, V_s)\, dB_s + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(B_s, V_s)\, dV_s^i \\ &+ \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(B_s, V_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \qquad f.s. \end{aligned}$$

Beweis. Es ist lediglich nachzuweisen, daß $(B_t)_{t\geq 0}$ die Voraussetzungen (a) und (b) aus Satz 2.3 erfüllt. Die quadratische Variation einer Brownschen Bewegung mit Drift μ und Volatilität σ^2 ergibt sich zu $\langle B\rangle_t = \sigma^2 t$, wodurch die Bedingung (a) sichergestellt wird. Die zweite Bedingung ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Es gilt

$$\lambda\!\!\lambda\left(\{0 \leq s \leq t : B_s = x_0\}\right) = \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(B_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \qquad f.s.,$$

wobei die Meßbarkeit der Menge $\{0 \leq s \leq t : B_s = x_0\}$ aus der pfadweisen Stetigkeit der Brownschen Bewegung folgt. Der Wert des Integrals ergibt sich aber zu

$$\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(B_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) = 0 \qquad f.s.,$$

denn der Satz von Fubini impliziert

$$\begin{aligned} E\left(\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{x_0\}}(B_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds)\right) &= \int_{[0,t]} E\left(\mathbb{1}_{\{x_0\}}(B_s)\right) \lambda\!\!\lambda(ds) \\ &= \int_{[0,t]} P(B_s = x_0)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Identität folgt wegen der Abzählbarkeit der diskreten Menge A unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned}\lambda\!\!\lambda\{0 \leq s \leq t : B_s \in A\} &= \lambda\!\!\lambda\left(\bigcup_{x\in A}\{0 \leq s \leq t : B_s = x\}\right) \\ &= \sum_{x\in A}\lambda\!\!\lambda\{0 \leq s \leq t : B_s = x\} \\ &= 0 \qquad f.s.\end{aligned}$$

wie gewünscht Bedingung (b). □

2.6 Korollar. *In der Situation von Satz 2.3 sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine geometrische Brownsche Bewegung, d.h.*

$$X_t = x_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right), \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

mit Drift $\mu > 0$ und Volatilität $\sigma > 0$, wobei der Prozeß $(W_t)_{t\geq 0}$ wiederum eine Standard-Brownsche Bewegung bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned}f(X_t, V_t) = f(X_0, V_0) &+ \int_{[0,t]} \sigma X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s)\, dW_s + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(X_s, V_s)\, dV_s^i \\ &+ \int_{[0,t]} \left(\mu X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(X_s, V_s)\right) \lambda\!\!\lambda(ds) \qquad f.s.\end{aligned}$$

Beweis. Wir definieren eine Hilfsfunktion $g : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x_1, \ldots, x_{d+1}) := f\left(x_0 e^{x_1}, x_2, \ldots, x_{d+1}\right),$$

so daß mit f offensichtlich auch g die Voraussetzungen aus Korollar 2.5 erfüllt. Weiter setzen wir

$$Y_t := \sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \qquad t \geq 0.$$

$(Y_t)_{t>0}$ bildet eine Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$. Ferner genügt der Prozeß der stochastischen Differentialgleichung

$$dY_t = \sigma dW_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds. \tag{2.11}$$

Aus dem vorangegangenen Korollar erhalten wir folglich

$$
\begin{aligned}
&f(X_t, V_t) - f(X_0, V_0) \\
&\quad= g(Y_t, V_t) - g(Y_0, V_0) \\
&\quad= \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} g(Y_s, V_s)\, dY_s + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} g(Y_s, V_s)\, dV_s^i \\
&\qquad+ \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{[0,t]} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} g(Y_s, V_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \\
&\quad= \int_{[0,t]} X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s)\, dY_s + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(X_s, V_s)\, dV_s^i \\
&\qquad+ \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{[0,t]} \left(X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s) + X_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(X_s, V_s) \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \\
&\quad\overset{(*)}{=} \int_{[0,t]} X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s) \left(\sigma\, dW_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \right) \\
&\qquad+ \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(X_s, V_s)\, dV_s^i \\
&\qquad+ \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{[0,t]} \left(X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s) + X_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(X_s, V_s) \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \\
&\quad= \int_{[0,t]} \sigma X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s)\, dW_s + \sum_{i=1}^{d} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} f(X_s, V_s)\, dV_s^i \\
&\qquad+ \int_{[0,t]} \left(\mu X_s \frac{\partial}{\partial x_1} f(X_s, V_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(X_s, V_s) \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \quad f.s.,
\end{aligned}
$$

wobei in $(*)$ die Differentialgleichung (2.11) eingegangen ist. $\square$

Kapitel 3

Optimales Stoppen im Modell von Bachelier

Im Modell von Bachelier (1870-1946), das er erstmals im Jahr 1900 vorstellte, betrachten wir den Kursverlauf eines Finanzgutes und suchen nach einer optimalen Strategie, diese Vermögensanlage zu verkaufen. Dabei gehen wir davon aus, daß der Besitzer des Gutes an einem maximalen Gewinn interessiert ist.

3.1 Das Modell und die Problemstellung

Zunächst beschreiben wir das Modell, welches wir in diesem Kapitel zugrunde legen. Für den Handel mit Finanzgütern treffen wir folgende grundsätzliche Annahmen:

- Der Handel mit Finanzgütern findet in stetiger Zeit statt.
- Der Kauf und Verkauf von Finanzgütern verursacht keine Transaktionskosten.
- Auf Finanzgüter wird keine Dividende ausgeschüttet.

Für den Rest dieses Kapitels legen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zugrunde, auf dem eine Standard-Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\geq 0}$ gegeben ist. Wir betrachten nun einen Finanzmarkt, in dem lediglich zwei Finanzgüter gehandelt werden: Zum einen existiere eine risikolose, festverzinsliche Vermögensanlage, die auch als *Bond* bezeichnet wird, deren Kursentwicklung durch den exponentiellen Preisprozeß $(R_t)_{t\geq 0}$,

$$R_t := R_0 e^{rt}, \qquad t \geq 0, \tag{3.1}$$

mit Anfangswert $R_0 > 0$ und Verzinsungsrate $r > 0$ determiniert werde. Zum anderen sei eine risikobehaftete Vermögensanlage gegeben, deren Preisprozeß $(B_t)_{t\geq 0}$ durch eine Brownsche Bewegung mit Drift $\mu \geq 0$, Volatilität $\sigma > 0$ und Startwert $x \geq 0$, also

$$B_t = x + \sigma W_t + \mu t, \qquad t \geq 0, \tag{3.2}$$

charakterisiert werde. Der Einfachheit halber gehen wir davon aus, daß es sich bei dieser Vermögensanlage um eine Aktie handelt. Der Prozeß $(B_t)_{t\geq 0}$ genügt der stochastischen Differentialgleichung

$$dB_t = \sigma dW_t + \mu dt, \qquad t \geq 0. \tag{3.3}$$

Die Variablen r, μ und σ seien dabei als bekannt vorausgesetzt. Der Besitzer der Aktie wird in der Regel daran interessiert sein, dieses Gut zu einem möglichst hohen Kurs zu verkaufen. Um allerdings eine Vergleichbarkeit der Kurse zu unterschiedlichen Zeitpunkten zu gewährleisten, betrachten wir den diskontierten Preisprozeß $(e^{-rt}B_t)_{t\geq 0}$. Der Besitzer sucht also eine Stopzeit, die das Stopproblem

$$V^*(x) := \sup_{\tau} E(e^{-r\tau} B_\tau) \tag{3.4}$$

löst und so die erwartete, diskontierte Auszahlung maximiert. Dabei wird in (3.4) das Supremum über sämtliche Stopzeiten gebildet.

3.2 Optimales Stoppen eine Finanzgutes

3.2.1 Herleitung einer optimalen Stopzeit

Unter den gegebenen Umständen erweist es sich als plausibel, daß die optimale Stopzeit für das Problem (3.4) eine Gestalt der Form

$$\begin{aligned}\tau_{a,\mu,\sigma} &= \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : x + \sigma W_t + \mu t \geq a\}\end{aligned}$$

mit $a \geq x$ besitzen könnte. Abkürzend schreiben wir

$$\tau^a := \tau_{a,\mu,\sigma},$$

wobei wir den Index oben platzieren, um einer möglichen Verwechselung mit $\tau_{a,\mu}$ und τ_a vorzubeugen. Der Besitzer verkauft also sein Finanzgut, sobald der Kurs über ein gewisses Niveau a steigt. Wir betrachten daher zunächst Stopzeiten dieser Form und berechnen die erwartete, diskontierte Auszahlung $E(e^{-r\tau^a} B_{\tau^a})$. Für die Berechnung dieses Erwartungswertes benötigen wir folgenden Satz:

3.1 Satz. *Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung, $a \geq 0$, $r > 0$ und $\mu \geq 0$. Dann gilt für die Stopzeit $\tau_{a,\mu}$, die durch*

$$\tau_{a,\mu} := \inf\{t \geq 0 : W_t + \mu t \geq a\},$$

definiert wird, die Identität

$$E \exp(-r\tau_{a,\mu}) = \exp\left(-a\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r}\right)\right).$$

Beweis. Für $a = 0$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Sei also im folgenden $a > 0$. Aus der Rekurrenz der Standard-Brownschen Bewegung in Verbindung mit $\mu \geq 0$ erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} P(\tau_{a,\mu} < \infty) &= P\left(\inf\{t \geq 0 : W_t + \mu t \geq a\} < \infty\right) \\ &\geq P\left(\inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\} < \infty\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Da der Prozeß $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right)_{t\geq 0}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ nach Bemerkung 1.7 ein Martingal bildet, kann mithilfe des Optinal Sampling Theorems 1.8 auf

$$E \exp\left(\lambda W_{\tau_{a,\mu}\wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}(\tau_{a,\mu} \wedge t)\right) = E \exp\left(\lambda W_0 - \frac{\lambda^2}{2} \cdot 0\right) = 1$$

für jedes $t \geq 0$ geschlossen werden. Für $\lambda \geq 0$ und $0 \leq t \leq \tau_{a,\mu}$ gilt ferner die Abschätzung

$$\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right) \leq \exp\left(\lambda(a - \mu t) - \frac{\lambda^2}{2}t\right) \leq \exp(\lambda a),$$

so daß vermöge des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} E\exp\left(\lambda W_{\tau_{a,\mu}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{a,\mu}\right) &= E\lim_{t\to\infty}\exp\left(\lambda W_{\tau_{a,\mu}\wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}(\tau_{a,\mu}\wedge t)\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} E\exp\left(\lambda W_{\tau_{a,\mu}\wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}(\tau_{a,\mu}\wedge t)\right) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

folgt. Wählen wir speziell $\lambda := -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r}$, so ist $\lambda > 0$ und

$$\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2} = r.$$

Beachtet man noch, daß $W_{\tau_{a,\mu}} = a - \mu\tau_{a,\mu}$ gilt, so erhalten wir unter Verwendung dieser Identität

$$\begin{aligned} E\exp\left(\lambda W_{\tau_{a,\mu}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{a,\mu}\right) &= E\exp\left(\lambda(a-\mu\tau_{a,\mu}) - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{a,\mu}\right) \\ &= e^{\lambda a}E\exp\left(-\left(\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2}\right)\tau_{a,\mu}\right) \\ &= e^{\lambda a}Ee^{-r\tau_{a,\mu}}. \end{aligned}$$

In Verbindung mit (3.5) ergibt sich somit die gewünschte Identität

$$Ee^{-r\tau_{a,\mu}} = e^{-\lambda a} = e^{-a\left(-\mu+\sqrt{\mu^2+2r}\right)}.$$

□

Wir formulieren noch zwei direkte Folgerungen aus diesem Satz.

3.2 Korollar. *Es seien $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und*

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}.$$

Dann gilt

$$E\exp(-r\tau_a) = \exp(-|a|\sqrt{2r}).$$

Beweis. Der Fall $a \geq 0$ ist ein Spezialfall von Satz 3.1. Für $a < 0$ ist zu beachten, daß

$$\begin{aligned} \tau_a &= \inf\{t \geq 0 : W_t = a\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : -W_t = -a\} \end{aligned}$$

gilt und $(-W_t)_{t\geq 0}$ ebenfalls eine Standard-Brownsche Bewegung bildet. Somit folgt hier die Behauptung ebenfalls direkt aus Satz 3.1. $\square$

3.3 Korollar. *Es sei* $(B_t)_{t\geq 0}$ *eine Brownsche Bewegung mit Drift* $\mu \geq 0$, *Volatilität* $\sigma > 0$ *und Startwert* $x \in \mathbb{R}$, *d.h.*

$$B_t = x + \sigma W_t + \mu t, \qquad t \geq 0.$$

Weiter sei

$$\tau^a = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\}.$$

Dann gilt für $x < a$

$$E\exp(-r\tau^a) = \exp\left(\frac{1}{\sigma^2}(x-a)\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 r}\right)\right)$$

und für $x \geq a$

$$E\exp(-r\tau^a) = 1.$$

Beweis. Für $x < a$ ergibt eine einfache Umformung

$$\begin{aligned} \tau^a &= \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : x + \sigma W_t + \mu t \geq a\} \\ &= \inf\left\{t \geq 0 : W_t + \frac{\mu}{\sigma} t \geq \frac{a-x}{\sigma}\right\}. \end{aligned}$$

Indem wir in Satz 3.1 a durch $(a-x)/\sigma$ und μ durch μ/σ ersetzen, erhalten wir wie gewünscht

$$\begin{aligned} E\exp(-r\tau^a) &= \exp\left[-\frac{a-x}{\sigma}\left(-\frac{\mu}{\sigma} + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 + 2r}\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{1}{\sigma^2}(x-a)\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 r}\right)\right). \end{aligned}$$

Die Behauptung für $x \geq a$ folgt aus $\tau^a = 0$ f.s. $\square$

Wir kommen nun zu unserem ursprünglichen Problem, der Berechnung von $E\left(e^{-r\tau^a} B_{\tau^a}\right)$, zurück. Korollar 3.3 liefert für $x < a$ unter Hinweis auf $B_{\tau^a} = a$

$$E\left(e^{-r\tau^a} B_{\tau^a}\right) = a\exp\left(\frac{1}{\sigma^2}(x-a)\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r}\right)\right)$$

und für $x \geq a$

$$E\left(e^{-r\tau^a} B_{\tau^a}\right) = x.$$

Wir fassen den ersten Wert $(x < a)$ als Funktion in a auf und bestimmen deren Maximum. Dazu definieren wir

$$g(a) := a \exp\left(\frac{1}{\sigma^2}(x-a)\left(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2r}\right)\right).$$

Durch einige elementare Rechnungen erhält man, daß die Funktion g in dem Punkt

$$a^* = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\mu^2 + 2r} - \mu}$$

ein Maximum annimmt. Auf diese Rechnung wollen wir aber an dieser Stelle verzichten.

