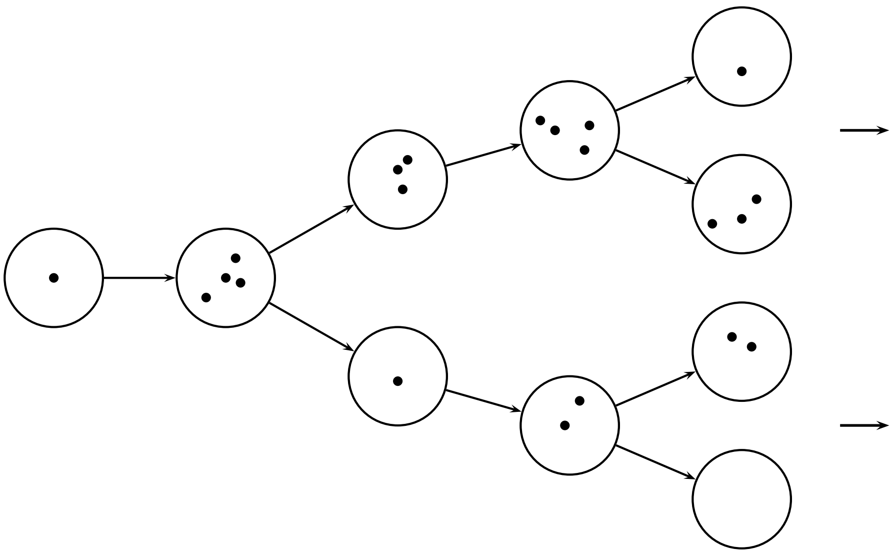
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Mathematische Statistik

Ein Modell zur Parasitenvermehrung in sich teilenden Zellen

Diplomarbeit

von

Sören Gröttrup



16. September 2009

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Mathematische Statistik

Ein Modell zur Parasitenvermehrung in sich teilenden Zellen

Diplomarbeit

von

Sören Gröttrup

Betreut durch

Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

16. September 2009

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, den biologischen Prozess der Vermehrung von Parasiten und deren Verteilung auf sich teilende Zellen in einem mathematischen Modell zu beschreiben. Anstatt von Parasiten kann auch allgemeiner von biologischen Zellkomponenten, wie zum Beispiel Mitochondrien, ausgegangen werden.

Eines der ersten Modelle zur Beschreibung des obigen Prozesses wurde von Kimmel [16] eingeführt. In seinem Modell lebt jede Zelle eine exponentialverteilte Lebenszeit. Am Ende einer Lebenszeit teilt sich die Zelle dann in zwei Tochterzellen. In jeder Zelle befindet sich weiter eine Anzahl von Parasiten, welche sich am Ende der Lebenszeit der Zelle unabhängig und gemäß der gleichen Verteilung vermehren. Die Nachkommen eines Parasiten verteilen sich dann unabhängig von den Nachkommen der anderen Parasiten auf die beiden Tochterzellen. Diese Verteilung geschieht symmetrisch, d.h. geben $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ die Anzahl der Nachkommen eines Parasiten an, die in die erste und zweite Tochterzelle gehen, so gilt $(X^{(0)}, X^{(1)}) \stackrel{d}{=} (X^{(1)}, X^{(0)})$.

In dieser Arbeit untersuchen wir ein anderes, von Bansaye [10] aufgestelltes stochastisches Modell. Obwohl stark angelehnt an das Modell von Kimmel, unterscheidet sich das hier betrachtete Modell in zwei entscheidenden Merkmalen. Als erstes nehmen wir einen eher genealogischen Standpunkt ein und betrachten die Zellen generationsweise. Wir haben also statt einer stetigen eine diskrete Zeit vorliegen und nehmen an, dass sich jede Zelle in jeder Generation in zwei Tochterzellen aufspaltet. Der andere wichtige Unterschied besteht in der Annahme, dass sich die Nachkommen der Parasiten nicht symmetrisch auf die beiden Tochterzellen verteilen müssen. $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ können also durchaus verschiedene Verteilungen besitzen. In dieser allgemeinerern Situation wollen wir keinerlei spezielle Anforderungen an die Verteilung der Parasiten auf die Tochterzellen geben. Beibehalten wird jedoch, dass sich die Parasiten in einer Zelle unabhängig und gemäß der gleichen Verteilung vermehren. In der Tat ist die Annahme, dass $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ nicht unbedingt identisch verteilt sein müssen, durchaus vernünftig. Dies wurde bei einem Experiment am Bakterium Escherichia coli in TaMaRa's Laboratorium festgestellt (siehe [13] und [20]).

Nach einer ausführlichen Einführung in das hier betrachtete Zellteilungsmodell infizierter Zellen, geben wir im zweiten Kapitel einige wichtige Resultate aus dem Gebiet der Galton-Watson-Prozesse (GWP) und Galton-Watson-Prozesse in zufällig variierenden Umgebungen (GWPZVU) an. Der enge Zusammenhang zwischen dem Zellteilungsmodell infizierter Zellen und den GWP und GWPZVU ist nicht schwer zu erkennen. So bildet zum Beispiel der Prozess $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$, welcher die Anzahl der

Parasiten in jeder Generation angibt, einen GWP. Neben $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ betrachten wir auch den Prozess einer zufälligen Zelllinie $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ und wie sich herausstellt, ist dies ein Galton-Watson-Prozess in zufällig variierenden Umgebungen. Die Theorie der GWP und GWPZVU ist also unser Hauptinstrument bei der Untersuchung des Zellteilungsmodells und der eben genannten Prozesse. Diese beiden Prozesse definieren wir im dritten Kapitel genauer und wenden die Eigenschaften der GWP und GWPZVU aus dem zweiten Kapitel auf diese an. Wir erhalten erste Resultate für das Zellteilungsmodell.

Ist die Verteilung der Parasiten auf die Tochterzellen stark asymmetrisch, so entstehen viele schwach infizierte oder sogar gesunde Zellen. Daraus ergeben sich folgende Fragen: In welchen Fällen entstehen so viele gesunde Zellen, dass man von einem sich erholenden Organismus sprechen kann? Welche Bedingungen müssen an die Vermehrungsrate der Parasiten und deren Verteilung auf die Tochterzellen geknüpft werden, damit sich ein infizierter Organismus regeneriert? Mit dieser Frage beschäftigt sich das vierte Kapitel. Wir geben Kriterien an, unter denen sich ein infizierter Organismus fast sicher erholt. Mit Hilfe dieser Kriterien sehen wir dann, wie ungleichmäßig sich die Parasiten auf die Tochterzellen verteilen müssen, damit dieser sich fast sicher regeneriert.

Im fünften Kapitel befassen wir uns mit dem Baum infizierter Zellen. Sterben die Parasiten nicht aus, so explodiert deren Anzahl nach der Theorie der GWP. Besitzt also das Ereignis Ext^c des Überlebens der Parasiten eine positive Wahrscheinlichkeit, so gilt $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n \to \infty \mid Ext^c) = 1$. Eine natürliche Frage, die sich daraus ergibt, ist, ob auch die Anzahl der infizierten Zellen $\#\mathbb{G}_n^*$ in diesem Fall gegen unendlich strebt. Im fünften Kapitel beantworten wir diese Frage positiv. Insbesondere zeigen wir damit, dass sich infizierte Zellen über den gesamten Zellbaum verteilen und somit nicht in einer Zelllinie konzentriert sind. Dieses Resultat gilt auch im Fall $\mathbb{P}(Ext^c) = 0$, wie wir danach sehen werden.

Mit dem asymptotischen Verhältnis $F_k(n)$ infizierter Zellen mit einer bestimmten Anzahl k an Parasiten zur Gesamtanzahl infizierter Zellen $\#\mathbb{G}_n^*$ befasst sich dann das sechste und letzte Kapitel. Dies wird den größten Umfang der Arbeit in Anspruch nehmen, da das asymptotische Verhalten von $F_k(n)$ stark vom Verhalten der Prozesse $\mathcal{Z}_n$ und $Z_{[n]}$ abhängt. Wir müssen hier daher mehrere Fälle unterscheiden, in denen wir $F_k(n)$ untersuchen und unterschiedliche Konvergenzen zeigen. Insbesondere erhalten wir dadurch auch das asymptotische Verhalten von $\#\mathbb{G}_n^*$.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Gerold Alsmeyer für die Bereitstellung dieses interessanten Themas und die Betreuung während der Anfertigung meiner Diplomarbeit. Weiter danke ich meinen Eltern, die mich während meines Studiums wohlwollend unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt auch Andrea Winkler und allen anderen, die mich in meiner Studiums- und Diplomzeit begleitet haben.

1 Das Zellteilungsmodell infizierter Zellen

In diesem ersten Kapitel beschreiben wir das Zellteilungsmodell infizierter Zellen, welches wir in dieser Arbeit behandeln werden. Wir stellen es uns wie folgt vor: Man startet mit einer Zelle, die eine Anzahl von Parasiten enthält. Jeder Parasit in der Zelle vermehrt sich unabhängig von den anderen gemäß der gleichen Verteilung. Danach spaltet sich die Zelle in zwei Tochterzellen und die Nachkommen eines Parasiten verteilen sich unabhängig von den Nachkommen der anderen Parasiten auf die beiden Tochterzellen. Die so entstandenen Tochterzellen bilden die neue Generation. Alle Zellen der neuen Generation und deren Parasiten verhalten sich unabhängig voneinander in derselben Weise, wie oben beschrieben.

Zusammengefasst machen wir also für das Zellteilungsmodell infizierter Zellen die folgenden vier Annahmen:

(1) Wir starten mit einer Zelle, die eine beliebige Anzahl an Parasiten enthält.

(2) Alle Parasiten vermehren sich unabhängig und gemäß der gleichen Verteilung voneinander.

(3) Jede Zelle spaltet sich in zwei Tochterzellen.

(4) Die Nachkommen eines Parasiten verteilen sich unabhängig von den Nachkommen der anderen Parasiten auf die Tochterzellen.

Wenden wir uns zuerst den Zellen zu. Da sich jede einzelne Zelle in jeder Generation in genau zwei Zellen aufspaltet, definieren wir den Zellbaum wie folgt:

Definition 1.1. (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet

$$\mathbb{G}_n := \{0, 1\}^n$$

die *Menge der Zellen der n-ten Generation* und $\{\varnothing\} := \mathbb{G}_0$ die *Wurzel* des Zellbaums. Wir bezeichnen dann mit

$$\mathbb{T} := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{G}_n$$

den *Zellbaum*.

(b) Für $v \in \mathbb{T}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{P}_v$ die *Menge der Parasiten in der v-ten Zelle* und

$$\mathcal{P}(n) := \bigcup_{v \in \mathbb{G}_n} \mathcal{P}_v \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P} := \bigcup_{v \in \mathbb{T}} \mathcal{P}_v$$

die *Menge der Parasiten der n-ten Generation* bzw. die *Menge aller Parasiten.*

(c) Für $v \in \mathbb{T}$ definieren wir mit

$$\mathbb{G}_n^* := \{v \in \mathbb{G}_n : \mathcal{P}_v \neq \emptyset\}$$

die *Menge der infizierten Zellen der n-ten Generation.*

Zwecks Übersichtlichkeit schreiben wir $v_1 v_2 ... v_n$ statt $(v_1, v_2, ..., v_n)$ für jedes Element aus $\mathbb{T}$. Ist $u = u_1...u_n$ und $v = v_1...v_m$, so schreiben wir uv für die Zelle $u_1...u_n v_1...v_m$. u ist also die Zelle der n-ten Generation in der Zelllinie von $\varnothing$ nach uv.

Für die Beschreibung der Parasitenvermehrung und -verteilung auf die Tochterzellen seien zwei Zufallsgrößen $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ mit Werten in $\mathbb{N}_0$ gegeben, welche nicht unbedingt unabhängig sein müssen. In jeder Generation vermehrt sich dann jeder Parasit unabhängig von den anderen gemäß der Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} \in \cdot)$. Dabei gibt $X^{(0)}$ bzw. $X^{(1)}$ die Anzahl der Nachkommen an, die nach der Zellteilung in die erste bzw. zweite Tochterzelle gehen. Dies verdeutlicht Abbildung 1.1.

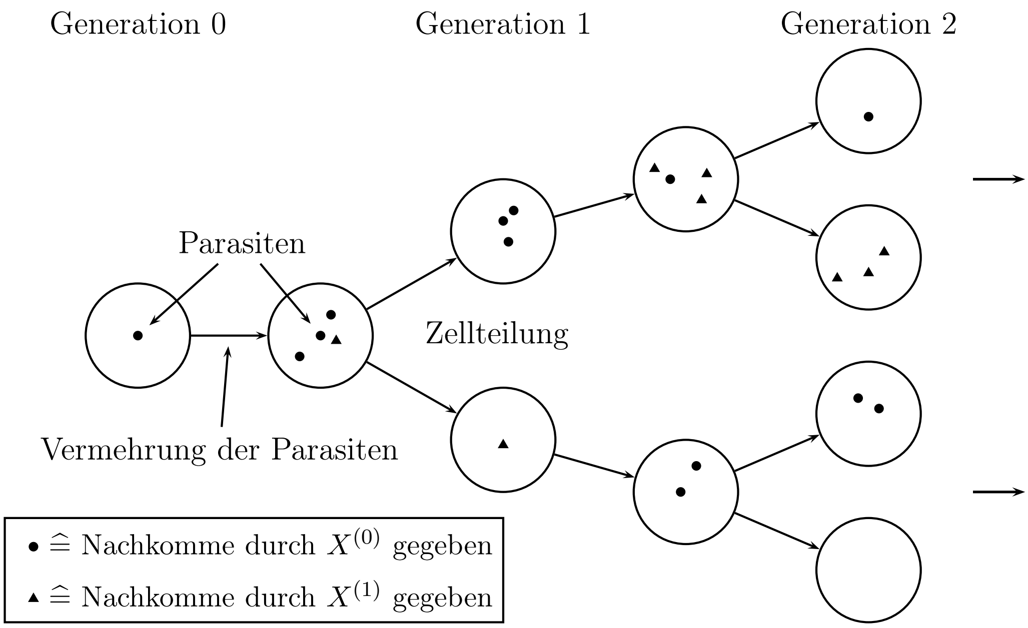


Abbildung 1.1: Parasitenvermehrung bei der Zellteilung.

Sei $Z_v = \#\mathcal{P}_v$, $v \in \mathbb{T}$, die Anzahl der Parasiten der v-ten Zelle und gebe $X_{v,k}^{(0)}$ bzw. $X_{v,k}^{(1)}$, $1 \le k \le Z_v$, die Anzahl der Nachkommen des k-ten Parasiten der v-ten Zelle an, die in die erste bzw. zweite Tochterzelle gehen. Die Anzahl der Parasiten der ersten Tochterzelle Z_{v0} der Zelle v ist dann folglich die Summe der $X_{v,k}^{(0)}$, $1 \le k \le Z_v$. Analoges gilt für die Anzahl der Parasiten der zweiten Tochterzelle Z_{v1}. Damit definieren wir also den Zellteilungsprozess infizierter Zellen wie folgt:

Definition 1.2. Seien $(X^{(0)}, X^{(1)})$ und $Z_\varnothing$ Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0^2$ bzw. $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{T}$ ein Zellbaum. Seien weiter $(X_{v,k}^{(0)}, X_{v,k}^{(1)})_{v\in\mathbb{T},k\in\mathbb{N}}$ unabhängige Kopien von $(X^{(0)}, X^{(1)})$, welche außerdem unabhängig von $Z_\varnothing$ sind. Dann ist der *Zellteilungsprozess infizierter Zellen* (ZTPIZ) $(Z_v)_{v\in\mathbb{T}}$ durch die folgende Abhängigkeitsstruktur gegeben:

$$(Z_{v0}, Z_{v1}) = \sum_{k=1}^{Z_v} (X_{v,k}^{(0)}, X_{v,k}^{(1)}) \tag{1.1}$$

für $v \in \mathbb{T}$.

Wie man sofort sieht, ist $(Z_v)_{v\in\mathbb{T}}$ nach Definition eine Markov-Kette indiziert durch einen Baum (s. Anh., Def. A.4), da die Anzahl der Parasiten einer Zelle nur von der Anzahl der Parasiten in deren Mutterzelle abhängt.

Weiter betten wir den ZTPIZ in ein sogenanntes Standardmodell

$$(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_j)_{j\in\mathbb{N}_0}, (X_{v,k}^{(0)}, X_{v,k}^{(1)})_{v\in\mathbb{T},k\in\mathbb{N}}, (Z_v)_{v\in\mathbb{T}})$$

ein. Auf $(\Omega, \mathcal{A})$ seien dann Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, sowie Zufallsgrößen $Z_\varnothing \in \mathbb{N}_0$ und $(X_{v,k}^{(0)}, X_{v,k}^{(1)})$, $v \in \mathbb{T}, k \in \mathbb{N}$, mit Werten in $\mathbb{N}_0^2$ gegeben. Unter jedem $\mathbb{P}_j$ seien die $(X_{v,k}^{(0)}, X_{v,k}^{(1)})$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt und es gilt $\mathbb{P}_j(Z_\varnothing = j) = 1$. Unter $\mathbb{P}_j$ startet der Prozess also mit einer Zelle, die j Parasiten enthält. Die Z_v, $v \in \mathbb{T}$, seien dann rekursiv definiert wie in (1.1). Der Übersicht halber setzen wir $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$. Zur Existenz eines Standardmodells siehe Kapitel I.2 in [6]. Sei von nun an ein ZTPIZ immer in einem solchen Standardmodell gegeben.

Werfen wir nochmal einen kurzen Blick auf den Zellbaum. Betrachten wir die Zellen der n-ten Generation, so kann man jede dieser Zellen als Wurzel eines Teilbaums des gesamten Zellbaums auffassen. Die Struktur eines jeden Teilbaums entspricht aber der des gesamten Zellbaums. Aufgrund des unabhängigen Verhaltens der Parasiten startet jede Zelle der n-ten Generation somit einen neuen ZTPIZ. Diese neuen Prozesse sind unabhängig voneinander. Dies halten wir kurz im folgenden Satz fest.

Satz 1.3. *Sei $(Z_v)_{v\in\mathbb{T}}$ ein ZTPIZ. Jede Zelle $v \in \mathbb{T}$ startet bedingt unter $Z_v = z$ einen neuen ZTPIZ aus einer Zelle mit z Parasiten, deren Vermehrungsverhalten durch $(X^{(0)}, X^{(1)})$ gegeben ist. Bedingt unter $\{Z_v = z_v : v \in \mathbb{G}_n\}$ sind die so aus der n-ten Generation startenden Prozesse unabhängig voneinander. Insbesondere gilt im Standardmodell für $w = uv \in \mathbb{G}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $j, k \ge 0$*

$$\mathbb{P}_j(Z_w \in \cdot \mid Z_u = k) = \mathbb{P}_k(Z_v \in \cdot\ ) \quad \mathbb{P}_j\text{-f.s..} \tag{1.2}$$

Beweis: Sei $u \in \mathbb{T}$. Wir definieren $\tilde{Z}_\varnothing := Z_u$ und $(\tilde{Z}_{v0}, \tilde{Z}_{v1}) := (Z_{uv0}, Z_{uv1})$ für $v \in \mathbb{T}$. Damit ist der Prozess $(\tilde{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ bedingt unter $Z_u = z$ ein ZTPIZ startend mit einer Zelle und z Parasiten. Die so in der n-ten Generation startenden Prozesse sind aufgrund der Unabhängigkeit der $(X^{(0)}_{v,k}, X^{(1)}_{v,k})$, $v \in \mathbb{T}, k \geq 1$, bedingt unter $\{Z_v = z_v : v \in \mathbb{G}_n\}$ unabhängig voneinander.

Insbesondere gilt dann für $w = uv \in \mathbb{G}_n$, $j, k, l \in \mathbb{N}_0$ aufgrund der Markov-Eigenschaft und der Definition von $(\tilde{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_j(Z_w = l \mid Z_u = k) &= \mathbb{P}(Z_w = l \mid Z_u = k)\\ &= \mathbb{P}(\tilde{Z}_v = l \mid \tilde{Z}_\varnothing = k)\\ &= \mathbb{P}_k(Z_v = l) \qquad\qquad \mathbb{P}_j\text{-f.s..}\end{aligned}$$

□

Zum Abschluss der Modellbeschreibung führen wir noch einige wichtige Schreibweisen ein. Sei $(Z_v)_{v\in\mathbb{T}}$ ein ZTPIZ, dann ist

$$f_a(s) := \mathbb{E}(s^{X^{(a)}_{v,k}}) = \mathbb{E}(s^{X^{(a)}}), \quad a \in \{0,1\},$$

die *erzeugende Funktion von* $X^{(a)}$ und

$$\mu_a := \mathbb{E}(X^{(a)}_{v,k}) = \mathbb{E}(X^{(a)}), \quad a \in \{0,1\},$$

das *Reproduktionsmittel von* $X^{(a)}$. Weiter setzen wir

$$\mu := \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1).$$

Für $v = v_1...v_n \in \mathbb{T}$ definieren wir mit $|v|$ die *Länge des Pfades* von der Wurzel zur Zelle v, und mit $v|k$ die *k-te Zelle des Pfades*, der nach v führt, d.h.

$$|v| = n \quad \text{und} \quad v|k = v_1...v_k \;\text{ für }\; k \leq n.$$

Weiter definieren wir eine *partielle Ordnung* „$\leq$" auf $\mathbb{T}$ durch

$$u \leq v \;:\Leftrightarrow\; \text{es exisitiert ein } k \leq n \text{ mit } v|k = u.$$

Wir schreiben $u < v$, falls ein $k < n$ existiert mit $v|k = u$. Diese Notationen erleichtern es uns, später besser durch den Zellbaum navigieren zu können.

Ab jetzt nehmen wir an, dass

$$0 < \mu_0, \mu_1 < \infty \tag{1.3}$$

gilt. Damit können insbesondere sowohl in der ersten als auch zweiten Tochterzelle Parasiten enthalten sein. Um triviale Fälle auszuschließen, gelte außerdem

$$\mathbb{P}\big(X^{(0)} \leq 1,\ X^{(1)} \leq 1\big) < 1, \tag{1.4}$$

da sonst die Anzahl der Parasiten pro Zelle nicht steigen könnte.

2 Der Galton-Watson-Prozess

Bei der späteren Untersuchung des Zellteilungsmodells greifen wir oft auf Eigenschaften eines Galton-Watson-Prozesses zurück. Das folgende Kapitel dient daher der Einführung dieses Prozesses und der Auflistung einiger fundamentaler und später benutzter Eigenschaften. Nachdem wir den einfachen Galton-Watson-Prozess behandelt haben, werden wir den allgemeineren Galton-Watson-Prozess in zufällig variierenden Umgebungen einführen.

2.1 Der einfache Galton-Watson-Prozess

Bei der Einführung des einfachen Galton-Watson-Prozesses und der Zusammenstellung einiger wichtiger Eigenschaften orientieren wir uns im Wesentlichen an den Ausführungen in [6], [9] und [15].

2.1.1 Modellbeschreibung

Gegeben sei eine Population von Individuen. Jedes dieser Individuen bekommt unabhängig von den anderen gemäß der gleichen Verteilung eine zufällige Anzahl von Nachkommen. Die Summe dieser Nachkommen bildet dann die Population der nächsten Generation und alle Individuen dieser Generation verhalten sich so wie die Individuen der vorherigen Generation. Ein Galton-Watson-Prozess beschreibt demnach die genealogische Struktur einer Population und aufgrund des obigen Verhaltensmusters der Individuen, ist er wie folgt definiert:

Definition 2.1. Ein *Galton-Watson-Prozess* (GWP) mit Reproduktionsverteilung $(p_i)_{i\geq 0}$ ist eine zeitlich homogene diskrete Markov-Kette $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ (Def. A.1). Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = p_j^{*(i)},$$

wobei $p_j^{*(i)}$ die i-fache Faltung der Verteilung $(p_j)_{j\geq 0}$ ist. Für $i = 0$ setzen wir außerdem $p_j^{*(0)} = \delta_{0j}$.

Man kann einen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ auch immer in einer anschaulicheren, rekursiven Schreibweise darstellen und diesen in ein Standardmodell

$$(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_i)_{i\geq 0}, (X_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 1}, (Z_n)_{n\geq 0})$$

einbetten. Wie beim ZTPIZ seien auf $(\Omega, \mathcal{A})$ Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, und Zufallsgrößen Z_0 und $X_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$, mit Werten in $\mathbb{N}_0$ gegeben. Unter jedem $\mathbb{P}_i$ seien die $X_{n,k}$ stochastich unabhängig und jeweils $(p_j)_{j\geq 0}$-verteilt und es gilt $\mathbb{P}_i(Z_0 = i) = 1$. Z_0 gibt die Größe der Startpopulation (Urahnen) an und $X_{n,k}$ beschreibt die Anzahl der Nachkommen des k-ten Individuums der n-ten Generation. Der GWP startet unter $\mathbb{P}_i$ also mit i Individuen. Die Populationsgröße der $(n+1)$-ten Generation ist dann rekursiv definiert durch

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen wieder $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$.

Aufgrund der Markov-Eigenschaft sowie der Unabhängigkeit und identischen Verteilung der $X_{n,k}$ erhalten wir dann:

Satz 2.2. *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_i)_{i\geq 0}$ und j Urahnen. $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist die Summe von j unabhängigen GWP $(Z_n^{(l)})_{n\geq 0}$, $1 \leq l \leq j$, mit Reproduktionsverteilung $(p_i)_{i\geq 0}$ und einem Urahnen. Insbesondere gilt dann*

$$\mathbb{P}_j\big((Z_n)_{n\geq 0} \in \cdot\big) = \mathbb{P}\big((Z_n)_{n\geq 0} \in \cdot\big)^{*(j)} \quad \mathbb{P}_j\text{-f.s..}$$

Um trivialen Fällen vorzubeugen setzen wir ab jetzt für dieses Kapitel

$$p_0 + p_1 < 1$$

voraus.

2.1.2 Erzeugende Funktion und Aussterbewahrscheinlichkeit

Dieser Abschnitt dient der Auflistung einiger Eigenschaften der erzeugenden Funktion eines GWP und deren Zusammenhang mit der Aussterbewahrscheinlichkeit des Prozesses. Wir halten außerdem fest, dass ein GWP entweder ausstirbt oder dessen Population explodiert.

Wir bezeichnen mit

$$f(s) := \mathbb{E}s^{Z_1} = \sum_{j\geq 0} p_j s^j, \quad -1 \leq s \leq 1$$

die *erzeugende Funktion* eines GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ und mit

$$f_n := f \circ f_{n-1}$$

ihre Iteration, wobei $f_0 := id$ gesetzt wird. Weiter sei

$$\mu := \mathbb{E}Z_1 = f'(1)$$

das *Reproduktionsmittel* des GWP.

Erste Eigenschaften der erzeugenden Funktion f, ihrer Iteration f_n und des Reproduktionsmittels μ sind in der folgenden Proposition festgehalten.

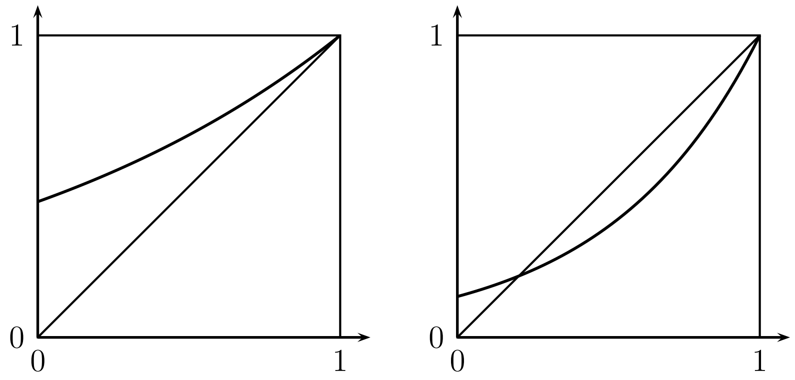


Abbildung 2.1: Die erzeugende Funktion im Fall $\mu \leq 1$ und $\mu > 1$.

Proposition 2.3. *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP mit Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$, erzeugender Funktion f und Reproduktionsmittel μ. Dann gilt:*

(i) $\mathbb{E}_i s^{Z_1} = f(s)^i$ *für* $i \geq 0$.

(ii) f *ist nichtnegativ, strikt konvex und streng monoton wachsend auf [0,1].*

(iii) f_n *ist die erzeugende Funktion von* Z_n *unter* $\mathbb{P}_1$.

(iv) $\mathbb{E}Z_n = \mu^n$.

(v) Ist $\mu < \infty$*, so gilt*

$$\operatorname{Var} Z_n = \begin{cases} \frac{\mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1} \operatorname{Var} Z_1, & \text{falls } \mu \neq 1 \\ n \operatorname{Var} Z_1, & \text{falls } \mu = 1. \end{cases}$$

Es bezeichne

$$Ext := \{Z_n \to 0\} = \{Z_n = 0 \text{ für ein } n \geq 0\}$$

das Ereignis des Aussterbens eines GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$. Der nachfolgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen der Aussterbewahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Ext)$, der erzeugenden Funktion f und dem Reproduktionsmittel μ eines GWP und beantwortet die Frage, unter welchen Bedingungen ein GWP fast sicher ausstirbt.

Satz 2.4. *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWP mit erzeugender Funktion f und Reproduktionsmittel μ. Dann gilt:*

(i) $\mathbb{P}(Ext)$ *ist der kleinste Fixpunkt von f in [0,1].*

(ii) Falls $\mu \leq 1$ *gilt, so ist* $\mathbb{P}(Ext) = 1$ *der einzige Fixpunkt von* f *in [0,1].*

(iii) Falls $\mu > 1$ *gilt, so ist* $\mathbb{P}(Ext) < 1$ *und im Intevall* $(\mathbb{P}(Ext), 1)$ *existiert kein weiterer Fixpunkte von* f.

Aufgrund dieses vom Reproduktionsmittel μ abhängigen unterschiedlichen Verhaltens eines GWP definieren wir:

Definition 2.5. Ein GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Reproduktionsmittel μ heißt *superkritisch, kritisch* oder *subkritisch*, wenn $\mu > 1$, $\mu = 1$ bzw. $\mu < 1$ ist.

Ein kritischer oder subkritischer GWP stirbt also nach Satz 2.4 fast sicher aus, während ein superkritischer GWP auch überleben kann. Geschieht dies, so explodiert der Prozess, wie der folgende Satz zeigt. Dieses Verhalten nennt man *Extinktions-Explosions-Prinzip.*

Satz 2.6. *Für einen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ (mit $p_1 \neq 1$) gilt*

$$\mathbb{P}(Ext) = \mathbb{P}(Z_n \to 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n \to \infty), \tag{2.1}$$

sowie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = 0$ *für alle* $k \geq 1$.

2.1.3 Grenzwertsätze

Der folgende Abschnitt fasst einige Grenzwertsätze über GWP zusammen. Dabei unterscheiden wir zwischen dem superkritischen, kritischen und subkritischen Fall. Zuerst geben wir aber noch einen Satz an, welcher für alle drei Fälle gilt. Dieser besagt, dass ein normierter GWP fast sicher gegen eine Zufallsgröße W konvergiert.

Satz 2.7. *Falls $0 < \mu < \infty$ ist, so existiert eine nichtnegative, integrierbare Zufallsgröße W, sodass*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\mu^n} = W \qquad \mathbb{P}_i\text{-f.s.}$$

und $\mathbb{E}_i W \leq i$ für alle $i \geq 0$ gilt.

Der superkritische Fall

Im superkritischen Fall explodiert die Population eines GWP nach Satz 2.4 mit positiver Wahrscheinlichkeit. Trotzdem kann aber $\mu^{-n} Z_n$ fast sicher gegen 0 konvergieren. Der Satz von Kesten und Stigum gibt uns eine äquivalente Bedingung an die Reproduktionsverteilung des GWP für das Auftreten dieses Phänomens.

Satz 2.8. ***(Kesten, Stigum)*** *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWP mit $1 < \mu < \infty$ und W wie aus Satz 2.7. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}W = 1 \\ \Leftrightarrow\ & \mathbb{P}(W > 0) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \{W > 0\} = Ext^c \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s. } \textit{für alle } \ i \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \mathbb{E}Z_1 \log Z_1 < \infty. \end{aligned}$$

Der subkritische Fall

Ein subkritischer GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ stirbt nach Satz 2.4 fast sicher aus. Bedingt man Z_n jedoch unter $\{Z_n > 0\}$, so konvergiert der GWP in Verteilung gegen die sogenannte Yaglom-quasistätionäre-Verteilung. Die beiden folgenden Sätze von Kolmogorov und Yaglom beschreiben die Aussterbegeschwindigkeit des GWP und bestätigen die behauptete Konvergenz.

Satz 2.9. ***(Kolmogorov)*** *Für einen subkritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ gilt*

$$c := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu^n}\mathbb{P}(Z_n > 0) \begin{cases} > 0, & \textit{falls } \mathbb{E}Z_1 \log Z_1 < \infty \ \textit{(und } p_0 < 1\textit{)} \\ = 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\mathbb{E}Z_1 \log Z_1 < \infty$, so gilt insbesondere

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \overset{n\to\infty}{\simeq} c\mu^n.$$

Satz 2.10. ***(Yaglom)*** *Für einen subkritischen GWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ (mit $p_0 < 1$) und c wie aus Satz 2.9 konvergiert $\big(\mathbb{P}(Z_n = k \mid Z_n > 0)\big)_{k\geq 1}$ für $n \to \infty$ gegen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $(b_k)_{k\geq 1}$, die Yaglom-quasistationäre-Verteilung, mit erzeugender Funktion*

$$\mathcal{B}(s) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(s^{Z_n} \mid Z_n > 0)$$

und Erwartungswert

$$\mathcal{B}'(1) = \sum_{k\geq 1} kb_k = \frac{1}{c},$$

wobei wir $\frac{1}{c} := \infty$ setzen, falls $c = 0$ ist.

Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{Y}}$ eine Yaglom-quasistationär-verteilte Zufallsgröße. Da $\tilde{\mathcal{Y}}$ eine fast sicher positive Zufallsgröße ist, folgt

$$\mathbb{E}\tilde{\mathcal{Y}} > 0. \tag{2.2}$$

Durch die Kombination der Sätze von Kolmogorov und Yaglom erhalten wir außerdem

$$\mathbb{E}\tilde{\mathcal{Y}} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}Z_1 \log Z_1 < \infty. \tag{2.3}$$

Eine leichte Verallgemeinerung der Situation im Satz von Yaglom ergibt sich, wenn wir wissen, dass der Prozess k weitere Generationen überlebt. Wir bedingen also Z_n unter $\{Z_{n+k} > 0\}$ für ein $k \geq 0$ anstatt unter $\{Z_n > 0\}$.

Zur Vereinfachung führen wir folgende Notation ein:

$$\mathcal{B}_{n,k}(s) := \mathbb{E}(s^{Z_n} \mid Z_{n+k} > 0) \ \text{ für } n, k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

Der folgende Satz gibt Aufschluss über das Verhalten von Z_n bedingt unter $\{Z_{n+k} > 0\}$ für $n \to \infty$.

Satz 2.11. *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein subkritischer GWP und $\mathcal{B}(s)$ die erzeugende Funktion der Yaglom-quasistationären-Verteilung, sowie die $\mathcal{B}_{n,k}(s)$ wie in (2.4) definiert. Für alle $k \geq 0$ konvergiert $\big(\mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_{n+k} > 0)\big)_{j\geq 1}$ gegen eine Verteilung $(b_j(k))_{j\geq 1}$ auf $\mathbb{N}$ für $n \to \infty$. Diese Verteilung konvergiert für $k \to \infty$ gegen eine weitere Verteilung auf $\mathbb{N}$, falls $\mathbb{E}Z_1 \log Z_1 < \infty$ ist. Genauer gilt:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,k}(s) = \frac{\mathcal{B}(s)-\mathcal{B}(sf_k(0))}{1-\mathcal{B}(f_k(0))}$ *für jedes $k \geq 0$;*

(ii) $\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,k}(s) = \frac{s\mathcal{B}'(s)}{\mathcal{B}'(1)}$, *falls $\mathbb{E}Z_1 \log Z_1 < \infty$.*

Für $k = 0$ besagt der obige Satz also insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,0}(s) = \frac{\mathcal{B}(s) - \mathcal{B}(sf_0(0))}{1 - \mathcal{B}(f_0(0))} = \mathcal{B}(s),$$

unter der Beachtung, dass $f_0 = id$ und $\tilde{\mathcal{Y}} > 0$ fast sicher und damit $\mathcal{B}(0) = 0$ gilt. Wir erhalten also die Aussage vom Satz von Yaglom als Spezialfall dieses Satzes.