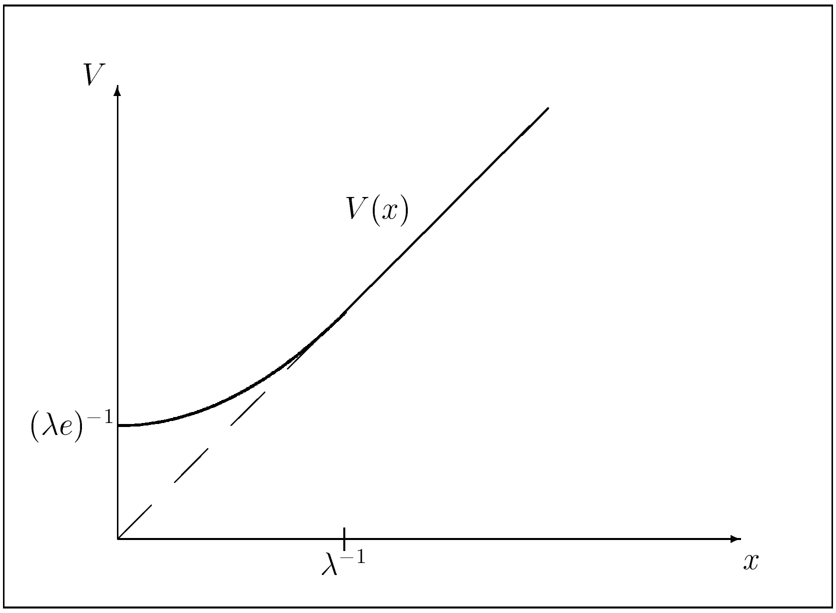

Abbildung 3.1: Erwartete Auszahlung

3.2.2 Beweis der Optimalität

Die bisherigen Überlegungen führen zu folgendem Satz:

3.4 Satz. *Es sei eine Brownsche Bewegung* $(B_t)_{t\geq 0}$ *mit Drift* $\mu \geq 0$ *und Volatilität* $\sigma > 0$ *gegeben. Dann existiert eine Stopzeit* τ^**, die* $Ee^{-r\tau}B_\tau$ *maximiert, nämlich*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq 1/\lambda\}$$

mit $\lambda := \frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{\mu^2+2r}-\mu\right)$. *Für* $V^*(x) = \sup_\tau E(e^{-r\tau}B_\tau)$ *gilt* $V^*(x) = V(x)$ *mit*

$$V(x) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x - 1}, & \textit{falls} \quad x \leq \frac{1}{\lambda}, \\ x, & \textit{falls} \quad x > \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

Beweis. Für die Stopzeit τ^* folgt aus Korollar 3.3 unter Beachtung von $\lambda > 0$

$$Ee^{-r\tau^*}B_{\tau^*} = \frac{1}{\lambda}Ee^{-r\tau^*} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda(x-\frac{1}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x - 1} = V(x)$$

für alle $x < 1/\lambda$. Für $x \geq 1/\lambda$ ergibt sich $\tau^* = 0$ $f.s.$ Folglich gilt

$$Ee^{-r\tau^*}B_{\tau^*} = Ee^0 B_0 = x = V(x)$$

und daher

$$V^*(x) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}B_\tau \geq V(x).$$

Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := e^{-ry}V(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x - ry - 1}, & \text{falls} \quad x \leq \frac{1}{\lambda}, \\ xe^{-ry}, & \text{falls} \quad x > \frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Funktion weisen wir nach, daß der Prozeß $(e^{-rt}V(B_t))_{t\geq 0}$ ein Supermartingal bildet. Die Funktion f ist einmal stetig partiell differenzierbar. Die zweite partielle Ableitung nach x existiert und ist stetig für alle $x \neq \frac{1}{\lambda}$. Unter Verwendung der Verallgemeinerung der Itô-Formel für Brownsche Bewegungen mit

Drift (Korollar 2.5) sowie der Differentialgleichung $dB_t = \sigma dW_t + \mu dt$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(B_t, t) &= e^{-rt}V(B_t) \\
&= V(x) + \int_{[0,t]} e^{-rs}V'(B_s)\,dB_s - \int_{[0,t]} re^{-rs}V(B_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{[0,t]} e^{-rs}V''(B_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) \\
&= V(x) + \sigma \int_{[0,t]} e^{-rs}V'(B_s)\,dW_s + \int_{[0,t]} \mu e^{-rs}V'(B_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) \\
&\quad - \int_{[0,t]} re^{-rs}V(B_s)\lambda\!\!\lambda(ds) + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{[0,t]} e^{-rs}V''(B_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds) \\
&= V(x) + \sigma \int_{[0,t]} e^{-rs}V'(B_s)\,dW_s \\
&\quad + \int_{[0,t]} e^{-rs}\left(-rV(B_s) + \mu V'(B_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(B_s)\right)\lambda\!\!\lambda(ds) \quad f.s.
\end{aligned}$$

Der Prozeß

$$M_t := V(x) + \sigma \int_{[0,t]} e^{-rs}V'(B_s)\,dW_s$$

bildet ein Martingal, da bzgl. einer Standard-Brownschen Bewegung integriert wird. Für den Prozeß $(Y_t)_{t\geq 0}$, der durch

$$Y_t := e^{-rt}\left(-rV(B_t) + \mu V'(B_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(B_t)\right)$$

definiert sei, gilt $Y_t \leq 0$ $f.s.$ Dies läßt sich durch eine Fallunterscheidung bestätigen: Für $B_t > 1/\lambda$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
Y_t &= e^{-rt}\left(-rV(B_t) + \mu V'(B_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(B_t)\right) \\
&= e^{-rt}(-rB_t + \mu) \\
&\leq e^{-rt}\left(-\frac{r}{\lambda} + \mu\right) \\
&= \frac{e^{-rt}}{\lambda}(-r + \lambda\mu) \\
&= \frac{e^{-rt}}{\lambda}\left(-r + \frac{\mu}{\sigma^2}\left(\sqrt{\mu^2 + 2\sigma^2 r} - \mu\right)\right) \\
&= \frac{e^{-rt}}{\lambda}\left(-r + \frac{1}{\sigma^2}\left(\sqrt{\mu^4 + 2r\sigma^2\mu^2} - \mu^2\right)\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

Für $B_t \leq 1/\lambda$ erhalten wir aus $-r + \mu\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 = 0$ die gewünschte Abschätzung durch folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{-rt}\left(-rV(B_t) + \mu V'(B_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(B_t)\right) \\ &= e^{-rt}\left(-rV(B_t) + \mu\lambda V(B_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 V(B_t)\right) \\ &= e^{-rt}V(B_t)\left(-r + \mu\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $Y_t \leq 0$ $f.s.$ liefert nun die in Aussicht gestellte Eigenschaft, daß $e^{-rt}V(B_t)$ ein Supermartingal bildet, denn es gilt

$$\begin{aligned} &E(e^{-rt}V(B_t)|\mathcal{F}_s) \\ &\quad= E\left(M_t + \int_{[0,t]} Y_u \lambda\!\!\lambda(du) \middle| \mathcal{F}_s\right) \\ &\quad= E(M_t|\mathcal{F}_s) + E\left(\int_{[0,s]} Y_u\, \lambda\!\!\lambda(du) \middle| \mathcal{F}_s\right) + E\left(\int_{[s,t]} Y_u\, \lambda\!\!\lambda(du) \middle| \mathcal{F}_s\right) \qquad (3.6) \\ &\quad\leq M_s + \int_{[0,s]} Y_u\, \lambda\!\!\lambda(du) \\ &\quad= e^{-rs}V(B_s) \quad f.s. \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto e^{-rt}V(x)$ ist dieses Supermartingal rechtsseitig stetig. Beachten wir noch, daß die bekannte Ungleichung $e^x \geq 1 + x$

$$V(x) \geq x$$

für alle $x \geq 0$ impliziert, so können wir mit Korollar 1.9 für jede Stopzeit τ

$$\begin{aligned} Ee^{-r\tau}B_\tau &\leq Ee^{-r\tau}V(B_\tau) \\ &\leq Ee^0 V(B_0) \qquad (3.7) \\ &= V(x) \end{aligned}$$

schließen. Geht man nun auf beiden Seiten zum Supremum über, so erhält man

$$V^*(x) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}B_\tau \leq V(x).$$

Zusammen ergibt sich das gewünschte Resultat

$$V^*(x) = \sup_{\tau} Ee^{-r\tau} B_\tau = V(x).$$

$\square$

Kapitel 4

Optimales Stoppen im Modell von Black und Scholes

In diesem Kapitel untersuchen wir die *Amerikanische Put-Option* in dem von Black und Scholes 1973 entwickelten Modell (vgl. [Bla1] und [Bla2]). Dieses basiert auf dem Prinzip der *Arbitragefreiheit*, das die Realisierung eines risikolosen Gewinns, sogenanntes „free lunch“, ausschließt. Daher zeichnet es sich vor allem dadurch aus, daß es für die Berechnung von fairen Preisen für Finanzderivate nicht nötig ist, die Risikopräferenzen der Investoren zu kennen. Unser Bestreben ist es, eine geschlossene Form des fairen Preises einer Amerikanischen Put-Option herzuleiten und eine optimale Ausübungsstrategie dieser Option zu formulieren.

4.1 Das Modell von Black und Scholes

Wir stellen zunächst das Modell von Black und Scholes genauer vor. Für unsere Zwecke ist es ausreichend, einen Finanzmarkt zu studieren, in dem nur zwei Finanzgüter gehandelt werden. Zum einen sei wie schon im vorherigen Kapitel eine risikolose, festverzinsliche Anlage gegeben, deren Kursentwicklung durch die Gleichung

$$R_t = R_0 e^{rt}, \qquad t \geq 0, \tag{4.1}$$

mit Anfangswert $R_0 > 0$ und Verzinsungsrate $r > 0$ gegeben ist. Zum anderen liege eine risikobehaftete Vermögensanlage, z.B. eine Aktie, vor, deren Kursverlauf $(X_t)_{t\geq 0}$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift $\mu > 0$, Volatilität

$\sigma > 0$ und Startwert $x > 0$ charakterisiert wird, d.h.

$$X_t = x \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right), \qquad t \geq 0, \tag{4.2}$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung bezeichnet. Der Prozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ genügt der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu dt), \qquad t \geq 0. \tag{4.3}$$

Die Variablen r, μ und σ seien im weiteren als bekannt vorausgesetzt. Für den Rest dieses Kapitels gehen wir von den gleichen Annahmen bzgl. des Handels mit Finanzgütern wie im vorherigen Kapitel aus, die wir uns aber noch einmal kurz ins Gedächtnis zurückrufen:

- Der Handel mit Finanzgütern findet in stetiger Zeit statt.
- Der Kauf und Verkauf von Finanzgütern verursacht keine Transaktionskosten.
- Finanzgüter, die einem Finanzderivat, z.B. einer Option, unterliegen, zahlen keine Dividende aus.

Wir erinnern zunächst an eine Definition aus der Finanzmathematik, die in diesem Modell von besonderer Bedeutung ist, und stellen ein zugehöriges Resultat vor, das richtungsweisend für unsere Berechnungen ist und uns zu einer entscheidenden Vereinfachung führt.

4.1 Definition. Ein W-Maß $\widetilde{P}$ mit $\widetilde{P} \sim P$ heißt *äquivalentes Martingalmaß*, falls der diskontierte (Vektor-)Prozeß $(S_t)_{t\geq 0}$, der durch

$$S_t := e^{-rt}(X_t, R_t), \qquad t \geq 0,$$

definiert wird, unter $\widetilde{P}$ ein (Vektor-)Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ bildet.

Die erfreuliche Nachricht lautet dann

4.2 Satz. *In dem vorgestellten Modell von Black und Scholes existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\widetilde{P}$, welches durch die Radon-Nikodym-Ableitung*

$$\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \exp\left(-\int_{[0,t]} \frac{\mu - r}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2}\int_{[0,t]} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 \lambda\!\!\lambda(ds)\right) \tag{4.4}$$

festgelegt ist.

Beweis. Es sei $T > 0$ fest gewählt. Dann gilt $\int_{[0,T]} \left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 \lambda\!\!\lambda(ds) < \infty$. Unter Rückgriff auf Bemerkung 1.7 ist daher ersichtlich, daß der Prozeß $(Y_t)_{0\leq t<T}$, definiert durch

$$\begin{aligned} Y_t &:= \exp\left(-\int_{[0,t]} \frac{\mu - r}{\sigma} dW_s - \frac{1}{2}\int_{[0,t]} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 \lambda\!\!\lambda(ds)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\mu - r}{\sigma} W_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t\right), \qquad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

unter P ein Martingal bildet. Bei der Umformung haben wir von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß $\int_{[0,t]} dW_s = W_t$ gilt. Definieren wir

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} \lambda\!\!\lambda(ds) = W_t - \frac{\mu - r}{\sigma} t, \qquad 0 \leq t < \infty, \tag{4.5}$$

so folgt aus dem Girsanov-Theorem 1.30, daß der Prozeß $(\widetilde{W}_t)_{0\leq t\leq T}$ unter dem neuen Maß $\widetilde{P}$ eine Standard-Brownsche Bewegung bildet. Da T beliebig gewählt war, gilt dieses auch schon für den gesamten Prozeß $(\widetilde{W}_t)_{0\leq t<\infty}$. Für den diskontierten Preisprozeß, den wir mit $\widetilde{X}$ bezeichnen, erhalten wir die Darstellung

$$\widetilde{X}_t = e^{-rt} X_t = x \exp\left(\sigma W_t + \left((\mu - r) - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right).$$

Wir schreiben (4.5) in der Form

$$W_t = \widetilde{W}_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

und setzen diese Identität in den Prozeß $\widetilde{X}$ ein. Dies führt zu

$$\widetilde{X}_t = x \exp\left(\sigma \widetilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right),$$

was letztlich unter erneutem Hinweis auf Bemerkung 1.7 die Behauptung bestätigt. □

4.3 Bemerkungen. (a) Es läßt sich sogar nachweisen, daß das äquivalente Martingalmaß im Modell von Black und Scholes eindeutig bestimmt ist (vgl. [Mus]). Wir wollen aber auf diese Tatsache nicht weiter eingehen, da sie von keinem weiteren Interesse für uns ist.

(b) Der obige Satz eröffnet uns die Möglichkeit, die Berechnung des fairen Preises einer Option unter dem äquivalenten Martingalmaß $\widetilde{P}$ durchzuführen, wobei lediglich zu beachten ist, daß wir die Drift μ des Preisprozesses im Ausgangsmodell durch die Verzinsungsrate r zu ersetzen haben. Für den Rest dieses Kapitels nehmen wir also $\mu = r$ an.