Lässt man bei $\big(\mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_{n+k} > 0)\big)_{j\geq 1}$ nicht n sondern k gegen unendlich laufen, so konvergiert diese Verteilung gegen eine größenverzerrte Verteilung, wie der folgende Satz besagt.

Eine größenverzerrte Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ ist dabei wie folgt definiert: Sei Q ein Maß auf $\mathbb{N}_0$ mit positivem, endlichem Erwartungswert $\gamma := \sum_{k\geq 0} kQ(\{k\})$. Die Verteilung $\hat{Q}$ auf $\mathbb{N}_0$, die durch die Einpunktwahrscheinlichkeiten

$$\hat{Q}(\{k\}) := \frac{kQ(\{k\})}{\gamma}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{2.5}$$

gegeben ist, nennt man *größenverzerrte Verteilung von Q.*

Satz 2.12. *Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein subkritischer GWP. Dann gilt für alle $n \geq 0$ und $i, j \geq 1$*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_i(Z_n = j \mid Z_{n+k} > 0) = \frac{j}{i\mu^n}\mathbb{P}_i(Z_n = j).$$

Einen Prozess $(\tilde{Z}_n)_{n\geq 0}$ mit $\mathbb{P}_i(\tilde{Z}_n = j) = \frac{j}{i\mu^n}\mathbb{P}_i(Z_n = j)$ für alle $n \geq 0$, $i, j \geq 1$ bezeichnet man als *Q-Prozess* assoziiert zu $(Z_n)_{n\geq 0}$ bzw. der Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$. Anschaulich beschreibt der Q-Prozess den Prozess Z_n bedingt darunter, in entfernter Zukunft noch nicht ausgestorben zu sein, jedoch in noch weiter entfernterer Zukunft auszusterben.

Korollar 2.13. *Gilt für einen subkritischen GWP $\mathbb{E}Z_1 \log Z_1 < \infty$, so folgt für dessen Q-Prozess*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(\tilde{Z}_n = j) = \frac{j}{\mathbb{E}\tilde{\mathcal{Y}}}\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{Y}} = j)$$

für alle $i, j \geq 0$. Dabei ist $\tilde{\mathcal{Y}}$ Yaglom-quasistationär-verteilt.

Man nennt die Grenzverteilung $\big(\frac{j}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\mathbb{P}(\mathcal{Y} = j)\big)_{j\geq 1}$ die *stationäre Verteilung des Q-Prozesses.*

Der kritische Fall

Beim kritischen GWP gelten analoge Sätze zu denen von Kolmogorov und Yaglom. Die Aussterbegeschwindigkeit ist im kritischen Fall jedoch geringer als im subkritischen Fall. Weiter konvergiert $\frac{Z_n}{n}$ bedingt unter $\{Z_n > 0\}$ in Verteilung gegen eine exponentialverteilte Zufallsgröße. Dies bestätigen die zwei nachfolgenden Sätze.

Satz 2.14. *Für einen kritischen GWP* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *mit* $0 < \operatorname{Var} Z_1 < \infty$ *gilt*

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \overset{n\to\infty}{\simeq} \frac{2}{n \operatorname{Var} Z_1}$$

Satz 2.15. *Für einen kritischen GWP* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *mit* $0 < \operatorname{Var} Z_1 < \infty$ *gilt*

$$\mathbb{P}\Big(\frac{Z_n}{n} \in \cdot \;\Big|\; Z_n > 0\Big) \xrightarrow{w} Exp\Big(\frac{2}{\operatorname{Var} Z_1}\Big), \quad n \to \infty.$$

2.2 Der Galton-Watson-Prozess in zufällig variierenden Umgebungen

Bei dem bisher betrachteten einfachen GWP war die Reproduktionsverteilung in jeder Generation gleich. Eine Verallgemeinerung dieser Situation erhalten wir, wenn diese von Generation zu Generation variieren kann. Das bedeutet, die Individuen der n-ten Generation vermehren sich möglicherweise gemäß einer anderen Verteilung als die Individuen der $(n+k)$-ten Generation für $k \geq 1$. Die in diesem Abschnitt stehenden Eigenschaften von Galton-Watson-Prozessen in zufällig variierenden Umgebungen sind entnommen aus [2], [7], [8], [12] und [19]

2.2.1 Modellbeschreibung

Es bezeichne

$$\mathfrak{W}(\mathbb{N}_0) := \Big\{(b_k)_{k\geq 0} \;\Big|\; b_k \geq 0 \text{ für alle } k \geq 0,\ \sum_{k\geq 0} b_k = 1,\ \sum_{k\geq 0} k b_k < \infty\Big\}$$

die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{N}_0$ mit endlichem Erwartungswert. Da $\mathfrak{W}(\mathbb{N}_0)$ ein Teilraum des Banachraums l^1 der absolut konvergenten Reihen ist, wird durch die kanonische Metrik auf l^1 eine Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{W}(\mathbb{N}_0)$ induziert. Sei $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\mathfrak{W}(\mathbb{N}_0), \mathfrak{B})$. Diese Folge liefert uns die Reproduktionsverteilungen der Individuen in den verschiedenen Generationen. Wie beim einfachen GWP zeugen die Individuen unabhängig voneinander Nachkommen und die Summe der Nachkommen einer Generation bildet die Population der nächsten Generation. Alle Individuen einer Generation vermehren sich gemäß der gleichen Reproduktionsverteilung. Diese ist jedoch zufällig gewählt und kann von Generation zu Generation variieren.

Definition 2.16. Sei $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Werten in $\mathfrak{W}(\mathbb{N}_0)$. Eine stochastische Folge $(Z_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsgrößen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ heißt *Galton-Watson-Prozess in zufällig variierenden Umgebungen* (GWPZVU) mit *Umgebungsfolge* $\mathcal{U}$, falls gilt:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} \in \cdot \mid Z_0, ..., Z_n,\ \mathcal{U}) = \mathbb{P}(Z_{n+1} \in \cdot \mid Z_n,\ \mathcal{U}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}; \tag{2.6}$$

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} \in \cdot \mid Z_n = i,\ \mathcal{U} = (u_k)_{k\geq 1}) = u_{n+1}^{*(i)} \quad \mathbb{P}^{(Z_n,\mathcal{U})}\text{-f.s.} \tag{2.7}$$

für alle $i, n \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist $u^{*(i)}$ die i-fache Faltung der Verteilung $u \in \mathfrak{W}(\mathbb{N}_0)$. Für $i = 0$ setzen wir $u^{*(0)} = \delta_0$.

Die Eigenschaft (2.6) sichert uns, dass $(Z_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette unter $\mathbb{P}(\cdot|\mathcal{U})$ bildet, und (2.7) gibt die Übergangswahrscheinlichkeiten des Prozesses an.

Auch hier können wir den GWPZVU in einer rekursiven Darstellung in ein Standardmodell

$$(\Omega, \mathcal{A}, (\mathbb{P}_i)_{i\geq 0}, (X_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 1}, (Z_n)_{n\geq 0}, (\mathcal{U}_n)_{n\geq 1})$$

einbetten. In $(\Omega, \mathcal{A})$ seien wie beim GWP Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, sowie Zufallsgrößen Z_0, $X_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}$, mit Werten in $\mathbb{N}_0$, und Zufallsvariablen $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit Werten in $\mathfrak{W}(\mathbb{N}_0)$ gegeben. Die Umgebungsfolge $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_n)_{n\geq 0}$ besitzt unter jedem $\mathbb{P}_i$ dieselbe Verteilung und die $X_{n,k}$ sind unter jedem $\mathbb{P}_i(\cdot|\mathcal{U})$ stochastisch unabhängig. Ferner gilt $\mathbb{P}_i(Z_0 = i) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere folgt damit die Unabhängigkeit von Z_0 und $\mathcal{U}$. Wie beim GWP gibt Z_0 die Anzahl der Urahnen und $X_{n,k}$ die Anzahl der Nachkommen des k-ten Individuums der n-ten Generation an. Die Verteilung von $X_{n,k}$ ist jedoch zufällig gegeben durch die Folge $\mathcal{U}$ mit

$$\mathbb{P}(X_{n,k} \in \cdot \mid \mathcal{U}) = \mathcal{U}_{n+1} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ wird die Anzahl der Individuen der $(n+1)$-ten Generation dann rekursiv definiert durch

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}.$$

Wie beim GWP setzen wir wieder $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$.

Anders als beim einfachen GWP ist die Reproduktionsverteilung eines Individuums und damit seine erzeugende Funktion zufällig gewählt. Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWPZVU mit Umgebungsfolge $\mathcal{U}$. Dann bezeichnen wir mit

$$f_{\mathcal{U}_{n+1}}(s) := \mathbb{E}(s^{X_{n,k}} \mid \mathcal{U}), \quad n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N},$$

die *erzeugende Funktion der Zufallsgröße* $X_{n,k}$ unter $\mathbb{P}(\cdot\ |\mathcal{U})$ und mit

$$\mu_{\mathcal{U}_{n+1}} := \mathbb{E}(X_{n,k} \mid \mathcal{U}) = f'_{\mathcal{U}_{n+1}}(1), \quad n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}.$$

den *Erwartungswert von* $X_{n,k}$ unter $\mathbb{P}(\cdot \mid \mathcal{U})$.

Die erzeugende Funktion und der Erwartungwert von Z_n unter $\mathbb{P}_i(\cdot \mid \mathcal{U})$ bzw. $\mathbb{P}_i$ lassen sich durch die $f_{\mathcal{U}_n}$ und $\mu_{\mathcal{U}_n}$ darstellen. Dies zeigt die nachfolgende Proposition.

Proposition 2.17. *(vgl. [3] oder [7])*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWPZVU mit Umgebungsfolge $\mathcal{U}$.

(i) Für alle $i, n \geq 0$ und $s \in [0,1]$ gilt

$$\mathbb{E}_i(s^{Z_n}|\mathcal{U}) = (\mathbb{E}(s^{Z_n}|\mathcal{U}))^i = (f_{\mathcal{U}_1} \circ ... \circ f_{\mathcal{U}_n}(s))^i \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.} \tag{2.8}$$

sowie

$$\mathbb{E}_i(s^{Z_n}) = \mathbb{E}\big((f_{\mathcal{U}_1} \circ ... \circ f_{\mathcal{U}_n}(s))^i\big). \tag{2.9}$$

(ii) Für alle $i, n \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}_i(Z_n \mid \mathcal{U}) = i \prod_{j=1}^{n} \mu_{\mathcal{U}_j} \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s.} \tag{2.10}$$

sowie

$$\mathbb{E}_i(Z_n) = i\mathbb{E}\Big(\prod_{j=1}^{n} \mu_{\mathcal{U}_j}\Big) = i\mathbb{E}Z_n. \tag{2.11}$$

2.2.2 Grenzwertsätze

Sind bei einem GWPZVU mit Umgebungsfolge $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 1}$ die $\mathcal{U}_n$, $n \geq 1$, unabhängig und identisch verteilt, so spricht man von einem *GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter (u.i.v.) Umgebungsfolge.*

Da wir uns bei unseren späteren Betrachtungen nur mit solchen Prozessen beschäftigen werden, geben wir im Folgenden die Grenzwertsätze nur für diesen Spezialfall an. Viele dieser Sätze, können jedoch allgemeiner bewiesen werden, z.B. bei stationär, ergodischen Umgebungsfolgen. Siehe dazu Kapitel VI, Abschnitt 5 in [9].

Die Grenzwertsätze des einfachen GWP können im Wesentlichen auf den GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge übertragen werden, wenn man die Voraussetzungen entsprechend ändert. Als erstes sehen wir, dass auch bei GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge das Extinktions-Explosions-Prinzip erhalten bleibt.

Satz 2.18. *(vgl. [19], Satz 2.3)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ und $\mathbb{P}(\mathcal{U}_1 = \delta_1) < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z_n \to 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_n \to \infty)$$

sowie für alle $N > 0$

$$\mathbb{P}(0 < Z_n < N) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Der nachfolgende Satz gibt nun Bedingungen für das fast sichere Aussterben eines GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge an.

Satz 2.19. *(vgl. [19], Satz 3.1)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ mit $\mathbb{P}(\mathcal{U}_1 = \delta_1) < 1$, welcher außerdem $\mathbb{E}|\log \mu_{\mathcal{U}_1}| < \infty$ erfüllt.

(i) Gilt $\mathbb{E}(\log \mu_{\mathcal{U}_1}) \leq 0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$.

(ii) Gilt dagegen $\mathbb{E}(\log \mu_{\mathcal{U}_1}) > 0$ und zusätzlich $\mathbb{E}\big(\log(1 - f_{\mathcal{U}_1}(0))\big) > -\infty$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = c > 0$, für ein $c \in (0, 1]$.

Entsprechend zum GWP definieren wir:

Definition 2.20. Ein GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge heißt *superkritisch, kritisch* oder *subkritisch*, wenn $\mathbb{E}(\log \mu_{\mathcal{U}_1}) > 0$, $= 0$ bzw. < 0 ist.

Wie beim GWP konvergiert ein GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge bei geeigneter Normierung fast sicher gegen eine Zufallsgröße W.

Satz 2.21. *(vgl. [8], Satz 1)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein superkritischer GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge $\mathcal{U}$, für welchen $0 < \mathbb{E}Z_1 < \infty$ ist. Dann existiert eine integrierbare, nichtnegative Zufallsgröße W, sodass

$$\frac{Z_n}{\mathbb{E}Z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} W \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und $\mathbb{E}W \leq 1$ gilt. Ist zusätzlich

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{\mu_{\mathcal{U}_1}} \mathbb{E}(Z_1 \log Z_1 | \mathcal{U})\Big) < \infty,$$

dann gilt

$$\mathbb{E}W = 1 \quad \textit{und} \quad \{W = 0\} = \{Z_n \to 0\} \ \mathbb{P}\text{-f.s.}.$$

Bei einem subkritischen GWPZVU $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ existieren analoge Sätze zu Satz 2.10 von Yaglom und Satz 2.9 von Kolmogorov. Auch hier konvergiert die erzeugende Funktion von Z_n bedingt unter $\{Z_n > 0\}$ gegen eine erzeugende Funktion und es lässt sich eine Aussage über die Aussterbegeschwindigkeit treffen. Allerdings ist das asymptotische Verhalten diesmal abhängig von $\mathbb{E}(\mu_{\mathcal{U}_1} \log \mu_{\mathcal{U}_1})$.

Definition 2.22. Wir nennen einen subkritischen GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge *stark subkritisch, moderat subkritisch* oder *schwach subkritisch* genau dann, wenn $\mathbb{E}(\mu_{\mathcal{U}_1} \log \mu_{\mathcal{U}_1}) < 0$, $= 0$ bzw. > 0 ist.

Da der moderat und schwach subkritische Fall für unsere späteren Betrachtungen keine entscheidende Rolle spielt, geben wir hier nur die Ergebnisse im stark subkritischen Fall an. In einigen wenigen Situationen greifen wir jedoch auf die analogen Sätz über moderat bzw. schwach subkritischen GWPZVU zurück. Diese befinden sich daher im Anhang (Satz A.8 und Satz A.9).

Satz 2.23. ***(stark subkritischer Fall)*** *(vgl. [12], Satz 1.1 und [2], Korollar 2.3)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein stark subkritischer GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ und

$$\mathbb{E}(Z_1 \log Z_1) < \infty.$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \overset{n\to\infty}{\simeq} c_1(\mathbb{E}Z_1)^n$$

für ein $c_1 \in (0,1]$. Des Weiteren existieren $b_1(k) \in [0,1]$, $k \geq 1$, mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = k \mid Z_n > 0) = b_1(k), \quad k \geq 1,$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_1(k) = 1 \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k b_1(k) = \frac{1}{c_1} < \infty.$$

Außerdem ist Z_n bedingt unter $\{Z_n > 0\}$ gleichgradig integrierbar, d.h.

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_{\{Z_n > K\}} \mid Z_n > 0) = 0.$$

Wie beim einfachen GWP nennen wir die obige Grenzverteilung die *Yaglom-quasistationäre-Verteilung* und bezeichnen mit $\mathcal{Y}$ eine Zufallsgröße, die diese Verteilung besitzt.

Im stark subkritischen Fall erhalten wir auch ein Analogon zu Satz 2.12.

Satz 2.24. *(vgl. [2], Satz 1.4)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein stark subkritischer GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ und $\mathbb{E}(Z_1 \log Z_1) < \infty$. Dann gilt für alle $n, j \geq 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_{n+k} > 0) = \frac{j}{\mathbb{E}Z_n} \mathbb{P}(Z_n = j).$$

Wir bezeichnen auch hier einen Prozess $(\tilde{Z}_n)_{n\geq 0}$ mit $\mathbb{P}(\tilde{Z}_n = j) = \frac{j}{\mathbb{E}Z_n}\mathbb{P}(Z_n = j)$ für alle $j, n \geq 0$ als *Q-Prozess* assoziiert zu $(Z_n)_{n\geq 0}$.

Korollar 2.25. *(vgl. [2], Korollar 2.2)*
Gilt für einen stark subkritischen GWPZVU $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit u.i.v. Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ $\mathbb{E}(Z_1 \log Z_1) < \infty$, so folgt für dessen Q-Prozess

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i(\tilde{Z}_n = j) = \frac{j}{\mathbb{E}\mathcal{Y}} \mathbb{P}(\mathcal{Y} = j)$$

für alle $i, j \geq 0$. Dabei ist $\mathcal{Y}$ Yaglom-quasistationär-verteilt.

Man nennt auch hier die Verteilung $\left(\frac{j}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\mathbb{P}(\mathcal{Y} = j)\right)_{j\geq 1}$ die *stationäre Verteilung des Q-Prozesses.*

3 Zwei wichtige Prozesse und erste Eigenschaften

Nachdem wir im vorigen Kapitel den GWP definiert und einige wichtige Resultate angegeben haben, wenden wir uns jetzt wieder dem ZTPIZ zu. Als Einstieg definieren wir in diesem Kapitel als erstes den Prozess der Gesamtanzahl an Parasiten in einer Generation und sehen, dass dieser einen GWP bildet. Von großer Wichtigkeit für unsere späteren Betrachtungen wird auch der Prozess der Anzahl an Parasiten in einer zufälligen Zelllinie sein, welchen wir als zweites betrachten wollen. Es stellt sich heraus, dass dieser aufgrund seiner Definition ein GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge ist.

3.1 Der Parasitenprozess

In diesem Abschnitt führen wir den Prozess der Gesamtzahl an Parasiten oder kurz Parasitenprozess ein und zeigen, dass dieser einen GWP bildet.

Definition 3.1. Der *Parasitenprozess* $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ ist definiert durch

$$\mathcal{Z}_n := \sum_{v\in\mathbb{G}_n} Z_v$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei

$$Ext := \{\mathcal{Z}_n \to 0\} = \{\mathcal{Z}_n = 0 \text{ für ein } n \geq 0\}$$

das Ereignis, dass die Parasiten aussterben.

Der Prozess $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ ist ein GWP, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 3.2. *Der Parasitenprozess $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ ist ein GWP mit Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} \in \cdot)$ und Reproduktionsmittel $\mu_0 + \mu_1$.*

Beweis: Die Parasiten bekommen unabhängig voneinander und gemäß der Verteilung $\mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} \in \cdot)$ Nachkommen. Da die Anzahl der Parasiten in einer Zelle nur abhängig von der Anzahl der Parasiten in der Mutterzelle ist, ist die Anzahl aller Parasiten einer Generation auch nur abhängig von der Anzahl der Parasiten in der vorherigen Generation. Aufgrund der Unabhängigkeit der Parasiten gilt

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+1} = j \mid \mathcal{Z}_n = i) = \mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} = j)^{*(i)}$$

für alle $n, i, j \in \mathbb{N}_0$. Damit bildet $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ eine homogene Markov-Kette mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und nach Definition 2.1 einen GWP. Dass $\mu_0 + \mu_1$ das Reproduktionsmittel ist, ergibt sich dann sofort. □

3.2 Der Prozess einer zufälligen Zelllinie

Des Weiteren ist für unsere Untersuchungen auch die Anzahl der Parasiten in einer zufälligen Zelllinie von Interesse. Wir wollen uns also einen zufälligen Pfad durch den Zellbaum wählen und das Vermehrungsverhalten der Parasiten in dieser Zelllinie betrachten. Dazu stellen wir uns vor, dass wir in jeder Generation, in einer Zelle befindend, eine faire Münze werfen und bei Kopf oder Zahl in die erste bzw. zweite Tochterzelle gehen. Wir definieren uns daher zuerst eine geeignete Umgebungsfolge, welche den Münzwurf simuliert, und daraus dann den Prozess der zufälligen Zelllinie.

Definition 3.3. Seien $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 1}$ unabhängige $B(1, \frac{1}{2})$-verteilte Zufallsgrößen, welche außerdem unabhängig von $(Z_v)_{v\in\mathbb{T}}$ seien. Setzen wir $[n] := \mathcal{U}_1...\mathcal{U}_n$ für $n \geq 1$ und $[0] := \varnothing$, dann heißt

$$(Z_{[n]})_{n\geq 0} = (Z_{\mathcal{U}_1...\mathcal{U}_n})_{n\geq 0}$$

Prozess einer zufälligen Zelllinie (PZZ).

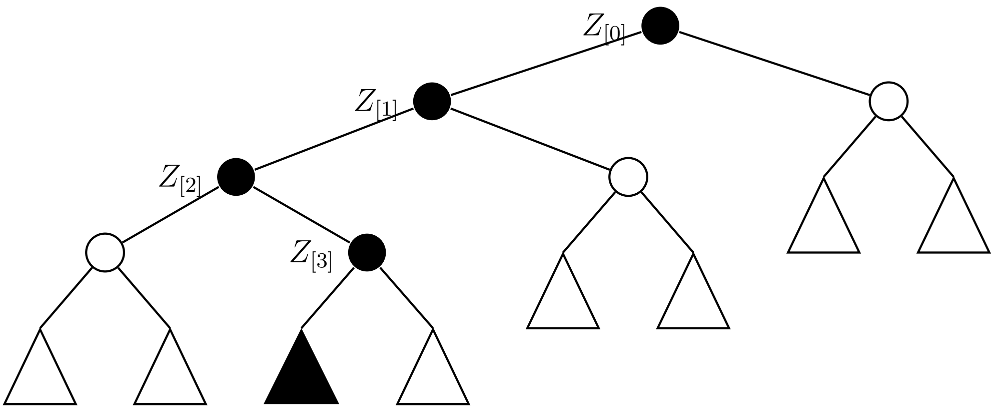


Abbildung 3.1: Ein zufälliger Pfad durch den Zellbaum.

Zur Zeit $n \in \mathbb{N}_0$, in einer Zelle befindend, gibt uns $\mathcal{U}_{n+1} \in \{0, 1\}$ also den Ausgang des nächsten Münzwurfes und damit die Tochterzelle an, in die wir gehen. Die

Realisierung $\mathcal{U}_1 ... \mathcal{U}_n = u_1 ... u_n$ der ersten n Umgebungsvariablen beschreibt somit den Pfad von der Wurzel durch den Zellbaum zur Zelle $u_1 ... u_n \in \mathbb{G}_n$. Der zufällig gewählte Pfad bis zur vierten Generation in Abblidung 3.1 ist also $\mathcal{U}_1 ... \mathcal{U}_4 = 0010$.

Bei einem normalen ZTPIZ vermehren sich die Parasiten unabhängig und gemäß der Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} \in \cdot)$. Dabei geben $X^{(0)}$ bzw. $X^{(1)}$ die Anzahl der Nachkommen eines Parasiten an, welche in die erste bzw. zweite Tochterzelle gehen. Gehen wir nun bei einem PZZ von einer Zelle $v \in \mathbb{G}_n$ in deren erste Tochterzelle, so interessieren wir uns nur für die Anzahl an Parasiten in dieser Zelle. Wieviele Parasiten sich in der zweiten Tochterzelle befinden ist für uns irrelevant. Die Parasiten der Zelle v vermehren sich hier also gemäß $\mathbb{P}(X^{(0)} \in \cdot)$. Gehen wir jedoch in die zweite Tochterzelle, so vermehren sich die Parasiten gemäß $\mathbb{P}(X^{(1)} \in \cdot)$. Setzen wir $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_m)_{m \geq 1}$, dann gilt für alle $n, k, l \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{[n+1]} = k \mid Z_{[n]} = l,\ \mathcal{U} = (u_m)_{m \geq 1}) &= \mathbb{P}(Z_{u_1 ... u_{n+1}} = k \mid Z_{u_1 ... u_n} = l) \\ &= \mathbb{P}\Big(\sum_{s=1}^{l} X^{(u_{n+1})}_{u_1 ... u_n, s} = k \Big) \\ &= \mathbb{P}(X^{(u_{n+1})} = k)^{*l} \quad \mathbb{P}^{(Z_{[n]}, \mathcal{U})}\text{-f.s.}, \end{aligned}$$

wobei bei der ersten Gleichheit die Unabhängigkeit von $\mathcal{U}$ und $(Z_i)_{i \in \mathbb{T}}$ benutzt wurde. Die $\mathcal{U}_n$ geben also die Reproduktionsverteilung in jedem Generationswechsel an, welche aus der Menge $\{\mathbb{P}(X^{(0)} \in \cdot), \mathbb{P}(X^{(1)} \in \cdot)\}$ gewählt wird. Damit ist ein PZZ ein GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge $\mathcal{U}$. Die eben gewonnenen Erkenntnisse halten wir in der folgenden Proposition fest.

Proposition 3.4. *Sei $(Z_v)_{v \in \mathbb{T}}$ ein ZTPIZ und $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_n)_{n \geq 1}$ wie oben definiert. Dann gilt:*

(i) *$(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ ist ein GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge $\mathcal{U}$.*

(ii) *Für $u = u_1 ... u_n \in \mathbb{G}_n$ gilt $\mathbb{P}(Z_{[n]} \in \cdot \mid \mathcal{U}_1 = u_1, ..., \mathcal{U}_n = u_n) = \mathbb{P}(Z_u \in \cdot\ )$.*

(iii) *Gilt $X^{(0)} \overset{d}{=} X^{(1)}$, so bildet $(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ einen GWP mit Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(X^{(0)} \in \cdot)$.*

Beweis: Da $(Z_v)_{v \in \mathbb{T}}$ eine Markov-Kette indiziert durch einen Baum und unabhängig von $\mathcal{U}$ ist, bildet $(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ eine Markov-Kette bedingt unter $\mathcal{U}$ und es gilt (2.6). Die Eigenschaft (2.7) ergibt sich aus den Überlegungen vor der Proposition. Damit ist $(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ ein GWPZVU mit Umgebungsfolge $\mathcal{U}$. Die anderen beiden Behauptungen ergeben sich sofort. □

Da $(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ nach der vorherigen Proposition ein GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge ist, erhalten wir mit Hilfe von (2.8) und (2.10), dass für $u = u_1...u_n \in \mathbb{G}_n$ die *erzeugende Funktion* f_u und der *Erwartungswert* μ_u von Z_u von der Gestalt

$$f_u(s) = f_{u_1} \circ ... \circ f_{u_n}(s)$$

und

$$\mu_u = \prod_{j=1}^{n} \mu_{u_j}$$

sind. Wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteilung der $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, folgt weiter aus (2.8) und (2.11)

$$\mathbb{E}(Z_{[n]}) = \mu^n \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_k(s^{Z_u}) = f_u(s)^k \tag{3.1}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$, wobei an $\mu = \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1)$ erinnert sei. Für alle $u_1...u_n \in \{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, gilt außerdem

$$\mathbb{P}((\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_n) = (u_1, ..., u_n)) = \frac{1}{2^n},$$

woraus dann aus (2.9)

$$\mathbb{E}_k(s^{Z_{[n]}}) = \frac{1}{2^n} \sum_{u \in \mathbb{G}_n} f_u(s)^k \tag{3.2}$$

für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ folgt.

Im Folgenden übertragen wir die Resultate für GWPZVU aus Abschnitt 2.2.2 auf den PZZ. Wir beginnen mit einer äquvalenten Bedingung für das fast sichere Aussterben von $Z_{[n]}$.

Korollar 3.5. *Für einen PZZ* $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ *gilt:*

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} \to 0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_0\mu_1 \leq 1.$$

Beweis: Um diese Behauptung zu zeigen, genügt es, die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 2.19 für den PZZ nachzuweisen. Es gilt

$$\mathbb{E}\big|\log(\mathbb{E}(Z_{[1]} \mid \mathcal{U}))\big| \;=\; \frac{1}{2} \sum_{u \in \{0,1\}} \big|\log(\mathbb{E}(Z_{[1]} \mid \mathcal{U}_1 = u))\big| \;=\; \frac{1}{2} \sum_{u \in \{0,1\}} |\log \mu_u| \;<\; \infty,$$

da $0 < \mu_0, \mu_1 < \infty$ vorausgesetzt war. Durch analoge Rechnung ergibt sich

$$\mathbb{E}\big(\log(\mathbb{E}(Z_{[1]} \mid \mathcal{U}))\big) \;=\; \frac{1}{2} \sum_{u \in \{0,1\}} \log \mu_u \;=\; \frac{1}{2} \log(\mu_0\mu_1)$$

und damit

$$\mathbb{E}\big(\log(\mathbb{E}(Z_{[1]} \mid \mathcal{U}))\big) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \mu_0\mu_1 \leq 1. \tag{3.3}$$

Des Weiteren erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\log(1-\mathbb{P}(Z_{[1]}=0 \mid \mathcal{U}_1))\big) &= \frac{1}{2}\big(\log(1-\mathbb{P}(X^{(0)}=0))+\log(1-\mathbb{P}(X^{(1)}=0))\big)\\ &= \frac{1}{2}\log\big((1-\mathbb{P}(X^{(0)}=0))(1-\mathbb{P}(X^{(1)}=0))\big)\\ &> -\infty,\end{aligned}$$

da $\mu_0, \mu_1 > 0$, und damit $\mathbb{P}(X^{(0)}=0), \mathbb{P}(X^{(1)}=0) < 1$ gilt. Somit sind alle Voraussetzungen von Satz 2.19 erfüllt. Durch dessen Anwendung und (3.3) folgt dann die Behauptung des Korollars. □

Für einen PZZ $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(Z_{[1]}|\mathcal{U})\log(\mathbb{E}(Z_{[1]}|\mathcal{U}))\big) &= \frac{1}{2}\sum_{u\in\{0,1\}}\mathbb{E}(Z_{[1]}|\mathcal{U}_1=u)\log(\mathbb{E}(Z_{[1]}|\mathcal{U}_1=u))\\ &= \frac{1}{2}\sum_{u\in\{0,1\}}\mathbb{E}(Z_u)\log(\mathbb{E}(Z_u))\\ &= \frac{1}{2}(\mu_0\log\mu_0+\mu_1\log\mu_1).\end{aligned}$$

Analog zum GWPZVU definieren wir daher:

Definition 3.6. Ein PZZ heißt *superkritisch, kritisch* oder *subkritisch* genau dann, wenn $\mu_0\mu_1 > 1$, $= 1$ bzw. < 1 gilt. Ist $\mu_0\mu_1 < 1$, so nennen wir einen PZZ *stark subkritisch, moderat subkritisch* oder *schwach subkritisch* genau dann, wenn $\mu_0\log\mu_0+\mu_1\log\mu_1 < 0$, $= 0$ bzw. > 0 gilt.

Aus Satz 2.23 folgen einige Eigenschaften für den stark subkritischen PZZ. Auch für einen moderat bzw. schwach subkritischer PZZ gelten unter gewissen Annahmen (z.B. wenn $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ quadratisch integrierbar sind) ähnliche Eigenschaften (vgl. Korollar A.11 im Anhang). Diese wollen wir hier jedoch nicht beweisen.

Korollar 3.7. *Für einen stark subkritischen PZZ $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ existiert im Fall*

$$\mathbb{E}(X^{(a)}\log X^{(a)}) < \infty, \quad a\in\{0,1\},$$

ein $c_1\in(0,1]$, sodass

$$\mathbb{P}(Z_{[n]}>0) \overset{n\to\infty}{\simeq} c_1\mu^n$$

gilt. Weiter gilt für alle $s\in[0,1]$

$$\mathbb{E}(s^{Z_{[n]}} \mid Z_{[n]}>0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(s^{\mathcal{Y}}),$$

wobei $\mathcal{Y}$ eine Yaglom-quasistationär-verteilte Zufallsgröße mit $\mathbb{E}\mathcal{Y} = \frac{1}{c_1}$ ist. $Z_{[n]}$ bedingt unter $\{Z_{[n]}>0\}$ ist ferner gleichgradig integrierbar, d.h.

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}} \mid Z_{[n]}>0) = 0. \tag{3.4}$$

Beweis: Für den Beweis reicht es, die Voraussetzungen von Satz 2.23 nachzuprüfen. Diese sind erfüllt, da

$$\mathbb{E}(Z_{[1]} \log Z_{[1]}) \;=\; \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}(X^{(0)} \log X^{(0)}) + \mathbb{E}(X^{(1)} \log X^{(1)})\big) \;<\; \infty$$

gilt. □

Die erzeugende Funktion von $\mathcal{Y}$ lässt sich im stark subkritischen Fall eindeutig charakterisieren. Für dieses Unterfangen benötigen wir allerdings folgendes Lemma. Es sei daran erinnert, dass f_0 und f_1 die erzeugenden Funktion von $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ sind, sowie $\mu = \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1)$.

Lemma 3.8. *Eine stetige Funktion* $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$H(1) = 0 \quad \textit{und} \quad H = \frac{H \circ f_0 \cdot f_0' + H \circ f_1 \cdot f_1'}{2\mu}$$

ist konstant 0.

Beweis: Angenommen es gilt $H \not\equiv 0$. Da H stetig und $H(1) = 0$ ist, existiert ein $x_{max} \in [0,1)$ mit

$$0 < \sup\big\{|H(x)| : x \in [0,1]\big\} = |H(x_{max})|.$$

Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $[0,1)$ mit $x_n \to 1$. Dann existiert für jedes $n \geq 1$ ein $\beta_n \in [0, x_n]$, sodass

$$\sup\big\{|H(x)| : x \in [0,x_n]\big\} = |H(\beta_n)| \tag{3.5}$$

ist. f_0 und f_1 kann man jeweils auch als erzeugende Funktion eines GWP mit Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(X^{(0)} \in \cdot)$ bzw. $\mathbb{P}(X^{(1)} \in \cdot)$ auffassen. Auf $[0,1]$ sind deswegen beide konvex und monoton wachsend, und aufgrund der Voraussetzung (1.4) ist mindestens eine nach Proposition 2.3 (ii) sogar strikt konvex. Daraus folgt

$$f_0'(s), f_1'(s) \geq 0 \quad \text{und} \quad f_0'(s) + f_1'(s) < f_0'(1) + f_1'(1) = 2\mu$$

für alle $s \in [0,1)$. Aufgrund dieser Eigenschaft, der Dreiecksungleichung, den Voraussetzungen des Satzes und (3.5) gilt dann für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sup\big\{|H(x)| : x \in [0,x_n]\big\} &= |H(\beta_n)| \\
&= \frac{1}{2\mu}\big|H(f_0(\beta_n))f_0'(\beta_n) + H(f_1(\beta_n))f_1'(\beta_n)\big| \\
&\leq \frac{1}{2\mu}\big(|H(f_0(\beta_n))| \cdot f_0'(\beta_n) + |H(f_1(\beta_n))| \cdot f_1'(\beta_n)\big) \\
&\leq |H(x_{max})|\frac{1}{2\mu}(f_0'(\beta_n) + f_1'(\beta_n)) \\
&< |H(x_{max})|.
\end{aligned}$$

Da $x_{max} < 1$ und $x_n \to 1$ gilt, existiert ein $n_0 \geq 1$ für welches $x_{max} \in [0, x_{n_0}]$ ist. Damit ist aber

$$\sup\left\{|H(x)| : x \in [0, x_{n_0}]\right\} = |H(x_{max})|,$$

was einen Widerspruch zur vorherigen Ungleichung darstellt. Demnach gilt $H \equiv 0$.
□

Kommen wir nun zur eindeutigen Charakterisierung der erzeugenden Funktion von $\mathcal{Y}$ im stark subkritischen Fall.

Proposition 3.9. *Sei $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ ein stark subkritischer PZZ, der die Voraussetzungen des Korollars 3.7 erfüllt. Bezeichne weiter $\mathcal{Y}$ eine Yaglom-quasistationär-verteilte Zufallsgröße und $G(s) := \mathbb{E}(s^{\mathcal{Y}})$ deren erzeugende Funktion. Dann ist G die durch die Eigenschaften*

$$\begin{aligned} &G(0) = 0, \quad G'(1) < \infty, \\ &\frac{G(f_0(s)) + G(f_1(s))}{2} = \mu G(s) + (1-\mu) \end{aligned} \tag{3.6}$$

eindeutig bestimmte erzeugende Funktion.

Beweis: $G(0) = \mathbb{P}(\mathcal{Y} = 0) = 0$, da $\mathcal{Y} \geq 1$ fast sicher gilt. Die Endlichkeit des Erwartungswertes $G'(1) = \mathbb{E}\mathcal{Y} < \infty$ ergibt sich nach Korollar 3.7.

Als nächstes zeigen wir die Gültigkeit der Funktionalgleichung (3.6).

$$\begin{aligned} &1 - \mathbb{E}(s^{Z_{[n+1]}} \mid Z_{[n+1]} > 0) \\ &\quad= \frac{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} - \frac{\mathbb{E}(s^{Z_{[n+1]}}) - \mathbb{P}(Z_{[n+1]} = 0)}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \\ &\quad= \frac{1 - \mathbb{E}(s^{Z_{[n+1]}})}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \\ &\quad= \frac{1}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \sum_{k=1}^{\infty} \big(1 - \mathbb{E}(s^{Z_{[n+1]}} \mid Z_{[n]} = k)\big)\mathbb{P}(Z_{[n]} = k) \\ &\quad= \frac{1}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \sum_{k=1}^{\infty} \big(1 - \mathbb{E}_k(s^{Z_{[1]}})\big)\mathbb{P}(Z_{[n]} = k) \\ &\quad= \frac{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \frac{1}{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)} \sum_{k=1}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{2}(f_0(s)^k + f_1(s)^k)\big)\mathbb{P}(Z_{[n]} = k) \\ &\quad= \frac{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \sum_{k=1}^{\infty} \big(1 - \frac{1}{2}(f_0(s)^k + f_1(s)^k)\big)\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) \\ &\quad= \frac{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \big(1 - \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}(f_0(s)^{Z_{[n]}} \mid Z_{[n]} > 0) + \mathbb{E}(f_1(s)^{Z_{[n]}} \mid Z_{[n]} > 0)\big)\big), \end{aligned}$$

dabei wurde in der fünften Zeile Satz 1.3 und in der sechten (3.2) verwendet. Nach Korollar 3.7 gilt $\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0) \overset{n\to\infty}{\simeq} c_1\mu^n$ für ein $c_1 > 0$, und damit folgt

$$\frac{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)}{\mathbb{P}(Z_{[n+1]} > 0)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{-1}.$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich mit Korollar 3.7 somit aus der obigen Gleichung

$$\begin{aligned}
& & 1 - G(s) &= \frac{1}{\mu}\big(1 - \frac{1}{2}\big(G(f_0(s)) + G(f_1(s))\big)\big) \\
&\Leftrightarrow & \mu - \mu G(s) &= 1 - \frac{1}{2}\big(G(f_0(s)) + G(f_1(s))\big) \\
&\Leftrightarrow & \mu G(s) + (1-\mu) &= \frac{1}{2}\big(G(f_0(s)) + G(f_1(s))\big)
\end{aligned}$$

und damit (3.6).

Als letztes ist noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien G, F zwei erzeugende Funktionen, welche die im Satz stehenden Eigenschaften besitzen. Für F, G gilt damit $G(0) = F(0) = 0$ und $0 < G^{'}(1), F^{'}(1) < \infty$. Daher gibt es ein eindeutiges $\alpha > 0$, sodass $G^{'}(1) = \alpha F^{'}(1)$ ist. Wir setzen

$$H := G - \alpha F.$$

Es gilt $H^{'}(1) = 0$ und als erzeugende Funktionen sind G und F auf $[0,1]$ stetig differenzierbar. Damit ist auch H stetig differenzierber und somit insbesondere $H^{'}$ stetig. Weiter ist mit der Kettenregel und (3.6)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\mu}\big(H^{'}(f_0(s))f_0^{'}(s) + H^{'}(f_1(s))f_1^{'}(s)\big) \\
&\qquad = \frac{1}{2\mu}\big(H(f_0(s)) + H(f_1(s))\big)^{'} \\
&\qquad = \frac{1}{2\mu}\big(G(f_0(s)) + G(f_1(s)) - \alpha\big(F(f_0(s)) + F(f_1(s))\big)\big)^{'} \\
&\qquad = \frac{1}{\mu}\big(\mu G(s) + 1 - \mu - \alpha(\mu F(s) + 1 - \mu)\big)^{'} \\
&\qquad = (G(s) - \alpha F(s))^{'} \\
&\qquad = H^{'}(s).
\end{aligned}$$

Damit gelten die Voraussetzungen von Lemma 3.8 und es folgt $H^{'} \equiv 0$. Somit ist H konstant. Da $H(0) = 0$ gilt, folgt $H \equiv 0$. Also ist $G(s) = \alpha F(s)$. Nun ist aber $G(1) = F(1) = 1$ und somit $\alpha = 1$. Also ist $F = G$. □

4 Erholungswahrscheinlichkeit

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der in der Einleitung aufgeworfenen Frage: Unter welchen Bedingungen erholt sich ein Organismus? Wir sprechen von einem sich erholenden Organismus, wenn die Anzahl infizierter Zellen im Vergleich zur Gesamtanzahl an Zellen vernachlässigbar wird. Mit Hilfe der gefunden Bedingungen für das fast sichere Erholen erhalten wir dann fest, dass bei hoher mittlerer Vermehrungsrate $\mu_0 + \mu_1$ die Parasiten sich sehr ungleichmäßig auf die Tochterzellen verteilen müssen, damit sich ein Organismus regeneriert.

Zuerst geben wir die formale Definition eines sich erholenden Organismus an.

Definition 4.1. Ein Organismus *erholt* oder *regeneriert* sich, wenn

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

Kommen wir nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes. Es besagt, dass sich ein Organismus genau dann fast sicher erholt, wenn der PZZ nicht superkritisch ist.

Satz 4.2. *Es existiert eine Zufallsgröße $L \in [0,1]$, sodass*

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt. Ist $\mu_0\mu_1 \leq 1$, so gilt $\mathbb{P}(L = 0) = 1$. Ist $\mu_0\mu_1 > 1$, so gilt $\mathbb{P}(L = 0) < 1$ und $Ext = \{L = 0\}$ f.s..

Beweis: Für alle $n \geq 1$ ist $\#\mathbb{G}_n^* \leq 2\#\mathbb{G}_{n-1}^*$ fast sicher, da die Anzahl der infizierten Zellen in einem Generationsschritt sich maximal verdoppeln kann. Damit ist $(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n})_{n\geq 0}$ eine monoton fallende, nach unten durch 0 beschränkte Folge, die somit fast sicher gegen eine Zufallsgröße $L \in [0,1]$ für $n \to \infty$ konvergiert.

Weiter gilt

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n}\Big) \;=\; \frac{1}{2^n}\mathbb{E}\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n} \mathbb{1}_{\{Z_v>0\}}\Big) \;=\; \frac{1}{2^n}\sum_{v\in\mathbb{G}_n} \mathbb{P}(Z_v > 0) \;=\; \mathbb{P}(Z_{[n]} > 0) \tag{4.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aus der monotonen Konvergenz folgt somit

$$\mathbb{E}L = \mathbb{E}\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_{[n]} > 0) = 1 - \mathbb{P}(Z_{[n]} \to 0).$$

Korollar 3.5 liefert uns dann die Äquivalenzen

$$\mu_0\mu_1 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(Z_{[n]} \to 0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(L = 0) = 1$$

und damit die ersten Behauptungen des Satzes. Es ist also nur noch $\{L = 0\} = Ext$ fast sicher für den Fall $\mu_0\mu_1 > 1$ zu zeigen.

Aus $\mathcal{Z}_n \to 0$ folgt $\#\mathbb{G}_n^* \to 0$ und damit sofort $Ext \subseteq \{L = 0\}$ fast sicher. Für die andere Inklusion benutzen wir die unabhängige Vermehrung der Parasiten. Wir kreieren für jeden Parasiten der n-ten Generation einen neuen Prozess, der mit einer Zelle mit einem Parasiten startet. Diese neuen Prozesse verhalten sich so wie der ursprüngliche Prozess und sind unabhängig voneinander. Es ergibt sich, dass sich der ursprüngliche Prozess genau dann erholt, wenn sich auch alle neuen Prozesse erholen. Lässt man nun n gegen unendlich laufen, folgt das gewünschte Resultat. Wir erwähnen nochmals, dass $\mathcal{P}(n)$ die Menge der Parasiten der n-ten Generation ist. Für $p \in \mathcal{P}(n)$ definieren wir $N_k(p)$ als die Anzahl infizierter Zellen der $(n+k)$-ten Generation, die mindestens einen Nachkommen von p enthalten.

Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathcal{P}(n)$ gilt nach der Definition von $N_k(p)$

$$\frac{N_k(p)}{2^{n+k}} \leq \frac{\#\mathbb{G}_{n+k}^*}{2^{n+k}} \leq \sum_{p \in \mathcal{P}(n)} \frac{N_k(p)}{2^{n+k}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}$$

Konvergiert nun $N_k(p)/2^{n+k} \to 0$ für alle $p \in \mathcal{P}(n)$ oder $\#\mathbb{G}_{n+k}^*/2^{n+k} \to 0$ für $k \to \infty$, so erhält man damit

$$\{L = 0\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}(n)} \left\{ \frac{N_k(p)}{2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \right\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{4.2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da sich die Parasiten unabhängig voneinander vermehren, können wir jeden Parasiten $p \in \mathcal{P}(n)$ als Urahne eines neuen ZTPIZ ansehen und die so entstehenden Prozesse sind außerdem unabhängig voneinander. Für $p \in \mathcal{P}(n)$ gibt dann $N_k(p)$ die Anzahl der infizierten Zellen der k-ten Generation des Prozesses startend mit Prarasit p an. Damit gilt also nach dem zuvor Gezeigten

$$\frac{N_k(p)}{2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} L \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{4.3}$$

für alle $p \in \mathcal{P}(n)$.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $T_n := \inf\{k \geq 0 : \mathcal{Z}_k \geq n\}$ die Stoppzeit bzgl. der kanonischen Filtration $\sigma(Z_v : |v| \leq k)$ (Def. A.2), welche angibt, zu welchem Zeitpunkt die Anzahl der Parasiten zum ersten mal größer als n ist. Mit der starken Markov-

Eigenschaft (Satz A.3) sowie (4.2) und (4.3) folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L=0) &\leq \mathbb{P}(L=0 \mid T_n<\infty)\mathbb{P}(T_n<\infty)+\mathbb{P}(T_n=\infty)\\
&\leq \mathbb{P}(L=0 \mid \mathcal{Z}_{T_n}\geq n,\ \mathcal{Z}_{T_n-1}<n,...,\mathcal{Z}_0<n,\ T_n<\infty)+\mathbb{P}(T_n=\infty)\\
&= \mathbb{P}(L=0 \mid \mathcal{Z}_{T_n}\geq n,\ T_n<\infty)+\mathbb{P}(T_n=\infty)\\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\in\mathcal{P}(T_n)}\Big\{\frac{N_k(p)}{2^k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0\Big\} \mid \mathcal{Z}_{T_n}\geq n,\ T_n<\infty\Big)+\mathbb{P}(T_n=\infty)\\
&\leq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p=1}^{n}\Big\{\frac{N_k(p)}{2^k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0\Big\}\Big)+\mathbb{P}(T_n=\infty)\\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{N_k(p)}{2^k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0\Big)^n+\mathbb{P}(T_n=\infty)\\
&= \mathbb{P}(L=0)^n+\mathbb{P}(T_n=\infty),
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile die Unabhängigkeit der $N_k(p)$ einging. Gilt nun $\mathbb{P}(L=0)<1$, folgt aus der eben gezeigten Ungleichung für $n\to\infty$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L=0) &\leq \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(T_n=\infty)\\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 1}\{T_n=\infty\}\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 1}\{\mathcal{Z}_k<n \ \text{ für alle } k\geq 0\})\Big)\\
&= \mathbb{P}\big((\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0} \text{ ist beschränkt}\big)\\
&= \mathbb{P}(Ext)
\end{aligned}$$

nach dem Extinctions-Explosions-Prinzip (2.1). Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 4.3. (a) Im Fall $\mu_0+\mu_1>1$ und $\mu_0\mu_1\leq 1$, folgt nach Satz 4.2, dass sich ein Organismus erholt, selbst wenn die Anzahl der Parasiten gegen unendlich strebt. In diesem Fall sehen wir, wie unausgeglichen die Parasiten auf die Tochterzellen verteilt werden müssen, damit sich der Organismus fast sicher erholt.

Sei dazu $a\in[0,1]$ mit $\mu_0=2\mu a$ und $\mu_1=2\mu(1-a)$. Ein Organismus erholt sich nach Satz 4.2 genau dann fast sicher, wenn $\mu_0\mu_1\leq 1$ gilt. Ist $\mu\leq 1$, so ist auch $\mu_0\mu_1\leq 1$. Ist hingegen $\mu>1$, dann folgt mit Hilfe der quadratische Ergänzung die Äquivalenz von $\mu_0\mu_1=a(1-a)(2\mu)^2\leq 1$ und

$$a\notin\ \Big(\ \frac{1}{2}\big(1-\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}}\big),\ \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}}\big)\ \Big). \tag{4.4}$$

Ein Organismus erholt sich also genau dann fast sicher, wenn $\mu \leq 1$ oder (4.4) gilt.

Dies zeigt, je größer die mittlere Vermehrungsrate $\mu_0 + \mu_1 = 2\mu$ der Parasiten ist, desto extremer muss das Gewicht $a \in [0, 1]$ in Richtung 0 oder 1 verschoben und somit die Verteilung der Parasiten auf die beiden Tochterzellen sehr unausgewogen sein, damit der Organismus sich fast sicher erholt.

Die beiden Grafiken in Abbildung 4.1 zeigen jeweils 30 Pfade von $2^{-n}\#\mathbb{G}_n^*$ mit unabhängigen $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ und $\mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} \in \cdot) = Poi(2.5)$, woraus $\mu = 1.25 > 1$ folgt. Während in der ersten Grafik jedoch $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ identisch $Poi(1.25)$-verteilt sind und damit $\mu_0\mu_1 > 1$ gilt, sind in der zweiten Grafik $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ nicht identisch verteilt, $X^{(0)} \sim Poi(0.3125)$ und $X^{(0)} \sim Poi(2.1875)$. Damit gilt in der zweiten Grafik $\mu_0\mu_1 \leq 1$. Die Parasiten des zweiten Prozesses sterben somit fast sicher aus, während diese beim ersten auch überleben können.

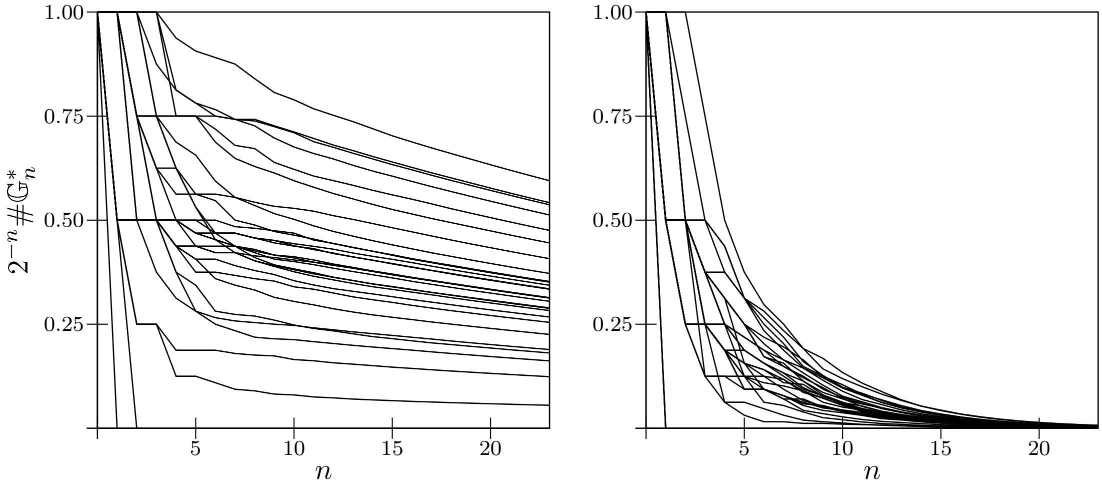


Abbildung 4.1: 30 Pfade von $2^{-n}\#\mathbb{G}_n^*$ mit $X^{(0)} + X^{(1)} \sim Poi(2.5)$, $X^{(0)}, X^{(1)}$ unabhängig und $a = 0.5$ bzw. 0.125.

(b) Die Gleichung (4.1) im Zusammenspiel mit Korollar 3.7 und Korollar A.11 gibt uns die Asymptotik von $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)$ im Fall $\mu_0\mu_1 \leq 1$. Für geeignete $c_1, ..., c_4 \in (0, \infty)$ gilt nämlich:

- $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*) \overset{n\to\infty}{\simeq} (2\mu)^n c_1$ im stark subkritischen Fall;
- $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*) \overset{n\to\infty}{\simeq} (2\mu)^n \frac{c_2}{\sqrt{n}}$ im moderat subkritischen Fall;
- $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*) \overset{n\to\infty}{\simeq} (2\gamma)^n \frac{c_3}{\sqrt{n^3}}$, für ein $\gamma \in (0, \mu)$ im schwach subkritischen Fall;
- $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*) \overset{n\to\infty}{\simeq} (2\mu)^n l(n) \frac{c_4}{n^{1-\rho}}$, für ein $\rho \in (0, 1)$ und eine geeignete Funktion $l(n)$ im kritischen Fall, falls $(\mu_0, \mu_1) \neq (1, 1)$ ist.

5 Baum infizierter Zellen

In diesem Kapitel betrachten wir den Baum infizierter Zellen und beantworten als erstes folgende auch in der Einleitung gestellte motivierende Frage: In der Situation $\mu_0 + \mu_1 > 1$ gilt $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n \to \infty \mid Ext^c) = 1$, d.h. die Anzahl der Parasiten explodiert im Überlebensfall. Wie verteilen sich aber die unendlich vielen Parasiten auf die Zellen? Gibt es nur wenige stark infizierte oder viele schwach infizierte Zellen? Gilt in diesem Fall also auch

$$\mathbb{P}(\#\mathbb{G}_n^* \to \infty \mid Ext^c) = 1?$$

Satz 5.5 weiter unten gibt eine positive Antwort auf diese Fragen. Wir zeigen, dass infizierte Zellen nicht in endlich vielen Zelllinien konzentriert sind. Das heißt, die infizierten Zellen verteilen sich über den gesamten Zellbaum und sind nicht in einer kleinen Umgebung anzutreffen.

Als nächstes betrachten wir den Fall $\mu_0 + \mu_1 \leq 1$. Hier ist der Parasitenprozess $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ nicht superkritisch, und die Parasiten sterben fast sicher aus. Insbesondere konvergiert damit die Anzahl infizierter Zellen gegen 0. Unter der Bedingung, dass in der n-ten Generation Parasiten überleben, strebt jedoch die Anzahl infizierter Zellen des gesamten Baumes, deren Tochterzellen nicht mehr infiziert sind, für $n \to \infty$ gegen unendlich. Dies bestätigt Satz 5.6. Deswegen können infizierte Zellen auch in diesem Fall nicht in endlich vielen Zelllinien konzentriert sein, sondern verteilen sich über den ganzen Zellbaum.

Um diese beiden Sätze zu beweisen, führen wir den Begriff des Randes des Zellbaumes und die Menge der unendlichen Zelllinien infizierter Zellen ein.

Definition 5.1. Für einen Zellbaum $\mathbb{T}$ sei $\delta\mathbb{T} := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dessen *Rand* und

$$\delta\mathbb{T}^* := \{v \in \delta\mathbb{T} \;:\; Z_{v|n} > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$$

die *Menge der unendlichen Zelllinien infizierter Zellen.*

Es sei noch erwähnt, dass für $\mu_0 + \mu_1 > 1$

$$\mathbb{P}(\delta\mathbb{T}^* \neq \emptyset \mid Ext^c) = 1 \tag{5.1}$$

gilt, da in jeder Generation aus mindestens einer infizierten Zelle eine infizierte Tochterzelle entstehen muss.

Abbildung 5.1: Infizierungsmöglichkeiten eines Parasit im Fall $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$

Bevor wir zu den angesprochenen Resultaten kommen, benötigen wir noch zwei Lemmata. Das erste garantiert uns, dass ein Vorfahre einer beliebigen infizierten Zelle eine nach unten beschränkte, positive Wahrscheinlichkeit dafür besitzt, dass beide Tochterzellen infiziert sind. Hierbei müssen wir die Fälle

$$\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$$

unterscheiden, denn im zweiten Fall muss der Zellvorfahre mindestens zwei Parasiten enthalten, damit beide Tochterzellen infiziert werden können (siehe Abb. 5.1). Im zweiten Lemma beweisen wir dann, dass es im Fall $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$ in einer unendlichen Zelllinie infizierter Zellen unendlich viele Zellen mit mindestens zwei Parasiten gibt.

Zunächst aber zum ersten Lemma. Es sei an die Schreibweise $u < v$ für $u, v \in \mathbb{T}$, falls u eine Vorfahrenzelle von v ist, erinnert.

Lemma 5.2. *Es existiert ein $\alpha > 0$ derart, dass für alle $v \in \mathbb{T}$, $u < v$ und $k \geq 2$*

$$\mathbb{P}(Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0 \mid Z_u = k,\ Z_v > 0) \geq \alpha$$

gilt. Falls $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1$, gilt das Resultat auch für $k = 1$. Insbesondere folgt dann für alle $k \geq 2$ (bzw. $k \geq 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{v \in \mathbb{G}_n, u<v} \Big\{\mathbb{P}(Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0 \mid Z_u = k,\ Z_v > 0)\Big\} \geq \alpha.$$

Beweis: Sei $v \in \mathbb{T}$. Als erstes bedienen wir uns der monoton fallenden Hilfsfunktion $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$. Für alle $0 < r < s$ und $p \in (0,1)$ ergibt sich dann

$$\frac{1-p^r}{1-p^s} = \frac{r}{s}\frac{f(-r\log p)}{f(-s\log p)} \geq \frac{r}{s}.$$

Falls $r \geq s > 0$ ist, folgt außerdem $1 - p^r \geq 1 - p^s$ für $p \in [0,1)$ und damit

$$\frac{1-p^r}{1-p^s} \geq \frac{r}{\max\{r,s\}} \tag{5.2}$$

für alle $r, s > 0$ und $p \in [0, 1)$.

1. Fall: $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1$. Für $u < v$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0 \mid Z_u = k, Z_v > 0) \quad \geq \quad \mathbb{P}(Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0 \mid Z_u = 1, Z_v > 0).$$

Es reicht also den Fall $k = 1$ zu betrachten.

Seien nun $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$, $u_1 \in \{0, 1\}$ und $u_2 \in \{0, 1\}^{|v|-|uu_1|}$ so gewählt, dass $v = uu_1u_2$ und $\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1) > 0$ ist. Mit Hilfe von (1.2), (3.1) und (5.2) gilt dann für alle $(k_0', k_1') \in \mathbb{N}_0^2$ mit $\mathbb{P}(Z_{u0} = k_0',\ Z_{u1} = k_1' \mid Z_u = 1,\ Z_v > 0) > 0$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{P}(Z_{u0} = k_0,\ Z_{u1} = k_1 \mid Z_u = 1,\ Z_v > 0)}{\mathbb{P}(Z_{u0} = k_0',\ Z_{u1} = k_1' \mid Z_u = 1,\ Z_v > 0)} \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1 \mid Z_{u_1u_2} > 0)}{\mathbb{P}(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1' \mid Z_{u_1u_2} > 0)} \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}(Z_{u_1u_2} > 0 \mid Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{\mathbb{P}(Z_{u_1u_2} > 0 \mid Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')\mathbb{P}(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')} \\
&\qquad = \frac{(1 - \mathbb{P}(Z_{u_2} = 0)^{k_{u_1}})\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{(1 - \mathbb{P}(Z_{u_2} = 0)^{k_{u_1}'})\mathbb{P}(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')} \\
&\qquad \geq \frac{k_{u_1}}{\max\{k_{u_1}, k_{u_1}'\}} \frac{\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{\mathbb{P}(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')} \\
&\qquad \geq \frac{\min\{k_0, k_1\}}{k_0 + k_1 + k_0' + k_1'} \frac{\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{\mathbb{P}(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')}.
\end{aligned}$$

Multipliziert man nun beide Seiten mit dem Produkt beider Nenner und summiert über alle (k_0', k_1') erhält man

$$\begin{aligned}
\big(\mathbb{E}(Z_0 + Z_1) + k_0 + k_1\big)\mathbb{P}(Z_{u0} = k_0,\ Z_{u1} = k_1 \mid Z_u = 1,\ Z_v > 0)& \\
\geq \ \min\{k_0, k_1\}\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)&.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung des ersten Falls, indem wir

$$\alpha := \frac{\min\{k_0, k_1\}\mathbb{P}(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{\mathbb{E}(Z_0 + Z_1) + k_0 + k_1} > 0$$

setzen.

2. Fall: $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$. Der Beweis dieses Falls läuft völlig analog zu dem vorherigen Fall nur mit $Z_u = 2$, denn für jedes $k \geq 2$ und $u < v$ gilt

$$\mathbb{P}(Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0 \mid Z_u = k,\ Z_v > 0) \ \geq \ \mathbb{P}(Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0 \mid Z_u = 2,\ Z_v > 0).$$

Es reicht also in diesem Fall $k = 2$ zu betrachten.

Wähle $(k_0, k_1) \in \mathbb{N}_0^2$ diesmal so, dass $\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1) > 0$ ist, und seien u_1, u_2, k_0', k_1' wie im ersten Fall. Dann folgt durch analoge Rechnung

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{P}(Z_{u0} = k_0,\ Z_{u1} = k_1 \mid Z_u = 2,\ Z_v > 0)}{\mathbb{P}(Z_{u0} = k_0',\ Z_{u1} = k_1' \mid Z_u = 2,\ Z_v > 0)} \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1 \mid Z_{u_1u_2} > 0)}{\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1' \mid Z_{u_1u_2} > 0)} \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}(Z_{u_1u_2} > 0 \mid Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{\mathbb{P}(Z_{u_1u_2} > 0 \mid Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')} \\
&\qquad \geq \frac{\min\{k_0, k_1\}}{k_0 + k_1 + k_0' + k_1'} \frac{\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0',\ Z_1 = k_1')}.
\end{aligned}$$

Wie im ersten Fall erhält man so

$$\begin{aligned}
\big(\mathbb{E}_2(Z_0 + Z_1) + k_0 + k_1\big)&\mathbb{P}(Z_{u0} = k_0,\ Z_{u1} = k_1 \mid Z_u = 2,\ Z_v > 0) \\
&\geq \min\{k_0, k_1\}\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)
\end{aligned}$$

und damit als untere Schranke

$$\alpha := \frac{\min\{k_0, k_1\}\mathbb{P}_2(Z_0 = k_0,\ Z_1 = k_1)}{\mathbb{E}_2(Z_0 + Z_1) + k_0 + k_1} > 0.$$

□

Kommen wir nun zum oben angesprochenen zweiten Lemma. Bansaye [10] gibt in diesem Lemma als weitere Voraussetzung

$$\beta = \mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2 \textit{ oder } X^{(1)} \geq 2) > 0$$

an und benutzt dann die Ungleichung

$$\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_k > 0) \ \geq \ \mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2 \textit{ oder } X^{(1)} \geq 2) \ > \ 0$$

für alle $k \in \mathbb{T}$. Diese ist aber im Allgemeinen nicht erfüllt, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 5.3. Gelte $\mathbb{P}(X^{(0)} = 2,\ X^{(1)} = 0) = \mathbb{P}(X^{(0)} = 0,\ X^{(1)} = 1) = \frac{1}{2}$. Dann ist

$$\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_1 > 0) = \mathbb{P}(Z_1 \geq 2 \mid Z_1 > 0) = 0,$$

aber

$$\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2) = \mathbb{P}(Z_0 \geq 2) = \frac{1}{2}.$$

Selbst wenn beide Tochterzellen zwei Parasiten enthalten können, muss die Ungleichung nicht erfüllt sein, denn für

$$\mathbb{P}(X^{(0)} = 2,\ X^{(1)} = 0) = \frac{1}{2}$$

und

$$\mathbb{P}(X^{(0)} = 0,\ X^{(1)} = 1) = \mathbb{P}(X^{(0)} = 0,\ X^{(1)} = 2) = \frac{1}{4}$$

ist

$$\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_1 > 0) = \mathbb{P}(Z_1 \geq 2 \mid Z_1 > 0) = \frac{1}{2},$$

aber

$$\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

In beiden Fällen ist also $\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_1 > 0) < \beta$.

Wir müssen unsere untere Schranke β somit kleiner wählen und deswegen etwas schärfere Anforderungen an die Reproduktionsverteilungen stellen. Wir beweisen daher das zweite Lemma unter der Voraussetzung $\beta = \mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2)\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) > 0$.

Lemma 5.4. *Gilt* $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$ *und* $\beta := \mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2)\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) > 0$, *so folgt*

$$\inf_{v \in \mathbb{G}_n} \mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2\} \geq \frac{n\beta}{2} \mid Z_v > 0\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Beweis: Für alle $v \in \mathbb{G}_n$, $u < v = uw$ für ein geeignetes $w \in \{0,1\}^{|v|-|u|}$ und $z \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2 \mid Z_u = z,\ Z_v > 0) \\ &\qquad \geq\ \mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_w > 0)\ \geq\ \beta. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die erste Ungleichung in (5.3) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2 \mid Z_u = z,\ Z_v > 0) \\ &\qquad \geq\ \mathbb{P}(Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2 \mid Z_u = 1,\ Z_v > 0) \\ &\qquad =\ \mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_w > 0). \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung folgt aufgrund der Voraussetzung, dass alle Parasiten entweder in die erste oder in die zweite Zelle gehen, d.h. $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$. Ohne

Einschränkung kann also $\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_w > 0) = \mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \mid Z_w > 0)$ angenommen werden und man erhält

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \textit{ oder } Z_1 \geq 2 \mid Z_w > 0) \\
&\qquad = \mathbb{P}(Z_0 \geq 2 \mid Z_w > 0) \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}(Z_0 \geq 2,\ Z_w > 0)}{\mathbb{P}(Z_w > 0)} \\
&\qquad = \frac{1}{\mathbb{P}(Z_w > 0)} \sum_{j \geq 2} \mathbb{P}(Z_w > 0 \mid Z_0 = j)\mathbb{P}(Z_0 = j) \\
&\qquad \geq \frac{1}{\mathbb{P}(Z_w > 0)} \sum_{j \geq 2} \mathbb{P}(Z_w > 0 \mid Z_0 = 1)\mathbb{P}(Z_0 = j) \\
&\qquad = \frac{\mathbb{P}(Z_{w'} > 0)}{\mathbb{P}(Z_w > 0)} \mathbb{P}(Z_0 \geq 2), \qquad \text{wobei } w = 0w' \\
&\qquad \geq \mathbb{P}(Z_0 \geq 2),
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung $\mathbb{P}(Z_w > 0) \leq \mathbb{P}(Z_{w'} > 0)$ einging. Damit gilt (5.3), das heißt unabhängig von der genauen Anzahl an Parasiten in einer Zelle ist die Wahrscheinlichkeit in der nächsten Generation zwei oder mehr Parasiten zu erhalten mindestens β.

Seien nun β_k, $k \geq 0$, unabhängige, identisch $B(1, \beta)$-verteilte Zufallsgrößen. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{G}_n$ und $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe von (5.3)

$$\mathbb{P}(\#\{u < v : Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2\} > x \mid Z_v > 0) \ \geq \ \mathbb{P}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k > x\Big).$$

Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \beta$ fast sicher und damit

$$\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2\} \geq \frac{n\beta}{2} \mid Z_v > 0\Big) \ \geq \ \mathbb{P}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \geq \frac{n\beta}{2}\Big) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1,$$

was den Beweis abschließt. □

Kommen wir nun zu den beiden am Anfang des Kapitels angekündigten Hauptresultaten. Wir beginnen mit dem Fall eines superkritischen Parasitenprozesses.

Satz 5.5. *Ist $\mu_0 + \mu_1 > 1$, so konvergiert $\#\mathbb{G}_n^*$ bedingt unter Ext^c fast sicher gegen unendlich. Es gilt also*

$$\mathbb{P}(\#\mathbb{G}_n^* \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty \mid Ext^c) = 1.$$

Wir werden den Beweis von Bansaye in [10] erweitern und den Satz damit auch für die, durch die Beispiele verdeutlichten, Ausnahmen zeigen.

Beweis: Der Beweis teilt sich in drei Fälle auf. Im ersten Fall betrachten wir die Situation $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1$. Mit Hilfe von Lemma 5.2 folgt, dass in einer unendlichen Zelllinie infizierter Zellen unendlich viele Zellen existieren, deren Tochterzellen beide infiziert sind. Jede dieser Tochterzellen, welche nicht in der vorher betrachteten Zelllinie liegt, startet einen neuen ZTPIZ. Da die Überlebenswahrscheinlichkeit der Parasiten positiv ist, folgt dann mit dem Borel-Cantelli-Lemma und Satz 1.3, dass bei unendlich vielen dieser neuen ZTPIZ Parasiten überleben. Damit konvergiert auch die Anzahl der infizierten Zellen $\#\mathbb{G}_n^*$ gegen unendlich. Dieses Vorgehen verdeutlicht Abbildung 5.2. In den anderen beiden Fällen gilt $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$. Wir zeigen, dass in diesen Fällen in einer infizierten Zelllinie unendlich viele Zellen mit mindestens zwei Parasiten liegen. Jede dieser Zellen hat eine positive Chance beide Tochterzellen zu infizieren und damit können wir diese Fälle auf den ersten Fall zurückführen.

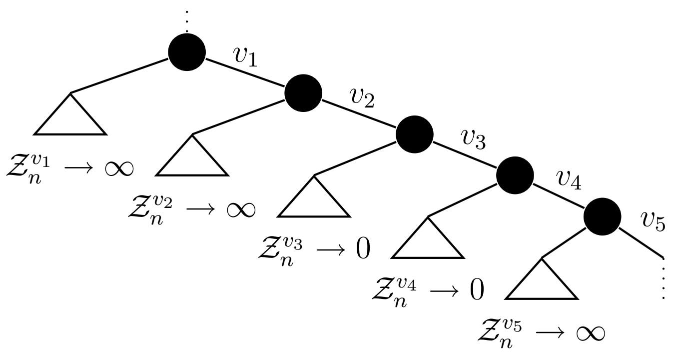


Abbildung 5.2: Die von einer unendlichen Zelllinie infizierter Zellen abzweigenden neuen ZTPIZ.

Nach (5.1) gilt $\delta\mathbb{T}^* \neq \emptyset$ fast sicher bedingt unter Ext^c. Sei dann $v \in \delta\mathbb{T}^*$.

1.Fall: $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1$. Seien β_l, $l \geq 0$, unabhängige und identisch $B(1, \alpha)$-verteilte Zufallsgrößen, wobei $\alpha > 0$ nach Lemma 5.2 gegeben ist. Dann folgt mit Lemma 5.2 ($k = 1$)

$$\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} > 0,\, Z_{u1} > 0\} > \frac{K\alpha}{2} \mid Z_v > 0\Big) \;\geq\; \mathbb{P}\Big(\sum_{l=0}^{K-1} \beta_l > \frac{K\alpha}{2}\Big) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

da nach dem Gesetz der Großen Zahlen $\frac{1}{K}\sum_{l=0}^{K-1} \beta_l \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$ fast sicher gilt. Wir erhalten also bedingt unter $\{Z_v > 0\}$

$$\#\{u < v : Z_{u0} > 0,\; Z_{u1} > 0\} = \infty \quad \text{fast sicher.} \tag{5.4}$$

In einer Zelllinie infizierter Zellen gibt es somit unendlich viele Zellen $v_1, v_2, ...$, deren Tochterzellen beide infiziert sind.