4.2 Die Amerikanische Put-Option bei unendlichem Zeithorizont

4.2.1 Herleitung der optimalen Stopzeit

Im Modell von Black und Scholes betrachten wir eine Amerikanische Put-Option und suchen nach einer optimalen Strategie, diese Option auszuüben. Bei diesem Derivat erwirbt der Käufer des Kontraktes das Recht, ein bestimmtes Finanzgut bis zu einem zukünftigen Zeitpunkt T zu einem vorher vereinbarten Preis K, dem *Ausübungs-* oder *Basispreis* (*engl.* strike price), zu verkaufen. Im Gegensatz zu einem sogenannten *Future* besteht allerdings keine Verpflichtung zum Ausüben der Option. In unserem betrachteten Modell mit unendlichem Zeithorizont gilt $T = \infty$.

Unter den obigen Voraussetzungen ergibt sich der *innere Wert* einer amerikanischen Put-Option mit Ausübungspreis K auf die Anlage $(X_t)_{t \geq 0}$ zum Zeitpunkt t zu $(K - X_t)^+$. Der Auszahlungsprozeß $(\psi_t)_{t \geq 0}$ hat also zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$ die Gestalt

$$\psi(X_t, t) = (K - X_t)^+.$$

Der Käufer der Option wird daran interessiert sein, eine Stopzeit τ^* zu finden, die die erwartete diskontierte Auszahlung $Ee^{-r\tau}\psi_\tau$ maximiert, also das Stopproblem

$$V^*(x) := \sup_\tau Ee^{-r\tau}\psi_\tau = \sup_\tau Ee^{-r\tau}(K - X_\tau)^+ \tag{4.6}$$

in Abhängigkeit vom Startwert x der Vermögensanlage löst, wobei das Supremum über alle Stopzeiten gebildet wird. Diesen Wert werden wir auch als fairen Preis des Kontraktes ansehen.
Die Vermutung ist naheliegend, daß die optimale Stopstrategie darin bestehen könnte, die Option auszuüben, sobald der Kurs der Vermögensanlage unter ein gewisses Niveau $a > 0$ fällt. Daher beschränken wir uns vorerst darauf, die Problemstellung für Stopzeiten der Form

$$\begin{aligned} T_a &= \inf\{t \geq 0 : X_t \leq a\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : x\exp(\sigma W_t + \mu t) \leq a\} \end{aligned} \tag{4.7}$$

zu studieren und berechnen für $a > 0$ den Wert

$$V_a(x) := Ee^{-rT_a}(K - X_{T_a})^+ \tag{4.8}$$

in Abhängigkeit vom Startwert x des Finanzgutes. Anschließend werden wir den Wert a so determinieren, daß V_a maximal wird.
Die Stopzeit T_a unterteilt die positive reelle Achse in zwei Abschnitte: zum einen in eine *Stopregion*

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^+ : V_a(x) > (K - x)^+\},$$

und zum anderen in eine *Fortsetzungsregion*

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^+ : V_a(x) \leq (K - x)^+\}.$$

Der Besitzer der Option übt folglich die Option aus, sobald der Preisprozeß die Fortsetzungsregion verläßt.
Im Fall $a \geq K$ ergibt sich trivialerweise

$$V_a(x) = Ee^{-rT_a}(K - X_{T_a})^+ = Ee^{-rT_a}(K - a)^+ = 0.$$

Ergo betrachten wir das Problem im folgenden nur für $a < K$. Unter Verwendung von $X_{T_a} = a$ erhalten wir

$$V_a(x) = \begin{cases} K - x, & falls \quad x \leq a, \\ (K - a)Ee^{-rT_a}, & falls \quad x > a, \end{cases}$$

und erkennen, daß sich die Berechnung von V_a auf die von Ee^{-rT_a} reduziert. Für letztere benötigen wir allerdings eine Verallgemeinerung von Satz 3.1, in der zugelassen wird, daß a auch negative Werte annehmen kann.

4.4 Satz. *Es seien $\mu, a \in \mathbb{R}$, $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und*

$$\tau_{a,\mu} = \inf\{t \geq 0 : W_t + \mu t = a\}.$$

Dann gilt für $r > 0$

$$E\exp(-r\tau_{a,\mu}) = \exp\left(\mu a - |a|\sqrt{\mu^2 + 2r}\right).$$

Beweis. Den Nachweis führen wir in zwei Schritten: Wir bestimmen als erstes die Verteilung der Stopzeit für den Spezialfall $\mu = 0$, also für

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}, \qquad a \neq 0.$$

Anschließend leiten wir mit deren Hilfe die Verteilung von $\tau_{a,\mu}$ durch einen Wechsel des zugrundeliegenden Maßes her.
Wir definieren das *laufende Maximum* der Brownschen Bewegung als

$$M_t := \sup_{0\leq s\leq t} W_s.$$

Für die gemeinsame Lebesgue-Dichte von W_t und M_t gilt nach Folgerung 8.1, S. 95 in [Kar1]

$$P(W_t \in dy, M_t \in dx) = \frac{2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2x-y)^2}{2t}\right) dy\ dx$$

für $y \leq x$ und $x \geq 0$. Dies liefert unter Beachtung der evidenten Ungleichung $M_t \geq W_t$

$$\begin{aligned}
P(\tau_a \leq t) &= P(M_t \geq a) \\
&= \int_a^\infty \int_{-\infty}^x \frac{2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2x-y)^2}{2t}\right) dy\ dx \\
&= \int_a^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x \frac{(2x-y)}{t} \exp\left(-\frac{(2x-y)^2}{2t}\right) dy\ dx \\
&= \int_a^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2x-x)^2}{2t}\right) dx \\
&= \int_a^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$ substituiert haben. Durch Differentiation unter Berücksichtigung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten wir eine Dichte f_{τ_a} der Verteilung von τ_a. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{\tau_a}(t) &= \frac{d}{dt} P(\tau_a \leq t) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)^2\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} Ee^{-r\tau_a} &= \int_0^{\infty} e^{-rt} f_{\tau_a}(t)\, dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-rt - \frac{a^2}{2t}\right) dt. \end{aligned}$$

Eine Anwendung von Korollar 3.2, das die Identität $Ee^{-r\tau_a} = e^{-|a|\sqrt{2r}}$ für $a \neq 0$ garantiert, liefert den Wert dieses Integrals:

$$Ee^{-r\tau_a} = \int_0^{\infty} \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-rt - \frac{a^2}{2t}\right) dt = e^{-|a|\sqrt{2r}}. \tag{4.9}$$

Wir kommen jetzt zur Betrachtung der Stopzeit $\tau_{a,\mu}$ zurück. Wir nehmen dazu einen Wechsel des W-Maßes in der Form vor, daß $\tau_{a,\mu}$ unter dem neuen Maß Q die gleiche Verteilung besitzt wie τ_a unter P. Den richtigen Zugang zur Definition des Maßes Q weist uns wiederum das Girsanov-Theorem 1.30:
Für beliebiges $T > 0$ definieren wir Q durch die Radon-Nikodym-Ableitung

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_{[0,T]} \mu\, dW_s - \frac{1}{2}\int_{[0,T]} \mu^2\, \lambda\!\!\lambda(ds)\right).$$

Unter Beachtung von $\int_{[0,t]} dW_s = W_t$ setzen wir nun für $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} Y_t &:= \exp\left(-\int_{[0,t]} \mu\, dW_s - \frac{1}{2}\int_{[0,t]} \mu^2\, \lambda\!\!\lambda(ds)\right) \\ &= \exp\left(-\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right). \end{aligned}$$

Nach Definition von Q gilt also

$$Q(A) = E(\mathbb{1}_A Y_T) = \int_A Y_T \, dP, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

Aus dem Girsanov-Theorem 1.30 folgt, daß der Prozeß $(\widetilde{W}_t)_{0 \le t \le T}$, definiert durch

$$\widetilde{W}_t = W_t + \mu t, \qquad 0 \le t \le T,$$

unter Q eine Standard-Brownsche Bewegung ohne Drift bildet. Die Verteilung der Stopzeit $\tau_{a,\mu} = \inf\{t \ge 0 : W_t + \mu t = a\}$ unter dem W-Maß Q ist also die gleiche wie die der Stopzeit τ_a unter dem W-Maß P. Daher gilt für die Dichte $\widetilde{f}_{\tau_{a,\mu}}$ von $\tau_{a,\mu}$ unter Q

$$\widetilde{f}_{\tau_{a,\mu}} = f_{\tau_a} = \frac{a}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right).$$

Unter Verwendung der Gleichung

$$Y_t = \exp\left(-\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) = \exp\left(-\mu \widetilde{W}_t + \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$$

erhalten wir für $0 \le t \le T$

$$\begin{aligned}
P(\tau_{a,\mu} \le t) &= E_P\left(\mathbb{1}_{\{\tau_{a,\mu} \le t\}}\right) \\
&= E_Q\left(\mathbb{1}_{\{\tau_{a,\mu} \le t\}} \frac{1}{Y_T}\right) \\
&= E_Q\left(\mathbb{1}_{\{\tau_{a,\mu} \le t\}} \exp\left(\mu \widetilde{W}_T - \frac{1}{2}\mu^2 T\right)\right) \\
&\overset{(*)}{=} E_Q\left(\mathbb{1}_{\{\tau_{a,\mu} \le t\}} E_Q\left[\exp\left(\mu \widetilde{W}_T - \frac{1}{2}\mu^2 T\right) \middle| \mathcal{F}_{\tau_{a,\mu} \wedge t}\right]\right) \\
&\overset{(**)}{=} E_Q\left(\mathbb{1}_{\{\tau_{a,\mu} \le t\}} \exp\left(\mu \widetilde{W}_{\tau_{a,\mu} \wedge t} - \frac{1}{2}\mu^2 (\tau_{a,\mu} \wedge t)\right)\right) \\
&= E_Q\left(\mathbb{1}_{\{\tau_{a,\mu} \le t\}} \exp\left(\mu a - \frac{1}{2}\mu^2 \tau_{a,\mu}\right)\right) \\
&= \int_0^t \exp\left(\mu a - \frac{1}{2}\mu^2 s\right) f_{\tau_{a,\mu}} \, ds \\
&= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(\mu a - \frac{1}{2}\mu^2 s - \frac{a^2}{2s}\right) ds \\
&= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{(a - \mu s)^2}{2s}\right) ds.
\end{aligned}$$

In $(*)$ haben wir von der Glättungsregel für bedingte Erwartungswerte Gebrauch gemacht, während $(**)$ aus der Martingaleigenschaft des Prozesses $\left(\exp\left(\mu\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)\right)_{0\le t\le T}$ folgt. Durch Differentiation dieses Terms nach t erhalten wir die Dichte $f_{\tau_{a,\mu}}$ von $\tau_{a,\mu}$ unter P. Es ist

$$f_{\tau_{a,\mu}}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a-\mu t)^2}{2t}\right), \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.10}$$

Da der Zeitpunkt T beliebig gewählt war, wird durch diese Formel bereits für $0 \le t < \infty$ die Dichte von $\tau_{a,\mu}$ beschrieben. Mit Hilfe dieser Dichte können wir jetzt den Beweis vervollständigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
Ee^{-r\tau_{a,\mu}} &= \int_0^\infty e^{-rt} f_{\tau_{a,\mu}}(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a-\mu t)^2}{2t} - rt\right) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t} + a\mu - \frac{1}{2}\mu^2 t - rt\right) dt \\
&= e^{a\mu} \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t} - (\frac{1}{2}\mu^2 + r)t\right) dt \\
&= e^{a\mu - |a|\sqrt{\mu^2 + 2r}}.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir dabei die Formel (4.9) für $Ee^{-r\tau_a}$ mit $\left(\frac{1}{2}\mu^2 + r\right)$ anstelle von r benutzt. □

Wir formen nun die Stopzeit T_a so um, daß wir obigen Satz für die Berechnung von Ee^{-rT_a} heranziehen können. Es gilt (beachte $\mu = r$)

$$\begin{aligned}
T_a &= \inf\{t \ge 0 : X_t \le a\} \\
&= \inf\left\{t \ge 0 : x\exp\left(\sigma W_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right) \le a\right\} \\
&= \inf\left\{t \ge 0 : W_t + \frac{1}{\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{a}{x}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Als direkte Konsequenz aus Satz 4.4 ergibt sich daher wegen $x > a$ und somit $\log(a/x) < 0$ die Identität

$$\begin{aligned}
Ee^{-rT_a} &= \exp\left(\log\left(\frac{a}{x}\right)\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\left(r - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + 2r}\right]\right) \\
&= \left(\frac{x}{a}\right)^{-\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

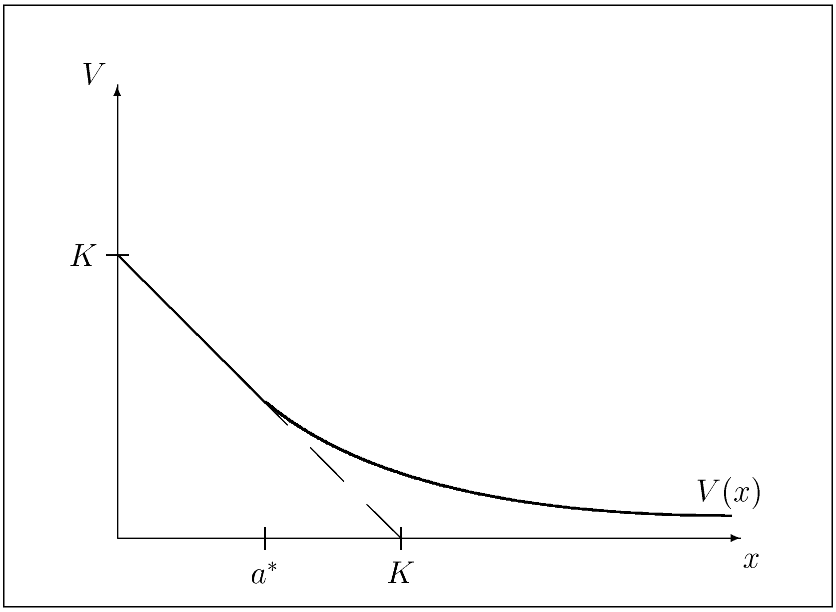

Abbildung 4.1: Lösung der Amerikanischen Put-Option

Der Exponent läßt sich mit Hilfe der elementaren Umformung

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)&-\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2+2r\sigma^2} \\
&= -\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^4}{4}+2r\sigma^2} \\
&= -\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2} \\
&= -\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}-\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2} \\
&= -\frac{2r}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

vereinfachen, so daß wir nun in der Lage sind, eine geschlossene Form für unser Ausgangsproblem anzugeben. Es ist

$$Ee^{-r\tau_a} = \left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

und folglich

$$V_a(x) = \begin{cases} K - x, & \text{falls} \quad x \le a, \\ (K-a)\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & \text{falls} \quad x > a, \end{cases}$$

wobei natürlich immer noch $a < K$ vorausgesetzt ist. Die Funktion V_a besitzt somit die Gestalt $K(a)x^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$ für $x > a$ mit der von a abhängigen Konstanten $K(a) = (K-a)a^{\frac{2r}{\sigma^2}}$. Wir müssen daher nur noch a so wählen, daß $K(a)$ maximal wird. Eine einfache Rechnung liefert uns, daß das absolute Maximum im Punkt

$$a^* = \frac{2rK}{\sigma^2 + 2r}$$

angenommen wird. Eine graphische Darstellung der Funktion V_a zeigt Abbildung 4.1.