Betrachten wir die Tochterzellen dieser unendlich vielen Zellen $v_1, v_2, ...$, die nicht in der zuvor betrachteten Zelllinie liegen. Diese starten nach Satz 1.3 neue, unabhängige ZTPIZ $(Z_w^{v_i})_{w\in\mathbb{T}}, i \geq 1$, mit einer infizierten Zelle. Da $\mu_0 + \mu_1 > 1$ vorausgesetzt war, folgt für alle $i \geq 1$

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n^{v_i} \to \infty \mid Z_v > 0) \ = \ \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n^{v_i} \to \infty) \ \geq \ \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n \to \infty) \ = \ \mathbb{P}(Ext^c) > 0.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei unendlich vielen dieser Prozesse infizierte Zellen überleben, nach dem Borel-Cantelli-Lemma 1, denn es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n^{v_i} \to \infty) \ \geq \ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(Ext^c) \ = \ \infty.$$

Aus der Unabhängigkeit der $\mathcal{Z}_n^{v_i}$, $i \geq 1$, folgt damit

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n^{v_i} \to \infty \text{ für unendlich viel } i) = 1.$$

Von den unendlich vielen ZTPIZ existieren also unendlich viele, bei denen Parasiten überleben. Damit konvergiert $\#\mathbb{G}_n^*$ gegen unendlich. Die Behauptung für den erste Fall ist somit bewiesen.

2.Fall: $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$ und $\mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2)\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) > 0$. Mit Lemma 5.4 folgt bedingt unter $\{Z_v > 0\}$

$$\#\{u < v : Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2\} = \infty \quad \text{fast sicher.} \tag{5.5}$$

In einer unendlichen Zelllinie infizierter Zellen existieren also unendlich viele Zellen mit mindestens zwei Parasiten. Mit Lemma 5.2 erhalten wir daher analog zum ersten Fall (diesmal für $k = 2$)

$$\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} > 0,\, Z_{u1} > 0\} > \frac{K\alpha}{2} \mid Z_v > 0\Big) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Also existieren auch in diesem Fall unendlich viele Zellen in einer unendlichen Zelllinie infizierter Zellen, deren Tochterzellen beide infiziert sind und es gilt (5.4). Wir befinden uns damit in der gleichen Situation wie im ersten Fall und es folgt die Behauptung für den zweiten Fall.

3.Fall: $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$ und $\mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2)\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) = 0$. Sei also ohne Einschränkung $\mathbb{P}(X^{(0)} \leq 1) = 1$. Ist $X^{(0)} \sim \delta_1$, so folgt $X^{(1)} \sim \delta_0$ aufgrund von $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) = 1$. Dies stellt jedoch einen Widerspruch zu $\mu_0 + \mu_1 > 1$ dar. Demnach muss also $\mu_0 < 1$ gelten. Aufgrund der Voraussetzung (1.4) folgt damit aber $\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) > 0$.

Sind in der Folge $v = (v_n)_{n\geq 1} \in \delta\mathbb{T}^*$ nur endlich viele $v_n = 1$, so ist $(Z_{v|n})_{n\geq 0}$ ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ wegen $\mathbb{P}(X^{(0)} \leq 1) = 1$ eine monoton fallende Folge, welche aufgrund von $\mu_0 < 1$ fast sicher gegen 0 konvergiert (Satz 2.4). Damit $v \in \delta\mathbb{T}^*$ sein kann, muss demnach $v_n = 1$ unendlich oft gelten.

Für $u < v$ mit $v = u1u'$ folgt mit der gleichen Rechnung wie für (5.3)

$$\mathbb{P}(Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2 \mid Z_u = z,\ Z_v > 0) \ \geq\ \mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) =: \beta$$

für alle $z \geq 1$. Auf die gleiche Weise wie im Beweis von Lemma 5.4 und der Tatasache, dass $v_n = 1$ unendlich oft gilt, erhalten wir dann

$$\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} \geq 2 \textit{ oder } Z_{u1} \geq 2\} > \frac{K\beta}{2} \mid Z_v > 0\Big) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Es gilt also auch (5.5). Wir befinden uns somit in der gleichen Situation wie im zweiten Fall, womit die Behauptung des Satzes folgt. □

Wenden wir uns nun dem Fall eines nicht subkritischen Parasitenprozesses zu. Wie zu Beginn des Kapitels angekündigt, gilt auch in diesem Fall, dass die infizierten Zellen nicht in einer Zelllinie konzentriert sind. Dies zeigt der folgende

Satz 5.6. *Gilt $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1$ oder $\mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2)\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) > 0$ im Fall $\mu_0 + \mu_1 \leq 1$, so folgt für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{P}\big(\#\{v \in \mathbb{T} : Z_v \neq 0,\ Z_{v0} = Z_{v1} = 0\} \geq x \mid \#\mathbb{G}_n^* > 0\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Beweis: Der Beweis verläuft in ähnlicher Weise wie der Beweis von Satz 5.5 und wir benutzen wieder die Unabhängigkeit der von einer Zelllinie abzweigenden ZTPIZ. Wir teilen den Beweis in zwei Fälle auf. Nachdem wir die Behauptung für den Fall $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1$ gezeigt haben, betrachten wir die Situation unter der Annahme $\mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2)\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) > 0$ und spielen diesen Fall auf den ersten zurück. So erhalten wir dann die Behauptung des Satzes.

1. Fall: $\mathbb{P}(X^{(0)}X^{(1)} = 0) \neq 1$. Nach Lemma 5.2 existiert ein $\alpha > 0$, sodass

$$\mathbb{P}(Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0 \mid Z_u = k,\ Z_v > 0) \ \geq\ \alpha \tag{5.6}$$

für alle $n \geq 0$, $v \in \mathbb{G}_n$, $u < v$ und $k \geq 1$ gilt. Mit den gleichen Argumenten wie im ersten Schritt vom Beweis vorher folgt damit nach dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\inf_{v\in\mathbb{G}_n} \Big\{\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} > 0, Z_{u1} > 0\} > \frac{n\alpha}{2} \mid Z_v > 0\Big)\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{5.7}$$

Sind von einer Zelle $u < v$ beide Tochterzellen infiziert, dann starten diese Tochterzellen nach Satz 1.3 zwei unabhängige ZTPIZ. Aufgrund der Voraussetzung $\mu_0+\mu_1 \leq$

1 sterben die Parasiten des mit der Tochterzelle, welche nicht in der Zelllinie zu v liegt, startenden ZTPIZ nach Satz 2.4 fast sicher aus. Dieser besitzt somit mindestens eine infizierte Zelle, deren Tochterzellen keine Parasiten mehr enthalten. In jedem von der Zelllinie nach v abzweigenden Teilbaum befindet sich also mindestes eine infizierte Zelle, deren Tochterzellen nicht mehr infiziert sind. Aufgrund der Unabhängigkeit der so entstehenden Prozesse und (5.7) folgt dann für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\inf_{v\in\mathbb{G}_n} \Big\{\mathbb{P}\Big(\#\{u \in \mathbb{T} : Z_u \neq 0,\ Z_{u0} = Z_{u1} = 0\} \geq x \mid Z_v > 0\Big)\Big\} \\
&\qquad\qquad \geq \inf_{v\in\mathbb{G}_n} \Big\{\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} > 0,\ Z_{u1} > 0\} \geq x \mid Z_v > 0\Big)\Big\} \\
&\qquad\qquad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

2. Fall: $\mathbb{P}(X^{(0)} \geq 2)\mathbb{P}(X^{(1)} \geq 2) > 0$. Die Ungleichung (5.6) gilt auch in diesem Fall für $k \geq 2$ und geeignetes $\alpha > 0$. Nach Lemma 5.4 gilt

$$\inf_{v\in\mathbb{G}_n} \Big\{\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} \geq 2 \text{ } \mathit{oder} \text{ } Z_{u1} \geq 2\} \geq \frac{n\beta}{2} \mid Z_v > 0\Big)\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \tag{5.8}$$

wobei β wie in Lemma 5.4 gewählt ist. Setzen wir für $v \in \mathbb{T}$

$$A_2(v) := \#\{u < v : Z_{u0} \geq 2 \text{ } \mathit{oder} \text{ } Z_{u1} \geq 2\}.$$

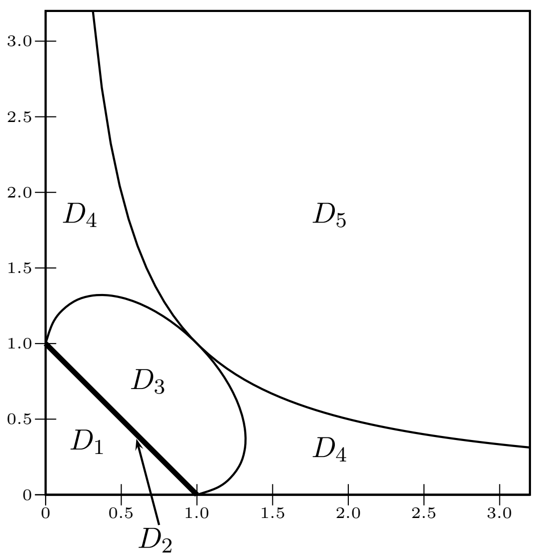
Dann folgt aus (5.8) und (5.6) mit der gleichen Argumentation wie in (5.7)

$$\begin{aligned}
&\inf_{v\in\mathbb{G}_n} \Big\{\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} > 0, Z_{u1} > 0\} > \frac{n\alpha\beta}{4} \mid Z_v > 0\Big)\Big\} \\
&\quad \geq \inf_{v\in\mathbb{G}_n} \Big\{\mathbb{P}\Big(\#\{u < v : Z_{u0} > 0, Z_{u1} > 0\} > \frac{n\alpha\beta}{4},\ A_2(v) \geq \frac{n\beta}{2} \mid Z_v > 0\Big)\Big\} \\
&\quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

Nun befinden wir uns in der gleichen Situation wie im ersten Fall und mit den gleichen Argumenten folgt damit die Behauptung. $\square$

6 Anteil infizierter Zellen mit gegebener Anzahl an Parasiten

Dieses letzte und längste Kapitel behandelt die Verteilung der Parasiten auf die Zellen für gegen unendlich laufende Zeit. Dazu betrachten wir das Verhältnis der Anzahl an Zellen mit k Parasiten, $k \in \mathbb{N}_0$, zur Gesamtanzahl infizierter Zellen der n-ten Generation und dessen asymptotisches Verhalten für $n \to \infty$. Dieses Verhalten hängt jedoch vom Verhalten der beiden Prozesse $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ und $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ ab. Wir betrachten daher die folgenden fünf Fälle.



$$D_1 := \{(\mu_0,\mu_1) \in \mathbb{R}^2_{>0} : \mu_0 + \mu_1 < 1\}$$

$$D_2 := \{(\mu_0,\mu_1) \in \mathbb{R}^2_{>0} : \mu_0 + \mu_1 = 1\}$$

$$D_3 := \{(\mu_0,\mu_1) \in \mathbb{R}^2_{>0} : \mu_0 + \mu_1 > 1, \\ \mu_0 \log(\mu_0) + \mu_1 \log(\mu_1) < 0\}$$

$$D_4 := \{(\mu_0,\mu_1) \in \mathbb{R}^2_{>0} : \mu_0\mu_1 \leq 1, \\ \mu_0 \log(\mu_0) + \mu_1 \log(\mu_1) \geq 0\}$$

$$D_5 := \{(\mu_0,\mu_1) \in \mathbb{R}^2_{>0} : \mu_0\mu_1 > 1\}$$

Da die Mengen $D_1, \ldots, D_5$ paarweise disjunkt sind, folgt insbesondere

$$\begin{aligned} \mu_0\mu_1 \leq 1, &\quad \text{falls } (\mu_0,\mu_1) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \text{ und} \\ \mu_0 + \mu_1 > 1, &\quad \text{falls } (\mu_0,\mu_1) \in D_4 \cup D_5 \text{ gilt.} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Im Fall D_5 zeigen wir, dass die infizierten Zellen der n-ten Generation für $n \to \infty$ immer schon stark infiziert sind, also viele Parasiten enthalten. Weiter zeigen wir, dass im Fall D_3 bzw. D_2 das Verhältnis von infizierten Zellen mit k Parasiten zur Gesamtanzahl infizierter Zellen bedingt unter Ext^c in Wahrscheinlichkeit bzw. bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ in Verteilung gegen eine Yaglom-quasistationäre-Verteilung konvergiert. Daraus erhalten wir unter anderem Erkenntnisse über das asymptotische Verhalten von $\#\mathbb{G}_n^*$ für $n \to \infty$. Der Fall D_1 verhält sich ähnlich zu den Fällen D_2 und D_3. Hier konvergiert die Anzahl infizierter Zellen mit k Parasiten bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ in Verteilung gegen eine integrierbare Zufallsgröße. Daraus erhalten wir dann die Verteilungskonvergenz von $\#\mathbb{G}_n^*$ und $\mathcal{Z}_n$ bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ gegen integrierbare Zufallsgrößen. In die Beweise der Fälle D_1, D_2 und D_3 geht entscheidend die stark subkritische Eigenschaft des PZZ $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ ein, weshalb diese auch relativ ähnlich sind. Im Fall D_4 ist der PZZ jedoch nicht stark subkritisch und man kann die Beweisidee der vorherigen Fälle nicht übernehmen. Es liegen in diesem Fall leider noch keine befriedigenden Resultate vor.

Bevor wir die eben angesprochenen Ergebnisse bestätigen, führen wir noch einige Definitionen und Notationen ein.

Definition 6.1. Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir mit

$$F_k(n) := \frac{\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v = k\}}{\#\mathbb{G}_n^*}$$

das *Verhältnis der Anzahl an infizierten Zellen mit k Parasiten zu der Anzahl aller infizierten Zellen in Generation n.*

Wir bezeichnen mit

$$l^1(\mathbb{N}_0) := \Big\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0} : \sum_{i\in\mathbb{N}_0} |x_i| < \infty\Big\}$$

den Banachraum der absolut konvergenten Reihen mit der zugehörigen 1-Norm $||\cdot||_1$ definiert durch

$$||(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0}||_1 = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} |x_i|$$

und mit

$$S^1(\mathbb{N}_0) := \Big\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}_0} : x_i \geq 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0,\ \sum_{i\in\mathbb{N}_0} x_i = 1\Big\}$$

den Teilraum der Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$.

Für $x, y \in l^1(\mathbb{N}_0)$, $x, y \neq 0$, gilt die folgende Ungleichung

$$\left|\left|\frac{x}{||x||_1} - \frac{y}{||y||_1}\right|\right|_1 \leq 2\frac{||x-y||_1}{||x||_1}, \tag{6.2}$$

denn mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{x}{||x||_1} - \frac{y}{||y||_1}\right|\right|_1 &= \left|\left|\frac{x}{||x||_1} - \frac{y}{||x||_1} + \frac{y}{||x||_1} - \frac{y}{||y||_1}\right|\right|_1 \\ &= \left|\left|\frac{x-y}{||x||_1} + \frac{y}{||y||_1}\frac{||y||_1 - ||x||_1}{||x||_1}\right|\right|_1 \\ &\le \frac{||x-y||_1}{||x||_1} + \frac{||\ ||y||_1 - ||x||_1\ ||_1}{||x||_1} \\ &\le 2\frac{||x-y||_1}{||x||_1}.\end{aligned}$$

Da wir im Folgenden die Situation bedingt unter Ext^c bzw. $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ betrachten, setzen wir zur besseren Übersicht noch

$$\mathbb{P}^* := \mathbb{P}(\cdot \mid Ext^c) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\cdot \mid \mathcal{Z}_n > 0) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir schreiben ferner $\mathbb{E}^*$ bzw. $\mathbb{E}^n$ für den Erwartungswert bzgl. $\mathbb{P}^*$ bzw. $\mathbb{P}^n$.

6.1 Superkritischer Parasitenprozess

6.1.1 Superkritischer Prozess einer zufälligen Zelllinie, D_5

In diesem Fall zeigen wir, dass bei fortschreitender Zeit infizierte Zellen sehr viele Parasiten enthalten. Dies zeigt der folgende

Satz 6.2. *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $F_k(n)$ bedingt unter Ext^c in Wahrscheinlichkeit gegen 0 für $n \to \infty$. Das heißt, für alle $K, \varepsilon > 0$ gilt*

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v < K\}}{\#\mathbb{G}_n^*} \ge \varepsilon\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis: Nach Satz 4.2 existiert eine Zufallsgröße $L \in [0,1]$ mit $\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n} \to L$ f.s. und $\mathbb{P}(L = 0) = \mathbb{P}(Ext) < 1$. Damit gilt natürlich $\mathbb{P}^*(L = 0) = 0$. Da $(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n})_{n\ge 0}$ monoton fallend ist, gilt somit für alle $n \ge 0$

$$\#\mathbb{G}_n^* \ge 2^n L \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}. \tag{6.3}$$

Wir setzen für $K, \varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$

$$B_n(K,\varepsilon) := \Big\{\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v < K\}}{\#\mathbb{G}_n^*} \ge \varepsilon\Big\} \cap Ext^c.$$

Dann ergibt sich mit (6.3) die Ungleichungskette

$$\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} \mathbb{1}_{\{Z_v<K\}} \;=\; \#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v < K\} \;\geq\; \varepsilon\#\mathbb{G}_n^* \mathbb{1}_{B_n(K,\varepsilon)} \;\geq\; \varepsilon 2^n L \mathbb{1}_{B_n(K,\varepsilon)} \;\; \mathbb{P}\text{-f.s..}$$

Nach Übergang zum Erwartungswert und Division durch 2^n auf beiden Seiten erhalten wir

$$\varepsilon\mathbb{E}(L\mathbb{1}_{B_n(K,\varepsilon)}) \;\leq\; \frac{1}{2^n}\mathbb{E}\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} \mathbb{1}_{\{Z_v<K\}}\Big) \;=\; \sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} \frac{1}{2^n}\mathbb{P}(Z_v < K) \;=\; \mathbb{P}(0 < Z_{[n]} < K).$$

Nach Satz 2.18 konvergiert die rechte Seite gegen 0 und damit auch $\mathbb{E}(L\mathbb{1}_{B_n(K,\varepsilon)})$ für $n \to \infty$.

Da $L > 0$ fast sicher auf Ext^c gilt, folgt für alle $\alpha > 0$

$$\inf\big\{\mathbb{E}(L\mathbb{1}_A) : A \in \mathcal{F} \text{ mit } \mathbb{P}(A \cap Ext^c) > \alpha\big\} > 0,$$

denn wählt man $x = \inf\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{L \leq y\} \cap Ext^c) \geq \alpha\}$, so ist

$$\mathbb{E}(L\mathbb{1}_A) \;\geq\; \mathbb{E}(L\mathbb{1}_{A\cap Ext^c}) \;\geq\; \mathbb{E}(L\mathbb{1}_{\{L\leq x\}\cap Ext^c}) \;>\; 0$$

für alle A mit $\mathbb{P}(A \cap Ext^c) \geq \alpha$.

Somit folgt aus $\mathbb{E}(L\mathbb{1}_{B_n(K,\varepsilon)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ auch

$$\mathbb{P}(B_n(K,\varepsilon)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aus $\mathbb{P}(B_n(K,\varepsilon)) = \mathbb{P}^*\big(\frac{\#\{v\in\mathbb{G}_n^*:Z_v<K\}}{\#\mathbb{G}_n^*} \geq \varepsilon\big)\mathbb{P}(Ext^c)$ ergibt sich dann

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v < K\}}{\#\mathbb{G}_n^*} \geq \varepsilon\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Ist $\mathbb{E}(Z_u \log Z_u) < \infty$ für $u \in \{0, 1\}$ und $\mu_0 = \mu_1$, so verhält sich die Anzahl der Parasiten in einer infizierten Zelle asymptotisch wie μ_0^n. Dies besagt der folgende

Satz 6.3. *Ist $\mathbb{E}(Z_u \log Z_u) < \infty$ für $u \in \{0, 1\}$ und $\mu_0 = \mu_1$, so gilt für alle $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v \leq \alpha\mu_0^n\}}{\#\mathbb{G}_n^*} \geq \varepsilon\Big)\Big\} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 6.2 und es gilt auch hier (6.3). Wir definieren für $\alpha, \varepsilon > 0$ und $n \geq 0$

$$A_n(\alpha\mu_0^n, \varepsilon) := \Big\{\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v \leq \alpha\mu_0^n\}}{\#\mathbb{G}_n^*} \geq \varepsilon\Big\} \cap Ext^c.$$

Durch die gleichen Umformungen wie im vorherigen Beweis erhalten wir für alle $n \geq 0$ die Ungleichung

$$\mathbb{E}^*(L\mathbb{1}_{A_n(\alpha\mu_0^n,\varepsilon)}) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}^*(0 < Z_{[n]} \leq \alpha\mu_0^n) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{6.4}$$

Da $\mu_0 = \mu_1$ vorausgesetzt war, ist nach (3.1) $\mathbb{E}Z_{[n]} = \mu_0^n$. Aufgrund der Voraussetzungen des Satzes sind die Bedingungen in Satz 2.21 erfüllt, denn

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{\mu_{\mathcal{U}_1}}\mathbb{E}(Z_{[1]}\log Z_{[1]} \mid \mathcal{U})\Big) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\mu_0}\mathbb{E}(Z_0\log Z_0) + \frac{1}{\mu_1}\mathbb{E}(Z_1\log Z_1)\Big) \;<\; \infty.$$

Dieser liefert dann die fast sichere Konvergenz von $\frac{Z_{[n]}}{\mu_0^n}$ gegen eine Zufallsgröße $\tilde{L}$ mit $\{\tilde{L} = 0\} = \{Z_{[n]} \to 0\}$ fast sicher. Daraus folgt also

$$\mathbb{P}^*(0 < Z_{[n]} \leq \alpha\mu_0^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}^*(0 < \tilde{L} \leq \alpha),$$

und somit erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^*(0 < Z_{[n]} \leq \alpha\mu_0^n) = \mathbb{P}^*(0 < \tilde{L} \leq \alpha) \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{6.5}$$

Aus (6.4) und (6.5) folgt dann

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{\mathbb{E}^*(L\mathbb{1}_{A_n(\alpha\mu_0^n,\varepsilon)})\Big\} \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon}\sup_{n\geq 0}\big\{\mathbb{P}^*(0 < Z_{[n]} \leq \alpha\mu_0^n)\big\} \;\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow}\; 0.$$

Da $L > 0$ fast sicher auf Ext^c gilt, folgt dann wie im Beweis von Satz 6.2

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v \leq \alpha\mu_0^n\}}{\#\mathbb{G}_n^*} \geq \varepsilon\Big)\Big\} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

6.1.2 Stark subkritischer Prozess einer zufälligen Zelllinie, D_3

Für diesen Fall setzen wir $\mathbb{E}(X^{(a)2}) < \infty$ für $a \in \{0,1\}$ voraus. Nach (6.1) gilt hier $\mu_0\mu_1 < 1$, wodurch die Voraussetzungen des Korollars 3.7 erfüllt sind. Damit konvergiert $Z_{[n]}$ in Verteilung gegen eine Yaglom-quasistationär-verteilte Zufallsgröße $\mathcal{Y}$. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass $(F_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ bedingt unter Ext^c in Wahrscheinlichkeit gegen einen deterministischen Limes konvergiert. Es stellen sich heraus, dass dieser Limes gerade die Verteilung von $\mathcal{Y}$ ist. Aus diesem Resultat schließen wir dann unter anderem auf das asymptotische Verhalten von $\#\mathbb{G}_n^*$. Um jedoch die angesprochenen Ergebnisse zeigen zu können, bedarf es einiger Vorarbeit.

Vorbemerkungen

Als erstes geben wir einige Eigenschaften an, die im späteren Verlauf von Bedeutung sein werden.

Satz 6.4. *(i) Es existieren zwei fast sicher endliche Zufallsgrößen C und D, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$C \leq \frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} \leq D \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}^*(C=0) = \mathbb{P}^*(D=0) = 0. \tag{6.6}$$

(ii) $\mathbb{P}^n$ konvergiert gegen $\mathbb{P}^*$ in Totalvariation, d.h.

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} |\mathbb{P}^n(A) - \mathbb{P}^*(A)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.7}$$

(iii) Es existiert ein $M > 0$, sodass für alle $n \geq 0$

$$M \leq \frac{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)}{\mu^n} \leq 1 \tag{6.8}$$

gilt.

(iv) Es gilt

$$\frac{1}{2^n} \sum_{v \in \mathbb{G}_n} \mathbb{P}(Z_v > 0)^2 = o(\mu^n), \quad n \to \infty. \tag{6.9}$$

Beweis: (i) Nach Satz 2.7 konvergiert $\frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n}$ für $n \to \infty$ fast sicher gegen eine Zufallsgröße W. Diese ist fast sicher endlich und dank der Voraussetzungen in diesem Abschnittgilt nach Satz 2.8 $\mathbb{P}^*(W=0) = 0$. Da

$$\frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} < \infty \;\; \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} = W < \infty \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt, folgt

$$C := \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} \;\leq\; \frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} \;\leq\; D := \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} \;<\infty$$

fast sicher. Weiter ist $\frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} > 0$ fast sicher auf Ext^c für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und daraus folgt

$$\mathbb{P}^*(D=0) \;\leq\; \mathbb{P}^*(C=0) \;=\; \mathbb{P}^*\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} = 0\Big) \;=\; \mathbb{P}^*(W=0) \;=\; 0.$$

Damit gilt (i).

(ii) Für alle $n \geq 0$ gilt $\{\mathcal{Z}_n > 0\} \supseteq \{\mathcal{Z}_{n+1} > 0\}$ und damit

$$\{\mathcal{Z}_n > 0\} \underset{n\to\infty}{\searrow} \bigcap_{n \geq 0} \{\mathcal{Z}_n > 0\} = Ext^c.$$

Aus dieser Eigenschaft ergibt sich dann die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\sup_{A\in\mathcal{F}} |\mathbb{P}^n(A) - \mathbb{P}^*(A)| \\
&\quad= \sup_{A\in\mathcal{F}} |\mathbb{P}^n(A) - \mathbb{P}^n(A\cap Ext^c) + \mathbb{P}^n(A\cap Ext^c) - \mathbb{P}^*(A)| \\
&\quad= \sup_{A\in\mathcal{F}} \left|\mathbb{P}^n(A\cap Ext) + \frac{\mathbb{P}(A\cap Ext^c\cap\{\mathcal{Z}_n>0\})}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n>0)} - \frac{\mathbb{P}(A\cap Ext^c)}{\mathbb{P}(Ext^c)}\right| \\
&\quad\le \mathbb{P}^n(Ext) + \sup_{A\in\mathcal{F}} \mathbb{P}(A\cap Ext^c)\left|\frac{1}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n>0)} - \frac{1}{\mathbb{P}(Ext^c)}\right| \\
&\quad\le \mathbb{P}^n(Ext) + \left|\frac{1}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n>0)} - \frac{1}{\mathbb{P}(Ext^c)}\right| \\
&\quad\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

(iii) Mit (3.1) folgt

$$\mu^n \;=\; \mathbb{E}Z_{[n]} \;=\; \sum_{k\ge 0}\mathbb{P}(Z_{[n]}>k) \;\ge\; \mathbb{P}(Z_{[n]}>0).$$

Für alle $n\ge 0$ ist

$$M := \inf_{n\ge 0}\frac{\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)}{\mu^n} \;\le\; \frac{\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)}{\mu^n}.$$

Da

$$\frac{\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)}{\mu^n} > 0 \text{ für alle } n\ge 0 \quad\text{und}\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)}{\mu^n} = c > 0$$

nach Korollar 3.7 gilt, ist auch $M>0$. Damit folgt (iii).

(iv) Seien $(Z^1_{[n]})_{n\ge 0}$ und $(Z^2_{[n]})_{n\ge 0}$ zwei unabhängige Prozesse zufälliger Zelllinien, welche beide die gleiche Verteilung wie $(Z_{[n]})_{n\ge 0}$ besitzen. Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z^1_{[n]}>0, Z^2_{[n]}>0) \;=\; \mathbb{P}(Z^1_{[n]}>0)\mathbb{P}(Z^2_{[n]}>0) \;=\; \mathbb{P}(Z_{[n]}>0)^2.$$

Hieraus folgt somit

$$\frac{\mathbb{P}(Z^1_{[n]}>0, Z^2_{[n]}>0)}{\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)} \;=\; \mathbb{P}(Z_{[n]}>0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

mit Korollar 3.5, da nach (6.1) $\mu_0\mu_1<1$ gilt. Korollar 3.7 liefert dann

$$\mathbb{P}(Z^1_{[n]}>0, Z^2_{[n]}>0) \;=\; o(\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)) \;=\; o(\mu^n), \quad n\to\infty. \tag{6.10}$$

Wegen

$$\frac{1}{2^n}\sum_{v\in\mathbb{G}_n}\mathbb{P}(Z_v>0)^2 \;=\; \frac{1}{2^n}\sum_{v\in\mathbb{G}_n}\mathbb{P}(Z^1_v>0, Z^2_v>0) \;=\; \mathbb{P}(Z^1_{[n]}>0, Z^2_{[n]}>0)$$

folgt dann aus (6.10) die Behauptung. □

Vernachlässigbarkeit der Anzahl an Parasiten in stark infizierten Zellen

Wir zeigen, dass die Anzahl an Parasiten in stark infizierten Zellen im Vergleich zu der Gesamtanzahl an Parsiten vernachlässigbar ist.

Lemma 6.5. *Für alle $\eta > 0$ gilt*

$$\sup_{n\geq 0}\left\{\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \eta\Big)\right\} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0. \tag{6.11}$$

Insbesondere existiert für alle $\varepsilon, \eta > 0$ ein $K_0 \geq 0$, sodass für alle $K \geq K_0, n \geq 0$

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq 1-\eta\Big) \geq 1-\varepsilon \tag{6.12}$$

gilt.

Beweis: Sei $\eta > 0$. Für $K, n \geq 0$ definieren wir

$$A_n(K,\eta) := \left\{\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \eta\right\} \cap Ext^c.$$

Dann folgt mit (6.6)

$$\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}} \;\geq\; \mathbb{1}_{A_n(K,\eta)}\mathcal{Z}_n\eta \;\geq\; \mathbb{1}_{A_n(K,\eta)}C(2\mu)^n\eta \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für ein C wie in (6.6) gewählt. Nach Übergang zum Erwartungswert, erhalten wir

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}\Big) \;\geq\; (2\mu)^n\eta\mathbb{E}\big(C\mathbb{1}_{A_n(K,\eta)}\big)$$

und daraus dann

$$\frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}\big(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}}\big) \;=\; \frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}\Big(\frac{1}{2^n}\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}\Big) \;\geq\; \eta\mathbb{E}\big(C\mathbb{1}_{A_n(K,\eta)}\big). \tag{6.13}$$

Nach Korollar 3.7 gilt

$$\frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}\big(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}}\big) \overset{n\to\infty}{\simeq} \frac{c\mathbb{E}\big(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}}\big)}{\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)} \;=\; c\mathbb{E}\big(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}} \mid Z_{[n]}>0\big)$$

für ein $c \in (0,1]$ und mit (3.4) folgt somit aus (6.13)

$$\sup_{n\geq 0}\left\{\eta\mathbb{E}(C\mathbb{1}_{A_n(K,\eta)})\right\} \;\leq\; \sup_{n\geq 0}\left\{\frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}})\right\} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0. \tag{6.14}$$

Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 6.2 gilt für alle $\alpha > 0$

$$\inf\Big\{\mathbb{E}(C\mathbb{1}_A) : A \in \mathcal{F} \ \text{ mit } \mathbb{P}(A \cap Ext^c) > \alpha\Big\} > 0.$$

Aus (6.14) folgt damit, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $K_0 \geq 0$ existiert, sodass

$$\mathbb{P}(A_n(K,\eta)) \ \leq \ \varepsilon\mathbb{P}(Ext^c)$$

für alle $K \geq K_0$ und $n \geq 0$ gilt. Für alle $\varepsilon, \eta > 0$ existiert also ein $K_0 \geq 0$, sodass

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} > \eta\Big) \ = \ \frac{\mathbb{P}(A_n(K,\eta))}{\mathbb{P}(Ext^c)} \ \leq \ \varepsilon \tag{6.15}$$

für alle $K \geq K_0$ und $n \geq 0$ und damit (6.11) gilt.

(6.12) ergibt sich nun leicht aus (6.15) mit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq 1-\eta\Big) \ &= \ \mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} \leq \eta\Big) \\ &= \ 1 - \mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} > \eta\Big) \\ &\geq \ 1-\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Als direkte Folgerung aus dem vorigen Lemma erhalten wir

Proposition 6.6. *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $K \geq 0$, sodass für alle $N \geq 0$ ein $n_0 \geq 0$ existiert, für welches*

$$\mathbb{P}^*\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}} \geq N\Big) \geq 1-\varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 6.5 existiert ein $K \geq 0$, sodass für alle $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \frac{1}{2}\Big) \geq 1-\varepsilon \tag{6.16}$$

gilt. Da nach (2.1) $\mathbb{P}^*(\mathcal{Z}_n \to \infty) = 1$ gilt, finden wir zu $N \geq 0$ ein $n_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{N}{\mathcal{Z}_n} \leq \frac{1}{2}\Big) \geq 1-\varepsilon \tag{6.17}$$

ist. Aus (6.16) und (6.17) ergibt sich somit für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}} \geq N\Big) &= \mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \frac{N}{\mathcal{Z}_n}\Big)\\ &\geq \mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \frac{N}{\mathcal{Z}_n},\ \frac{N}{\mathcal{Z}_n} \leq \frac{1}{2}\Big)\\ &\geq \mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \frac{1}{2},\ \frac{N}{\mathcal{Z}_n} \leq \frac{1}{2}\Big)\\ &\geq 1-2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Eine Schätzung für die Anzahl infizierter Zellen

Nach Lemma 6.5 sind Zellen mit einer großen Wahrscheinlichkeit schwach infiziert. Die Anzahl infizierter Zellen verhält sich damit asymptotisch wie die Anzahl der Parasiten. Dadurch erhalten wir eine Schätzung für die Anzahl infizierter Zellen $\#\mathbb{G}_n^*$ der n-ten Generation.

Proposition 6.7. *Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Konstanten $a, b > 0$, sodass für alle $n \geq 0$*

$$\mathbb{P}^*\Big(a \leq \frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n} \leq b\Big) \geq 1-\varepsilon$$

gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach (6.6) gilt

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n} \leq \frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n} \leq D \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{6.18}$$

wobei D wie in (6.6) gegeben ist. Da D fast sicher endlich ist, finden wir ein $b > 0$, sodass

$$\mathbb{P}^*(D \leq b) \geq 1-\varepsilon \tag{6.19}$$

ist.

Aus (6.6) folgt weiter die Existenz einer auf Ext^c fast sicher positiven Zufallsgröße C, für welche

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n} \geq \frac{\mathcal{Z}_n\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n K(2\mu)^n} \geq \frac{C}{K}\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{6.20}$$

für alle $K \geq 1$ gilt. Nach Lemma 6.5 existiert weiter ein $K_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $K \geq K_0$ und $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \frac{1}{2}\Big) \geq 1-\varepsilon$$

gilt. Wähle nun ein $\eta > 0$, sodass

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{C}{K_0} > \eta\Big) \geq 1 - \varepsilon$$

ist. Setzen wir $a := \eta/2$, dann folgt aus den eben gezeigten beiden Ungleichungen für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*\Big(\frac{C}{K_0}\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K_0\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq a\Big) \;&\geq\; \mathbb{P}^*\Big(\frac{C}{K_0} > \eta,\ \frac{C}{K_0}\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_i \leq K_0\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq a\Big)\\
&\geq\; \mathbb{P}^*\Big(\frac{C}{K_0} > \eta,\ \eta\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K_0\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq a\Big)\\
&\geq\; 1 - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung, (6.18), (6.19) und (6.20) folgt dann für alle $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^*\Big(a \leq \frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n} \leq b\Big) \;\geq\; \mathbb{P}^*\Big(a \leq \frac{C}{K_0}\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K_0\}}}{\mathcal{Z}_n},\ D \leq b\Big) \;\geq\; 1 - 3\varepsilon.$$

□

Vernachlässigbarkeit stark infizierter Zellen

In Lemma 6.5 haben wir gezeigt, dass die Anzahl der Parasiten in stark infizierten Zellen im Vergleich zur Gesamtanzahl der Parasiten vernachlässigbar ist. Im Folgenden zeigen wir nun, dass auch die stark infizierten Zellen in einer Generation $n \in \mathbb{N}_0$ keinen besonderen Beitrag zu der Anzahl infizierter Zellen der folgenden Generationen liefern.