4.2.2 Beweis der Optimalität

Im vorherigen Abschnitt haben wir lediglich Stopzeiten von der Gestalt $T_a = \inf\{t \ge 0 : X_t \le a\}$ betrachtet und unter diesen eine optimale bestimmt. Den Beweis, daß diese Stopzeit bereits unter allen Stopzeiten die optimale Strategie für das Ausüben der Put-Option darstellt und sich somit als Lösung des Stopproblems $V^*(x) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}(K - X_t)^+$ erweist, blieben wir aber bislang schuldig. Diesen Nachweis nehmen wir daher als nächstes in Angriff.
Wir benötigen dafür allerdings einige Eigenschaften der Funktion V_{a^*}, die wir im folgenden nur noch mit V bezeichnen.

4.5 Lemma. *Es sei $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gegeben durch*

$$V(x) = \begin{cases} K - x, & \textit{falls} \quad x \le a^*, \\ (K-a^*)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & \textit{falls} \quad x > a^* \end{cases} \tag{4.11}$$

mit $a^* = \frac{2rK}{\sigma^2+2r}$. Dann ist V(x) in $x = a^*$ einmal stetig differenzierbar und für $x \ne a^*$ zweimal stetig differenzierbar. Ferner gilt

$$rV(x) = xrV'(x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 V''(x) \qquad \textit{für alle } x > a^*, \tag{4.12}$$

$$V(a^*) = K - a^*, \tag{4.13}$$

$$V'(a^*) = -1, \tag{4.14}$$

$$V(x) \ge (K-x)^+ \qquad \textit{für alle } x > 0. \tag{4.15}$$

Beweis. Es ist klar, daß die Funktion V für $x \neq a^*$ zweimal stetig differenzierbar ist, so daß wir uns direkt den Gleichungen (4.12) bis (4.15) widmen können. Für den Beweis von (4.12) sei $x > a^*$. Dann liefert die Rechnung

$$\begin{aligned} &xrV'(x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2V''(x) \\ &\quad = -\frac{2r^2}{\sigma^2}(K-a^*)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)(K-a^*)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \\ &\quad = (K-a^*)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left(-\frac{2r^2}{\sigma^2} + r\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\right) \\ &\quad = r(K-a^*)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \\ &\quad = rV(x) \end{aligned}$$

die gewünschte Differentialgleichung. Die Gleichung (4.13) ist trivial. Für (4.14) berechnen wir die Ableitung von V für $x > a^*$: Es ist

$$\begin{aligned} V'(x) &= -\frac{2r}{\sigma^2 a^*}(K-a^*)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \\ &= -\frac{2r(\sigma^2+2r)}{2r\sigma^2K}\left(K - \frac{2rK}{\sigma^2+2r}\right)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \\ &= -\frac{\sigma^2+2r}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2+2r-2r}{\sigma^2+2r}\right)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \\ &= -\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Differenzierbarkeit in a^* und als Wert der Ableitung

$$V'(x) = \lim_{x\uparrow a^*} V'(x) = \lim_{x\downarrow a^*} V'(x) = -1.$$

Für (4.15) können wir uns wegen der einfachen Abschätzung $a^* < K$ offenbar auf den Fall $x > a^*$ beschränken. Wir definieren für $x > a^*$

$$f(x) := V(x) + x - K.$$

Die Abschätzung

$$f'(x) = 1 - \left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \geq 1 - \left(\frac{a^*}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} = 0$$

impliziert, daß die Funktion f auf dem Intervall $[a^*, \infty)$ monoton wachsend ist. Vermöge (4.13) führt uns das zu

$$f(x) = V(x) + x - K \geq V(a^*) + a^* - K = 0,$$

so daß wir wie gewünscht

$$V(x) \geq K - x$$

erhalten. Es bleibt $V(x) \geq 0$ für alle $x > a^*$ zu zeigen. Dies ist aber eine direkte Folgerung aus der bereits erwähnten Ungleichung $a^* < K$. □

Wir fassen nun, da wir sämtliche Ingredienzen für den Optimalitätsbeweis bereitgestellt haben, die bisherigen Ergebnisse in folgendem Satz zusammen:

4.6 Satz. *Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift $r > 0$ und Volatilität $\sigma > 0$. Dann existiert eine Stopzeit τ^*, die das Stopproblem $V^*(x) = \sup_\tau E(K - X_\tau)e^{-r\tau}$ löst, nämlich*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq a^*\}$$

mit $a^* = \frac{2rK}{\sigma^2 + 2r}$. Ferner gilt $V^*(x) = V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} K - x, & falls \quad x \leq a^*, \\ (K - a^*)\left(\frac{x}{a^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & falls \quad x > a^*. \end{cases}$$

Beweis. Wir haben bereits im vorherigen Abschnitt nachgewiesen, daß die Stopzeit τ^* die Bedingung

$$Ee^{-r\tau^*}(K - X_{\tau^*})^+ = V(x)$$

erfüllt, die uns die Gültigkeit der Ungleichung

$$V(x) \leq \sup_\tau Ee^{-r\tau}(K - X_\tau)^+ = V^*(x) \tag{4.16}$$

garantiert. Wir müssen somit nur noch die umgekehrte Ungleichung verifizieren. Dazu betrachten wir den Prozeß $(e^{-rt}V(X_t))_{t \geq 0}$. Mit Korollar 2.6 können wir unter

Beachtung von $\mu = r$

$$\begin{aligned} e^{-rt}V(X_t) &= V(x) + \int_{[0,t]} \sigma e^{-rs} X_s V'(X_s)\, dW_s + \int_{[0,t]} -re^{-rs} V(X_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \\ &\quad + \int_{[0,t]} e^{-rs} \left(rX_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 V''(X_s) \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \\ &= V(x) + \int_{[0,t]} \sigma e^{-rs} X_s V'(X_s)\, dW_s \\ &\quad + \int_{[0,t]} e^{-rs} \left(-rV(X_s) + rX_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 V''(X_s) \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \end{aligned}$$

$f.s.$ schreiben. Der Prozeß

$$M_t := V(x) + \int_{[0,t]} e^{-rs} X_s V'(X_s)\, dW_s, \qquad t \geq 0,$$

bildet ein Martingal, da bzgl. einer Standard-Brownschen Bewegung integriert wird. Wir definieren für $s \geq 0$

$$Y_s := e^{-rs} \left(-rV(X_s) + rX_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 V''(X_s) \right)$$

und zeigen, daß $Y_s \leq 0$ $f.s.$ für alle s gilt. Mittels einer analogen Rechnung wie in (3.6) sehen wir dann, daß $(Z_t)_t = \left(e^{-rt}V(X_t)\right)_t$ ein Supermartingal bildet. Für $X_s \leq a^*$ liefert uns die Abschätzung

$$\begin{aligned} Y_s &= e^{-rt} \left(-rV(X_s) + rX_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 V''(X_s) \right) \\ &= e^{-rt} \left(-r(K - X_s) - rX_s \right) \\ &= e^{-rt} \left(-rK \right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

die Ungleichung $Y_s \leq 0$. Für $X_s > a^*$ ergibt sich diese aus der Differentialgleichung (4.12) gemäß

$$\begin{aligned} Y_s &= e^{-rs} \left(-rV(X_s) + rX_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 V''(X_s) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Der Prozeß $(e^{-rt}V(X_t))_{t \geq 0}$ bildet daher ein Supermartingal, und wir erhalten unter Verwendung von Korollar 1.9 in Verbindung mit (4.15) für jede Stopzeit τ die

Abschätzung

$$\begin{aligned} Ee^{-r\tau}(K - X_\tau)^+ &\leq Ee^{-r\tau}V(X_\tau) \\ &\leq Ee^0V(X_0) \\ &= V(x). \end{aligned}$$

Bilden wir nun auf beiden Seiten das Supremum über alle Stopzeiten τ, so liefert dies die umgekehrte Ungleichung

$$V^*(x) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}(K - X_t)^+ \leq V(x).$$

Insgesamt haben wir somit

$$V^*(x) = V(x)$$

sichergestellt, so daß die Stopzeit τ^* die gesuchte Lösung unseres Stopproblems bildet. $\square$

Kapitel 5

Exotische Optionen

Gegenstand dieses Kapitels sind zwei weitere Optionen: Zum einen befassen wir uns mit der sogenannten *Russischen Put-Option*, die von Shepp und Shiryaev ([She2]) 1993 eingeführt wurde und zum anderen mit einer Option, die Guo und Shepp [Guo] im Jahr 2000 zum ersten Mal analysierten.

5.1 Das Modell

Wir legen im folgenden das Modell von Black und Scholes aus dem vorherigen Kapitel zugrunde mit der wichtigen Änderung, daß wir nicht mehr auf dem Prinzip der Arbitragefreiheit bestehen. Allerdings werden die anderen Voraussetzungen bzgl. des Handels mit Finanzgütern übernommen. Diese besagen, daß der Handel in stetiger Zeit stattfindet, keine Transaktionskosten verursacht und keine Dividenden ausgeschüttet werden. Der Zeithorizont ist auch hier wieder unendlich. Die Kursentwicklung eines Bonds wird also durch den Prozeß

$$R_t = e^{rt} R_0, \qquad t \geq 0, \tag{5.1}$$

mit Anfangswert R_0 und Verzinsungsrate $r > 0$ gegeben, während der Preisprozeß einer Aktie durch eine geometrische Brownsche Bewegung

$$X_t = x \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right), \qquad t \geq 0, \tag{5.2}$$

mit Drift $\mu > 0$, Volatilität $\sigma > 0$ und Startwert $x > 0$ festgelegt ist. Die Variablen r, μ und σ seien im weiteren wieder als bekannt vorausgesetzt.

Da wir nicht vom Prinzip der Arbitragefreiheit ausgehen, müssen die Investoren in ihrer Annahme über die Drift μ der geometrischen Brownschen Bewegung nicht notwendig übereinstimmen. Wir können daher im folgenden auch $\mu \neq r$ annehmen.

5.2 Die Russische Put-Option

5.2.1 Die Problemstellung

Bei der russischen Put-Option erwirbt der Käufer der Option das Recht, sich zu einem beliebigen Zeitpunkt entweder den maximalen Preis, zu dem die Aktie bis zu diesem Zeitpunkt gehandelt wurde, oder aber einen vorher festgelegten Mindestbetrag $s \geq 0$ auszahlen zu lassen. Der Auszahlungsprozeß $(S_t)_{t \geq 0}$ der Option wird dann durch

$$S_t = \max\left\{s, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u\right\}, \qquad t \geq 0 \tag{5.3}$$

gegeben. Der Käufer des Kontraktes erhält daher zum von ihm wählbaren Ausübungszeitpunkt τ den Wert S_τ, wobei durch τ natürlich wieder eine Stopzeit bezeichnet wird. Der Käufer wird also nach einer Strategie bzw. Stopzeit τ^* suchen, die den Wert $Ee^{-r\tau}S_\tau$ maximiert. Gesucht ist also wie bereits in den vorangegangenen Beispielen

$$V^*(x, s) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau, \tag{5.4}$$

sowie die optimale Stopzeit τ^*, die dieses Stopproblem löst. Wir nehmen im weiteren $\mu < r$ an, da sich sonst die triviale Lösung $V^*(x, s) = \infty$ ergeben würde.

An dieser Stelle sei auf die Arbeit von Duffie und Harrison ([Duf]) verwiesen. Sie analysierten die Russischen Put-Option unter Gültigkeit des No-Arbitrage-Prinzips, also für $\mu = r$, und der zusätzlichen Annahme, daß in stetiger Zeit auf die Aktie Dividenden in Höhe von $\delta \geq 0$ ausgeschüttet werden. Durch die Konstruktion von Handelsarbitrage haben sie einen fairen Preis für die Option hergeleitet. Speziell für $\delta = 0$ ergibt sich ein unendlicher fairer Preis für die Put-Option, daß heißt, wird die Option zu einem endlichen Preis verkauft, so ergeben sich Arbitragemöglichkeiten.

5.2.2 Eine heuristische Herleitung

Wir „raten“ zunächst anhand einiger intuitiver Überlegungen eine Funktion

$$V(x, s) = V(x, s, r, \mu, \sigma^2)$$

und weisen dann im nächsten Abschnitt nach, daß sie mit der gesuchten Funktion V^* übereinstimmt.

Bei einem niedrigen Startwert des Finanzgutes ist es plausibel, sofort zu stoppen und wenigstens den Betrag s zu realisieren, da es eher unwahrscheinlich ist, daß der Wert der Aktie den Wert s übersteigt. Diese Überlegung bedeutet $V(x, s) = s$, falls $x \leq g(s)$ gilt, wobei $g(s) < s$ eine Funktion ist, die eine von s abhängige sogenannte *freie Grenze* bezeichnet. Wir nehmen an, daß diese Funktion stetig differenzierbar ist. Bei einem höheren Startwert des Finanzgutes $x > g(s)$, d.h. ist der Prozeß S_t u.U. kurz davor, einen Anstieg zu verzeichnen, so ist es naheliegend, mit dem Ausüben der Option noch zu warten. Wir erhalten also eine Fortsetzungsregion

$$\mathcal{C} = \{(x, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : g(s) < x \leq s\}$$

und eine Stopregion

$$\mathcal{E} = \{(x, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x \leq g(s)\}.$$