Proposition 6.8. *Für alle $\eta > 0$ gilt*

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n,q\geq 0} \Big\{\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n} > K\}}{\#\mathbb{G}_{n+q}^*} \geq \eta\Big)\Big\} = 0.$$

Beweis: Seien $\varepsilon, \eta > 0$. Nach Proposition 6.7 finden wir ein $a > 0$, für welches

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}_{n+q}^*}{(2\mu)^{n+q}} < a\Big) \leq \varepsilon \tag{6.21}$$

für alle $n, q \geq 0$ gilt. Für dieses $a > 0$ definieren wir für $n, q, K \geq 0$

$$F_n^q(K,\eta) := \Big\{\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n} > K\}}{\#\mathbb{G}_{n+q}^*} \geq \eta\Big\} \cap \Big\{\frac{\#\mathbb{G}_{n+q}^*}{(2\mu)^{n+q}} \geq a\Big\}.$$

Es folgt

$$\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n} > K\} \;\geq\; \eta\#\mathbb{G}_{n+q}^*\mathbb{1}_{F_n^q(K,\eta)} \;\geq\; \eta a(2\mu)^{n+q}\mathbb{1}_{F_n^q(K,\eta)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und nach Übergang zum Erwartungswert dann

$$\begin{aligned}
\eta a(2\mu)^{n+q}\mathbb{P}(F_n^q(K,\eta)) &\leq \mathbb{E}\big(\#\{v\in\mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n}>K\}\big)\\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{1}_{\{Z_{v|n}>K,\ Z_v>0\}}\Big)\\
&= \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}}\sum_{k>K}\mathbb{P}(Z_{v|n}=k,\ Z_v>0)\\
&= \sum_{k>K}\sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}}\mathbb{P}(Z_{v|n}=k)\mathbb{P}(Z_v>0\mid Z_{v|n}=k)\\
&= \sum_{k>K}\sum_{u\in\mathbb{G}_n}\mathbb{P}(Z_u=k)\sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q},v|n=u}\mathbb{P}(Z_v>0\mid Z_u=k)\\
&= \sum_{k>K}\sum_{u\in\mathbb{G}_n}\mathbb{P}(Z_u=k)\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}_k(Z_v>0).
\end{aligned}$$

Weiter gilt nach der bernoullischen Ungleichung für $k\geq 1$

$$\mathbb{P}_k(Z_v>0) \;=\; 1-\mathbb{P}_k(Z_v=0) \;=\; 1-(1-\mathbb{P}(Z_v>0))^k \;\leq\; k\mathbb{P}(Z_v>0),$$

wobei beim zweiten Gleichheitszeichen (3.1) verwendet wurde. Wir erhalten damit für alle $n,q\geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_n^q(K,\eta)) &\leq \frac{\sum_{k>K}2^{-n}\sum_{u\in\mathbb{G}_n}\mathbb{P}(Z_u=k)2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}_k(Z_v>0)}{\eta a\mu^{n+q}}\\
&\leq \frac{\sum_{k>K}2^{-n}\sum_{u\in\mathbb{G}_n}\mathbb{P}(Z_u=k)2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}k\mathbb{P}(Z_v>0)}{\eta a\mu^{n+q}}\\
&= \frac{\sum_{k>K}k\mathbb{P}(Z_{[n]}=k)\mathbb{P}(Z_{[q]}>0)}{\eta a\mu^{n+q}}\\
&\leq \frac{\sum_{k>K}k\mathbb{P}(Z_{[n]}=k)}{\eta a\mu^{n}}\\
&= \frac{\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}})}{\eta a\mu^{n}},
\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Ungleichung (6.8) einging. Für den letzten Term gilt für ein geeignetes $c\in(0,1]$ nach Korollar 3.7

$$\frac{\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}})}{\eta a\mu^n} \overset{n\to\infty}{\simeq} \frac{c\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}})}{\eta a\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)} \;=\; \frac{c}{\eta a}\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}}\mid Z_{[n]}>0).$$

Mit Hilfe von (3.4) erhalten wir dann

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{n,q\geq 0}\Big\{\mathbb{P}(F_n^q(K,\eta))\Big\}=0.$$

Es existiert also ein $K_0 \geq 0$, sodass für alle $K \geq K_0$ und $n, q \geq 0$

$$\mathbb{P}(F_n^q(K,\eta) \cap Ext^c) \;\leq\; \mathbb{P}(F_n^q(K,\eta)) \;\leq\; \varepsilon \mathbb{P}(Ext^c)$$

gilt. Mit (6.21) folgt daraus

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big) \\
&\quad\leq\; \mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta,\; \frac{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}{(2\mu)^{n+q}} \geq a\Big) + \mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}{(2\mu)^{n+q}} < a\Big) \\
&\quad\leq\; 2\varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n, q \geq 0$ und $K \geq K_0$. □

Trennung der Parasitennachkommen

Bevor wir zum Hauptresultat kommen, zeigen wir noch folgendes: Wählt man q groß genug, so stammen alle Parasiten einer Zelle $v \in \mathbb{G}^*_{n+q}$ der $(n+q)$-ten Generation von demselben Parasiten der n-ten Generation ab. Anschaulich sollte dies klar sein, denn startet man mit zwei unabhängigen PZZ mit je einem Parasiten, so sterben diese nach (6.1) und Korollar 3.5 fast sicher aus. Bedingt man die PZZ nun darunter, dass überhaupt Parasiten überleben, so sollte durch den Drang zum Aussterben nur einer von beiden nicht aussterben. Sind in einer Zelle also mehr als ein Parasit, so enthalten die infizierten Nachkommenzellen in ferner Zukunft nur Parasitennachkommen eines dieser Parasiten.

Wir bezeichnen mit $N_n(v)$ die Anzahl der Parasiten aus Zelle $v|n$, deren Nachkommen in Zelle $v \in \mathbb{G}^*_{n+q}$ immer noch am Leben sind.

Proposition 6.9. *Für alle $K \geq 0$ und $\eta > 0$ gilt*

$$\lim_{q\to\infty} \sup_{n\geq 0} \Big\{\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\; N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big)\Big\} = 0.$$

Beweis: Seien $K \geq 0$ und $\varepsilon, \eta > 0$. Nach Proposition 6.7 finden wir ein $a > 0$, für welches

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}{(2\mu)^{n+q}} < a\Big) \leq \varepsilon \tag{6.22}$$

für alle $n, q \geq 0$ gilt. Für dieses $a > 0$ definieren wir für $n, q, K \geq 0$

$$E_n^q(K,\eta) := \Big\{\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\; N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big\} \cap \Big\{\frac{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}{(2\mu)^{n+q}} \geq a\Big\}.$$

Es folgt

$$\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\; N_n(v) \geq 2\} \;\geq\; \eta \#\mathbb{G}^*_{n+q} \mathbb{1}_{E_n^q(K,\eta)} \;\geq\; \eta a (2\mu)^{n+q} \mathbb{1}_{E_n^q(K,\eta)} \text{ f.s.}$$

und nach Übergang zum Erwartungswert dann

$$\begin{aligned}
\eta a(2\mu)^{n+q}\mathbb{P}(E_n^q(K,\eta)) &\leq \mathbb{E}\big(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2\}\big) \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}} \mathbb{1}_{\{Z_{v|n}\leq K,\ N_n(v)\geq 2\}}\Big) \\
&= \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{P}(Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2) \\
&= \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(Z_{v|n} = k,\ N_n(v) \geq 2) \\
&= \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(Z_{v|n} = k)\mathbb{P}(N_n(v) \geq 2 \mid Z_{v|n} = k) \\
&\leq \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}(Z_{v|n} = k)\mathbb{P}(N_n(v) \geq 2 \mid Z_{v|n} = K) \\
&= \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{P}(0 < Z_{v|n} \leq K)\mathbb{P}(N_n(v) \geq 2 \mid Z_{v|n} = K) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{G}_n} \mathbb{P}(0 < Z_u \leq K) \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}, v|n=u} \mathbb{P}(N_n(v) \geq 2 \mid Z_u = K) \\
&= \sum_{u\in\mathbb{G}_n} \mathbb{P}(0 < Z_u \leq K) \sum_{v\in\mathbb{G}_q} \mathbb{P}_K(N_0(v) \geq 2).
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n^q(K,\eta)) &\leq \frac{2^{-n}\sum_{u\in\mathbb{G}_n}\mathbb{P}(0 < Z_u \leq K)2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}_K(N_0(v)\geq 2)}{\eta a\mu^{n+q}} \\
&= \frac{\mathbb{P}(0 < Z_{[n]} \leq K)2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}_K(N_0(v)\geq 2)}{\eta a\mu^{n+q}} \\
&\leq \frac{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}_K(N_0(v)\geq 2)}{\eta a\mu^{n+q}} \\
&\leq \frac{2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}_K(N_0(v)\geq 2)}{\eta a\mu^{q}},
\end{aligned} \tag{6.23}$$

wobei in der letzten Zeile (6.8) einging.

Man hat $\binom{K}{2}$ viele Möglichkeiten aus K Parasiten zwei auszuwählen. Da sich die Parasiten unabhängig voneinander vermehren, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass beide ausgewählten Parasiten in Zelle v noch Nachkommen haben $\mathbb{P}(Z_v > 0)^2$. Wir erhalten daraus also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_K(N_0(v) \geq 2) &= \mathbb{P}_K\Big(\bigcup_{\substack{p_1,p_2 \in \mathcal{P}(0), \\ p_1 \neq p_2}} \{p_1 \text{ und } p_2 \text{ haben Nachkommen in Zelle } v\}\Big) \\ &\leq \binom{K}{2} \mathbb{P}(Z_v > 0)^2.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus dem eben Gezeigten, der Ungleichung (6.23) und (6.9)

$$\mathbb{P}(E_n^q(K,\eta)) \;\leq\; \frac{2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}_K(N_0(v)\geq 2)}{\eta a \mu^q} \;\leq\; \frac{\binom{K}{2}2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}(Z_v>0)^2}{\eta a\mu^q} \;\underset{q\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

Wir finden also ein $q_0 \geq 0$, sodass für alle $q \geq q_0$ und $n \geq 0$

$$\mathbb{P}(E_n^q(K,\eta) \cap Ext^c) \;\leq\; \mathbb{P}(E_n^q(K,\eta)) \;\leq\; \varepsilon \mathbb{P}(Ext^c)$$

gilt. Mit (6.22) folgt damit

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\; N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big) \\ &\qquad \leq \; \mathbb{P}^*\Big(E_n^q(K,\eta)\Big) + \mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}{(2\mu)^{n+q}} < a\Big) \\ &\qquad \leq \; 2\varepsilon\end{aligned}$$

für alle $q \geq q_0$ und $n \geq 0$. □

Das Hauptresultat

Nach dieser Vorarbeit können wir uns nun dem Hauptresultat dieses Abschnittes zuwenden. Wir erinnern noch einmal daran, dass $F_k(n)$ das Verhältnis der Zellen mit k Parasiten zur Gesamtanzahl infizierter Zellen in der n-ten Generation und $\mathcal{Y}$ eine Yaglom-quasitationär-verteilte Zufallsgröße angibt.

Satz 6.10. *$(F_k(n))_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert bedingt unter Ext^c in Wahrscheinlichkeit in $S^1(\mathbb{N}_0)$ gegen $(\mathbb{P}(\mathcal{Y}=k))_{k\in\mathbb{N}_0}$. Für alle $k \geq 0$ gilt also*

$$F_k(n) \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \mathbb{P}(\mathcal{Y}=k), \quad n \to \infty.$$

Bevor wir zu dem doch recht langen Beweis dieses Satzes kommen, wollen wir zuvor noch ein paar Bemerkungen machen.

Bemerkung 6.11. (a) Satz 6.10 liefert uns die Möglichkeit durch eine Realisierung von Zufallsgrößen die Verteilung von $\mathcal{Y}$ numerisch zu berechnen. Diese Verteilung hängt nur von $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ ab, wie Proposition 3.9 aussagt.

(b) Aufgrund der Trennung der Parasitennachkommen (Proposition 6.9) gilt der obige Satz 6.10 auch dann, wenn man mit mehreren Parasiten startet. Bei fortlaufender Zeit sind in einer Zelle nämlich nur noch Parasiten, die alle einen gemeinsamen Vorfahren haben. Teilt sich eine Zelle nicht in zwei sondern in $N \in \mathbb{N}$ Tochterzellen, so kann man analog alle Beweise aus Abschnitt D_3 übernehmen und erhält auch hier als Resultat Satz 6.10.

(c) Nach (a) und (b) können wir somit für jeden subkritischen GWP die Yaglom-quasistationäre-Verteilung numerisch berechnen. Gebe dazu X die Reproduktionsverteilung eines GWP mit $\mu = \mathbb{E}X < 1$ an. Wähle dann $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $N\mu > 1$ gilt. Betrachte nun ein Zellteilungsmodell in dem jede Zelle N Tochterzellen bekommt. Gebe $X^{(l)} \overset{d}{=} X$, $1 \leq l \leq N$, die Verteilung der Parasiten auf die Tochterzelle l an. Simuliert man nun diesen Prozess und berechnet das Verhältnis infizierter Zellen mit $k \geq 1$ Parasiten zur Gesamtanzahl an Parasiten in jeder Generation, so erhält man aus Satz 6.10 eine Näherung für $\mathbb{P}(\mathcal{Y} = k)$. Da der PZZ nach Proposition 3.4 (iii) ein GWP mit Reproduktionsverteilung $\mathbb{P}(X \in \cdot)$ ist, gibt $\mathcal{Y}$ die Yaglom-quasistationäre-Verteilung assoziiert zu $\mathbb{P}(X \in \cdot)$ an. Ist $\mathbb{P}(Ext) > 0$, so kann man mit mehreren Parasiten starten, um so die Aussterbewahrscheinlichkeit zu senken und damit die Chance zu erhöhen, einen überlebenden Pfad zu simulieren.

Abbildung 6.1 zeigt das Verhältnis infizierter Zellen mit $k = 1, 2$ oder 3 Parasiten zur Gesamtanzahl infizierter Zellen für die ersten 30 Generationen. Dabei sind $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ unabhängig und jeweils $Poi(0.75)$-verteilt. Sofern Parasiten überleben, strebt $F_k(n)$ für $k = 1, 2, 3$ gegen einen konstanten Grenzwert.

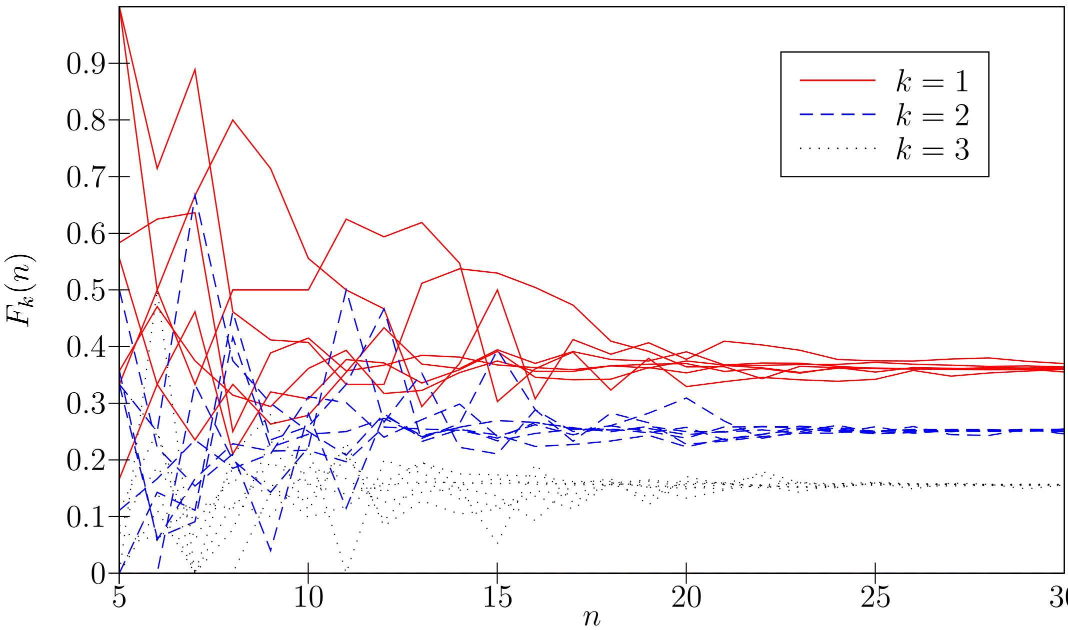


Abbildung 6.1: Simulation von $F_k(n)$, $k = 1, 2, 3$ mit $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ unabhängig und jeweils $Poi(0.75)$-verteilt.

(d) Allgemeiner kann man auch die Yaglom-quasistationäre-Verteilung eines stark subkritischen GWPZVU mit $K \in \mathbb{N}$ Umgebungen numerisch berechnen. Seien dazu $X^{(l)}$, $1 \leq l \leq K$, die Zufallsvariablen, die gemäß der K Umgebungen verteilt sind, und $\mu_1, \ldots, \mu_K$ ihre Erwartungswerte. Wähle nun ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $N \sum_{i=1}^{K} \mu_i > 1$ gilt. Wir betrachten dann ein Zellteilungsmodell mit KN Tochterzellen, wobei für jedes $1 \leq l \leq K$ genau N dieser Zellen gemäß der Verteilung $\mathbb{P}(X^{(l)} \in \cdot)$ Parasiten enthalten. Wie in (c) lässt sich dann mit Satz 6.10 die Yaglom-quasistationäre-Verteilung des GWPZVU numerisch annähern.

Wir geben noch zwei Beispiele an, in denen man die Yaglom-quasistationäre-Verteilung $\mathbb{P}(\mathcal{Y} \in \cdot)$ eines GWP sogar direkt berechnen kann.

Beispiel 6.12. (a) Im trivialen Fall $\mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} \leq 1) = 1$ folgt $\mathbb{P}(\mathcal{Y} = 1) = 1$.

(b) Gebrochen-rationale Reproduktionsverteilung: Für ausführlichere Rechnungen siehe Kapitel I.4 in [9]. Seien $p \in (0,1)$ und $b \in (0, (1-p)^2)$. Die Verteilungen von $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ seien gegeben durch

$$\mathbb{P}(X^{(0)} = k) = \mathbb{P}(X^{(1)} = k) = \begin{cases} bp^{k-1}, & \text{falls } k \geq 1 \\ 1 - \frac{b}{1-p}, & \text{falls } k = 0. \end{cases}$$

Aufgrund der identischen Verteilung von $X^{(0)}$ und $X^{(1)}$ bildet der PZZ $(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ nach Proposition 3.4 (iii) einen GWP mit Reproduktionsmittel

$$\mu_0 = \mu_1 = \frac{b}{(1-p)^2} < 1.$$

Damit existiert ein Fixpunkt $s_0 > 1$ von $f_0(s)$. Für alle $v \in \mathbb{G}_n$ gilt weiter

$$\mathbb{E}(s^{Z_{[n]}}) \;=\; f_v(s) \;=\; 1 - \mu_0^n \left(\frac{1 - s_0}{\mu_0^n - s_0} \right) + \frac{\mu_0^n \left(\frac{1-s_0}{\mu_0^n - s_0} \right)^2 s}{1 - \left(\frac{\mu_0^n - 1}{\mu_0^n - s_0} \right) s},$$

und es folgt dann für $v \in \mathbb{G}_n$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(s^{Z_{[n]}} \mid Z_{[n]} > 0) \;=\; \lim_{n \to \infty} \frac{f_v(s) - f_v(0)}{1 - f_v(0)} \;=\; \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1-s_0}{\mu_0^n - s_0} \right) s}{1 - \left(\frac{\mu_0^n - 1}{\mu_0^n - s_0} \right) s} \;=\; \frac{(s_0 - 1)s}{s_0 - s}.$$

Da $(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ ein GWP ist, gilt nach Satz 2.10 $\mathbb{E}(s^{\mathcal{Y}}) = \frac{(s_0-1)s}{s_0 - s}$. Die k-te Ableitung dieser erzeugenden Funktion an der Stelle 0 liefert dann für $k \geq 1$

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y} = k) = \frac{s_0 - 1}{s_0^k}.$$

Wenden wir uns nun dem Beweis von Satz 6.10 zu.

Beweis: Wir teilen den Beweis in drei Schritte auf. Im ersten Schritt zeigen wir, dass zu jeder Abweichungsgrenze η und Toleranzwahrscheinlichkeit ε Elemente aus $S^1(\mathbb{N}_0)$ existieren, die sich mit geringerer Wahrscheinlichkeit als ε um mehr als η von $(F_k(n))_{k\geq 0}$ unterscheiden. Im zweiten Schritt werden wir dann mit Hilfe der Vollständigkeit von $l^1(\mathbb{N}_0)$ die Existenz des Limes zeigen und im letzten Schritt die im Satz angegebene Form bestätigen.

1. Schritt: Beh.: Für alle $\varepsilon, \eta > 0$ existiert ein $n_0 \geq 0$ und ein $f \in S^1(\mathbb{N}_0)$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathbb{P}^*\big(||(F_k(n))_{k\geq 0} - f||_1 \geq \eta\big) \leq \varepsilon.$$

Beweisidee: Nach Proposition 6.8 stammen die infizierten Zellen der $(n+q)$-ten Generation von schwach infizierten Zellen der n-ten Generation ab. Für große q, befinden sich nach Proposition 6.9 in einer infizierten Zelle der $(n+q)$-ten Generation nur noch Parasiten, die von ein und demselben Parasiten abstammen. Dies bedeutet, dass sich für $q \to \infty$ die infizierten Zellen so verhalten, als wenn die Parasiten der n-ten Generation aus unterschiedlichen Zellen stammen würden. Da $\mu_0 + \mu_1 > 1$ vorausgesetzt ist, konvergiert die Anzahl der Parasiten bedingt unter Ext^c gegen unendlich. Da sich die Parasiten unabhängig voneinander vermehren, kann man so mit einer Art Gesetz der großen Zahlen auf die Existenz einer Folge aus $S^1(\mathbb{N}_0)$ schließen.

Notation: Als erstes führen wir einige Notationen ein, welche wir später gebrauchen werden. Für $p \in \mathcal{P}(n)$ setzen wir $p|k$, $0 \leq k \leq n$, als den Vorfahren des Parasiten p in der k-ten Generation. Dann definieren wir für $k \geq 1$, $n, q \geq 0$ und $p \in \mathcal{P}(n)$ mit

$$Y_k^q(p) := \sum_{v \in \mathbb{G}^*_{n+q}} \mathbb{1}_{\{\#\{r \in \mathcal{P}_v \,:\, r|n = p\} = k\}}$$

die Anzahl der Zellen der $(n+q)$-ten Generation, welche genau k Parasiten enthalten, die von p abstammen. Für $k = 0$ setzen wir $Y_0^q(p) := 0$. Da sich die Parasiten unabhängig voneinander und gemäß der gleichen Verteilung vermehren, sind die $(Y_k^q(p))_{k\geq 0}, p \in \mathcal{P}(n)$, unabhängig und identisch verteilt. Wir bezeichnen mit $(Y_k^q)_{k\geq 0}$ eine Zufallsvariable, die solch eine Verteilung besitzt.

Für $K, n \geq 0$ setzen wir außerdem

$$\mathcal{P}_K(n) := \bigcup_{\substack{v \in \mathbb{G}_n, \\ Z_v \leq K}} \mathcal{P}_v$$

als die Menge der Parasiten der n-ten Generation, die zu einer mit höchstens K Parasiten infizierten Zelle gehören. Weiter sei $N_n(v)$ wie in Proposition 6.9 definiert.

Beweis von Schritt 1: Für $K, k, n, q \geq 0$ definieren wir mit den eben eingeführten Notationen

$$G_k^K(n,q) := \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_K(n)} Y_k^q(p)}{\sum_{k' \geq 0} \sum_{p \in \mathcal{P}_K(n)} Y_{k'}^q(p)}$$

und

$$f_k^q := \frac{\mathbb{E}(Y_k^q)}{\sum_{k' \geq 0} \mathbb{E}(Y_{k'}^q)}.$$

Aus der oben gegebenen Beweisidee sollte klar sein, dass $F_k(n+q)$ und $G_k^K(n,q)$ für ein geeignetes $q \geq 0$ nur noch geringfügig voneinander abweichen und dass $G_k^K(n,q)$ für $n \to \infty$ gegen f_k^q konvergiert. $(f_k^q)_{k \geq 0}$ stellt somit einen idealen Kandidaten für das gesuchte $f \in S^1(\mathbb{N}_0)$ dar. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir in der Tat für alle $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\big(||(F_k(n+q))_{k \geq 0} - (f_k^q)_{k \geq 0}||_1 \geq \eta\big) \\
&\quad \leq \underbrace{\mathbb{P}^*\big(||(F_k(n+q))_{k \geq 0} - (G_k^K(n,q))_{k \geq 0}||_1 \geq \eta_1\big)}_{(a)} \\
&\qquad\qquad + \underbrace{\mathbb{P}^*\big(||(G_k^K(n,q))_{k \geq 0} - (f_k^q)_{k \geq 0}||_1 \geq \eta_2\big)}_{(b)}
\end{aligned}$$

für alle $\eta_1, \eta_2 > 0$ mit $\eta_1 + \eta_2 = \eta$. Es reicht also für alle $\varepsilon, \eta > 0$ geeignete Konstanten $K_0, n_0, q_0 \in \mathbb{N}_0$ und $\eta_1, \eta_2 > 0$ zu finden, sodass für alle $n \geq n_0$ und q_0 die beiden rechten Summanden (a) und (b) kleiner als ε sind. Seien von nun an für den Rest des Beweises $\varepsilon, \eta > 0$ gegeben.

Abschätzung von (a): Mit Hilfe der Dreiecksungleichung gilt für alle $n, q, K \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \geq 1} \Big| \#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_v = k\} - \sum_{p \in \mathcal{P}_K(n)} Y_k^q(p) \Big| \\
&\quad = \sum_{k \geq 1} \Big| \#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_v = k,\ Z_{v|n} > K\} \\
&\qquad\qquad + \#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_v = k,\ Z_{v|n} \leq K\} - \sum_{p \in \mathcal{P}_K(n)} Y_k^q(p) \Big| \qquad (6.24) \\
&\quad \leq \#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n} > K\} \\
&\qquad\qquad + \underbrace{\sum_{k \geq 1} \Big| \#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_v = k,\ Z_{v|n} \leq K\} - \sum_{p \in \mathcal{P}_K(n)} Y_k^q(p) \Big|}_{(*)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}.
\end{aligned}$$

Für $v \in \mathbb{G}_{n+q}^*$ gilt

$$\mathbb{1}_{\{Z_v = k,\ Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) = 1\}} = \mathbb{1}_{\{N_n(v)=1\}} \sum_{p \in \mathcal{P}_K(n)} \mathbb{1}_{\{\#\{r \in \mathcal{P}_v \ :\ r|n = p\} = k\}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (6.25)$$

und

$$\sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} \mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}>0\}} \ \le\ K\mathbb{1}_{\{Z_{v|n}\le K\}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{6.26}$$

denn ist die Linke Seite in (6.25) gleich 1, so gibt es nur einen Parasiten, dessen Nachkommen noch in der v-ten Zelle enthalten sind. (6.26) gilt, da sich hier in Zelle $v|n$ maximal K Parasiten befinden und deswegen in Zelle v von maximal K verschiedenen Parasiten Nachkommen enthalten sein können. Des Weiteren erhalten wir

$$\sum_{k\ge1}\sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} Y_k^q(p) \ =\ \sum_{k\ge1}\sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)}\sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}} \mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}=k\}} \ \le\ K2^{n+q} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{6.27}$$

da für jedes $p\in\mathcal{P}_K(n)$ und $v\in\mathbb{G}^*_{n+q}$ maximal ein $k\ge1$ existiert, für welches eine Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}=k\}}$ den Wert 1 annimmt. Damit lassen sich insbesondere alle Summanden vertauschen. Aus dieser Tatsache, der Dreiecksungleichung, (6.25) und (6.26), folgt dann aus $(*)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge1}\left|\#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q} : Z_v=k,\ Z_{v|n}\le K\} - \sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} Y_k^q(p)\right| \\
&= \sum_{k\ge1}\left|\sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}} \mathbb{1}_{\{Z_v=k,\ Z_{v|n}\le K\}} - \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}}\sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} \mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}=k\}}\right| \\
&\le \sum_{k\ge1}\sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}}\left|\mathbb{1}_{\{Z_v=k,\ Z_{v|n}\le K\}} - \sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} \mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}=k\}}\right| \\
&= \sum_{k\ge1}\sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}, N_n(v)\ge2}\left|\mathbb{1}_{\{Z_v=k,\ Z_{v|n}\le K\}} - \sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} \mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}=k\}}\right| \\
&\le \sum_{k\ge1}\sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}, N_n(v)\ge2}\left(\mathbb{1}_{\{Z_v=k,\ Z_{v|n}\le K\}} + \sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} \mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}=k\}}\right) \\
&= \#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}\mid Z_{v|n}\le K,\ N_n(v)\ge2\} + \sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}, N_n(v)\ge2}\ \sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} \mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v\ :\ r|n=p\}>0\}} \\
&\le \#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}\mid Z_{v|n}\le K,\ N_n(v)\ge2\} + K\sum_{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}, N_n(v)\ge2} \mathbb{1}_{\{Z_{v|n}\le K\}} \\
&= \#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}\mid Z_{v|n}\le K,\ N_n(v)\ge2\} + K\#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}\mid Z_{v|n}\le K,\ N_n(v)\ge2\} \\
&= (K+1)\#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q}\mid Z_{v|n}\le K,\ N_n(v)\ge2\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}.
\end{aligned}$$

Aus (6.24) erhalten wir somit für alle $n, q, K \geq 0$

$$\sum_{k\geq 1} \Big| \#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} \mid Z_v = k\} - \sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} Y^q_k(p) \Big| \tag{6.28}$$
$$\leq \ \#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} \mid Z_{v|n} > K\} + (K+1)\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} \mid Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2\} \ \text{ f.s..}$$

Da $\#\mathcal{P}_K(n) = \sum_{v\in\mathbb{G}^*_n} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}$ ist, existiert nach Proposition 6.6 ein $K_1 \geq 0$, sodass wir für jedes $N \geq 0$ ein $n_0(N) \geq 0$ finden, sodass

$$\mathbb{P}^*(\#\mathcal{P}_{K_1}(n) \geq N) \geq 1 - \varepsilon \tag{6.29}$$

für alle $n \geq n_0(N)$ gilt. Für $K \geq K_1$ ist $\#\mathcal{P}_K(n) \geq \#\mathcal{P}_{K_1}(n)$, und daher gilt die Abschätzung (6.29) sogar für alle $K \geq K_1$. Wegen (6.7) können wir $n_0(N) \geq 0$ so groß wählen, sodass für alle $n \geq n_0(N)$ zusätzlich

$$\sup_{A\in\mathcal{F}} |\mathbb{P}^n(A) - \mathbb{P}^*(A)| \leq \varepsilon$$

gilt. Mit (6.29) folgt dann

$$\mathbb{P}^n(\#\mathcal{P}_K(n) \geq N) \geq 1 - 2\varepsilon \tag{6.30}$$

für alle $K \geq K_1, n \geq n_0(N)$. Nach Proposition 6.8 existiert ein $K_2 \geq K_1$, sodass für alle $n, q \geq 0$

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K_2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big) \leq \varepsilon \tag{6.31}$$

ist. Proposition 6.9 liefert uns weiter die Existenz eines $q_0 \geq 0$, sodass

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q_0} : Z_{v|n} \leq K_2,\ N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q_0}} \geq \frac{\eta}{K_2+1}\Big) \leq \varepsilon \tag{6.32}$$

für alle $n \geq 0$ gilt. Aus der Ungleichung (6.28) folgt nun mit (6.31) und (6.32) für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{k\geq 1} \big|\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q_0} \mid Z_v = k\} - \sum_{p\in\mathcal{P}_K(n)} Y^{q_0}_k(p)\big|}{\#\mathbb{G}^*_{n+q_0}} \geq 2\eta\Big) \\
&\leq \ \mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q_0} : Z_{v|n} > K_2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q_0}} \geq \eta\Big) \\
&\qquad + \mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q_0} : Z_{v|n} \leq K_2,\ N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q_0}} \geq \frac{\eta}{K_2+1}\Big) \\
&\leq \ 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Durch Anwenden der Ungleichung (6.2) erhalten wir somit für alle $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\Big(\Big|\Big|(F_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (G_k^{K_2}(n,q_0))_{k\geq 0}\Big|\Big|_1 \geq 4\eta\Big) \\
&= \mathbb{P}^*\Big(\Big|\Big|\frac{(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q_0} : Z_v = k\})_{k\geq 0}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q_0}} - \frac{(\sum_{p\in\mathcal{P}_{K_2}(n)} Y_k^{q_0}(p))_{k\geq 0}}{\sum_{k\geq 0}\sum_{p\in\mathcal{P}_{K_2}(n)} Y_k^{q_0}(p)}\Big|\Big|_1 \geq 4\eta\Big) \\
&\leq \mathbb{P}^*\Big(\frac{\big|\big|(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q_0} : Z_v = k\})_{k\geq 0} - (\sum_{p\in\mathcal{P}_{K_2}(n)} Y_k^{q_0}(p))_{k\geq 0}\big|\big|_1}{\#\mathbb{G}^*_{n+q_0}} \geq 2\eta\Big) \qquad (6.33) \\
&= \mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{k\geq 1}\big|\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q_0} \mid Z_v = k\} - \sum_{p\in\mathcal{P}_{K}(n)} Y_k^{q_0}(p)\big|}{\#\mathbb{G}^*_{n+q_0}} \geq 2\eta\Big) \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Abschätzung von (b): Für jedes $k \geq 0$ sind die $Y_k^{q_0}(p)$, $p \in \mathcal{P}_{K_2}(n)$, bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Dasselbe gilt auch für $\sum_{k\geq l} Y_k^q(p)$, $p \in \mathcal{P}_{K_2}(n)$, für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Mit den gleichen Argumenten wie in (6.27) ist

$$Y_k^{q_0}(p) \;\leq\; \sum_{k\geq 0} Y_k^{q_0}(p) \;\leq\; 2^{q_0}$$

und mit der monotonen Konvergenz erhalten wir so

$$\mathbb{E}(Y_k^{q_0}) \;\leq\; \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} Y_k^{q_0}\Big) \;=\; \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(Y_k^{q_0}) \;<\; \infty. \qquad (6.34)$$

Für jedes $\eta_1, \eta_2 > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ und $k, l \geq 0$ finden wir also nach dem Gesetz der großen Zahlen ein $N \geq 0$, sodass für alle $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^n\Big(\Big|\frac{1}{\#\mathcal{P}_{K_2}(n)}\sum_{p\in\mathcal{P}_{K_2}(n)} Y_k^{q_0}(p) - \mathbb{E}(Y_k^{q_0})\Big| \geq \eta_1\ ,\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\Big) \leq \varepsilon_1 \qquad (6.35)$$

und

$$\mathbb{P}^n\Big(\Big|\frac{1}{\#\mathcal{P}_{K_2}(n)}\sum_{p\in\mathcal{P}_{K_2}(n)}\sum_{k'\geq l} Y_{k'}^{q_0}(p) - \sum_{k'\geq l}\mathbb{E}(Y_{k'}^{q_0})\Big| \geq \eta_2\ ,\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\Big) \leq \varepsilon_2 \qquad (6.36)$$

gilt.

Aus (6.34) folgt die Existienz eines $k_0 \geq 1$, für welches

$$\sum_{k>k_0} f_k^{q_0} \;=\; \frac{\sum_{k>k_0}\mathbb{E}(Y_k^{q_0})}{\sum_{k'\geq 0}\mathbb{E}(Y_{k'}^{q_0})} \;\leq\; \frac{\eta}{4} \qquad (6.37)$$

gilt. Für $k \geq 0$ ist

$$G_k^{K_2}(n,q_0) = \frac{\frac{1}{\#\mathcal{P}_{K_2}(n)}\sum_{p\in\mathcal{P}_{K_2}(n)} Y_k^q(p)}{\sum_{k'\geq 0}\frac{1}{\#\mathcal{P}_{K_2}(n)}\sum_{p\in\mathcal{P}_{K_2}(n)} Y_{k'}^q(p)},$$

und da man nach (6.27) die Summenzeichen vertauschen darf, existiert nach (6.35) und (6.36) (mit $l = 0$ und k_0) ein $N \geq 0$, sodass für alle $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^n\big(|G_k^{K_2}(n, q_0) - f_k^{q_0}| \geq \frac{\eta}{4k_0},\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \ \leq \ \frac{\varepsilon}{k_0}$$

für alle $0 \leq k \leq k_0$ und

$$\mathbb{P}^n\big(|\sum_{k>k_0} G_k^{K_2}(n, q_0) - \sum_{k>k_0} f_k^{q_0}| \geq \frac{\eta}{4},\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \ \leq \ \varepsilon$$

gilt. Aus diesen beiden Abschätzungen, (6.37) und $G_0^{K_2}(n, q_0) = f_0^{q_0} = 0$ folgt dann

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^n\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta,\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&= \ \mathbb{P}^n\big(\sum_{k\geq 0} |G_k^{K_2}(n, q_0) - f_k^{q_0}| \geq \eta,\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&\leq \ \mathbb{P}^n\big(\sum_{k=1}^{k_0} |G_k^{K_2}(n, q_0) - f_k^{q_0}| + \sum_{k>k_0} G_k^{K_2}(n, q_0) + \sum_{k>k_0} f_k^{q_0} \geq \eta,\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&\leq \ \mathbb{P}^n\big(\sum_{k=1}^{k_0} |G_k^{K_2}(n, q_0) - f_k^{q_0}| + \sum_{k>k_0} G_k^{K_2}(n, q_0) \geq \frac{3}{4}\eta,\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&\leq \ \mathbb{P}^n\big(\sum_{k=1}^{k_0} |G_k^{K_2}(n, q_0) - f_k^{q_0}| \geq \frac{\eta}{4},\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}^n\big(\sum_{k>k_0} G_k^{K_2}(n, q_0) \geq \frac{\eta}{2},\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&\leq \ \sum_{k=1}^{k_0} \mathbb{P}^n\big(|G_k^{K_2}(n, q_0) - f_k^{q_0}| \geq \frac{\eta}{4k_0},\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}^n\big(|\sum_{k>k_0} G_k^{K_2}(n, q_0) - \sum_{k>k_0} f_k^{q_0}| \geq \frac{\eta}{4},\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) \\
&\leq \ 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Aus (6.30) folgt dann weiter für alle $n \geq n_0(N)$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^n\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big) \\
&\leq \ \mathbb{P}^n\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta,\ \#\mathcal{P}_{K_2}(n) \geq N\big) + \mathbb{P}^n\big(\#\mathcal{P}_{K_2}(n) < N\big) \\
&\leq \ 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach (6.7) konvergiert $\mathbb{P}^n$ gegen $\mathbb{P}^*$ in Totalvariation, weshalb die Existenz eines $n_1 \geq n_0(N)$ folgt, sodass für alle $n \geq n_1$

$$\mathbb{P}^*\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big) \leq 5\varepsilon$$

gilt. Mit (6.33) und der eben gezeigten Ungleichung folgt also für alle $n \geq n_1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\big(||(F_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq 5\eta\big)\\
&\qquad \leq\ \mathbb{P}^*\big(||(F_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (G_k^{K_2}(n,q_0))_{k\geq 0}||_1 \geq 4\eta\big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathbb{P}^*\big(||(G_k^{K_2}(n,q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big)\\
&\qquad \leq\ 7\varepsilon
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung des ersten Schrittes.

2. Schritt: Beh.: Es existiert ein $f \in S^1(\mathbb{N}_0)$, für welches gilt

$$(F_k(n))_{k\geq 0} \xrightarrow{\mathbb{P}^*} f.$$

Beweis von Schritt 2: Wir setzen $F(n) := (F_k(n))_{k\geq 0}$. Nach Schritt 1 existiert zu jedem $l \geq 0$ ein $n_l \geq 0$ und ein $f(l) \in S^1(\mathbb{N}_0)$, sodass für alle $n \geq n_l$

$$\mathbb{P}^*\big(||F(n) - f(l)||_1 \geq (\frac{1}{2})^{l+1}\big) \leq (\frac{1}{2})^l$$

gilt. Für alle $2 \leq l \leq l'$ und n groß genug ist dann

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\big(||f(l) - f(l')||_1 \geq (\frac{1}{2})^l\big)\\
&\quad \leq\ \mathbb{P}^*\big(||F(n) - f(l)||_1 \geq (\frac{1}{2})^{l+1}\big) + \mathbb{P}^*\big(||F(n) - f(l')||_1 \geq (\frac{1}{2})^{l+1}\big)\\
&\quad \leq\ (\frac{1}{2})^l + (\frac{1}{2})^{l'}\\
&\quad <\ 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass für alle $2 \leq l \leq l'$

$$||f(l) - f(l')||_1 \leq (\frac{1}{2})^l$$

gelten muss. $(f(l))_{l\geq 0}$ bildet somit eine Cauchyfolge und konvergiert wegen der Vollständigkeit des Banachraums $l^1(\mathbb{N}_0)$ und der Abgeschlossenheit von $S^1(\mathbb{N}_0)$ gegen einen Grenzwert $f \in S^1(\mathbb{N}_0)$. Damit gilt insbesondere für alle $l \geq 2$

$$||f(l) - f||_1 \leq (\frac{1}{2})^l.$$

Für alle $l \geq 2$ und $n \geq n_l$ erhalten wir so

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*\big(||F(n) - f||_1 \geq (\frac{1}{2})^{l-1}\big) &\leq \mathbb{P}^*\big(||F(n) - f(l)||_1 + ||f(l) - f||_1 \geq (\frac{1}{2})^{l-1}\big) \\
&\leq \mathbb{P}^*\big(||F(n) - f(l)||_1 + (\frac{1}{2})^{l} \geq (\frac{1}{2})^{l-1}\big) \\
&= \mathbb{P}^*\big(||F(n) - f(l)||_1 \geq (\frac{1}{2})^{l}\big) \\
&\leq (\frac{1}{2})^{l-1}
\end{aligned}$$

und damit die Aussage des zweiten Schrittes.

3. Schritt: Beh.: Sei $f = (f_k)_{k\geq 0} \in S^1(\mathbb{N}_0)$ der Limes der Folge $(F(n))_{n\geq 0}$. Dann ist

$$f_k = \mathbb{P}(\mathcal{Y} = k)$$

für alle $k \geq 0$.

Beweis von Schritt 3: Nach Korollar 3.7 gilt für alle $k \geq 0$

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\mathcal{Y} = k).$$

Es reicht also zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_k$$

für alle $k \geq 0$ gilt, denn dann folgt aus der Eindeutigkeit des Limes die Behauptung.

Für alle $k \geq 1$ gilt durch analoge Rechnung wie in (4.1)

$$\frac{\mathbb{P}(Z_{[n]} = k)}{\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)} = \frac{\mathbb{E}(\#\{i \in \mathbb{G}_n : Z_i = k\})}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)} = \frac{\mathbb{E}(F_k(n)\#\mathbb{G}_n^*)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)}. \tag{6.38}$$

Weiter ist für $1 > \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)}{(2\mu)^n} &\geq \mathbb{E}\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n}\mathbb{1}_{Ext^c}\Big) \\
&= \mathbb{P}(Ext^c)\mathbb{E}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n}\Big) \\
&\geq \mathbb{P}(Ext^c)\mathbb{E}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n}\mathbb{1}_{\{\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n} \geq a\}}\Big) \\
&\geq a\mathbb{P}(Ext^c)\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(2\mu)^n} \geq a\Big) \\
&\geq a\mathbb{P}(Ext^c)(1 - \varepsilon),
\end{aligned}$$

wobei $a > 0$ nach Proposition 6.7 gewählt ist. Es existiert also eine Konstante $c > 0$, für welche

$$\inf_{n\geq 0} \frac{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)}{(2\mu)^n} \geq c \tag{6.39}$$

gilt. Wegen $|F_k(n) - f_k| \leq 1$, $\#\mathbb{G}_n^* \leq \mathcal{Z}_n$ fast sicher für alle $k, n \geq 0$ und (6.39) erhalten wir für $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\mathbb{E}(F_k(n)\#\mathbb{G}_n^*)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)} - f_k\Big| &= \Big|\frac{\mathbb{E}\big(\#\mathbb{G}_n^*(F_k(n) - f_k)\big)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)}\Big| \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\big(\#\mathbb{G}_n^*|F_k(n) - f_k|\big)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)} \\
&\leq \eta + \frac{\mathbb{E}\big(\#\mathbb{G}_n^*|F_k(n) - f_k|\ \mathbb{1}_{\{|F_k(n)-f_k|\geq\eta\}}\big)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)} \\
&\leq \eta + \frac{\mathbb{E}\big(\mathcal{Z}_n\mathbb{1}_{\{|F_k(n)-f_k|\geq\eta\}}\big)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)} \\
&\leq \eta + \frac{\mathbb{E}\big(\mathcal{Z}_n\mathbb{1}_{\{|F_k(n)-f_k|\geq\eta\}}\big)}{c(2\mu)^n}.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Da $2\mu > 1$ und $\mathcal{Z}_1$ quadratisch integrierbar in diesem Abschnitt vorausgesetzt waren, erhalten wir mit Proposition 2.3

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n}\Big)^2 = \frac{\operatorname{Var}\mathcal{Z}_n + (\mathbb{E}\mathcal{Z}_n)^2}{(2\mu)^{2n}} = \operatorname{Var}(\mathcal{Z}_1)\frac{1-(2\mu)^{-n}}{2\mu(2\mu-1)}+1 \leq \frac{\operatorname{Var}\mathcal{Z}_1}{2\mu(2\mu-1)}+1 < \infty$$

und damit die $\mathcal{L}_2$-Beschränktheit sowie daraus die gleichgradige Integrierbarkeit von $(\frac{\mathcal{Z}_n}{(2\mu)^n})_{n\geq 0}$ (Satz A.6). Dank des zweiten Schritts konvergiert daher der zweite Term am Ende von (6.40) für $n \to \infty$ gegen 0 (Satz A.6). Insgesamt erhalten wir aus (6.38) und (6.40) somit

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_k.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Korollare

Mit Hilfe von Satz 6.10 können wir nun auf das asymptotische Verhalten von $\#\mathbb{G}_n^*$ schließen.

Korollar 6.13. *Es gilt*

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{\mathcal{Z}_n} \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}} \quad \text{und} \quad \frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(\mu_0+\mu_1)^n} \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \frac{W}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}, \quad n \to \infty,$$

wobei W die Zufallsgröße aus Proposition 2.7 und $\mathcal{Y}$, wie aus dem vorherigen Satz, eine Yaglom-quasistationär-verteilte Zufallsgröße ist.

Beweis: Als erstes halten wir fest, dass $\mathbb{E}\mathcal{Y} \in (0, \infty)$ nach Korollar 3.7 ist. Für alle $K \geq 1$ gilt die Gleichung

$$\#\mathbb{G}_n^* \;=\; \#\mathbb{G}_n^* \frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}}}{\sum_{k=1}^K k\#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v = k\}} \;=\; \frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}}}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}$$

Da $\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}} \leq \mathcal{Z}_n$ fast sicher ist, folgt somit

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{\mathcal{Z}_n} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} \frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| && (6.41) \\
&\quad \leq \Big|\frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}}}{\mathcal{Z}_n}\Big|\Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| + \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big|\frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}}}{\mathcal{Z}_n} - 1\Big| \\
&\quad \leq \Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| + \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}} \frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v > K\}}}{\mathcal{Z}_n} \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}
\end{aligned}$$

Seien $\varepsilon, \eta > 0$. Nach Lemma 6.5 existiert ein $K_0 \geq 1$, sodass für alle $K \geq K_0$ und $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v > K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \eta\Big) \leq \varepsilon \tag{6.42}$$

gilt. Nach dem Satz der monotonen Konvergenz finden wir weiter ein $K \geq K_0$, sodass

$$\Big|\frac{1}{\mathbb{E}(\mathcal{Y}\mathbb{1}_{\{\mathcal{Y} \leq K\}})} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| \leq \eta \tag{6.43}$$

ist. Satz 6.10 liefert dann

$$\sum_{k=1}^K kF_k(n) \;\xrightarrow{\mathbb{P}^*}\; \sum_{k=1}^K k\mathbb{P}(\mathcal{Y} = k) \;=\; \mathbb{E}(\mathcal{Y}\mathbb{1}_{\{\mathcal{Y} \leq K\}})$$

und damit

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathcal{Y}\mathbb{1}_{\{\mathcal{Y} \leq K\}})}$$

für $n \to \infty$. Es existiert also ein $n_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}^*\Big(\Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} - \frac{1}{\mathbb{E}(\mathcal{Y}\mathbb{1}_{\{\mathcal{Y} \leq K\}})}\Big| \geq \eta\Big) \leq \varepsilon \tag{6.44}$$

gilt. Dann folgt aus (6.41), (6.42), (6.43) und (6.44) für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^*\Big(\Big|\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{\mathcal{Z}_n} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| \geq 2\eta + \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\eta\Big) \\
&\quad\leq\ \mathbb{P}^*\Big(\Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| + \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq 2\eta + \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\eta\Big) \\
&\quad\leq\ \mathbb{P}^*\Big(\Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| \geq 2\eta\Big) + \mathbb{P}^*\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \eta\Big) \\
&\quad\leq\ \mathbb{P}^*\Big(\Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} - \frac{1}{\mathbb{E}(\mathcal{Y}\mathbb{1}_{\{\mathcal{Y}\leq K\}})}\Big| + \Big|\frac{1}{\mathbb{E}(\mathcal{Y}\mathbb{1}_{\{\mathcal{Y}\leq K\}})} - \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\Big| \geq 2\eta\Big) + \varepsilon \\
&\quad\leq\ \mathbb{P}^*\Big(\Big|\frac{1}{\sum_{k=1}^K kF_k(n)} - \frac{1}{\mathbb{E}(\mathcal{Y}\mathbb{1}_{\{\mathcal{Y}\leq K\}})}\Big| \geq \eta\Big) + \varepsilon \\
&\quad\leq\ 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ergibt sich nun leicht aus der ersten und Satz 2.7, denn es gilt

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(\mu_0+\mu_1)^n} = \frac{\mathcal{Z}_n}{(\mu_0+\mu_1)^n}\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{\mathcal{Z}_n} \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \frac{W}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}.$$

□

Wir definieren für $k, n, q \geq 0$

$$F_k(n,q) := \frac{\#\{i \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{i|n} = k\}}{\#\mathbb{G}_{n+q}^*}$$

als das Verhältnis infizierter Zellen der $(n+q)$-ten Generation, deren Zellvorfahren in Generation n genau k Parasiten hatten, zur Gesamtanzahl infizierter Zellen der $(n+q)$-ten Generation. Lassen wir q gegen unendlich laufen, so konvergiert $F_k(n,q)$ bedingt unter Ext^c stochastisch gegen eine Zufallsgröße, welche das obige Verhältnis für die Zellen aus $\delta\mathbb{T}^*$ angibt. Lässt man dann auch noch n gegen unendlich laufen, so erhält man eine größenverzerrte Yaglom-quasistationäre-Verteilung. Für größenverzerrte Verteilung siehe (2.5).

Korollar 6.14. *$(F_k(n,q))_{k\geq 0}$ konvergiert bedingt unter Ext^c in Wahrscheinlichkeit in $S^1(\mathbb{N}_0)$ für $q \to \infty$. Dieser Limes konvergiert weiter in Wahrscheinlichkeit in $S^1(\mathbb{N}_0)$ für $n \to \infty$. Genauer gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{q\to\infty} F_k(n,q) \overset{\mathbb{P}^*}{=} \frac{k\mathbb{P}(\mathcal{Y}=k)}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}$$

für alle $k \geq 0$.

Beweis: Für $k, n, q \geq 0$ gilt

$$F_k(n,q) \;=\; \sum_{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k} \frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u,\ Z_u = k\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{6.45}$$

und für jeden Summanden der rechten Summe weiter

$$\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u,\ Z_u = k\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} = \frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u,\ Z_u = k,\ N_n(v) = 1\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} + \frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u,\ Z_u = k,\ N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}$$

fast sicher. Aus Proposition 6.9 folgt für den zweiten Summanden

$$\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u,\ Z_u = k,\ N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \xrightarrow{\mathbb{P}^*} 0, \quad q \to \infty.$$

In ferner Zukunft sind in einer infizierten Zelle also nur noch Nachkommen eines Parasiten. Anstatt des asymptotischen Verhaltens eines Prozesses startend in einer Zelle mit k Parasiten zu betrachten, können wir daher auch das asymptotische Verhalten von k Prozessen startend mit je einem Parasiten untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to\infty} \frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u,\ Z_u = k\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \\
&\overset{\mathbb{P}^*}{=} \lim_{q\to\infty} \frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u,\ Z_u = k,\ N_n(v) = 1\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \\
&\overset{\mathbb{P}^*}{=} \lim_{q\to\infty} \frac{(2\mu)^q}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \sum_{s=1}^{k} \frac{\#\mathbb{G}^*_q(s,u)}{(2\mu)^q},
\end{aligned} \tag{6.46}$$

wobei $\#\mathbb{G}^*_q(s,u)$ der Prozess der infizierten Zellen eines ZTPIZ startend mit Parasit $p_s \in \mathcal{P}_j = \{p_1, \ldots, p_k\}$ ist.

Nach Proposition 2.7 gilt $\{W = 0\} = Ext$ fast sicher und aus Korollar 6.13 folgt damit

$$\frac{\#\mathbb{G}^*_q}{(2\mu)^q} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{W}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}, \quad q \to \infty.$$

Hieraus erhalten wir für $1 \leq s \leq k$

$$\frac{\#\mathbb{G}^*_q(s,u)}{(2\mu)^q} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{W(s,u)}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}, \quad q \to \infty,$$

wobei die $W(1,u), \ldots, W(k,u)$ unabhängig und wie W verteilt sind. Setzen wir dann $W_k(u) = \sum_{s=1}^k W(s,u)$, so gilt

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{\#\mathbb{G}^*_q(s,u)}{(2\mu)^q} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{W_k(u)}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}, \quad q \to \infty,$$

und durch eine weitere Anwendung von Korollar 6.13 für $q \to \infty$

$$\frac{(2\mu)^q}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \sum_{s=1}^{k} \frac{\#\mathbb{G}^*_q(s,u)}{(2\mu)^q} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \quad \frac{1}{(2\mu)^n} \frac{\mathbb{E}\mathcal{Y}}{W} \frac{W_k(u)}{\mathbb{E}\mathcal{Y}} \quad = \quad \frac{1}{(2\mu)^n} \frac{W_k(u)}{W}.$$

Mit (6.45) und (6.46) folgt dann für $q \to \infty$

$$F_k(n,q) \;=\; \sum_{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k} \frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : v|n = u\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \quad \frac{1}{(2\mu)^n} \sum_{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k} \frac{W_k(u)}{W},$$

und damit die erste Behauptung.

Für die zweite Behauptung betrachten wir den eben erhalten Grenzwert. Für diesen gilt

$$\frac{1}{(2\mu)^n} \frac{1}{W} \sum_{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k} W_k(u) \;=\; \frac{1}{W} \frac{\#\{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k\}}{(2\mu)^n} \frac{\sum_{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k} W_k(u)}{\#\{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k\}} \tag{6.47}$$

fast sicher. Nach Satz 6.10 und Korollar 6.13 folgt

$$\frac{\#\{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k\}}{(2\mu)^n} \;=\; F_k(n) \frac{\#\mathbb{G}^*_n}{(2\mu)^n} \quad \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \quad \mathbb{P}(\mathcal{Y} = k) \frac{W}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}, \quad n \to \infty \tag{6.48}$$

und damit konvergiert (6.47) in Wahrscheinlichkeit gegen 0, wenn $F_k(n)$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Konvergiere also $F_k(n)$ in Wahrscheinlichkeit gegen einen Grenzwert größer 0. Da $\#\mathbb{G}^*_n \longrightarrow \infty$ $\mathbb{P}^*$-f.s. für $n \to \infty$ nach Satz 5.5 gilt, muss also auch $\#\{i \in \mathbb{G}^*_n : Z_i = k\} \longrightarrow \infty$ $\mathbb{P}^*$-f.s. gelten.

Mit Satz 2.8 erhalten wir für $W_k(u)$

$$\mathbb{E}W_k(u) \;=\; \mathbb{E}\Big(\sum_{s=1}^{k} W(s,u)\Big) \;=\; k\mathbb{E}W(1,u) \;=\; k\mathbb{E}W \;=\; k.$$

Da die $(W_k(u))_{u \in \mathbb{G}^*_n}$ bedingt unter $\{\#\mathbb{G}^*_n > 0\}$ nach Satz 1.3 unabhängig und identisch verteilt sind, folgt mit dem Gesetz der großen Zahlen für alle $\varepsilon, \eta > 0$ die Existenz eines $n_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$\mathbb{P}^n\Big(\Big|\frac{\sum_{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k} W_k(u)}{\#\{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k\}} - k\Big| \geq \eta\Big) \leq \varepsilon$$

gilt. Nach (6.7) konvergiert $\mathbb{P}^n$ gegen $\mathbb{P}^*$ in Totalvariation und wir erhalten

$$\frac{\sum_{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k} W_k(u)}{\#\{u \in \mathbb{G}^*_n : Z_u = k\}} \xrightarrow{\mathbb{P}^*} k, \quad n \to \infty. \tag{6.49}$$

Aus den zwei Konvergenzen (6.48) und (6.49) folgt somit aus (6.47)

$$\frac{1}{(2\mu)^n}\frac{1}{W}\sum_{u\in\mathbb{G}_n^*:Z_u=k} W_k(u) \xrightarrow{\mathbb{P}^*} \mathbb{P}(\mathcal{Y}=k)\frac{k}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}, \quad n\to\infty,$$

und damit die zweite Behauptung.

□

Bemerkung 6.15. Nach Korollar 2.25 ist $\left(\frac{k}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}\mathbb{P}(\mathcal{Y}=k)\right)_{k\geq 1}$ die stationäre Verteilung des zu $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ assoziierten Q-Prozesses. Korollar 6.14 gibt uns also die Möglichkeit, die stationäre Verteilung des Q-Prozesses eines subkritischen GWP numerisch zu berechnen (vgl. Bem. 6.11).

6.1.3 Kritischer und nicht stark subkritischer Prozess einer zufälligen Zelllinie, D_4

In diesem Abschnitt ist der PZZ $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ nicht stark subkritisch. Das asymptotische Verhalten von $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)$ weicht daher von demjenigen aus Fall D_3 ab. Genauer gibt es drei Fälle - der PZZ ist kritisch, moderat subkritisch oder schwach subkritisch - in denen sich $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)$ jeweils anders verhält (vgl. Bem. 4.3).

Dass der PZZ stark subkritisch war, spielte in den Beweisen aus D_3 jedoch eine entscheidende Rolle. Wir können daher die Beweisidee bedauerlicherweise nicht übernehmen. So ist zum Beispiel der Beweis für die Trennung der Parasitennachkommen (Proposition 6.9) oder die Vernachlässigbarkeit der stark infizierten Zellen (Proposition 6.8) auf diesen Fall nicht übertragbar. Man benötigt somit einen neuen Ansatz um das Grenzverhalten von $F_k(n)$ zu bestimmen. Es liegen daher im Fall D_4 leider noch keine vollständigen Ergebnisse vor.

Wir können jedoch eine erste Annäherung an die Lösung dieses Problems mit der folgenden Proposition geben. Wie in Abschnitt D_3 sei $\mathbb{E}(X^{(a)2}) < \infty$ für $a \in \{0,1\}$ vorausgesetzt.

Proposition 6.16. *Sei $(Z_v)_{v\in\mathbb{T}}$ ein ZTPIZ mit $(\mu_0,\mu_1)\in D_4$ und $\mu_0 < 1 < \mu_1$. Dann folgt*

$$\sup_{n\geq 0}\left\{\mathbb{P}\left(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)}\geq A\right)\right\} \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6.50}$$

und

$$\sup_{n\geq 0}\left\{\mathbb{P}^*\left(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n}\leq \frac{1}{A}\right)\right\} \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{6.51}$$

wobei $\tilde{\mu}_0 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4(\mu_0-\mu_0^2)}\right) > 1$ ist.

Beweis: Für $n\geq 0$ und $A > 0$ setzen wir

$$B(n,A) := \left\{\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)}\geq A\right\}.$$

Dann folgt

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n} \geq A\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)\mathbb{1}_{B(n,A)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und nach Übergang zum Erwartungswert

$$\mathbb{E}\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{2^n}\Big) \geq A\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)\mathbb{P}(B(n,A)).$$

Aufgrund von Gleichung (4.1) erhalten wir damit

$$1 \geq A\mathbb{P}(B(n,A))$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $A > 0$. Für $A \to \infty$ muss somit $\mathbb{P}(B(n,A)) \to 0$ gelten und damit folgt (6.50).

Für die Aussage (6.51) stellt man sofort fest, dass

$$\mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}\Big) \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Damit ist nur noch

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^*\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}\Big) \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{6.52}$$

zu zeigen. Mit Argumenten der Analysis erhält man, dass $(\mu_0, \tilde{\mu}_0) \in D_3$ ist. Insbesondere gilt damit $\tilde{\mu}_0 < \mu_1$. Seien nun $(\hat{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ und $(\tilde{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ zwei ZTPIZ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P)$ gegeben mit

$$P\big((\hat{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}} \in \cdot\big) \;=\; \mathbb{P}\big((Z_v)_{v\in\mathbb{T}} \in \cdot\big),$$

$E\tilde{X}^{(1)} = \tilde{\mu}_0$, sowie der Abhängigkeitsstruktur

$$\tilde{Z}_\varnothing = \hat{Z}_\varnothing \;\; P\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad P(\tilde{X}_{v,k}^{(0)} = \hat{X}_{v,k}^{(0)},\; \tilde{X}_{v,k}^{(1)} \leq \hat{X}_{v,k}^{(1)}) = 1$$

für alle $v \in \mathbb{T},\ k \geq 1$. Der k-te Parasit der v-ten Zelle des Prozesses $(\tilde{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ bekommt also genau so viele Nachkommen, die in die erste Tochterzelle gehen, und höchstens so viele Nachkommen, die in die zweite Tochterzelle gehen, wie der k-te Parasit der v-ten Zelle des Prozesses $(\hat{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$. Insbesondere folgt damit

$$\#\tilde{\mathbb{G}}_n^* \leq \#\hat{\mathbb{G}}_n^* \quad P\text{-f.s.} \tag{6.53}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aufgrund der Definition der Prozesse gilt außerdem

$$E\hat{X}^{(0)} = E\tilde{X}^{(0)} = \mu_0 \quad \text{und} \quad E\hat{X}^{(1)} = \mu_1$$

sowie

$$\tilde{Ext}^c \subseteq \hat{Ext}^c \quad P\text{-f.s.}, \tag{6.54}$$

wobei $\tilde{Ext}^c$ bzw. $\hat{Ext}^c$ das Ereignis beschreibt, dass Parasiten des Prozesses $(\tilde{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ bzw. $(\hat{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ überleben. Während sich also $(\hat{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ wie $(Z_v)_{v\in\mathbb{T}}$ verhält, ist $(\tilde{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ ein Prozess des Falls D_3. Es lassen sich daher die Resultate aus dem Abschnitt D_3 auf $(\tilde{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ anwenden. Genau dies werden wir uns später zunutze machen.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mu_0 + \tilde{\mu}_0 > 1$ ist, gilt $P(\tilde{Ext}) < 1$ nach Satz 2.4 (iii) und mit Hilfe von Satz 2.2 (ii) finden wir somit ein $K \in \mathbb{N}$, sodass

$$P_K(\tilde{Ext}) \;=\; P(\tilde{Ext})^K \;\leq\; \varepsilon \tag{6.55}$$

gilt. Wir bezeichnen mit $T(K) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \#\hat{\mathbb{G}}_n^* \geq K\}$ die Stoppzeit (Def. A.2) bzgl. der kanonischen Filtration $\sigma(\hat{Z}_v : |v| \leq n)$, die angibt, zu welchem Zeitpunkt der Prozess $(\hat{Z}_v)_{v\in\mathbb{T}}$ zum ersten Mal mehr als K infizierte Zellen hat. Setzen wir $P^* = P(\cdot|\hat{Ext}^c)$, so folgt nach Satz 5.5 $P^*(\#\hat{\mathbb{G}}_n^* \to \infty) = 1$. Wir erhalten also die P^*-f.s. Endlichkeit von $T(K)$. Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, für welches

$$P^*(T(K) > n_0) \leq \varepsilon \tag{6.56}$$

gilt. Nach diesen ganzen Vorbemerkungen erhalten wir nun aus (6.53), (6.54), (6.55) und (6.56) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&P^*\Big(\frac{\#\hat{\mathbb{G}}^*_{T(K)+n}}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{T(K)+n}} \leq \frac{1}{A}\Big)\\
&\quad\leq\; P^*\Big(\frac{\#\hat{\mathbb{G}}^*_{T(K)+n}}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{T(K)+n}} \leq \frac{1}{A},\; T(K)\leq n_0\Big) + P^*(T(K)>n_0)\\
&\quad\leq\; P_K^*\Big(\frac{\#\hat{\mathbb{G}}^*_n}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0}\Big) + \varepsilon\\
&\quad\leq\; P_K^*\Big(\Big\{\frac{\#\hat{\mathbb{G}}^*_n}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0}\Big\} \cap \tilde{Ext}^c\Big) + P_K^*(\tilde{Ext}) + \varepsilon\\
&\quad\leq\; P^*\Big(\Big\{\frac{\#\hat{\mathbb{G}}^*_n}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0}\Big\} \cap \tilde{Ext}^c\Big) + \frac{P_K(\tilde{Ext})}{P_K(\hat{Ext}^c)} + \varepsilon\\
&\quad\leq\; P\Big(\frac{\#\hat{\mathbb{G}}^*_n}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0} \;\Big|\; \tilde{Ext}^c\Big)\frac{P(\tilde{Ext}^c)}{P(\hat{Ext}^c)} + \frac{2\varepsilon}{P_K(\hat{Ext}^c)}\\
&\quad\leq\; P\Big(\frac{\#\tilde{\mathbb{G}}^*_n}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0} \;\Big|\; \tilde{Ext}^c\Big) + \frac{2\varepsilon}{P(\hat{Ext}^c)}
\end{aligned}$$

für alle $n \geq 0$ und $A > 0$. Da $(\mu_0, \tilde{\mu}_0) \in D_3$ liegt, folgt dann mit Korollar 6.13 für alle $A > 0$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P^*\Big(\frac{\#\hat{\mathbb{G}}_n^*}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}\Big) \\
&\qquad \leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(\frac{\#\tilde{\mathbb{G}}_n^*}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0} \;\Big|\; \tilde{Ext^c}\Big) + \frac{2\varepsilon}{P(\hat{Ext^c})} \\
&\qquad = P\Big(\frac{W}{E\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0} \;\Big|\; \tilde{Ext^c}\Big) + \frac{2\varepsilon}{P(\hat{Ext^c})}
\end{aligned}$$

wobei W und $\mathcal{Y}$ wie aus Korollar 6.13 gegeben sind. Da $W > 0$ P-f.s. auf $\tilde{Ext^c}$ ist (Satz 2.8), folgt

$$\lim_{A\to\infty} P\Big(\frac{W}{E\mathcal{Y}} \leq \frac{1}{A}(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^{n_0} \;\Big|\; \tilde{Ext^c}\Big) = 0.$$

Es gilt somit

$$\lim_{A\to\infty}\limsup_{n\to\infty} P^*\Big(\frac{\#\hat{\mathbb{G}}_n^*}{(\mu_0+\tilde{\mu}_0)^n} \leq \frac{1}{A}\Big) \leq \frac{2\varepsilon}{P(\hat{Ext^c})}$$

für alle $\varepsilon > 0$ und damit (6.52). □

Nach dieser Proposition wächst $\#\mathbb{G}_n^*$ exponentiell und man kann vermuten, dass sich $\#\mathbb{G}_n^*$ asymptotisch wie $\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*) = 2^n\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0)$ verhält.

Ist der PZZ kritisch ($\mu_0\mu_1 = 1$, Rand von $D5$), so gilt

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} \geq K \mid Z_{[n]} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

für alle $K \geq 0$ (siehe Satz A.10 und Kor. A.11). Dies legt also die Vermutung nahe, dass in diesem Fall die stark infizierten Zellen asymptotisch den Hauptbeitrag zur Gesamtanzahl infizierter Zellen geben und die schwach infizierten Zellen vernachlässigbar sind (vgl. Satz 6.2).

6.2 Kritischer Parasitenprozess, $D2$

Wie in D_3 setzen wir $\mathbb{E}\big(X^{(a)}\big) < \infty$, $a \in \{0,1\}$, voraus, wodurch zusammen mit (1.4) insbesondere $0 < \operatorname{Var}\mathcal{Z}_1 < \infty$ folgt.

In diesem Abschnitt zeigen wir als Analogon zum Satz 6.10, dass bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ die Folge $(F_k(n))_{k\geq 0}$ in Verteilung auf $S^1(\mathbb{N}_0)$ gegen $(\mathbb{P}(\mathcal{Y} = k))_{k\geq 0}$ konvergiert. Dabei ist $\mathcal{Y}$ wie in D_3 eine Yaglom-quasistationär-verteilte Zufallsgröße. Dass wir in diesem Abschnitt ein analoges Resultat zu D_3 erhalten, hat folgenden Grund: Im Fall D_2 ist $(\mathcal{Z}_n)_{n\geq 0}$ ein kritischer GWP und daher gilt $\mu_0 + \mu_1 = 1$. Nun ist jedoch $\mu_0\mu_1 \leq 1$ nach (6.1) und damit der PZZ $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ stark subkritisch. Wie im vorherigen Abschnitt gelten somit die Eigenschaften (3.4), (6.8) und (6.9) sowie nach Korollar 3.7

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} > 0) \overset{n\to\infty}{\simeq} c\mu^n = c2^{-n}$$

für ein $c \in (0,1]$. Da $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ einen stark subkritischen PZZ bildet, können wir viele der Beweise aus D_3 übernehmen. Anstatt unter $\mathbb{P}^*$ müssen wir jedoch unter $\mathbb{P}^n$ arbeiten und die Grenzwertsätze für kritische GWP (Abschnitt 2.1.3) anstelle der für superkritische benutzen. Um das oben genannte Resultat zu beweisen, zeigen wir daher eine Reihe von Propositionen, welche zu denen aus D_3 analog sind und mit deren Hilfe wir den Beweis von Satz 6.10 dann fast vollständig übertragen können.

Für den Rest dieses Abschnittes bezeichne $\mathcal{E}$ eine mit Parameter $2/\mathrm{Var}\,\mathcal{Z}_1$ exponentialverteilte Zufallsgröße, d.h.

$$\mathcal{E} \sim Exp\Big(\frac{2}{\mathrm{Var}\,\mathcal{Z}_1}\Big).$$

Vernachlässigbarkeit der Anzahl an Parasiten in stark infizierten Zellen

Wir zeigen hier analog zum Abschnitt D_3, dass die Anzahl der Parasiten in stark infizierten Zellen einen geringen Beitrag zur Gesamtanzahl der Parasiten bildet. Dafür benötigen wir noch zwei kleine Lemmata.

Lemma 6.17. *Für alle $\eta > 0$ gilt*

$$\sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \geq \eta\Big)\Big\} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis: Der Beweis verläuft fast analog zu dem von Lemma 6.5. Sei also $\eta > 0$. Wir definieren für $K \geq 0$ und $n \geq 1$

$$A_n(K,\eta) := \Big\{\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \geq \eta\Big\} \cap \Big\{\mathcal{Z}_n > 0\Big\}.$$

Dann folgt

$$\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}} \;\geq\; n\eta \mathbb{1}_{A_n(K,\eta)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und nach Übergang zum Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}\Big) \;\geq\; n\eta\mathbb{P}\big(A_n(K,\eta)\big).$$

Da $(2\mu)^n = 1$ ist, folgt daraus

$$\frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}\big(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}}\big) \;=\; \frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}\Big(\frac{1}{2^n}\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}\Big) \;\geq\; n\eta\mathbb{P}\big(A_n(K,\eta)\big).$$

Nach Korollar 3.7 gilt

$$\frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}}) \overset{n\to\infty}{\simeq} \frac{c\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}})}{\mathbb{P}(Z_{[n]}>0)} = c\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}} \mid Z_{[n]}>0)$$

für ein $c \in (0,1]$ und aus (3.4) folgt somit

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{n\eta\mathbb{P}(A_n(K,\eta))\Big\} \leq \sup_{n\geq 0}\Big\{\frac{1}{\mu^n}\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}})\Big\} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{6.57}$$

Nach Satz 2.14 gilt

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n>0) \overset{n\to\infty}{\simeq} \frac{2}{n\operatorname{Var}\mathcal{Z}_1}$$

und damit folgt

$$\mathbb{P}^n(A_n(K,\eta)) = \frac{1}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n>0)}\mathbb{P}(A_n(K,\eta)) \overset{n\to\infty}{\simeq} \frac{n\operatorname{Var}\mathcal{Z}_1}{2}\mathbb{P}(A_n(K,\eta)).$$

Aus (6.57) folgt daraus die Behauptung des Lemmas. □

Lemma 6.18. *Für alle $\varepsilon>0$ existiert ein $\eta>0$ und $K\geq 0$, sodass für alle $n\geq 1$*

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v\mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{n}\geq\eta\Big)\geq 1-\varepsilon$$

gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$. Es existiert ein $\eta_0>0$, sodass für alle $0<\eta<\eta_0$

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}\geq 2\eta)\geq 1-\varepsilon$$

gilt. Nach Satz 2.15 konvergiert $\frac{\mathcal{Z}_n}{n}$ bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n>0\}$ in Verteilung gegen $\mathcal{E}$. Nach dem Satz von Glivenko-Cantelli finden wir dann ein $n_0\geq 1$, sodass für alle $n\geq n_0$ und $0<\eta<\eta_0$

$$\Big|\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\geq 2\eta\Big)-\mathbb{P}(\mathcal{E}\geq 2\eta)\Big|\leq\varepsilon$$

und damit

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\geq 2\eta\Big)\geq 1-2\varepsilon$$

gilt. Wähle nun ein $\eta\in(0,\eta_0)$, sodass außerdem

$$\inf_{1\leq n\leq n_0}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\geq 2\eta\Big)\Big\}\geq 1-2\varepsilon$$

gilt. Damit erhalten wir also für alle $n \geq 1$

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n} \geq 2\eta\Big) \geq 1 - 2\varepsilon. \tag{6.58}$$

Nach Lemma 6.17 existiert ein $K \geq 0$ für welches

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \leq \eta\Big) \geq 1 - \varepsilon$$

für alle $n \geq 1$ ist. Mit dieser Ungleichung und (6.58) folgt dann für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{n} \geq \eta\Big) \\
&\quad = \mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n} - \frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \geq \eta\Big) \\
&\quad \geq \mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n} - \frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \geq \eta,\ \frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \leq \eta\Big) \\
&\quad \geq \mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n} \geq 2\eta,\ \frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \leq \eta\Big) \\
&\quad \geq 1 - 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Mit diesen zwei Lemmata können wir nun zeigen, dass die Anzahl der Parasiten in stark infizierten Zellen vernachlässigbar ist.