Anschaulich bedeuten diese folgendes: Befindet sich der (Vektor-) Prozeß (X_t, S_t) (beachte $X_t \leq S_t$) in der Fortsetzungsregion, so wartet man mit dem Ausüben der Option bis zu dem Zeitpunkt, zu dem er diese verläßt. Dabei betrachten wir den Prozeß (X_t, S_t), um die zeitliche Entwicklung sowohl des Aktienkurses als auch des Auszahlungprozesses zu erfassen. Die Option ist somit auszuüben, sobald der Prozeß (X_t, S_t) in die Stopregion eintritt, was gleichbedeutend mit $X_t \leq g(S_t)$ ist. In der Fortsetzungsregion sollte die gesuchte Funktion die Eigenschaft besitzen, daß der Prozeß $e^{-rt}V(X_t, S_t)$ ein Martingal bildet, was durch die Forderung

$$de^{-rt}V(X_t, S_t) = 0$$

sichergestellt wird. In der sogenannten *festen Grenze* s überlegen wir uns, daß V die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial s} V(x, s)\Big|_{x=s} = 0 \tag{5.5}$$

erfüllen sollte. Diese Bedingung ist für die Martingaleigenschaft von $e^{-rt}V(X_t, S_t)$ in der Fortsetzungsregion notwendig und ergibt sich aus der Darstellung

$$S_t = \max\left\{s, \sup_{0\le u\le t} X_u\right\} = \sup_{0\le u\le t} X_u \tag{5.6}$$

für $s \le x$. Die Funktion $V^*(x,s) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau$ ist für $s \le x$ also unabhängig von s und somit ist ersichtlich, daß V die Gleichung (5.5) erfüllen muß.
Für $X_t = S_t$ gilt also $\frac{\partial}{\partial s}V(X_t, S_t) = 0$. Andererseits gilt für $X_t < S_t$ natürlich $dS_t = 0$. Wir gehen weiter davon aus, daß wir auf die Funktion V die verallgemeinerte Itô-Formel 2.3 bzw. Korollar 2.6 anwenden dürfen, so daß wir aus dem soeben Erwähnten die $f.s.$ Identität

$$\begin{aligned}
&e^{-rt}V(X_t, S_t)\\
&\quad= V(X_0, S_0) + \int_{[0,t]} \sigma X_s e^{-rs}\frac{\partial}{\partial x}V(X_s, S_s)\,dW_s - \int_{[0,t]} re^{-rs}V(X_s, S_s)\,\lambda\!\!\lambda(ds)\\
&\qquad+ \int_{[0,t]} e^{-rs}\left(\mu X_s\frac{\partial}{\partial x}V(X_s, S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2X_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(X_s, S_s)\right)\lambda\!\!\lambda(ds)\\
&\qquad+ \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial s}e^{-rs}V(X_s, S_s)\,dS_s \qquad\qquad (5.7)\\
&\quad= V(X_0, S_0) + \int_{[0,t]} \sigma X_s e^{-rs}\frac{\partial}{\partial x}V(X_s, S_s)\,dW_s\\
&\qquad+ \int_{[0,t]} e^{-rs}\left(-rV(X_s, S_s) + \mu X_s\frac{\partial}{\partial x}V(X_s, S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2X_s^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(X_s, S_s)\right)\lambda\!\!\lambda(ds)
\end{aligned}$$

erhalten. Das Integral $\int_{[0,t]} \sigma X_s e^{-rs}\frac{\partial}{\partial x}V(X_s, S_s)\,dW_s$ bildet ein Martingal. Damit der gesamte Prozeß ein Martingal bildet, muß V also die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-rV + \mu x\frac{\partial}{\partial x}V + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}V = 0 \tag{5.8}$$

im Fortsetzungsbereich erfüllen. Diese Gleichung wird auch als „*Bellman-Differentialgleichung*“ bezeichnet. Die Lösungen dieser Differentialgleichung besitzen die Gestalt

$$V(x) = A(s)x^{\gamma_0} + B(s)x^{\gamma_1}. \tag{5.9}$$

Dabei bilden γ_0 und γ_1 die Lösungen der Gleichung

$$-r + \mu\gamma\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0, \tag{5.10}$$

die auch *Indexgleichung* genannt wird. $A(s)$ bzw. $B(s)$ sind zwei von s abhängige, noch zu bestimmende Konstanten. Eine exakte Herleitung dieser Lösung findet sich im Anhang.
An dieser Stelle greifen wir nun auf das sogenannte *Principle of Smooth Fit* zurück. Erstmalig wurde dieses Prinzip von A. N. Kolmogorov in den 50er Jahren angewendet und unabhängig davon 1961 von H. Chernoff ([Che]) entdeckt. Er analysierte Sequentialtests für den Erwartungswert von Normalverteilungen, wobei er eine Verbindung zu Differentialgleichungen mit freien Grenzen herstellte.
Das Principle of Smooth Fit ist rein heuristischer Natur und besagt in diesem Zusammenhang, daß die Funktion V in der freien Grenze $g(s)$ möglichst „glatt“ sein sollte, was in den Gleichungen

$$V(g(s), s) \quad = \quad s \tag{5.11}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, s)\Big|_{x=g(s)} \quad = \quad 0 \tag{5.12}$$

zum Ausdruck kommt. Anhand dieser beiden Gleichungen können wir nun die genaue Gestalt der Funktion V herleiten. Dazu setzen wir die obige Darstellung (5.9) in die Gleichungen (5.11) und (5.12) ein und erhalten

$$A(s)g(s)^{\gamma_0} + B(s)g(s)^{\gamma_1} \quad = \quad s$$

bzw.

$$\gamma_0 A(s)g(s)^{\gamma_0 - 1} + \gamma_1 B(s)g(s)^{\gamma_1 - 1} \quad = \quad 0.$$

Diesem Gleichungssystem entnehmen wir durch einige elementare Umformungen die Werte A und B. Es ist

$$A(s) = -\frac{s\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} g(s)^{-\gamma_0} \quad \text{und} \quad B(s) = \frac{s\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_1} g(s)^{-\gamma_1},$$

woraus sich durch Einsetzen in (5.9) ferner

$$V(x, s) = \frac{s}{\gamma_0 - \gamma_1} \left(\gamma_0 \left(\frac{x}{g(s)} \right)^{\gamma_1} - \gamma_1 \left(\frac{x}{g(s)} \right)^{\gamma_0} \right)$$

im Fortsetzungsbereich ergibt. Mit Hilfe dieser Gestalt bestimmen wir nun als letztes die freie Grenze g. Unter Hinweis auf Gleichung (5.5) gilt offenbar

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}V(x,s)\Big|_{x=s} &= \frac{1}{\gamma_0-\gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_1}-\gamma_1\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_0}\right)\\ &+\frac{s}{\gamma_0-\gamma_1}\frac{g'(s)}{g(s)}\left(-\gamma_1\gamma_0\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_1}+\gamma_0\gamma_1\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_0}\right)\\ &\overset{!}{=} 0,\end{aligned}$$

woraus folgt, daß g der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$g'(s) = \frac{\frac{1}{\gamma_1}\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_0}}{\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_1+1}-\left(\frac{s}{g(s)}\right)^{\gamma_0+1}} \tag{5.13}$$

genügen muß. Eine einfache Lösung dieser Differentialgleichung stellt die Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(s) := as$$

dar, wobei $a\in\mathbb{R}$ eine noch zu bestimmende Konstante ist. Der Beweis im folgenden Abschnitt wird zeigen, daß die Funktion g bereits die gesuchte freie Grenze ist. Daher verzichten wir an dieser Stelle auf eine genaue Herleitung dieser Lösung. Zur Berechnung von a setzen wir $g(s)=as$ in die Differentialgleichung (5.13) ein und erhalten

$$a = \frac{\frac{1}{\gamma_1}a^{-\gamma_1}-\frac{1}{\gamma_0}a^{-\gamma_0}}{a^{-\gamma_1-1}-a^{-\gamma_0-1}}.$$

Einige einfache Umformungen liefern schließlich

$$a = \left(\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_1(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_1-\gamma_0}},$$

so daß wir nun die exakte Gestalt von V angeben können. Es ist

$$V(x,s) = \begin{cases} s, & \text{falls} \quad 0<x\le as,\\ \frac{s}{\gamma_0-\gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_1}-\gamma_1\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_0}\right), & \text{falls} \quad as<x\le s\\ \frac{x}{\gamma_0-\gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_1}-\gamma_1\left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_0}\right), & \text{falls} \quad s<x.\end{cases}$$

Dabei resultiert die Gestalt von V für $s<x$ aus Gleichung (5.6), die die Identität $V(x,s)=V(x,x)$ für $s\le x$ liefert.

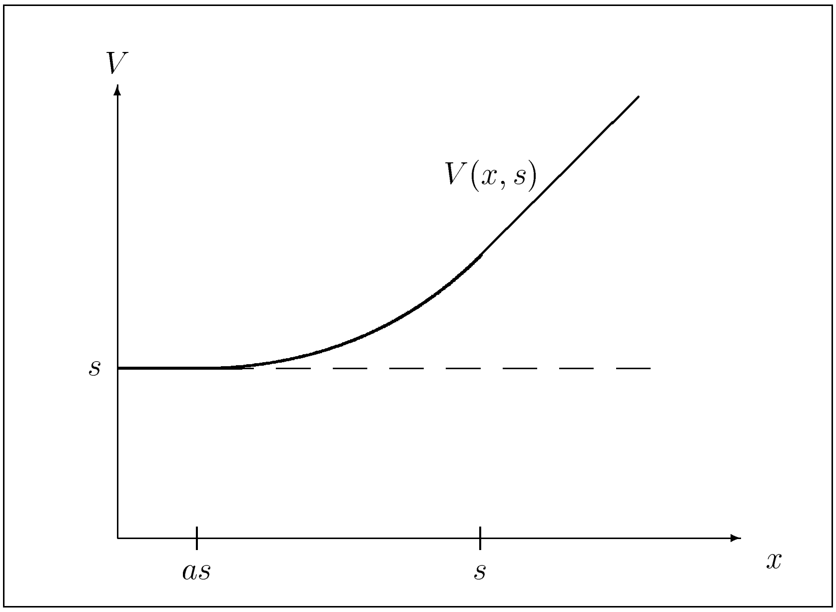

Abbildung 5.1: Lösung der Russischen Put-Option

5.2.3 Beweis der Vermutung

Wir beweisen nun, daß die gerade heuristisch hergeleitete Funktion wirklich mit der gesuchten Funktion V^* übereinstimmt und überzeugen uns, daß die Stopzeit $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t = aS_t\}$ einen optimalen Ausübungszeitpunkt der Option bildet.
Für den endgültigen Nachweis ist allerdings einige Vorarbeit zu leisten. Wir stellen daher die benötigten Aussagen in einigen Lemmata dem eigentlichen Beweis voran.

5.1 Lemma. *Es seien γ_0 und γ_1 die Lösungen der Indexgleichung $-r + \mu\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0$, d.h.*

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu + \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right) \quad \textit{und} \\ \gamma_1 &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu - \sqrt{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Weiter sei $a = \left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_1 - \gamma_0}}$. Dann gilt $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ und ferner $0 < a < 1$.

Beweis. Die erste Behauptung erhalten wir aus den beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu-\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu\right)^2+2\sigma^2 r}\right)\\ &< \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu-\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu\right)^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu+\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu\right)^2+2\sigma^2 r}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu+\sqrt{\frac{\sigma^4}{4}-\sigma^2\mu+\mu^2+2\sigma^2 r}\right)\\ &\overset{(*)}{>} \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu+\sqrt{\frac{\sigma^4}{4}+\sigma^2\mu+\mu^2}\right)\\ &= 1,\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ die Ungleichung $2\sigma^2\mu < 2\sigma^2 r$ eingegangen ist. Unter Berücksichtigung von $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ und daher $(\gamma_1-1)\gamma_1^{-1} > 1$ und $\gamma_0(\gamma_0-1)^{-1} > 1$ sowie $\gamma_1 - \gamma_0 < 0$ ergibt sich offenbar

$$0 < \left(\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_1(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_1-\gamma_0}} < 1$$

und folglich die zweite Behauptung des Lemmas. □

In folgendem Lemma sind nun einige grundlegende Eigenschaften der Funktion V zusammengestellt.

5.2 Lemma. *Die Funktion* $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$*, definiert durch*

$$V(x,s) = \begin{cases} s, & \textit{falls} \quad 0 < x \le as, \\ \frac{s}{\gamma_0-\gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_0}\right), & \textit{falls} \quad as < x \le s \\ \frac{x}{\gamma_0-\gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_0}\right), & \textit{falls} \quad s < x. \end{cases}$$

ist stetig partiell differenzierbar. Ferner existiert $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f$ *für* $x \neq as$ *und ist stetig. Es gilt für* $as \leq x \leq s$ *die Differentialgleichung*

$$rV(x,s) \;=\; x\mu \frac{\partial}{\partial x} V(x,s) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x,s) \tag{5.14}$$

sowie

$$V(x,s) \;\geq\; s \quad \text{für alle } 0 \leq x \leq s, \tag{5.15}$$

$$V(as,s) \;=\; s, \tag{5.16}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} V(x,s)\right|_{x=as} \;=\; 0, \tag{5.17}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} V(x,s)\right|_{x=s} \;=\; 0. \tag{5.18}$$

Beweis. Es ist nur noch die Ungleichung (5.15) nachzuweisen. Für die anderen Gleichungen verweisen wir auf den vorherigen Abschnitt, in dem die Funktion anhand dieser Gleichungen hergeleitet wurde. Diese Eigenschaften können jedoch auch leicht elementar nachgerechnet werden. Für den Beweis der Gleichung (5.15) betrachten wir die Ableitung von V für $x \in (as, s)$ bei festem s:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} V(x,s) &= \frac{s\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} x^{-1} \left(\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_0} \right) \\
&= \underbrace{-\frac{s\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} x^{-1} \left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_1}}_{>0} \underbrace{\left(\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_0 - \gamma_1} - 1 \right)}_{>0} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ und $\gamma_0 - \gamma_1 > 0$ zu beachten. Die Funktion V ist somit in x monoton wachsend auf (as, s) und daher ist

$$V(x,s) \geq V(as,s) = s,$$

was den Beweis abschließt. □

Die folgenden beiden Lemmata beleuchten die optimale Stopzeit τ^* und den Prozeß $e^{-rt} V(X_t, S_t)$ etwas genauer.