Proposition 6.19. *Für alle $\eta > 0$ gilt*

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n} \geq \eta\Big)\Big\} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0.$$

Beweis: Seien $\varepsilon, \eta > 0$. Es existiert ein $N_0 \geq 1$, sodass für alle $N \geq N_0$

$$\mathbb{P}\Big(\mathcal{E} \leq \frac{1}{N}\Big) \leq \varepsilon$$

gilt. Mit Satz 2.14 können wir dann alanog zum vorherigen Beweis ein $N \geq N_0$ finden, sodass

$$\sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n} \leq \frac{1}{N}\Big)\Big\} \leq 2\varepsilon \tag{6.59}$$

gilt. Nach Lemma 6.17 existiert nun ein $K \geq 1$ für welches

$$\sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n} \geq \frac{\eta}{N}\Big)\Big\} \leq \varepsilon$$

ist und mit (6.59) folgt

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{\mathcal{Z}_n}\geq\eta\Big)\Big\}\\
&\quad= \sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{n}{\mathcal{Z}_n}\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n}\geq\eta\Big)\Big\}\\
&\quad\leq \sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\leq\frac{1}{N}\Big)+\mathbb{P}^n\Big(\frac{n}{\mathcal{Z}_n}\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n}\geq\eta,\ \frac{\mathcal{Z}_n}{n}\geq\frac{1}{N}\Big)\Big\}\\
&\quad\leq \sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\leq\frac{1}{N}\Big)+\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n}\geq\frac{\eta}{N}\Big)\Big\}\\
&\quad\leq \sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\leq\frac{1}{N}\Big)\Big\}+\sup_{n\geq 1}\Big\{\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v>K\}}}{n}\geq\frac{\eta}{N}\Big)\Big\}\\
&\quad\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Wir erhalten ein zu Proposition 6.6 analoges Resultat.

Proposition 6.20. *Für alle $\varepsilon>0$ existiert ein $K\geq 0$, sodass für alle $N\geq 0$ ein $n_0\geq 1$ existiert, sodass*

$$\mathbb{P}^n\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}\geq N\Big)\geq 1-\varepsilon$$

für alle $n\geq n_0$ gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$. Nach Lemma 6.18 existiert ein $\eta>0$ und $K\geq 0$, sodass für alle $n\geq 1$

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{n}\geq\eta\Big)\geq 1-\varepsilon$$

gilt. Dann ergibt sich für alle $n\geq N\eta^{-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^n\Big(\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}\geq N\Big) &= \mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{n}\geq\frac{N}{n}\Big)\\
&\geq \mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v\leq K\}}}{n}\geq\eta\Big)\\
&\geq 1-\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Eine Schätzung für die Anzahl infizierter Zellen

Wir erhalten wie im Fall D_3 auch hier eine Schätzung für $\#\mathbb{G}_n^*$.

Proposition 6.21. *Für alle $\varepsilon > 0$ existieren Konstanten $a, b > 0$, sodass für alle $n \geq 1$*

$$\mathbb{P}^n\Big(a \leq \frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \leq b\Big) \geq 1 - \varepsilon$$

gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wie in den Beweisen zuvor kann man ein $b > 0$ finden, sodass für alle $n \geq 1$

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n} \leq b\Big) \geq 1 - \varepsilon$$

gilt. Da $\#\mathbb{G}_n^* \leq \mathcal{Z}_n$ fast sicher für alle $n \geq 1$ ist, erhalten wir somit

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \leq b\Big) \;\geq\; \mathbb{P}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n} \leq b\Big) \;\geq\; 1 - \varepsilon \tag{6.60}$$

für alle $n \geq 1$.

Weiter ist

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \geq \frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}}}{Kn} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $K, n \geq 1$ und damit

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \geq a\Big) \;\geq\; \mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K\}}}{n} \geq Ka\Big). \tag{6.61}$$

Nach Lemma 6.18 existiert ein $K_0 \geq 1$ und ein $\eta_0 > 0$, sodass für alle $n \geq 1$

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K_0\}}}{n} \geq \eta_0\Big) \geq 1 - \varepsilon$$

gilt. Setzt man nun $a := \eta_0 / K_0$, so folgt aus (6.61) für K_0

$$\mathbb{P}^n\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \geq a\Big) \;\geq\; \mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K_0\}}}{n} \geq \eta_0\Big) \;\geq\; 1 - \varepsilon.$$

In Kombination mit (6.60) folgt dann die Behauptung, denn für alle $n \geq 1$ gilt

$$\mathbb{P}^n\Big(a \leq \frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \leq b\Big) \;\geq\; \mathbb{P}^n\Big(\frac{\sum_{v \in \mathbb{G}_n^*} Z_v \mathbb{1}_{\{Z_v \leq K_0\}}}{n} \geq \eta_0,\; \frac{\mathcal{Z}_n}{n} \leq b\Big) \;\geq\; 1 - 2\varepsilon.$$

$\square$

Vernachlässigbarkeit stark infizierter Zellen

Analog zum Abschnitt D_3 zeigen wir hier, dass die Nachkommen stark infizierter Zellen einen vernachlässigbaren Beitrag zur Gesamtanzahl infizierter Zellen geben.

Proposition 6.22. *Für alle $\eta > 0$ gilt*

$$\sup_{n,q\geq 0}\left\{\mathbb{P}^{n+q}\Big(\frac{\#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}\geq\eta\Big)\right\}\underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Proposition 6.8 nur unter Benutzung der in diesem Abschnitt gezeigten Resultate.

Seien $\varepsilon,\eta > 0$. Nach Proposition 6.21 finden wir ein $a > 0$, für welches

$$\sup_{n,q\geq 0}\left\{\mathbb{P}^{n+q}\Big(\#\mathbb{G}^*_{n+q} < a(n+q)\Big)\right\}\leq\varepsilon \tag{6.62}$$

gilt. Für diese $a > 0$ definieren wir für $n,q,K\geq 0$

$$F^q_n(K,\eta) := \left\{\frac{\#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}}\geq\eta\right\}\cap\left\{\#\mathbb{G}^*_{n+q}\geq a(n+q)\right\}.$$

Es folgt

$$\#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K\} \;\geq\; \eta\#\mathbb{G}^*_{n+q}\mathbb{1}_{F^q_n(K,\eta)} \;\geq\; \eta a(n+q)\mathbb{1}_{F^q_n(K,\eta)} \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}$$

Nach Übergang zum Erwartungswert, der Tatsache, dass $(2\mu)^n = 1$ für alle $n\geq 0$, und völlig analoger Rechnung wie im Beweis von Proposition 6.8 folgt dann

$$\begin{aligned}(n+q)\mathbb{P}(F^q_n(K,\eta)) &= \frac{(n+q)}{(2\mu)^n}\mathbb{P}(F^q_n(K,\eta))\\ &\leq \frac{1}{\eta a(2\mu)^n}\mathbb{E}(\#\{v\in\mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K\})\\ &\leq \frac{\mathbb{E}(Z_{[n]}\mathbb{1}_{\{Z_{[n]}>K\}})}{\eta a\mu^n}\end{aligned}$$

für alle $n,q\geq 0$. Wir erhalten wieder mit Korollar 3.7

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{n,q\geq 0}\left\{(n+q)\mathbb{P}(F^q_n(K,\eta))\right\} = 0.$$

Aus Satz 2.14 folgt

$$\mathbb{P}^{n+q}\big(F^q_n(K,\eta)\big) = \frac{\mathbb{P}\big(F^q_n(K,\eta)\big)}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q} > 0)} \overset{n+q\to\infty}{\simeq} \frac{\operatorname{Var}\mathcal{Z}_1}{2}(n+q)\mathbb{P}\big(F^q_n(K,\eta)\big)$$

und damit
$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n,q\geq 0} \Big\{\mathbb{P}^{n+q}(F_n^q(K,\eta))\Big\} = 0.$$
Es existiert somit ein $K_0 \geq 0$, sodass für alle $K \geq K_0$ und $n, q \geq 0$
$$\mathbb{P}^{n+q}(F_n^q(K,\eta)) \leq \varepsilon$$
gilt. Mit (6.62) folgt daraus
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{n+q}\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} > K\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big) \\
&\quad\leq\ \mathbb{P}^{n+q}\big(F_n^q(K,\eta)\big) + \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\mathbb{G}^*_{n+q} < a(n+q)\big) \\
&\quad\leq\ 2\varepsilon
\end{aligned}$$
für alle $q, n \geq 0$ und $K \geq K_0$. □

Trennung der Parasitennachkommen

Auch die Eigenschaft, dass sich Nachkommen unterschiedlicher Parasiten in weit entfernter Zukunft nicht mehr in derselben Zelle befinden, lässt sich aus Abschnitt D_3 übertragen. Es bezeichne wieder $N_n(v)$ die Anzahl der Parasiten aus Zelle $v|n$, deren Nachkommen in Zelle v anzutreffen sind.

Proposition 6.23. *Für alle $K \geq 0$ und $\eta > 0$ gilt*
$$\lim_{q\to\infty} \sup_{n\geq 0} \Big\{\mathbb{P}^{n+q}\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big)\Big\} = 0.$$

Beweis: Dieser Beweis verläuft analog zu dem von Proposition 6.9. Wir benutzen lediglich die Ergebnisse dieses Abschnittes.

Seien $K \geq 0$ und $\varepsilon, \eta > 0$. Nach Proposition 6.21 finden wir ein $a > 0$, für welches
$$\sup_{n,q\geq 0} \Big\{\mathbb{P}^{n+q}\Big(\#\mathbb{G}^*_{n+q} < a(n+q)\Big)\Big\} \leq \varepsilon \tag{6.63}$$
gilt. Für diese $a > 0$ definieren wir für alle $n, q, K \geq 0$
$$E_n^q(K,\eta) := \Big\{\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big\} \cap \Big\{\#\mathbb{G}^*_{n+q} \geq a(n+q)\Big\}.$$
Es folgt
$$\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2\}\ \geq\ \eta\#\mathbb{G}^*_{n+q}\mathbb{1}_{E_n^q(K,\eta)}\ \geq\ \eta a(n+q)\mathbb{1}_{E_n^q(K,\eta)}\quad \text{f.s.}$$

und nach Übergang zum Erwartungswert, der Tatsache, dass $(2\mu)^n = 1$ für alle $n \geq 0$, und völlig analoger Rechnung wie im Beweis von Proposition 6.9 dann

$$\begin{aligned}(n+q)\mathbb{P}(E_n^q(K,\eta)) &\leq \frac{1}{\eta a(2\mu)^n}\mathbb{E}(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2\}) \\ &\leq \frac{\binom{K}{2}2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}(Z_v > 0)^2}{\eta a \mu^q}\end{aligned}$$

für alle $n, q \geq 0$. Aus (6.9) erhalten wir somit

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{(n+q)\mathbb{P}(E_n^q(K,\eta))\Big\} \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wie im Beweis vorher folgt aus Satz 2.14

$$\mathbb{P}^{n+q}\big(E_n^q(K,\eta)\big) = \frac{\mathbb{P}\big(E_n^q(K,\eta)\big)}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q} > 0)} \overset{n\to\infty}{\simeq} \frac{\operatorname{Var}\mathcal{Z}_1}{2}(n+q)\mathbb{P}\big(E_n^q(K,\eta)\big)$$

und damit

$$\lim_{q\to\infty}\sup_{n\geq 0}\Big\{\mathbb{P}^{n+q}(E_n^q(K,\eta))\Big\} = 0.$$

Wir finden also ein $q_0 \geq 1$, sodass für alle $q \geq q_0$ und $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^{n+q}(E_n^q(K,\eta)) \leq \varepsilon$$

gilt. Mit (6.63) folgt daraus

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}^{n+q}\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} \leq K,\ N_n(v) \geq 2\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} \geq \eta\Big) \\ &\quad\leq \mathbb{P}^{n+q}\big(E_n^q(K,\eta)\big) + \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\mathbb{G}^*_{n+q} < a(n+q)\big) \\ &\quad\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

für alle $q \geq q_0$ und $n \geq 0$. □

Das Hauptresultat

Kommen wir zu dem, am Anfang von D_2 angekündigten, Hauptresultat, welches ein Analogon zu Satz 6.10 darstellt. Die Konvergenz ist hier jedoch schwach und nicht stochastisch.

Satz 6.24. *$(F_k(n))_{k\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ in Verteilung in $S^1(\mathbb{N}_0)$ gegen $(\mathbb{P}(\mathcal{Y} = k))_{k\in\mathbb{N}_0}$. Genauer gilt*

$$\mathbb{P}^n(F_k(n) \in \cdot) \overset{w}{\longrightarrow} \delta_{\mathbb{P}(\mathcal{Y}=k)}, \quad n \to \infty.$$

für alle $k \geq 0$. Dabei ist $\mathcal{Y}$ eine Yaglom-quasistationär-verteilte Zufallsgröße.

Beweis: Durch die in diesem Abschnitt gezeigten Propositionen ist es nun nicht mehr schwer, einen analogen Beweis von Satz 6.10 zu führen. Alle Schritte des Beweises von Satz 6.10 lassen sich fast vollständig übertragen, wenn wir hier unter $\mathbb{P}^n$ anstatt unter $\mathbb{P}^*$ arbeiten. Wir benutzen die gleiche Notation wie im Beweis von Satz 6.10.

1. Schritt: Beh.: Für alle $\varepsilon, \eta > 0$ existiert ein $n_0 \geq 0$ und ein $f \in S^1(\mathbb{N}_0)$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathbb{P}^n\big(||(F_k(n))_{k\geq 0} - f||_1 \geq \eta\big) \leq \varepsilon.$$

Beweis von Schritt 1: Folgt man dem ersten Schritt des Beweises von Satz 6.10 und wendet die in diesem Abschnitt gezeigten Propositionen an, so erhält man für $\varepsilon, \eta > 0$ ein $K_2 \geq 0$ sowie $q_0, n_1 \geq 0$, für welche

$$\mathbb{P}^{n+q_0}\Big(\Big|\Big|(F_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0}\Big|\Big|_1 \geq \eta\Big) \;\leq\; \varepsilon \tag{6.64}$$

und

$$\mathbb{P}^n\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big) \;\leq\; \varepsilon$$

für alle $n \geq n_1$ gilt. Nach Satz 2.14 gilt $\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0) \overset{n\to\infty}{\simeq} 2/(n \operatorname{Var} \mathcal{Z}_1)$ und daher folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q_0} > 0 \mid \mathcal{Z}_n > 0) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+q_0} \;=\; 1.$$

Aus

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{n+q_0}\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big)\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q_0} > 0 \mid \mathcal{Z}_n > 0)\\
&\quad=\; \mathbb{P}^n\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big)\\
&\quad\leq\; \varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n \geq n_1$ folgt somit die Existens eines $n_2 \geq n_1$, sodass für alle $n \geq n_2$

$$\mathbb{P}^{n+q_0}\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big) \;\leq\; 2\varepsilon$$

gilt. Mit (6.64) erhalten wir daraus die Behauptung von Schritt 1, denn für alle $n \geq n_2$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{n+q_0}\big(||(F_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq 2\eta\big)\\
&\qquad\leq\; \mathbb{P}^{n+q_0}\big(||(F_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big)\\
&\qquad\qquad\qquad + \mathbb{P}^{n+q_0}\big(||(G_k^{K_2}(n, q_0))_{k\geq 0} - (f_k^{q_0})_{k\geq 0}||_1 \geq \eta\big)\\
&\qquad\leq\; 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Schritt: Beh.: Es existiert ein $f \in S^1(\mathbb{N}_0)$, sodass für alle $\eta > 0$ gilt

$$\mathbb{P}^n\big(||(F_k(n))_{k\geq 0} - f||_1 \geq \eta\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis von Schritt 2: Der Beweis des zweiten Schrittes lässt sich vollständig aus dem Beweis von Satz 6.10 übernehmen.

3. Schritt: Sei $(f_k)_{k\geq 0}$ der aus den ersten beiden Schritten ermittelte schwache Limes von $(F_k(n))_{k\geq 1}$. Dann ist zu zeigen, dass $\mathbb{P}(\mathcal{Y} = k) = f_k$ für alle $k \geq 0$ gilt.

Beweis von Schritt 3: Auch hier gilt nach Korollar 3.7 für alle $k \geq 0$

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(\mathcal{Y} = k),$$

sodass es zu zeigen reicht, dass

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_k$$

für alle $k \geq 0$ gilt.

Wie im Beweis von Satz 6.10 erhalten wir für alle $k \geq 1$

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) = \frac{\mathbb{E}(F_k(n)\#\mathbb{G}_n^*)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)}. \tag{6.65}$$

Weiter ist für $1 > \varepsilon > 0$ und alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*) &= \mathbb{E}^n(\#\mathbb{G}_n^*)\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0) \\
&\geq \mathbb{E}^n\Big(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n}\mathbb{1}_{\{\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n}\geq a\}}\Big)n\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0) \\
&\geq a\mathbb{P}^n(\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \geq a)n\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0) \\
&\geq a(1-\varepsilon)n\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0),
\end{aligned}$$

wobei $a > 0$ nach Proposition 6.21 gewählt war. Setzen wir $c := a(1-\varepsilon)$, dann erhalten wir wegen $|F_k(n) - f_k| \leq 1$, $\#\mathbb{G}_n^* \leq \mathcal{Z}_n$ fast sicher für alle $k, n \geq 0$ und dem eben Gezeigten durch analoge Rechnung wie im Beweis von Satz 6.10 für $\eta > 0$

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\mathbb{E}(F_k(n)\#\mathbb{G}_n^*)}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)} - f_k\Big| &\leq \eta + \frac{\mathbb{E}(\mathcal{Z}_n\mathbb{1}_{\{|F_k(n)-f_k|\geq\eta\}})}{\mathbb{E}(\#\mathbb{G}_n^*)} \\
&\leq \eta + \frac{\mathbb{E}(\mathcal{Z}_n\mathbb{1}_{\{|F_k(n)-f_k|\geq\eta\}})}{cn\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} \\
&= \eta + \frac{1}{c}\mathbb{E}^n\Big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\mathbb{1}_{\{|F_k(n)-f_k|\geq\eta\}}\Big).
\end{aligned} \tag{6.66}$$

Da $2\mu = 1$ und $\mathcal{Z}_1$ als quadratisch integrierbar vorausgesetzt war, folgt somit aus Proposition 2.3

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\big)^2 \mid \mathcal{Z}_n > 0\Big) &= \frac{\mathbb{E}(\mathcal{Z}_n^2)}{n^2\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} \\ &= \frac{\mathrm{Var}(\mathcal{Z}_n) + (\mathbb{E}\mathcal{Z}_n)^2}{n^2\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} \\ &= \frac{\mathrm{Var}(\mathcal{Z}_1)}{n\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} + \frac{1}{n^2\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$. Da $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0) = 2/\mathrm{Var}\,\mathcal{Z}_1$ nach Satz 2.14 gilt, folgt weiter

$$\mathbb{E}\Big(\big(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}\big)^2 \mid \mathcal{Z}_n > 0\Big) = \frac{\mathrm{Var}(\mathcal{Z}_1)}{n\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} + \frac{1}{n^2\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(\mathrm{Var}\,\mathcal{Z}_1)^2 < \infty.$$

$(\frac{\mathcal{Z}_n}{n}|\mathcal{Z}_n > 0)_{n\geq 0}$ ist also $\mathcal{L}_2$-beschränkt und damit auch gleichgradig integrierbar (Satz A.6). Dank des zweiten Schrittes gilt

$$\mathbb{P}^n(|F_k(n) - f_k| \geq \eta) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wodurch dann der zweite Term am Ende von (6.66) für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert (Satz A.6). Insgesamt erhalten wir aus (6.65) und (6.66) somit

$$\mathbb{P}(Z_{[n]} = k \mid Z_{[n]} > 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_k.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Als direkte Folgerung erhalten wir auch hier ein Korollar, welches uns die Asymptotik der Verteilung der Anzahl infizierter Zellen angibt.

Korollar 6.25. *Es gilt bedingt unter* $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$

$$\frac{\#\mathbb{G}_n^*}{\mathcal{Z}_n} \xrightarrow{d} \frac{1}{\mathbb{E}\mathcal{Y}} \quad \textit{und} \quad \frac{\#\mathbb{G}_n^*}{n} \xrightarrow{d} \frac{\mathcal{E}}{\mathbb{E}\mathcal{Y}}, \quad n \to \infty.$$

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich völlig analog zu der aus Korollar 6.13 nur unter $\mathbb{P}^n$ anstatt $\mathbb{P}^*$ und natürlich den entsprechenden Propositionen. Die zweite Behauptung folgt dann aus der ersten in Kombination mit Satz 2.15. □

6.3 Subkritischer Parasitenprozess, D_1

Wir setzen wieder $\mathbb{E}(X^{(a)2}) < \infty$ für $a \in \{0,1\}$ voraus. Wie in D_2 sterben die Parasiten fast sicher aus. Wir erhalten daher ein analoges Resultat zu dem aus D_2 und zeigen, dass die Anzahl infizierter Zellen mit k Parasiten bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ in Verteilung gegen eine nichtdeterministische Zufallsgröße konvergiert. Daraus schließen wir dann, dass $\#\mathbb{G}_n^*$ und $\mathcal{Z}_n$ bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ in Verteilung gegen fast sicher endliche Zufallsgrößen konvergieren. Für die Beweise dieser Resultate benötigt man jedoch einige Eigenschaften über die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $l^1(\mathbb{N}_0)$, welche im Anhang A.4 kurz zusammengefasst sind.

Das Hauptresultat

Der Beweis verläuft in der selben Weise wie in den beiden vorherigen Abschnitten und benutzt die Trennung der Parasitennachkommen. Wir zeigen daher zuerst ein Lemma, welches uns diese Eigenschaft liefert.

Wie in den vorherigen Abschnitten bezeichnet $N_n(v)$ die Anzahl der Parasiten aus Zelle $v|n$, deren Nachkommen in Zelle $v \in \mathbb{G}_{n+q}^*$ immer noch am Leben sind.

Lemma 6.26 (Trennung der Parasitennachkommen). *Für alle $\varepsilon > 0$ und $K \geq 0$ existiert ein $q_0 \geq 0$, sodass für alle $q \geq q_0$ und $n \geq 0$*

$$\mathbb{P}^{n+q}\big(\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : N_n(v) \geq 2\} \neq 0,\ \mathcal{Z}_n \leq K\big) \leq \varepsilon$$

gilt.

Beweis: Für $n, q, K \geq 0$ setzen wir

$$E_n^q(K) := \big\{\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : N_n(v) \geq 2\} \neq 0,\ \mathcal{Z}_n \leq K\big\}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{1}_{E_n^q(K)} \leq \sum_{v \in \mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{1}_{\{N_n(v) \geq 2,\ \mathcal{Z}_n \leq K\}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}. \tag{6.67}$$

Da $\mathbb{E}(X^{(a)2}) < \infty$ für $a \in \{0,1\}$ vorausgesetzt war, gilt $\mathbb{E}\mathcal{Z}_1 \log \mathcal{Z}_1 < \infty$. Nach Satz 2.9 ist daher $C := \inf_{n \geq 0} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)}{(2\mu)^n} > 0$, sodass

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q} > 0) \ \geq \ C(2\mu)^{n+q}$$

für alle $n, q \geq 0$ gilt. Auch im Fall D_1 ist der PZZ $(Z_{[n]})_{n \geq 0}$ stark subkritisch und es gilt die Eigenschaft (6.9). Die Behauptung des Lemmas folgt jetzt aus (6.67) nach Übergang zum Erwartungswert und, zu der im Beweis von Proposition 6.9, analoger

Rechnung bei den letzten beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{n+q}(E_n^q(K)) &\leq \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{P}^{n+q}(N_n(v)\geq 2,\ \mathcal{Z}_n \leq K) \\
&\leq \sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \frac{\mathbb{P}(N_n(v)\geq 2,\ \mathcal{Z}_n\leq K)}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q}>0)} \\
&\leq \frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{P}(N_n(v)\geq 2,\ \mathcal{Z}_n\leq K)}{C(2\mu)^{n+q}} \\
&\leq \frac{\sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{P}(N_n(v)\geq 2,\ Z_{v|n}\leq K)}{C(2\mu)^{n+q}} \\
&\leq \frac{\mathbb{P}(0<Z_{[n]}\leq K)2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_{n+q}} \mathbb{P}_K(N_0(v)\geq 2)}{C\mu^{n+q}} \\
&\leq \frac{\binom{K}{2}2^{-q}\sum_{v\in\mathbb{G}_q}\mathbb{P}(Z_v>0)^2}{C\mu^q} \\
&\underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

Nachdem wir die Trennung der Parasitennachkommen gezeigt haben, können wir uns dem oben angesprochenen Resultat zuwenden.

Satz 6.27. $\big(\#\{v\in\mathbb{G}_n^*: Z_v=k\}\big)_{k\geq 0}$ *konvergiert bedingt unter* $\{\mathcal{Z}_n>0\}$ *für* $n\to\infty$ *in Verteilung auf* $l^1(\mathbb{N}_0)$ *gegen eine Folge* $(N_k)_{k\geq 0}$ *von Zufallsgrößen mit der Eigenschaft* $\mathbb{E}\big(\sum_{k\geq 0} kN_k\big)<\infty$*. Des Weiteren gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^n(\#\{v\in\mathbb{G}_n^*: Z_v=k\})=\mathbb{E}(N_k).$$

Beweis: Da $l^1(\mathbb{N}_0)$ ein separabler, metrischer Raum ist, ist auch die Menge der Verteilungen auf $l^1(\mathbb{N}_0)$ metrisierbar (Satz A.12) mit der Metrik

$$d(Q_1,Q_2)=\sup\Big\{\Big|\int f dQ_1-\int f dQ_2\Big| : ||f||_\infty\leq 1, f \text{ gleichmäßig stetig}\Big\}$$

für Q_1,Q_2 Verteilungen auf $l^1(\mathbb{N}_0)$. Diese Metrik ist assoziiert zur schwachen Konvergenz von Verteilungen auf $l^1(\mathbb{N}_0)$ (vgl. Bem. A.14).

Den Beweis gliedern wir in ähnliche Schritte auf wie den von Satz 6.10. In den ersten beiden Schritten zeigen wir mit Hilfe der Trennung der Parasitennachkommen, dass für alle $\varepsilon>0$ eine Zufallsgröße existiert, sodass die Verteilung dieser Zufallsgröße für nur endlich viele $n\geq 0$ von der Verteilung von $\big(\#\{v\in\mathbb{G}_n^*: Z_v=k\}\big)_{k\geq 0}$ um maximal ε abweicht. Im dritten Schritt folgern wir dann mit Hilfe der Vollständigkeit von $l^1(\mathbb{N}_0)$ die Existenz des schwachen Limes. Im letzten Schritt zeigen wir noch die Endlichkeit des oben angegebenen Erwartungswertes. Geschenkt bekommen wir dabei die im Satz stehende Konvergenz der Erwartungswerte.

Wir benutzen die gleiche Notation wie im Beweis von Satz 6.10 und setzen für $q \geq 0$, $k \geq 1$ und $p \in \mathcal{P}(n)$, $n \geq 0$,

$$Y_k^q(p) := \sum_{v \in \mathbb{G}^*_{n+q}} \mathbb{1}_{\{\#\{r \in \mathcal{P}_v \,:\, r|n=p\}=k\}}$$

und $Y_0^q(p) = 0$. Des Weiteren setzen wir für $n, q, k \geq 0$

$$N_k(n,q) := \sum_{p \in \mathcal{P}(n)} Y_k^q(p)$$

und

$$G_k(n) := \#\{v \in \mathbb{G}^*_n : Z_v = k\}.$$

1. Schritt: Beh.: Für alle $\varepsilon > 0$ existieren $n_0, q_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $q \geq q_0$

$$\mathbb{P}^{n+q}\big(||(G_k(n+q))_{k\geq 0} - (N_k(n,q))_{k \geq 0}||_1 \neq 0\big) \leq \varepsilon$$

gilt.

Beweis von Schritt 1: Sei $\varepsilon > 0$. Aus Satz 2.11 folgt für $k \geq 1$

$$\lim_{q\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}(\mathcal{Z}_n = k) = c(k),$$

wobei $(c(k))_{k\geq 1}$ eine Verteilung auf $\mathbb{N}$ bildet. Daraus folgt also insbesondere, dass ein $K \geq 0$ existiert, sodass

$$\lim_{q\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}(\mathcal{Z}_n > K) \leq \varepsilon$$

ist. Somit finden wir ein $q_0 \geq 0$ und $n_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $q \geq q_0$

$$\mathbb{P}^{n+q}(\mathcal{Z}_n > K) \leq 2\varepsilon \tag{6.68}$$

gilt. Nach Lemma 6.26 folgt die Existenz eines $q_1 \geq q_0$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $q \geq q_1$

$$\mathbb{P}^{n+q}\big(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : N_n(v) \geq 2\} \neq 0,\ \mathcal{Z}_n \leq K\big) \leq \varepsilon$$

gilt. Aufgrund dieser Abschätzung und mit Hilfe von (6.68) erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{n+q}\big(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : N_n(v) \geq 2\} \neq 0\big) \\
&\quad \leq\ \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : N_n(v) \geq 2\} \neq 0,\ \mathcal{Z}_n \leq K\big) + \mathbb{P}^{n+q}\big(\mathcal{Z}_n > K\big) \qquad (6.69)\\
&\quad \leq\ 3\varepsilon
\end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$ und $q \geq q_1$. Des Weiteren gilt die Implikation

$$\Big\{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : N_n(v) \geq 2\} = 0\Big\} \subseteq \Big\{\big(G_k(n+q)\big)_{k\geq 0} = \big(N_k(n,q)\big)_{k\geq 0}\Big\} \text{ f.s.}, \quad (6.70)$$

denn ist $\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : N_n(v) \geq 2\} = 0$, so befinden sich in jeder Zelle $v \in \mathbb{G}^*_{n+q}$ nur Parasiten, die von demselben Parasiten aus der Zelle $v|n \in \mathbb{G}^*_n$ abstammen. Das bedeutet aber, dass für jedes $v \in \mathbb{G}^*_{n+q}$ genau ein $p \in \mathcal{P}(n)$ und $k \geq 1$ existiert, für welche $\mathbb{1}_{\{\#\{r\in\mathcal{P}_v \,:\, r|n=p\}=k\}}$ positiv ist. Somit gibt $N_k(n,q)$ die Anzahl der Zellen der $(n+q)$-ten Generation an, welche genau k Parasiten enthalten. Damit ist also $N_k(n,q) = G_k(n+q)$.

Aus (6.69) und (6.70) erhalten wir somit für alle $n \geq n_0$ und $q \geq q_1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{n+q}\big(||(G_k(n+q))_{k\geq 0} - (N_k(n,q))_{k\geq 0}||_1 \neq 0\big)\\
&= \mathbb{P}^{n+q}\big(||(G_k(n+q))_{k\geq 0} - (N_k(n,q))_{k\geq 0}||_1 \neq 0,\ \#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : N_n(v) \geq 2\} \neq 0\big)\\
&\leq \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : N_n(v) \geq 2\} \neq 0\big)\\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt den ersten Schritt.

2. Schritt: Beh.: Für alle $l \geq 0$ existiert ein $n_0(l) \geq 0$ und eine Verteilung $Q(l)$ auf $l^1(\mathbb{N}_0)$, sodass für alle $n \geq n_0(l)$ gilt

$$d\big(\mathbb{P}^n((G_k(n))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q(l)\big) \leq (\frac{1}{2})^l.$$

Beweis von Schritt 2: Sei $l \geq 0$. Nach dem ersten Schritt existieren $q_0, n_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$ und gleichmäßig stetigen Funktionen $f : l^1(\mathbb{N}_0) \longrightarrow [-1,1]$

$$\begin{aligned}
&\Big|\int f d\mathbb{P}^{n+q_0}\big((G_k(n+q_0))_{k\geq 0} \in \cdot\big) - \int f d\mathbb{P}^{n+q_0}\big((N_k(n,q_0))_{k\geq 0} \in \cdot\big)\Big|\\
&= \Big|\int f\big((G_k(n+q_0))_{k\geq 0}\big) d\mathbb{P}^{n+q_0} - \int f\big((N_k(n,q_0))_{k\geq 0}\big) d\mathbb{P}^{n+q_0}\Big|\\
&= \Big|\int_{\big\{||(G_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (N_k(n,q))_{k\geq 0}||_1 \neq 0\big\}} f\big((G_k(n+q_0))_{k\geq 0}\big)\\
&\qquad\qquad - f\big((N_k(n,q_0))_{k\geq 0}\big) d\mathbb{P}^{n+q_0}\Big|\\
&\leq 2\mathbb{P}^{n+q_0}\big(||(G_k(n+q_0))_{k\geq 0} - (N_k(n,q_0))_{k\geq 0}||_1 \neq 0\big)\\
&\leq (\frac{1}{2})^{l+1}
\end{aligned}$$

gilt. Daraus erhalten wir also für alle $n \geq n_0$

$$d\Big(\mathbb{P}^{n+q_0}((G_k(n+q_0))_{k\geq 0} \in \cdot),\ \mathbb{P}^{n+q_0}((N_k(n,q_0))_{k\geq 0} \in \cdot)\Big) \leq (\frac{1}{2})^{l+1}. \tag{6.71}$$

Wir erinnern daran, dass die $(Y_k^{q_0}(p))_{k\geq 0}, p \in \mathcal{P}(n)$, unabhängig und identisch wie $(Y_k^{q_0})_{k\geq 0}$ verteilt sind. Da ein Parasit unabhängig von der derzeitigen Gesamtanzahl an Parasiten Nachkommen bekommt, sind die $(Y_k^{q_0}(p))_{k\geq 0}$ außerdem unabhängig von $\mathcal{Z}_n$. Weiter ist $\#\mathcal{P}(n) = \mathcal{Z}_n$ und

$$\{\mathcal{Z}_{n+q_0} > 0\} = \Big\{\sum_{k\geq 0}\sum_{p\in\mathcal{P}(n)} Y_k^{q_0}(p) > 0\Big\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $n \geq 0$.