5.3 Lemma. *Für die Stopzeit* $\tau^* := \inf\{t \geq 0 : X_t = aS_t\}$ *gilt*

$$P(\tau^* < \infty) = 1.$$

Beweis. Es sei $T > 0$ fest vorgegeben. Aus der Definition von τ^* ergibt sich

$$\begin{aligned}
&P(\tau^* > T) \\
&= P(X_t > aS_t \ \forall\ 0 \le t \le T) \\
&= P(\log X_t > \log a + \log S_t \ \forall\ 0 \le t \le T) \\
&= P\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t > \log a + \sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s, \ \forall\ 0 \le s \le t \le T\right) \\
&= P\left(\sigma(W_t - W_s) > \log a - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-s) \ \forall\ 0 \le s \le t \le T\right) \\
&\le P\left(W_t - W_s > \log a - \left|\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right|(t-s) \ \forall\ 0 \le s \le t \le T\right) \\
&= P\left(W_s - W_t < \left|\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right|(t-s) - \log a \ \forall\ 0 \le s \le t \le T\right).
\end{aligned}$$

Abkürzend setzen wir $c := \left|\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right|(t-s) - \log a$. Sei $T = n\delta$ mit einem $\delta > 0$, dann liefert diese Abschätzung offenkundig

$$\begin{aligned}
P(\tau^* > T) &\le P\left(W_s - W_t < c \ \forall\ 0 \le s \le t \le T\right) \\
&\le P\left(W_\delta - W_0 < c, \ldots, W_{n\delta} - W_{(n-1)\delta} < c\right).
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse gilt daher

$$P(\tau^* > T) \le \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \int_{-\infty}^{c} e^{-\frac{x^2}{2\delta}}\, dx\right)^n \to 0$$

□

5.4 Lemma. *Der Prozeß* $Z_t := e^{-r(\tau^* \wedge t)} V(X_{\tau^* \wedge t}, S_{\tau^* \wedge t})$, $0 \le t < \infty$, *bildet ein gleichgradig integrierbares Martingal.*

Beweis. Die Martingaleigenschaft folgt aus der Differentialgleichung (5.14) und der Rechnung (5.7). Für die gleichgradige Integriebarkeit ist es nach Korollar 50.3 in [Als] hinreichend zu zeigen, daß

$$E \sup_{0 \le t < \infty} Z_t < \infty$$

gilt. Aus der Definition der Funktion V erhalten wir die Abschätzung

$$Z_t = e^{-r(\tau^* \wedge t)} V(X_{\tau^* \wedge t}, S_{\tau^* \wedge t}) \le e^{-r(\tau^* \wedge t)} V(S_{\tau^* \wedge t}, S_{\tau^* \wedge t}) = c e^{-r(\tau^* \wedge t)} S_{\tau^* \wedge t}$$

mit $c = \frac{1}{\gamma_0 - \gamma_1}\left(\gamma_0 \left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_0}\right)$. Daher ist es klar, daß es bereits genügt, die Ungleichung

$$E \sup_{0 \le t < \infty} e^{-rt} S_t = \int_0^\infty P\left(\sup_{0 \le t < \infty} e^{-rt} S_t > y\right) dy < \infty \tag{5.19}$$

nachzuweisen. Weiter gilt für $y > \max\{x, s\}$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \le t < \infty} e^{-rt} S_t > y \\
&\qquad \Longleftrightarrow \sup_{0 \le t < \infty} e^{-rt} \sup_{0 \le s \le t} X_s > y \\
&\qquad \Longleftrightarrow \sup_{0 \le t < \infty} e^{-rt} \sup_{0 \le s \le t} x \exp\left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s\right) > y \\
&\qquad \Longleftrightarrow \sup_{0 \le t < \infty} \sup_{0 \le s \le t} \left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s + \log x - rt\right) > \log y \\
&\qquad \Longleftrightarrow \sup_{0 \le t < \infty} \sup_{0 \le s \le t} \left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s - \log \frac{y}{x} - rt\right) > 0,
\end{aligned}$$

die

$$\begin{aligned}
&P\left(\sup_{0 \le t < \infty} e^{-rt} S_t > y\right) \\
&\qquad = P\left(\sup_{0 \le t < \infty} \sup_{0 \le s \le t} \left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s - \log \frac{y}{x} - rt\right) > 0\right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

liefert. Nach einer bekannten Ungleichung von Doob (Satz 1.8, S. 55 in [Rev]) gilt für alle $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ die Abschätzung

$$P(W_t \le \alpha t + \beta \quad \forall \quad 0 \le t < \infty) \ge 1 - e^{-2\alpha\beta}. \tag{5.21}$$

Wir wählen speziell die Werte

$$\alpha = \sigma^{-1}\left(r - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad \beta = \sigma^{-1} \log \frac{y}{x}. \tag{5.22}$$

Diese Wahl liefert uns für $W_t \le \alpha t + \beta$

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \le s \le t} \left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s\right) &\le \sup_{0 \le s \le t} \left(\sigma(\alpha s + \beta) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) s\right) \\
&= \sup_{0 \le s \le t} \left(\log \frac{y}{x} + rs\right) \\
&= \log \frac{y}{x} + rt.
\end{aligned}$$

Folglich gilt für alle $t \geq 0$ die Implikation

$$W_t \leq \alpha t + \beta \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{0\leq s\leq t}\left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s\right) - \log\frac{y}{x} - rt \leq 0,$$

die letztlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} &P\left(\sup_{0\leq t<\infty}(W_t - \alpha t - \beta) > 0\right) \\ &\qquad \geq \; P\left(\sup_{0\leq t<\infty}\sup_{0\leq s\leq t}\left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s - \log\frac{y}{x} - rt\right) > 0\right) \end{aligned}$$

garantiert. Für $y > \max\{x, s\}$ erhalten wir daher unter Verwendung von (5.20), (5.21) und (5.22) in Verbindung mit der Identität $\alpha\beta = \left(\frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{\sigma^2}\right)\log\frac{y}{x}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} &P\left(\sup_{0\leq t<\infty} e^{-rt}S_t > y\right) \\ &\qquad = P\left(\sup_{0\leq t<\infty}\sup_{0\leq s\leq t}\left(\sigma W_s + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)s - \log\frac{y}{x} - rt\right) > 0\right) \\ &\qquad \leq P\left(\sup_{0\leq t<\infty}(W_t - \alpha t - \beta) > 0\right) \\ &\qquad = 1 - P(W_t \leq \alpha t + \beta \quad \forall \quad 0 \leq t < \infty) \\ &\qquad \leq e^{-2\alpha\beta} \\ &\qquad = \exp\left(-\left(1 + \frac{2(r-\mu)}{\sigma^2}\right)\log\frac{y}{x}\right) \\ &\qquad = \left(\frac{y}{x}\right)^{-\left(1+\frac{2(r-\mu)}{\sigma^2}\right)}. \end{aligned}$$

Die Existenz des Integrals

$$\int_s^\infty \left(\frac{y}{x}\right)^{-\left(1+\frac{2(r-\mu)}{\sigma^2}\right)} dy < \infty$$

für $r > \mu$ und $s > 0$ liefert nun zusammen mit (5.19) die gewünschte Abschätzung $E\sup_{0\leq t<\infty} e^{-rt}S_t < \infty$, die den Beweis vervollständigt. □

Wir haben nun sämtliche Bestandteile beisammen, um den Beweis unserer Vermutung zu erbringen. Der folgende Satz bestätigt unsere intuitiven Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt:

5.5 Satz. *Es seien* $(X_t)_{t\geq 0}$ *und* $(S_t)_{t\geq 0}$ *definiert gemäß (5.1) bzw. (5.3). Dann existiert für das Stopproblem* $V^*(x,s) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau$ *eine Lösung* τ^**, falls* $\mu < r$ *ist. Die optimale Stopzeit wird durch*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t = aS_t\}$$

gegeben, wobei $a \in (0,1)$ *durch*

$$a = \left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_1 - \gamma_0}}$$

definiert ist. Die Werte $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ *bilden dabei die Lösungen der Indexgleichung* $-r + \mu\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0$. *Weiter gilt* $V^*(x,s) = V(x,s)$ *mit*

$$V(x,s) = \begin{cases} s, & \text{falls} \quad 0 < x \leq as, \\ \frac{s}{\gamma_0 - \gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{x}{as}\right)^{\gamma_0}\right), & \text{falls} \quad as < x \leq s \\ \frac{x}{\gamma_0 - \gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{1}{a}\right)^{\gamma_0}\right), & \text{falls} \quad s < x. \end{cases}$$

Beweis. Wir zeigen, daß der Prozeß $\left(e^{-rt}V(X_t, S_t)\right)_{t\geq 0}$ ein Supermartingal bildet, indem wir auf diesen Prozeß die verallgemeinerte Itô-Formel anwenden. Wir erhalten analog zur Rechnung (5.7)

$$\begin{aligned} &e^{-rt}V(X_t, S_t) \\ &= V(X_0, S_0) + \int_{[0,t]} \sigma X_s e^{-rs} \frac{\partial}{\partial x} V(X_s, S_s)\, dW_s \\ &\quad + \int_{[0,t]} e^{-rs}\left(-rV(X_s, S_s) + \mu X_s \frac{\partial}{\partial x} V(X_s, S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(X_s, S_s)\right) \lambda\!\!\lambda(ds) \end{aligned}$$

$f.s.$ Das erste Integral bildet ein Martingal, da wir bzgl. einer Standard-Brownschen Bewegung integrieren. Wir definieren

$$Y_t := e^{-rt}\left(-rV(X_t, S_s) + \mu X_t \frac{\partial}{\partial x} V(X_t, S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(X_t, S_s)\right).$$

Im Bereich $0 < X_t \leq as$ gilt für Y_t

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{-rt}\left(-rV(X_t, S_s) + \mu X_t \frac{\partial}{\partial x} V(X_t, S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(X_t, S_s)\right) \\ &= e^{-rt}\left(-rV(X_t, S_t)\right) \\ &= e^{-rt}(-rs) \\ &< 0, \end{aligned}$$

während für $as < X_t < s$ nach (5.14)

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{-rt}\left(-rV(X_t,S_s) + \mu X_t \frac{\partial}{\partial x} V(X_t,S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(X_t,S_s)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Der Integrand des zweiten Integrals ist somit stets negativ. Dies liefert uns wie schon in den beiden vorangegangenen Kapiteln, daß $(e^{-rt}V(X_t,S_t))_{t\geq 0}$ ein Supermartingal bildet. Wegen der Stetigkeit der Funktion $(x,s) \mapsto V(x,s)$ ist dieses Supermartingal rechtseitig stetig und aus Gleichung (5.15) erhalten wir somit für eine beliebige Stopzeit τ unter Verwendung von Korollar 1.9 die Abschätzung

$$\begin{aligned} Ee^{-r\tau}S_\tau &\leq Ee^{-r\tau}V(X_\tau,S_\tau) \\ &= Ee^0V(X_0,S_0) \\ &= V(x,s). \end{aligned}$$

Gehen wir zum Supremum über, so liefert dies die gewünschte Ungleichung

$$V^*(x,s) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau \leq V(x,s).$$

Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir die Stopzeit $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t = aS_t\}$. Der gestoppte Prozeß $\left(e^{-r(t\wedge\tau^*)}V(X_{t\wedge\tau^*})\right)_{t\geq 0}$ bildet nach Lemma (5.4) ein gleichgradig integrierbares Martingal. Daher folgt aus dem Optional Sampling Theorem

$$\begin{aligned} V^*(x) &= \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau \\ &\geq Ee^{-r\tau^*}S_{\tau^*} \\ &\overset{(*)}{=} Ee^{-r\tau^*}V(aS_{\tau^*},S_{\tau^*}) \\ &\overset{(**)}{=} Ee^{-r\tau^*}V(X_{\tau^*},S_{\tau^*}) \\ &= V(x,s), \end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ von $V(as,s) = s$ Gebrauch gemacht haben und in $(**)$ die Identität $X_{\tau^*} = aS_{\tau^*}$ benutzt haben. □

5.6 Satz. *In der Situation von Satz 5.5 sei $\mu \geq r$. Dann erhalten wir mit $\tau^* = \infty$ eine optimale Stopzeit, und die erwartete Auszahlung ergibt sich zu $V^* = \infty$.*

Beweis. Diese Aussage ergibt sich aus Satz 1.2. □

5.3 Das Problem von Guo und Shepp

5.3.1 Die Problemstellung

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit einem Stopproblem, daß gewisse Ähnlichkeiten zur Russischen Option aufweist. Wir führen eine Option ein, bei der der Käufer der Option das Recht erwirbt, sich zu einem beliebigen Zeitpunkt entweder den aktuellen Preis, zu dem das Finanzgut zu diesem Zeitpunkt gehandelt wird, oder aber einen vorher festgelegten Mindestbetrag $l \geq 0$ auszahlen zu lassen. Diese Option unterscheidet sich also von der Russischen Put-Option darin, daß der Käufer nicht zwischen dem Supremum des Preisprozesses bis zum Zeitpunkt t und dem festen Betrag l wählen kann, sondern zwischen dem aktuellen Wert des Finanzgutes und l. Die vorliegende Problemstellung resultiert aus der Betrachtung eines risikoaversen Investors, der sich gegen fallende Kurse absichern will und wenigstens einen vorher garantierten Preis erhalten möchte. Der Auszahlungsprozeß $(S_t)_{t\geq 0}$ der Option wird durch

$$S_t = \max\{l, X_t\}, \qquad t \geq 0 \tag{5.23}$$

gegeben. Der Käufer der Option wird wiederum nach einer Strategie bzw. Stopzeit τ^* suchen, die den Wert $Ee^{-r\tau}S_\tau$ maximiert. Gegeben ist also das Stopproblem

$$V^*(x, l) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau, \tag{5.24}$$

wobei natürlich das Supremum wieder über sämtliche Stopzeiten gebildet wird. Da wir im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt nicht den Prozeß $\sup_{0\leq s\leq t} X_t$ betrachten, spielt hier die zweite Komponente von $V(x, l)$ keine bedeutende Rolle mehr, so daß wir im folgenden V als Funktion nur einer Veränderlichen auffassen und l als festen Wert betrachten.

5.3.2 Eine heuristische Herleitung

Wir gehen bei dieser Option analog zur Russischen Put-Option vor, d.h. wir leiten wiederum mittels heuristischer Argumente eine Funktion

$$V(x) = V(x, l, \mu, \sigma^2, r)$$

und eine Stopzeit τ^* her, die wir dann als optimale Lösung für das vorliegende Stopproblem identifizieren. Wir setzen auch hier $\mu < r$ voraus.

Bei einem niedrigen Startwert der Aktie ist es vermutlich sinnvoll, sofort zu stoppen und wenigstens den Betrag l zu realisieren, d.h. $V(x) = l$, falls $x \leq g(l)$ (vgl. Abbildung 5.2 auf S. 78). Bei einem hohen Startwert x würde man ebenfalls sofort stoppen, da der Wert l eine eher untergeordnete Rolle spielt und der Prozeß $e^{-rt}S_t$ ein Supermartingal bildet ($r > \mu$). Man würde sich also im Mittel verschlechtern, und es erscheint daher ratsam, direkt den Wert x zu realisieren. Dies bedeutet $V(x) = x$, falls $x \geq h(l)$. Wir nehmen aufgrund der Ergebnisse im vorherigen Abschnitt direkt an, daß die Funktionen g und h linear sind. Es seien also $g(l) = al$ und $h(l) = bl$ mit $0 < a < 1 < b < \infty$. Wir erhalten somit eine Fortsetzungsregion

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^+ : al < x < bl\}$$

und eine Stopregion

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^+ : x \leq al \text{ oder } x \geq bl\}.$$

In der Fortsetzungsregion sollte der Prozeß $e^{-rt}V(X_t)$ wiederum ein Martingal bilden, d.h. es muß

$$de^{-rt}V(X_t) = 0.$$

gelten. Für unsere heuristische Herleitung gehen wir weiter davon aus, daß wir auf die Funktion V die verallgemeinerte Itô-Formel 2.3 bzw. Korollar 2.6 anwenden dürfen, insbesondere sei V also in den Grenzen al und bl stetig differenzierbar. Wir erhalten

$$\begin{aligned} e^{-rt}V(X_t) &= V(X_0) + \int_{[0,t]} \sigma e^{-rs} X_s V'(X_s)\, dW_s - \int_{[0,t]} r e^{-rs} V(X_s)\, \lambda\!\!\lambda(ds) \\ &\quad + \int_{[0,t]} \left(\mu e^{-rs} X_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-rs} X_s^2 V''(X_s) \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \\ &= V(x) + \int_{[0,t]} \sigma e^{-rs} X_s V'(X_s)\, dW_s \\ &\quad + \int_{[0,t]} e^{-rs} \left(-rV(X_s) + \mu X_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 V''(X_s) \right) \lambda\!\!\lambda(ds) \end{aligned}$$

$f.s.$ Da das Integral $\int_{[0,t]} e^{-rs} X_s V'(X_s)\, dW_s$ ein Martingal bildet, muß V die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-rV + \mu x V' + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V'' = 0$$

im Fortsetzungsbereich erfüllen, damit auch $e^{-rt} V(X_t)$ ein Martingal bildet. Die Lösungen dieser Differentialgleichung haben nach Satz B.1 die Gestalt

$$V(x) = Ax^{\gamma_0} + Bx^{\gamma_1}, \tag{5.25}$$

wobei γ_0 und γ_1 die Lösungen der Indexgleichung $-r + \mu\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0$ bilden.

Nach dem Principle of Smooth Fit sind dabei A und B so zu wählen, daß nachfolgende Gleichungen in den freien Grenzen al und bl erfüllt sind:

$$\begin{aligned} V(al) &= l, & (5.26)\\ V(bl) &= bl, & (5.27)\\ V'(al) &= 0, & (5.28)\\ V'(bl) &= 1. & (5.29) \end{aligned}$$

Anhand dieser Gleichungen und der Gestalt (5.25) von V leiten wir nun die Funktion V im Intervall $[al, bl]$ her.

Einsetzen von (5.25) in die Gleichungen (5.26) und (5.28) liefert

$$A(al)^{\gamma_0} + B(al)^{\gamma_1} = l$$

und

$$\gamma_0 A(al)^{\gamma_0 - 1} + \gamma_1 B(al)^{\gamma_1 - 1} = 0.$$

Hieraus lassen sich durch einige einfache Umformungen die Werte von A und B bestimmen. Es ist

$$A = -\frac{l\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1}(al)^{-\gamma_0} \quad \text{und} \quad B = \frac{l\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_1}(al)^{-\gamma_1},$$

woraus sich eine genauere Gestalt von V ergibt. Unter Verwendung von (5.25) erhalten wir

$$V(x) = \frac{l}{\gamma_0 - \gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0}\right). \tag{5.30}$$

Als nächstes bestimmen wir aus (5.27) und (5.29) die freien Grenzen al und bl: Setzen wir (5.30) in diese Gleichungen ein, so liefert dies

$$\frac{1}{\gamma_0-\gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_1}-\gamma_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_0}\right) = b$$

und

$$\frac{\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0-\gamma_1}b^{-1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_1}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_0}\right) = 1.$$

Diese beiden Gleichungen formen wir zu

$$\gamma_0-\gamma_1\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_0-\gamma_1} = b\left(\tfrac{b}{a}\right)^{-\gamma_1}(\gamma_0-\gamma_1) \tag{5.31}$$

und

$$\gamma_0\gamma_1\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_0-\gamma_1}\right) = b\left(\tfrac{b}{a}\right)^{-\gamma_1}(\gamma_0-\gamma_1)$$

um. Gleichsetzen und substituieren von $\xi := b/a$ ergibt weiter

$$\gamma_0-\gamma_1\xi^{\gamma_0-\gamma_1}=\gamma_0\gamma_1\left(1-\xi^{\gamma_0-\gamma_1}\right).$$

Lösen wir diesen Ausdruck nach ξ auf, so ergibt sich

$$\xi=\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_1(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-\gamma_1}}.$$

Setzen wir ξ in (5.31) ein, so erhalten wir

$$\gamma_0-\gamma_1\left(\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_1(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-\gamma_1}}\right)^{\gamma_0-\gamma_1} = b\left(\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_1(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-\gamma_1}}\right)^{-\gamma_1}(\gamma_0-\gamma_1),$$

woraus wir durch einige elementare Umformungen schließlich

$$\begin{aligned} b &= (\gamma_0-\gamma_1)^{-1}\left(\gamma_0-\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_0-1}\right)\left(\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_1(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{1}{\gamma_0-\gamma_1}}\right)^{\gamma_1} \\ &= \frac{\gamma_0}{\gamma_0-1}\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1-1)}{\gamma_1(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0-\gamma_1}} \end{aligned}$$

bekommen. Den Wert von b setzen wir nun in $\xi = b/a$ ein und erhalten den Wert von a. Es gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{b}{\xi} \\ &= \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}\right)^{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_0 - \gamma_1}} \\ &= \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}\right)^{-1}\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}\right)^{\frac{-1+\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_1}} \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}\left(\frac{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}\right)^{\frac{1-\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_1}}. \end{aligned}$$

Wir haben somit sämtliche Variablen bestimmt, so daß sich unter Berücksichtigung obiger Berechnungen die genaue Gestalt von V zu

$$V(x) = \begin{cases} l, & \text{falls} \quad 0 < x \le al, \\ \frac{l}{\gamma_0 - \gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0}\right), & \text{falls} \quad al < x < bl, \\ x, & \text{falls} \quad bl \le x \end{cases}$$

ergibt.

5.3.3 Beweis der Vermutung

Wir kommen nun zum expliziten Beweis, daß die obige Funktion mit der gesuchten Funktion $V^*(x) = \sup_\tau e^{-r\tau}S_\tau$ übereinstimmt und die Stopzeit $\tau^* = \inf\{t \ge 0 : X_t \notin (al, bl)\}$ den optimalen Ausübungszeitpunkt für die oben dargestellte Option bildet. Den Nachweis führen wir wieder in einer Reihe von Lemmata.

5.7 Lemma. *Es seien γ_0 und γ_1 die Lösungen der Indexgleichung $-r + \mu\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0$. Dann gilt $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ und $0 < a < 1 < b$.*

Beweis. Für die Ungleichung $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ verweisen wir auf Lemma (5.1). Unter Berücksichtigung von $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ und daher $0 < \gamma_1(\gamma_1 - \gamma_0)^{-1} < 1$, $0 < \gamma_1(\gamma_1 - 1)^{-1} < 1$ und $0 < \gamma_0^{-1}(\gamma_0 - 1) < 1$ erhalten wir

$$0 < \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0}\right)^{\frac{1-\gamma_0}{\gamma_0 - \gamma_1}} < 1$$

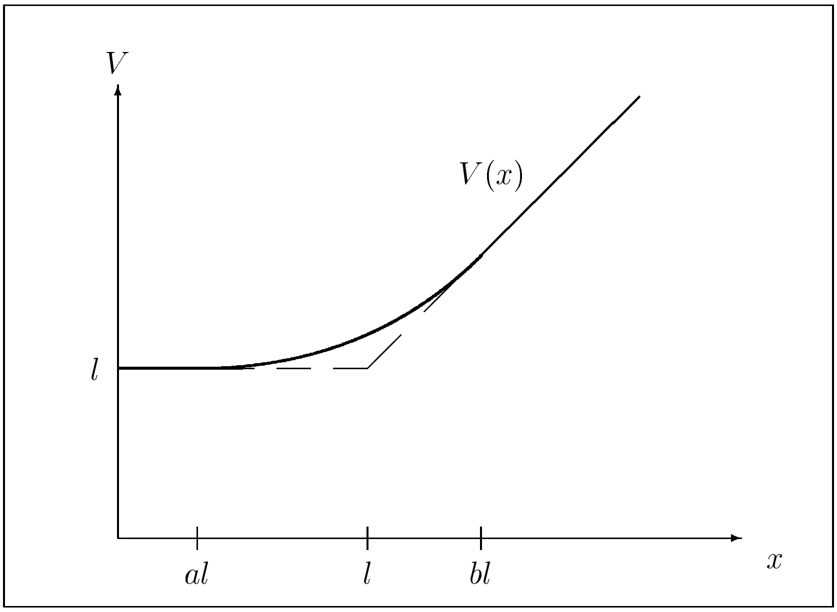

Abbildung 5.2: Erwartete Auszahlung

und

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0-\gamma_1}} &> \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0-\gamma_1}} \\
&> \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_0}} \\
&> \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

also die zweite Ungleichungskette. □

Wir stellen nun noch einmal einige grundlegende Eigenschaften der Funktion V heraus:

5.8 Lemma. *Die Funktion $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist in den Grenzen $x = al$ und $x = bl$ stetig differenzierbar und in $\mathbb{R}^+ \backslash \{al, bl\}$ zweimal stetig differenzierbar. Es gilt*

$$rV(x) = x\mu V'(x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 V''(x) \qquad \textit{für } x \in (al, bl), \tag{5.32}$$

$$V(x) \geq \max\{x, l\} \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}^+, \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned} V(al) &= l, & (5.34) \\ V(bl) &= bl, & (5.35) \\ V'(al) &= 0, & (5.36) \\ V'(bl) &= 1. & (5.37) \end{aligned}$$

Beweis. Es fehlt lediglich der Nachweis von Gleichung (5.33). Hierfür betrachten wir die Ableitung von V für $x \in (al, bl)$:

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{l\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} x^{-1} \left(\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0} \right) \\ &= \underbrace{-\frac{l\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} x^{-1} \left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1}}_{>0} \underbrace{\left(\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0-\gamma_1} - 1 \right)}_{>0} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Dabei ist auf $\gamma_1 < 0$ und auf $\gamma_0 - \gamma_1 > 0$ zu achten. Die Funktion V ist somit monoton wachsend auf (al, bl), und daher ist

$$V(x) \geq V(al) = l. \tag{5.38}$$

Es bleibt $V(x) \geq x$ oder anders ausgedrückt $V(x) - x \geq 0$ zu zeigen. Wir betrachten die Funktion nur im Intervall (al, bl), denn für $x \notin (al, bl)$ ist die Ungleichung trivial. Wir weisen nach, daß für die Ableitung $V'(x) \leq 1$ gilt. Dann ist $V(x) - x$ auf $[al, bl]$ monoton fallend, und wir erhalten

$$V(x) - x \geq V(bl) - bl = 0$$

für alle $x \in (al, bl)$. Um allerdings $V'(x) \leq 1$ zu zeigen, müssen wir auch noch auf die zweite Ableitung V'' zurückgreifen. Wir berechnen also zunächst die beiden Ableitungen. Diese ergeben sich zu

$$V'(x) = \frac{l\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} x^{-1} \left(\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0} \right)$$

und

$$V''(x) = \frac{l\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0 - \gamma_1} x^{-2} \left((\gamma_1 - 1) \left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1} - (\gamma_0 - 1) \left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0} \right).$$

Unter Verwendung von $\gamma_1 < 0 < 1 < \gamma_0$ und $\gamma_1 - 1 < 0$ sowie $\gamma_0 - 1 > 0$ erhalten wir im Intervall (al, bl) für die zweite Ableitung die Abschätzung

$$\begin{aligned} V''(x) &= \frac{l\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0-\gamma_1} x^{-2}\left((\gamma_1 - 1)\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1} - (\gamma_0 - 1)\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0}\right) \\ &= \underbrace{\frac{l\gamma_0\gamma_1}{\gamma_0-\gamma_1} x^{-2}(\gamma_1 - 1)\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1}}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_1 - 1}\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0-\gamma_1}\right)}_{>0} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Die Ableitung V' ist daher monoton wachsend auf dem Intervall (al, bl), und somit ist

$$V'(x) < V'(bl) = 1,$$

wodurch die gewünschte Monotonie sichergestellt wird. Daher gilt $V(x) - x \geq 0$, was offenbar in Verbindung mit (5.38) Ungleichung (5.33) bestätigt. □

5.9 Lemma. *Für die Stopzeit* $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (al, bl)\}$ *gilt*

$$P(\tau^* < \infty) = 1.$$

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Unabhängigkeit der Zuwächse einer Brownschen Bewegung. □

5.10 Lemma. *Der Prozeß* $Z_t := e^{-r(\tau^* \wedge t)} V(X_{\tau^* \wedge t})$, $0 \leq t < \infty$, *bildet ein gleichgradig integrierbares Martingal.*

Beweis. Die Martingaleigenschaft folgt aus Gleichung (5.32). Ferner ergibt sich aus der Definition von V

$$Z_t = e^{-r(\tau^* \wedge t)} V(X_{\tau^* \wedge t}) \leq c e^{-r(\tau^* \wedge t)} \max\{l, X_{\tau^* \wedge t}\}$$

mit $c = \frac{1}{\gamma_0 - \gamma_1}\left(\gamma_0 \left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\gamma_0}\right)$. Im Beweis von Lemma 5.4 haben wir

$$E \sup_{0 \leq t < \infty} e^{-rt} \max\left\{l, \sup_{0 \leq u \leq t} X_u\right\} < \infty$$

nachgewiesen. Hieraus folgt natürlich auch die gleichgradige Integrierbarkeit von $(Z_t)_{t \geq 0}$. □

5.11 Satz. *Es seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(S_t)_{t\geq 0}$ gemäß (5.2) bzw. (5.23) definiert sowie $\mu < r$. Dann existiert für das Stopproblem (5.24) eine Lösung τ^* der Form*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (al, bl)\},$$

wobei $0 < a < 1 < b$ durch

$$a = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}\left(\frac{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}\right)^{\frac{1-\gamma_0}{\gamma_0-\gamma_1}}$$

und

$$b = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{\gamma_0(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1(\gamma_0 - 1)}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_0-\gamma_1}}$$

definiert sind. Die Werte $\gamma_0 < 0 < 1 < \gamma_1$ bilden die Lösungen der Indexgleichung $-r + \mu\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0$. Weiter gilt $V^*(x) = V(x)$ mit

$$V(x) = \begin{cases} l, & \text{falls} \quad 0 < x \leq al, \\ \frac{l}{\gamma_0-\gamma_1}\left(\gamma_0\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_1} - \gamma_1\left(\frac{x}{al}\right)^{\gamma_0}\right), & \text{falls} \quad al < x < bl, \\ x, & \text{falls} \quad bl \leq x. \end{cases}$$

Beweis. Wir zeigen, daß der Prozeß $(e^{-rt}V(X_t))_{t\geq 0}$ ein Supermartingal bildet, indem wir auf diesen Prozeß die verallgemeinerte Itô-Formel anwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} e^{-rt}V(X_t) &= V(x) + \int_{[0,t]} \sigma e^{-rs} X_s V'(X_s)\, dW_s \\ &\quad + \int_{[0,t]} e^{-rs}\left(-rV(X_s) + \mu X_s V'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 V''(X_s)\right) \lambda\!\!\lambda(ds) \end{aligned}$$

f.s. Das erste Integral bildet wiederum ein Martingal. Definieren wir

$$Y_t := e^{-rt}\left(-rV(X_t) + \mu X_t V'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 V''(X_t)\right),$$

so gilt im Bereich $0 < X_t \leq al$ für Y_t die Abschätzung

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{-rt}\left(-rV(X_t) + \mu X_s V'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 V''(X_t)\right) \\ &= e^{-rt}(-rV(X_t)) \\ &= e^{-rt}(-rl) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Für $al < X_t < bl$ ergibt sich aus der Differentialgleichung (5.32)

$$Y_t = e^{-rt}\left(-rV(X_t) + \mu X_t V'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 V''(X_t)\right) = 0,$$

und für $bl \leq X_t$ erhalten wir aus $\mu < r$ schließlich

$$\begin{aligned} Y_t &= e^{-rt}\left(-rV(X_t) + \mu X_t V'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 V''(X_t)\right) \\ &= e^{-rt}\left(-rX_t + \mu X_t\right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Der Integrand des zweiten Integrals ist somit stets negativ. Dies liefert uns analog zu der Vorgehensweise im vorherigen Abschnitt, daß der Prozeß $(e^{-rt}V(X_t))_{t\geq 0}$ ein Supermartingal bildet und wir erhalten aus $V(x) \geq \max\{x, l\}$ für eine beliebige Stopzeit τ die Abschätzung

$$Ee^{-r\tau}S_\tau \leq Ee^{-r\tau}V(X_\tau) \leq e^0 V(X_0) = V(x).$$

Gehen wir auf beiden Seiten zum Supremum über, so liefert dies

$$V^*(x) = \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau \leq V(x).$$

Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir die Stopzeit $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin (al, bl)\}$. Der gestoppte Prozeß bildet nach Lemma 5.10 ein gleichgradig integrierbares Martingal. Daher folgt aus dem Optional Sampling Theorem in Verbindung mit $X_{\tau^*} \in \{al, bl\}$ und somit $\max\{X_{\tau^*}, l\} = S_{\tau^*}$ die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned} V^*(x) &= \sup_\tau Ee^{-r\tau}S_\tau \\ &\geq Ee^{-r\tau^*}S_{\tau^*} \\ &= Ee^{-r\tau^*}\max\{X_{\tau^*}, l\} \\ &= Ee^{-r\tau^*}V(X_{\tau^*}) \\ &= V(x). \end{aligned}$$

□

5.12 Korollar. *In der Situation von Satz 5.11 sei $l = 0$. Dann erhalten wir für das Stopproblem die triviale Lösung*

$$V^*(x) = x,$$

und die optimale Stoppzeit wird durch $\tau^* = 0$ gegeben.

Beweis. Es ist nur darauf hinzuweisen, daß der Prozeß $e^{-rt}(X_t)_{t\geq 0}$ ein Supermartingal bildet. □

5.13 Satz. *Ist in der Situation von Satz 5.11* $\mu \geq r$*, so gilt*

$$V^*(x) = \infty.$$

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus Satz 1.2. □

Anhang A

Der Beweis von Lemma 2.2

Beweis von Lemma 2.2. Wir wählen uns $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $\hat{x}_1 \notin A$ und zeigen, daß $\varphi * f$ in $\hat{x}$ nach x_1 partiell differenzierbar ist mit Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi * f(\hat{x})) = \varphi * \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x})\right).$$

Abkürzend schreiben wir im folgenden

$$C := \{x = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1 \notin A\}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir werden zeigen, daß der Differenzenquotient $\frac{1}{t}(\varphi * f(\hat{x} + te_1) - \varphi * f(\hat{x}))$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\hat{x}$ um weniger als ε von $\varphi * \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x})\right)$ abweicht. Da ε beliebig gewählt ist, bestätigt dies die Behauptung.
Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_n(0)$ gilt und der Abstand d des Trägers von φ zum Rand von $B_n(0)$ echt positiv ist. Die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1} f$ ist aus Stetigkeitsgründen auf $B_n(\hat{x})$ beschränkt und somit existiert ein $K > 0$, derart daß

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \leq K \text{ für alle } x \in B_n(\hat{x}).$$

Da die Menge A diskret ist, ist $A \cap [\hat{x}_1 - n, \hat{x}_1 + n]$ endlich, so daß wir

$$\{x_1, ..., x_{k_0}\} = A \cap [\hat{x}_1 - n, \hat{x}_1 + n]$$

mit $k_0 \in \mathbb{N}$ schreiben können. Wir definieren für $1 \leq k \leq k_0$

$$y_k := \hat{x}_1 - x_k.$$

Zu jedem y_k existiert ein $\delta_k > 0$ hinreichend klein, so daß die Ungleichung

$$\int_{[y_k-\delta_k, y_k+\delta_k]\times[-n,n]^d} |\varphi(x)|\ d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(x) < \frac{\varepsilon}{4k_0K}$$

erfüllt ist. Weiter definieren wir

$$C_1 := \bigcup_{i=1}^{k_0} (([y_i - \delta_i, y_i + \delta_i] \times [-n,n]^d) \cap B_n(0)).$$

Dann ergibt sich aus dieser Konstruktion die Abschätzung

$$\int_{C_1} |\varphi(x)|\ d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(x) \leq \frac{\varepsilon}{4K}\,. \tag{A.1}$$

Wir setzen $\delta_0 := \frac{1}{2}\min\{\delta_1, ..., \delta_{k_0}, d\}$ und

$$C_2 := \bigcup_{i=1}^{k_0} \left(\left([\hat{x}_1 - y_i - \delta_0, \hat{x}_1 - y_i + \delta_0] \times [-n,n]^d\right) \cap B_n(\hat{x})\right).$$

Es bezeichne e_1 den ersten Einheitsvektor. Aus der Definition von C_2 folgt somit die Implikation

$$y \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus C_1 \quad \Longrightarrow \quad \hat{x} - y + te_1 \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus C_2$$

für alle $|t| \leq \delta_0$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_1} f$ ist auf jedem Kompaktum in $\mathbb{R}^{d+1} \setminus C$ gleichmäßig stetig, daher existiert ein $\hat{\delta} < \delta_0$, so daß die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_1} \tag{A.2}$$

für alle $x, y \in \overline{B_n(\hat{x}) \setminus C_2}$ mit $\|x - y\| < \hat{\delta}$ besteht. Aus den Abschätzungen (A.1) und (A.2) erhalten wir für alle $|t| < \hat{\delta}$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{t}\left(\varphi * f(\hat{x} + te_1) - \varphi * f(\hat{x})\right) - \varphi * \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x})\right| \\
&\quad = \left|\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(y) \left(\frac{1}{t}(f(\hat{x} - y + te_1) - f(\hat{x} - y)) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y)\right) d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y)\right| \\
&\quad = \left|\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \varphi(y) \left(\frac{1}{t}\int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y + se_1)\, \lambda\!\!\lambda(ds) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y)\right) d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{B_n(0)} \varphi(y) \left(\frac{1}{t} \int_{[0,t]} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y + se_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y) \, \lambda\!\!\lambda(ds) \right) \, d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y) \right| \\
&\leq \int_{B_n(0) \setminus C_1} |\varphi(y)| \left(\frac{1}{t} \int_{[0,t]} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y + se_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y) \right| \, \lambda\!\!\lambda(ds) \right) \, d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y) \\
&\quad + \int_{C_1} |\varphi(y)| \left(\frac{1}{t} \int_{[0,t]} \left| \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y + se_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(\hat{x} - y) \right| \, \lambda\!\!\lambda(ds) \right) \, d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y) \\
&\leq \int_{B_n(0) \setminus C_1} |\varphi(y)| \left(\frac{1}{t} \int_{[0,t]} \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_1} \, \lambda\!\!\lambda(ds) \right) \, d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y) \\
&\quad + \int_{C_1} |\varphi(y)| \left(\frac{1}{t} \int_{[0,t]} 2K \, \lambda\!\!\lambda(ds) \right) \, d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_1} \int_{B_n(0) \setminus C_1} |\varphi(y)| \, d\,\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y) + 2K \int_{C_1} |\varphi(y)| \, d\lambda\!\!\lambda^{d+1}(y) \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

wobei wir im 2. Schritt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung angewendet haben. □

Anhang B

Lösung der Bellman-Differentialgleichung

B.1 Satz. *Es sei die Differentialgleichung*

$$-ry + \mu x y' + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 y'' = 0 \tag{B.1}$$

mit $\mu > 0$, $r > 0$ und $\sigma^2 > 0$ gegeben. Dann bilden für $x \neq 0$ die Funktionen

$$y_1(x) = x^{\gamma_0} \quad \textit{und} \quad y_2(x) = x^{\gamma_1}$$

ein Fundamentalsystem des Lösungsraumes, wobei γ_0 und γ_1 die Lösungen der Indexgleichung $-r + \mu\gamma\frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0$ bilden.

Beweis. Die Differentialgleichung läßt sich auch in der Form

$$-\frac{2r}{\sigma^2 x}y + \frac{2\mu}{\sigma^2 x}y' + y'' = 0$$

schreiben. Daher handelt es sich hierbei um eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit singulärer Stelle 0. Wir gehen mit dem Ansatz $y = x^\gamma$ in Gleichung (B.1) und erhalten die sogenannte *Indexgleichung*

$$-r + \mu\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma - 1) = 0.$$

Die Lösungen dieser Indexgleichung sind

$$\gamma_0 \quad = \quad \frac{\frac{\sigma^2}{2} - \mu + \sqrt{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

und

$$\gamma_1 \quad = \quad \frac{\frac{\sigma^2}{2} - \mu - \sqrt{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Gilt $\gamma_0 \neq \gamma_1$, so bilden

$$y_1(x) = x^{\gamma_0} \quad \text{und} \quad y_2(x) = x^{\gamma_1}$$

für $x \neq 0$ zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung, wovon man sich durch eine einfache Rechung überzeugt. Ihre Wronski-Determinante ergibt sich zu

$$W(x) = (\gamma_0 - \gamma_1)x^{\gamma_0+\gamma_1-1} \neq 0,$$

so daß die Lösungen y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem der vorgelegten Differentialgleichung bilden. Allgemein hat eine Lösung der Differentialgleichung für $\gamma_0 \neq \gamma_1$ daher die Form

$$V(x) = Ax^{\gamma_0} + Bx^{\gamma_1}.$$

Lemma 5.1 zeigt, daß die Wahl von r, μ und σ^2 $\gamma_0 \neq \gamma_1$ impliziert und der Spezialfall $\gamma_0 = \gamma_1$ somit für uns von keinem weiteren Interesse ist. Wir verzichten daher auf die Darstellung der Lösung für $\gamma_0 = \gamma_1$. Für eine genauere Betrachtung von Differentialgleichungen mit Singularitäten sei auf die Werke [Heu] und [Wal] verwiesen. □

Symbolverzeichnis

Grundlegende Bezeichnungen:

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Ring der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Körper der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	positive reelle Zahlen
$\mathcal{B}^d$	Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}^d$
$\lambda\!\!\lambda^d$	d-dimensionales Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$
$B_r(x_0)$	offene Kugel mit Radius r um x_0 : $\{x : \|x\|_2 < r\}$
$\text{supp}(f)$	Träger einer Funktion f: $\{x : f(x) \neq 0\}$
L^p	Vektorraum der reellen p-fach μ-integrierbaren Funktionen
$\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$	Vektorraum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$	Teilraum von $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger
$\mathcal{C}^{(n)}(\mathbb{R}^d)$	Teilraum $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ der n-fach stetig differenzierbaren Funktionen
$(W_t)_{t\geq 0}$	Standard-Brownsche Bewegung
$(B_t)_{t\geq 0}$	Brownsche Bewegung mit Drift $\mu > 0$ und Volatilität $\sigma^2 > 0$
$E(X\|\mathcal{F})$	bedingter Erwartungswert der Zufallsgröße X unter der Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2
τ^a	Stopzeit $\inf\{t \geq 0 : \sigma W_t + \mu t \geq a\}$
τ_a	Stopzeit $\inf\{t \geq 0 : W_t + \geq a\}$
$\tau_{a,\mu}$	Stopzeit $\inf\{t \geq 0 : W_t + \mu t \geq a\}$
T_a	Stopzeit $\inf\{t \geq 0 : \exp(\sigma W_t + \mu t) \geq a\}$

Literaturverzeichnis

[Als] Alsmeyer, G.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Skripten zur mathematischen Statistik, Nr.30. Universität Münster (1998)

[Bla1] Black, F. und Scholes, M.: The valuation of option contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance* **27**, 399-417 (1972)

[Bla2] Black, F. und Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* **81**, 637-659 (1973)

[Che] Chernoff, H.: Sequential tests for the means of of a normal distribution *Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. 1.* University of California Press, 79-91 (1961)

[Chu] Chung, K.L. und Williams, R.J.: *Introduction to Stochastic Integration*, Second Edition. Birkhäuser, Boston Basel Berlin (1990)

[Duf] Duffie, J.D. und Harrison, J.M.: Arbitrage pricing of Russian Options and perpetual lookback options. *The Annals of Applied Probability* **3**, 641-651 (1993)

[Ell] Elliot, R.J. und Kopp, P.E.: *Mathematics of Financial Markets*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1999)

[Els] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1996)

[Guo] Guo, X. und Shepp, L.: Some optimal stopping problems with non-trivial boundaries for pricing exotic options. *Journal of Applied Probability, **38**(3)*, (2001)

[Heu] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 3. Auflage. Teubner, Stuttgart (1995)

[Irle] IRLE, A.: *Finanzmathematik*. Teubner, Stuttgart (1998)

[Kal] KALLIANPUR, G. UND KARANDIKAR, R.: *Introduction to Option Pricing Theory*. Birkhäuser, Boston Basel Berlin (2000)

[Kar1] KARATZAS I. UND SHREVE, S.E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Second Edition. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1991)

[Kar2] KARATZAS, I.: *Lectures on the Mathematics of Finance*. CRM Monograph Series Vol. 8, American Mathematical Society

[Mus] MUSIELA,M. UND RUTKOWSKI, M.: *Martingale Methods in Financial Modelling*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1997)

[Schm] SCHMITZ, N.: *Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie*. Teubner, Stuttgart (1996)

[Rev] REVUZ, D. UND YOR, M.: *Continious Martingales and Brownian Motion*. Third Edition. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1999)

[Rog] ROGERS, L.C.G. UND WILLIAMS, D.: *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. John Wiley and Sons Chichester, New York (1987)

[She1] SHEPP, L.: Explicit solutions to some problems of optimal stopping. *The Annals of Mathematical Statistics* **40**, 993-1010 (1969)

[She2] SHEPP, L. UND SHIRYAEV, A.N.: The Russian Otpion: Reduced Regret. *The Annanls of Applied Probability* **3**, 631-640 (1993)

[She3] SHEPP, L. UND SHIRYAEV, A.N.: A dual Russian Option for selling short. *DI-MACS Technical Report* (1993)

[She4] SHEPP, L. UND SHIRYAEV, A.N.: A new look at Pricing of the Russian Option. *Theory of Probability and its Applications* **39**, 103-119 (1993)

[Wal] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 7. Auflage. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (2000)

Münster, 21. Februar 2002

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und dabei keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet zu haben.