Nach Satz 2.11 folgt

$$\mathbb{P}^{n+q_0}(\mathcal{Z}_n \in \cdot) \xrightarrow{w} \nu, \quad n \to \infty,$$

für eine Verteilung ν auf $\mathbb{N}$. Sei $\mathcal{V}$ eine Zufallsgröße mit Verteilung ν und $(Y_k^{q_0}(p))_{k\geq 0}$, $p \in \mathbb{N}$, eine Folge unabhängiger, identisch wie $(Y_k^{q_0})_{k\geq 0}$ verteilter Zufallsgrößen, welche zudem unabhängig von $\mathcal{V}$ sei. Weiter definieren wir dann die Verteilung $Q(l)$ wie folgt

$$Q(l) := \mathbb{P}\Big(\big(\sum_{p=1}^{\mathcal{V}} Y_k^{q_0}(p)\big)_{k\geq 0} \in \cdot \mid \sum_{k\geq 0}\sum_{p=1}^{\mathcal{V}} Y_k^{q_0}(p) > 0\Big).$$

Hieraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{n+q_0}\big((N_k(n,q_0))_{k\geq 0} \in \cdot\big) \\
&= \mathbb{P}\big((N_k(n,q_0))_{k\geq 0} \in \cdot \mid \mathcal{Z}_{n+q_0} > 0\big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\big(\sum_{p=1}^{\mathcal{Z}_n} Y_k^{q_0}(p)\big)_{k\geq 0} \in \cdot \mid \sum_{k\geq 0}\sum_{p=1}^{\mathcal{Z}_n} Y_k^{q_0}(p) > 0\Big) \\
&= \sum_{z\geq 1} \mathbb{P}\Big(\big(\sum_{p=1}^{z} Y_k^{q_0}(p)\big)_{k\geq 0} \in \cdot \mid \sum_{k\geq 0}\sum_{p=1}^{z} Y_k^{q_0}(p) > 0\Big)\mathbb{P}\big(\mathcal{Z}_n = z \mid \mathcal{Z}_{n+q_0} > 0\big) \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{w} \sum_{z\geq 1} \mathbb{P}\Big(\big(\sum_{p=1}^{z} Y_k^{q_0}(p)\big)_{k\geq 0} \in \cdot \mid \sum_{k\geq 0}\sum_{p=1}^{z} Y_k^{q_0}(p) > 0\Big)\mathbb{P}\big(\mathcal{V} = z\big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\big(\sum_{p=1}^{\mathcal{V}} Y_k^{q_0}(p)\big)_{k\geq 0} \in \cdot \mid \sum_{k\geq 0}\sum_{p=1}^{\mathcal{V}} Y_k^{q_0}(p) > 0\Big) \\
&= Q(l).
\end{aligned}$$

Es existiert also ein $n_1 \geq n_0$, sodass für alle $n \geq n_1$

$$d\big(\mathbb{P}^{n+q_0}((N_k(n,q_0))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q(l)\big) \leq (\frac{1}{2})^{l+1}$$

gilt. Hieraus und aus (6.71) folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d\big(&\mathbb{P}^{n+q_0}((G_k(n+q_0))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q(l)\big) \\ &\leq\ d\big(\mathbb{P}^{n+q_0}((G_k(n+q_0))_{k\geq 0} \in \cdot),\ \mathbb{P}^{n+q_0}((N_k(n,q_0))_{k\geq 0} \in \cdot)\big) \\ &\qquad\qquad\qquad + d\big(\mathbb{P}^{n+q_0}((N_k(n,q_0))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q(l)\big) \\ &\leq\ (\frac{1}{2})^{l+1} + (\frac{1}{2})^{l+1} \\ &=\ (\frac{1}{2})^{l} \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_1$ und damit die Behauptung des zweiten Schritts.

3. Schritt: Beh.: Es existiert eine Verteilung Q auf $l^1(\mathbb{N}_0)$, für welche

$$\mathbb{P}^n\big((G_k(n))_{k\geq 0} \in \cdot\big) \xrightarrow{w} Q, \quad n \to \infty$$

gilt. Für alle $k \geq 0$ gilt damit insbesondere $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n(G_k(n) \in \cdot) = \mathbb{P}(N_k \in \cdot)$ für eine geeignete Zufallsgröße N_k mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

Beweis von Schritt 3: Da $l^1(\mathbb{N}_0)$ ein vollständiger Raum ist, ist der Raum der Verteilungen auf $l^1(\mathbb{N}_0)$ ebenfalls vollständig (Satz A.13). Seien $2 \leq l \leq l'$. Dann folgt nach Schritt 2 und der Dreiecksungleichung für großes n

$$\begin{aligned} d(Q(l), Q(l')) &\leq\ d\big(\mathbb{P}^n((G_k(n))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q(l)\big) + d\big(\mathbb{P}^n((G_k(n))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q(l')\big) \\ &\leq\ (\frac{1}{2})^{l} + (\frac{1}{2})^{l'} \\ &\leq\ (\frac{1}{2})^{l-1}. \end{aligned}$$

$(Q(l))_{l\geq 1}$ bildet damit eine Cauchyfolge und ist somit konvergent. Sei Q ihr Grenzwert. Dann gilt insbesondere für alle $l \geq 1$

$$d(Q(l), Q)\ \leq\ (\frac{1}{2})^{l-1}.$$

Für jedes $l \geq 2$ finden wir nach Schritt 2 weiter ein $n_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq n_0$

$$d\big(\mathbb{P}^n((G_k(n))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q\big)\ \leq\ d\big(\mathbb{P}^n((G_k(n))_{k\geq 0} \in \cdot),\ Q(l)\big) + d\big(Q(l),\ Q\big)\ \leq\ (\frac{1}{2})^{l-2}$$

gilt. Damit ist der dritte Schritt gezeigt.

4.Schritt: Beh.: Seien N_k, $k \geq 0$, die nach Schritt 3 existierenden Zufallsgrößen mit $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n(G_k(n) \in \cdot) = \mathbb{P}(N_k \in \cdot)$. Dann gilt $\mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k \Big) < \infty$.

Beweis von Schritt 4: $\mathcal{Z}_n$ ist bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ $\mathcal{L}_2$-beschränkt, denn nach Satz 2.9 gilt $C := \inf_{n\geq 0} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n>0)}{(2\mu)^n} > 0$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathcal{Z}_n^2 \mid \mathcal{Z}_n) &= \frac{\mathbb{E}\mathcal{Z}_n^2}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\mathcal{Z}_n^2}{C(2\mu)^n} \\
&\leq \frac{1}{C(2\mu)^n}(\operatorname{Var} \mathcal{Z}_n + \mathbb{E}\mathcal{Z}_n) \\
&= \frac{1}{C}\Big(\frac{1-(2\mu)^n}{2\mu-(2\mu)^2} \operatorname{Var} \mathcal{Z}_1 + 1\Big) \\
&\leq \frac{1}{C}\Big(\frac{1}{2\mu-(2\mu)^2} \operatorname{Var} \mathcal{Z}_1 + 1\Big) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

nach den Voraussetzungen in diesem Abschnitt und Proposition 2.3. Wir erhalten somit die gleichgradige Integrierbarkeit von $(\mathcal{Z}_n|\mathcal{Z}_n > 0)_{n\geq 0}$ (Satz A.6). Da $kG_k(n) \leq \mathcal{Z}_n$ fast sicher für alle $k, n \geq 0$ gilt, ist somit auch $(G_k(n)|\mathcal{Z}_n > 0)_{n\geq 0}$ gleichgradig integrierbar (Satz A.6). Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\mathbb{P}^n(G_k(n) \in \cdot) \xrightarrow{w} \mathbb{P}(N_k \in \cdot), \quad n \to \infty$$

und aus der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt damit die Konvergenz der Erwatungswerte (Satz A.7). Für alle $K \geq 1$ erhalten wir also

$$\mathbb{E}^n\Big(\sum_{k=1}^K kG_k(n)\Big) = \sum_{k=1}^K k\mathbb{E}^n(G_k(n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^K k\mathbb{E}N_k = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^K kN_k\Big). \tag{6.72}$$

Weiter ist

$$\mathbb{E}^n\Big(\sum_{k>K} kG_k(n)\Big) \leq \mathbb{E}^n\big(\mathcal{Z}_n \mathbb{1}_{\{\mathcal{Z}_n>K\}}\big) \leq \frac{1}{K}\mathbb{E}^n\big(\mathcal{Z}_n^2\big),$$

woraus dann zusammen mit der $\mathcal{L}_2$-Beschränktheit von $\mathcal{Z}_n$ bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{\mathbb{E}^n\Big(\sum_{k>K} kG_k(n)\Big)\Big\} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $K_0 \geq 0$, sodass

$$\sup_{n\geq 0}\Big\{\mathbb{E}^n\Big(\sum_{k>K_0} kG_k(n)\Big)\Big\} \leq \varepsilon$$

gilt. Daraus folgt für alle $n \geq 0$

$$\mathbb{E}^n\Big(\sum_{k\geq 0} kG_k(n)\Big) \;\leq\; \mathbb{E}^n\Big(\sum_{k=1}^{K_0} kG_k(n)\Big) + \varepsilon$$

und mit (6.72) dann weiter

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\Big(\sum_{k\geq 0} kG_k(n)\Big) \;\leq\; \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{K_0} kN_k\Big) + \varepsilon \;\leq\; \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k\Big) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ begliebig gewählt war, folgt somit

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\Big(\sum_{k\geq 0} kG_k(n)\Big) \;\leq\; \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k\Big). \tag{6.73}$$

Die andere Ungleichung ergibt sich aus

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\Big(\sum_{k\geq 0} kG_k(n)\Big) \;\geq\; \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\Big(\sum_{1\leq k\leq K} kG_k(n)\Big) \;=\; \mathbb{E}\Big(\sum_{1\leq k\leq K} kN_k\Big)$$

für alle $K \geq 0$. Mit Hilfe der monotonen Konvergenz folgt dann

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\Big(\sum_{k\geq 0} kG_k(n)\Big) \;\geq\; \lim_{K\to\infty} \mathbb{E}\Big(\sum_{1\leq k\leq K} kN_k\Big) \;=\; \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k\Big). \tag{6.74}$$

Aus (6.73) und (6.74) erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\Big(\sum_{k\geq 0} kG_k(n)\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k\Big).$$

Da aber $(\mathcal{Z}_n|\mathcal{Z}_n > 0)_{n\geq 0}$ gleichgradig integrierbar ist, folgt nach Satz 2.10

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\Big(\sum_{k\geq 0} kG_k(n)\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^n\big(\mathcal{Z}_n\big) \;=\; \mathbb{E}\tilde{\mathcal{Y}},$$

wobei $\tilde{\mathcal{Y}}$ wie in Satz 2.10 gegeben ist. Nach den Voraussetzungen in diesem Abschnitt ist $\mathbb{E}\mathcal{Z}_1 \log \mathcal{Z}_1 < \infty$ und aus (2.3) folgt dann

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k\Big) \;=\; \mathbb{E}\tilde{\mathcal{Y}} \;<\; \infty.$$

□

Korollare

Mit Hilfe des Satzes 6.27 erhalten wir nun eine Aussage über das Grenzverhalten von $\#\mathbb{G}_n^*$ und $\mathcal{Z}_n$.

Korollar 6.28. *$\#\mathbb{G}_n^*$ konvergiert für $n \to \infty$ bedingt unter $\{\#\mathbb{G}_n^* > 0\}$ in Verteilung gegen eine positive, fast sicher endliche Zufallsgröße. Des Weiteren konvergieren auch die ersten Momente. Genauer gilt*

$$\mathbb{P}^n(\#\mathbb{G}_n^* \in \cdot) \xrightarrow{w} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\geq 0} N_k \in \cdot\Big) \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}^n(\#\mathbb{G}_n^*) \longrightarrow \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} N_k\Big), \quad n \to \infty,$$

wobei die N_k, $k \geq 0$, wie in Satz 6.27 gegeben sind.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 6.27 setzen wir für $n, k \geq 0$

$$G_k(n) := \#\{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v = k\}.$$

Nach Satz 6.27 ist $\mathbb{E}\big(\sum_{k\geq 0} kN_k\big) < \infty$ und damit insbesondere $\sum_{k\geq 0} N_k$ fast sicher endlich. Weiter folgt aus Satz 6.27 und der Stetigkeit der Summe für alle $K \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{K} G_k(n) \in \cdot\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{K} N_k \in \cdot\Big).$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $K \geq 1$ folgt dann

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} G_k(n) \leq x\Big) \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{K} G_k(n) \leq x\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{K} N_k \leq x\Big).$$

Lassen wir K gegen unendlich laufen, folgt aus dem Satz der monotonen Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} G_k(n) \leq x\Big) \;\leq\; \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} N_k \leq x\Big). \tag{6.75}$$

Nach Satz 2.10 existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $K_0 \geq 0$, sodass für alle $n \geq 0$

$$\mathbb{P}^n(\mathcal{Z}_n \geq K_0) \leq \varepsilon$$

gilt. Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$\mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=K_0}^{\infty} G_k(n) > 0\Big) \;\leq\; \mathbb{P}^n(\mathcal{Z}_n \geq K_0) \;\leq\; \varepsilon$$

für alle $n \geq 0$. Somit erhalten wir für alle $n \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} G_k(n) \leq x\Big) \;&\geq\; \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{K_0} G_k(n) \leq x\Big) - \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=K_0}^{\infty} G_k(n) > 0\Big) \\ &\geq\; \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{K_0} G_k(n) \leq x\Big) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} G_k(n) \leq x\Big) \;&\geq\; \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{K_0} G_k(n) \leq x\Big) - \varepsilon \\ &=\; \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{K_0} N_k \leq x\Big) - \varepsilon \\ &\geq\; \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} N_k \leq x\Big) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt somit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} G_k(n) \leq x\Big) \;\geq\; \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} N_k \leq x\Big). \tag{6.76}$$

Aus (6.75) und (6.76) erhalten wir also für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n(\#\mathbb{G}_n^* \leq x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} G_k(n) \leq x\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} N_k \leq x\Big)$$

und damit die erste Behauptung des Korollars.

In Schritt 4 des Beweises von Satz 6.27 wurde die gleichgradige Integrierbarkeit von $(\mathcal{Z}_n|\mathcal{Z}_n > 0)_{n\geq 0}$ gezeigt. Da $\#\mathbb{G}_n^* \leq \mathcal{Z}_n$ fast sicher für alle $n \geq 0$ gilt, ist auch $(\#\mathbb{G}_n^*|\mathcal{Z}_n > 0)_{n\geq 0}$ gleichgradig integrierbar und es folgt die noch fehlende Konvergenz der ersten Momente (Satz A.6 und Satz A.7). □

Korollar 6.29. *$\mathcal{Z}_n$ konvergiert für $n \to \infty$ bedingt unter $\{\mathcal{Z}_n > 0\}$ in Verteilung gegen eine positive, fast sicher endliche Zufallsgröße. Des Weiteren konvergieren die ersten Momente. Genauer gilt*

$$\mathbb{P}^n(\mathcal{Z}_n \in \cdot) \xrightarrow{w} \mathbb{P}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k \in \cdot\Big) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}^n(\mathcal{Z}_n) \longrightarrow \mathbb{E}\Big(\sum_{k\geq 0} kN_k\Big), \quad n \to \infty.$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich mit den gleichen Argumenten wie in Korollar 6.28 und der Tatsache, dass

$$\mathcal{Z}_n = \sum_{k=1}^{\infty} k \# \{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v = k\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

ist. □

Wir erinnern an die Notation aus D_3 und setzen für $n, q, k \geq 0$

$$F_k(n,q) := \frac{\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n} = k\}}{\#\mathbb{G}_{n+q}^*}.$$

Da der Parasitenprozess $(\mathcal{Z}_n)_{n \geq 0}$ subkritisch ist, sterben die Parasiten fast sicher aus. Die Parasiten der n-ten Generation starten jeweils neue unabhängige ZTPIZ mit je einem Parasiten. Betrachtet man nun für großes q die $(n+q)$-te Generation bedingt unter dem Ereignis, dass Parasiten überlebt haben, so sollte durch den Drang zum Aussterben nur noch einer, der in Generation n gestarteten Prozesse, infizierte Zellen haben. $(F_k(n,q))_{k \geq 0}$ bedingt unter $\{\mathcal{Z}_{n+q} > 0\}$ sollte daher für $q \to \infty$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße F mit Werten in

$$A := \{(x_n)_{n \geq 0} \mid x_n \in \{0,1\} \text{ für alle } n \geq 0,\ x_n = 1 \text{ für genau ein } n \geq 0\}$$

konvergieren. Diese Anschauung bestätigt das folgende Korollar. Da kein Parasit gegenüber den anderen ausgezeichnet ist, erhalten wir weiter, dass F eine größenverzerrte Verteilung besitzt. Für größenverzerrte Verteilung siehe (2.5).

Korollar 6.30. *Für alle $n \geq 0$ konvergiert $(F_k(n,q))_{k \geq 0}$ auf $S^1(\mathbb{N}_0)$ bedingt unter $\{\mathcal{Z}_{n+q} > 0\}$ für $q \to \infty$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße mit Werten in A. Diese Grenzfolge konvergiert weiter in Verteilung für $n \to \infty$. Genauer gilt für $k \geq 0$*

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{q \to \infty} \mathbb{P}^{n+q}\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n} = k\}}{\#\mathbb{G}_{n+q}^*} = 1 \Big) = \frac{k \mathbb{E} N_k}{\mathbb{E}\big(\sum_{k' \geq 0} k' N_{k'} \big)}.$$

Beweis: Zuerst sei festgehalten, dass $0 < \mathbb{E}\big(\sum_{k \geq 0} k N_k\big) < \infty$ nach Satz 6.27 gilt. Als nächstes beweisen wir die vor dem Korollar gemachte Anmerkung. Wir zeigen, dass bei mehreren startenden ZTPIZ auf lange Sicht nur Nachkommen eines dieser Prozesse überleben, wenn man darunter bedingt, dass überhaupt Parasiten überlebt haben. Seien dazu $(\mathcal{Z}_n(1))_{n \geq 0}$ und $(\mathcal{Z}_n(2))_{n \geq 0}$ zwei unabhängige subkritische

Parasitenprozesse. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(\mathcal{Z}_n(1) > 0,\, \mathcal{Z}_n(2) > 0 \mid \mathcal{Z}_n(1) + \mathcal{Z}_n(2) > 0\big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(\mathcal{Z}_n(1) > 0 \mid \mathcal{Z}_n(1) + \mathcal{Z}_n(2) > 0,\ \mathcal{Z}_n(2) > 0\big) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}\big(\mathcal{Z}_n(2) > 0 \mid \mathcal{Z}_n(1) + \mathcal{Z}_n(2) > 0\big) \\
&\qquad \leq \mathbb{P}\big(\mathcal{Z}_n(1) > 0 \mid \mathcal{Z}_n(2) > 0\big) \\
&\qquad = \mathbb{P}\big(\mathcal{Z}_n(1) > 0\big) \\
&\qquad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile die Unabhängigkeit der Prozesse und bei der Konvergenz $\mu_0 + \mu_1 < 1$ einging. Durch Induktion kann man dann zeigen, dass auch bei beliebig vielen startenden Parasitenprozessen nur einer von diesen überlebt. Für den Zellbaum bedeutet dies also, dass von den infizierten Zellen der n-ten Generation nur noch die Nachkommenzellen einer dieser Zellen in Generation $(n+q)$ für $q \to \infty$ infiziert sind.

Wir setzen für $n, k \geq 0$

$$\mathcal{G}_n(k) := \{v \in \mathbb{G}_n^* : Z_v = k\}$$

und sei weiter $\mathbb{G}_{n+q}^*(u)$ die Menge infizierter Zellen, welche von Zelle $u \in \mathcal{G}_n(k)$ abstammen. Damit und mit dem zuvor Gezeigten erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : Z_{v|n} = k\}}{\#\mathbb{G}_{n+q}^*} = 1\Big) \\
&= \lim_{q\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}\Big(\sum_{u\in\mathbb{G}_n^*:Z_u=k} \frac{\#\{v \in \mathbb{G}_{n+q}^* : v|n = u\}}{\#\mathbb{G}_{n+q}^*} = 1\Big) \\
&= \lim_{q\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\mathcal{G}_n(k) > 0,\ \#\mathbb{G}_{n+q}^*(u) > 0 \text{ für ein } u \in \mathcal{G}_n(k)\big) \qquad (6.77) \\
&= \lim_{q\to\infty} \sum_{z\geq 1} \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\mathcal{G}_n(k) > 0,\ \#\mathbb{G}_{n+q}^*(u) > 0 \text{ für ein } u \in \mathcal{G}_n(k) \mid \mathcal{Z}_n = z\big) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}^{n+q}\big(\mathcal{Z}_n = z\big) \\
&= \lim_{q\to\infty} \sum_{g,z\geq 1} \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\mathbb{G}_{n+q}^*(u) > 0 \text{ für ein } u \in \mathcal{G}_n(k) \mid \mathcal{Z}_n = z,\ \#\mathcal{G}_n(k) = g\big) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\mathcal{G}_n(k) = g \mid \mathcal{Z}_n = z\big)\mathbb{P}^{n+q}\big(\mathcal{Z}_n = z\big).
\end{aligned}$$

Unter $\mathbb{P}^{n+q}$ für $q \to \infty$ gilt nun folgendes: Da kein Parasit gegenüber den anderen ausgezeichnet ist, überleben die Nachkommen eines bestimmten Parasiten der

n-ten Generation mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{z}$, wenn $\mathcal{Z}_n = z$ gilt. Für eine Zelle mit k Parasiten bedeutet dies, dass mit Wahrscheinlichkeit $\frac{k}{z}$ die infizierten Zellen von dieser Zelle abstammen. Gibt es nun g Zellen mit k Parasiten, so sind die Nachkommenzellen einer dieser Zellen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{gk}{z}$ immer noch infiziert. Es gilt also

$$\lim_{q\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}\big(\#\mathbb{G}^*_{n+q}(u) > 0 \text{ für ein } u \in \mathcal{G}_n(k) \mid \mathcal{Z}_n = z,\ \#\mathcal{G}_n(k) = g\big) = \frac{gk}{z}. \tag{6.78}$$

Nach Satz 2.12 erhalten wir weiter

$$\lim_{q\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}(\mathcal{Z}_n = z) = \frac{z}{\mathbb{E}\mathcal{Z}_n}\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n = z). \tag{6.79}$$

Da das Überleben von Parasiten unabhängig von der derzeitigen Verteilung auf die Zellen ist, folgt für den noch verbliebenen Term der letzten Zeile aus (6.77)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{n+q}(\#\mathcal{G}_n(k) = g \mid \mathcal{Z}_n = z)\\
&\quad= \frac{\mathbb{P}(\#\mathcal{G}_n(k) = g,\ \mathcal{Z}_n = z,\ \mathcal{Z}_{n+q} > 0)}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n = z, \mathcal{Z}_{n+q} > 0)}\\
&\quad= \mathbb{P}(\#\mathcal{G}_n(k) = g,\ \mathcal{Z}_n = z)\frac{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q} > 0 \mid \#\mathcal{G}_n(k) = g, \mathcal{Z}_n = z)}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n = z,\ \mathcal{Z}_{n+q} > 0)}\\
&\quad= \mathbb{P}(\#\mathcal{G}_n(k) = g,\ \mathcal{Z}_n = z)\frac{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_{n+q} > 0 \mid \mathcal{Z}_n = z)}{\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n = z,\ \mathcal{Z}_{n+q} > 0)}\\
&\quad= \mathbb{P}(\#\mathcal{G}_n(k) = g \mid \mathcal{Z}_n = z).
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Aus (6.77), (6.78), (6.79) und (6.80) erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
&\lim_{q\to\infty} \mathbb{P}^{n+q}\Big(\frac{\#\{v \in \mathbb{G}^*_{n+q} : Z_{v|n} = k\}}{\#\mathbb{G}^*_{n+q}} = 1\Big)\\
&\quad= \sum_{g,z\geq 1} \frac{gk}{z}\mathbb{P}(\#\mathcal{G}_n(k) = g \mid \mathcal{Z}_n = z)\frac{z}{\mathbb{E}\mathcal{Z}_n}\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n = z)\\
&\quad= \frac{k}{\mathbb{E}\mathcal{Z}_n}\sum_{g,z\geq 1} g\mathbb{P}(\#\mathcal{G}_n(k) = g \mid \mathcal{Z}_n = z)\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n = z)\\
&\quad= \frac{k}{\mathbb{E}\mathcal{Z}_n}\mathbb{P}(\mathcal{Z}_n > 0)\sum_{g\geq 1} g\mathbb{P}^n(\#\mathcal{G}_n(k) = g)\\
&\quad= \frac{k}{\mathbb{E}^n\mathcal{Z}_n}\mathbb{E}^n(\#\mathcal{G}_n(k)).
\end{aligned}$$

Damit wäre die erste Behauptung des Korollars bewiesen.

Die zweite Behauptung ergibt sich dann aus Satz 6.27 und Korollar 6.29, denn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k\mathbb{E}^n(\#\mathcal{G}_n(k))}{\mathbb{E}^n\mathcal{Z}_n} = \frac{k\mathbb{E}(N_k)}{\mathbb{E}(\sum_{k'\geq 0} N_{k'})}.$$

□

7 Ausblick

Für die mathematische Beschreibung der Vermehrung von Parasiten und deren Verteilung auf sich teilende Zellen war das in dieser Arbeit betrachtete Zellteilungsmodell infizierter Zellen eine gute erste Version. Wir haben durch die in dieser Arbeit erzielten Resultate einen ersten mathematischen Einblick in diesen biologischen Prozess gewonnen. So erhielten wir im vierten Kapitel Bedingungen, unter denen sich ein infizierter Organismus fast sicher erholt, sowie im fünften Kapitel Aussagen über das Langzeitverhalten infizierter Zellen und deren Verteilung auf den Zellbaum. Das sechste Kapitel lieferte uns dann Informationen über die Verteilung der Parasiten auf die Zellen. Trotzdem bleiben noch einige Fragen offen.

So ist vor allem das Konvergenzverhalten von $F_k(n)$ im Fall D_4 noch nicht befriedigend geklärt worden. Wir wissen zwar, dass die Anzahl infizierter Zellen bei fortlaufender Zeit exponentiell wächst, haben aber dadurch noch wenig Informationen über die Verteilung der Parasiten auf die Zellen gewonnen. Wir vermuten, dass im Fall eines kritischen PZZ die schwach infizierten Zellen vernachlässigbar werden. Aber auch in den Fällen aus Kapitel 6, in denen wir schon Ergebnisse über die Verteilung der Parasiten auf die Zellen erzielt haben, bestehen noch Möglichkeiten, diese zu verbessern. So sollte genauer untersucht werden, ob die in diesen Abschnitten gezeigten Konvergenzarten sich nicht verschärfen lassen. Konvergiert zum Beispiel $F_k(n)$ nicht sogar $\mathbb{P}^*$-f.s. gegen $\mathbb{P}(\mathcal{Y} = k)$ im Fall D_3?

Auch in den Kapiteln 4 und 5 gibt es noch interessante, weiterführende Fragestellungen. Nach den Ergebnissen des vierten Kapitels konvergiert $\#\mathbb{G}_n^*/2^n$ fast sicher gegen eine Zufallsgröße $L \in [0, 1]$, die genau dann fast sicher verschwindet, wenn $\mu_0\mu_1 \leq 1$ ist. Doch wie sieht die Verteilung oder Laplace-Transformierte von L im Fall $\mu_0\mu_1 > 1$ aus? Auch ist Satz 5.6 im fünften Kapitel für den Fall $\mu_0\mu_1 \leq 1$ und $\mathbb{P}(X^{(0)} \leq 1) = 1$ noch nicht bewiesen. Verteilen sich in diesem Fall die infizierten Zellen über den gesamten Zellbaum oder sind sie in endlich vielen Zelllinien konzentriert?

Dass das Zellteilungsmodell infizierter Zellen nicht das Maß aller Dinge ist, wird schnell klar. So teilen sich in realen biologischen Systemen nicht alle Zellen zur gleichen Zeit. Eine vernünftige Erweiterung des in dieser Arbeit betrachteten Modell ist demnach die Einführung einer exponentialverteilten Lebenszeit der Zellen. Geschieht dies, so erhält man das in der Einleitung kurz vorgestellte Modell von Kimmel [16] mit dem Unterschied, dass die Verteilung der Parasiten auf die Tochterzellen nicht symmetrisch erfolgen muss, d.h. $(X^{(0)}, X^{(1)}) \stackrel{d}{=} (X^{(1)}, X^{(0)})$ nicht unbedingt gilt. In wie weit lassen sich die in dieser Arbeit bewiesenen Sätze auf das zeitstetige Modell übertragen? Man würde auf diese Weise die von Kimmel erzielten Resultate verallgemeinern und erweitern.

Nun ist ein Organismus kein geschlossenes System und neue Parasiten können jederzeit Zellen infiltrieren. Eine andere mögliche Erweiterung des Zellteilungsmodells ist daher die Hinzunahme der Immigration. Neben den schon in einer Zelle vorhandenen Parasiten können dann zu jedem Zeitpunkt neue Parasiten gemäß einer Verteilung Q immigrieren. Nachdem diese in die Zelle eingedrungen sind, verhalten sie sich genauso wie die schon im Organismus befindlichen Parasiten und vermehren sich gemäß $\mathbb{P}(X^{(0)} + X^{(1)} \in \cdot)$. Der Prozess $\mathcal{Z}_n$ ist in diesem Modell ein Galton-Watson-Prozess mit Immigration. Kann man im Immigrationsmodell ähnliche Resultate, zu denen in dieser Arbeit gezeigten, herleiten? Dass sich die hier bewiesenen Sätze nicht so einfach auf das Immigrationsmodell übertragen lassen, sollte sofort einleuchten. Gilt nämlich $Q \neq \delta_0$, so sind die beiden Modelle verschieden und es können in jeder Generation neue Parasiten auch in gesunde Zellen eindringen. Selbst wenn die Parasiten eines Organismus schon ausgestorben sind, können neue diesen wieder infizieren. Dadurch kann ein Organismus sich nie fast sicher erholen. Es ist daher zu erwarten, dass im Zellteilungsmodell mit Immigration viel Ergebnisse von den hier gezeigten abweichen werde.

A Anhang

Im Anhang geben wir in den ersten beiden Abschnitten A.1 und A.2 einen kleinen Einblick in die Theorie der Markov-Ketten und der gleichgradigen Integrierbarkeit. Wir beschränken uns jedoch nur auf die von uns in dieser Arbeit benötigten Definitionen und Sätze. Für weiterführende Diskussionen zu diesen Themen siehe [5] und [6]. In Abschnitt A.3 geben wir die im 2. Kapitel angekündigten zwei Sätze über das asymptotische Verhalten moderat und schwach subkritischer GWPZVU an. Auch findet sich hier der im 4. Kapitel und im Abschnitt 6.1.3 benötigte Satz über den kritischen GWPZVU. Weiter zeigen wir dann, dass der ZTPIZ die Voraussetzungen dieser Sätze erfüllt. Den Abschluss des Anhangs bildet der Abschnitt A.4 mit einer kurzen Einführung in die in Abschnitt 6.3 benötigte schwache Topologie auf dem Raum der Verteilungen.

A.1 Markov-Ketten

Eine Markov-Kette ist eine stochastische Folge von Zufallsgrößen, die eine einfache Abhängigkeitsstruktur aufweisen. Bedingt unter der Vergangenheit, hängt das Verhalten einer Markov-Kette immer nur vom aktuellen Zustand ab. Hier die genaue

Definition A.1. (a) Eine stochastische Folge $(M_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsgrößen mit Werten in $(S, \mathfrak{S})$ heißt *Markov-Kette* (MK), falls sie die Markov-Eigenschaft,

$$\mathbb{P}(M_{n+1} \in \cdot \mid M_0, ..., M_n) = \mathbb{P}(M_{n+1} \in \cdot \mid M_n) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für alle $n \geq 0$, besitzt.

(b) Eine MK heißt *(zeitlich) homogen*, wenn für alle $n \geq 0$ und $s \in S$

$$\mathbb{P}(M_{n+1} \in \cdot \mid M_n = s) = \mathbb{P}(M_1 \in \cdot \mid M_0 = s) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

Die erste Frage, die man sich stellen sollte, ist, ob die Markov-Eigenschaft nicht nur bei fest gewählten sondern vielleicht sogar bei zufälligen Zeitpunkten gültig bleibt. Dies ist in vielen Situationen richtig. Man nennt diese Eigenschaft sinngemäß die *starke Markov-Eigenschaft*. Bevor wir aber zu dieser Eigenschaft kommen können, benötigen wir die Definition der Stoppzeit.

Definition A.2. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum.

(a) Eine aufsteigende Folge $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ heißt *Filtration* von $(\Omega, \mathcal{A})$.

(b) Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine MK. Die Filtration $\big(\sigma(M_0, \ldots, M_n)\big)_{n\geq 0}$ heißt *kanonische Filtration bzgl.* $(M_n)_{n\geq 0}$.

(c) Eine meßbare Abbildung $\tau : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit bzgl. der Filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, wenn $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \geq 0$ gilt.

Für eine Markov-Kette gilt die starke Markov-Eigenschaft bei Stoppzeiten bzgl. der kanonischen Filtration.

Satz A.3. ***(starke Markov-Eigenschaft)*** *(vgl. [4], Satz 4.3)*
Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine MK. Für jede Stoppzeit τ bzgl. der kanonischen Filtration von $(M_n)_{n\geq 0}$ gilt die starke Markov-Eigenschaft

$$\mathbb{P}\big((M_{\tau+n})_{n\geq 0} \in \cdot \mid M_0, \ldots, M_\tau, \tau < \infty\big) \;=\; \mathbb{P}\big((M_{\tau+n})_{n\geq 0} \in \cdot \mid M_\tau, \tau < \infty\big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}$$

Anstelle die Markov-Kette mit einer linearen Zeit zu indizieren, kann man auch eine Markov-Kette auf einem Baum betrachten, wie zum Beispiel den Zellteilungsprozess infizierter Zellen. Wir geben hier die Definition einer solchen Markov-Kette an. Für die benötigten graphentheoretischen Ausdrücke siehe [14].

Definition A.4. (Markov-Kette indiziert durch einen Baum)

(a) Unter einem *Baum* verstehen wir einen unendlichen, lokal endlichen, zusammenhängenden ungerichteten Graphen (T, E), welcher einen ausgezeichneten Knoten $\varnothing \in T$ (Wurzel) und keine Kreise enthält.

Für $\sigma \in T$ existiert ein eindeutiger Pfad von $\varnothing$ nach σ, und sei $|\sigma|$ seine Länge. Ferner schreiben wir $\tau \leq \sigma$, falls der Knoten $\tau \in T$ auf diesem eindeutigen Pfad liegt. τ wird auch Vorfahre von σ genannt.

Weiter bezeichnet $\sigma \wedge \tau$ den ersten gemeinsamen Vorfahren von σ und τ, also den am weitesten von $\varnothing$ entferntesten Knoten ρ, der $\rho \leq \sigma$ und $\rho \leq \tau$ erfüllt.

(b) Sei (T, E) ein Baum. Eine Familie $(M_\sigma)_{\sigma\in T}$ mit Werten in $(S, \mathfrak{S})$ heißt *Markov-Kette indiziert durch* T, falls für alle $\sigma \in T$

$$\mathbb{P}(M_\sigma \in \cdot \mid M_\tau : \tau \wedge \sigma \leq \tilde{\sigma}) \;=\; \mathbb{P}(M_\sigma \in \cdot \mid M_{\tilde{\sigma}}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt, wobei $\tilde{\sigma} \in T$ der eindeutige Knoten mit den Eigenschaften $\tilde{\sigma} \leq \sigma$ und $|\tilde{\sigma}| = |\sigma| - 1$ ist.

A.2 Gleichgradige Integrierbarkeit

Konvergiert eine Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\geq 0}$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße X, so folgt im Allgemeinen nicht die Konvergenz der Erwartungswerte. Eine hinreichende sowie notwendige Bedingung hierfür bildet jedoch die gleichgradige Integrierbarkeit, die wie folgt definiert ist.

Definition A.5. Eine Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ von Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt *gleichgradig integrierbar* (g.i.), falls

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\geq 0} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \, d\mathbb{P} = 0$$

gilt.

Wir geben nun einige äquivalente und hinreichende Bedingungen für die gleichgradige Integrierbarkeit und die oben angesprochene Äquivalenz der gleichgradigen Integrierbarkeit mit der Konvergenz der Erwartungswerte im Fall verteilungskonvergenter Zufallsgrößen an. Für ausführlichere Ergebnisse siehe [5].

Satz A.6. *(vgl. [5], Satz 50.2 und Korollar 50.3)*
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Zufallsgrößen. Dann gilt:

(i) $(X_n)_{n\geq 0}$ *ist genau dann g.i., wenn für jede absteigende Nullfolge* $(A_m)_{m\geq 0} \subseteq \mathcal{A}$ $\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq 0} \int_{A_m} |X_n| \, d\mathbb{P} = 0$ *und* $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ *gilt.*

(ii) Ist $X_n \leq Y_n$ *für alle* $n \geq 0$ *und* $(Y_n)_{n\geq 0}$ *eine g.i. Folge von Zufallsgrößen, so ist* $(X_n)_{n\geq 0}$ *g.i..*

(iii) Ist $(X_n)_{n\geq 0}$ $\mathcal{L}_p$*-beschränkt für ein* $p > 1$*, so ist* $(X_n)_{n\geq 0}$ *g.i..*

Satz A.7. *(vgl. [5], Satz 50.5)*
Gilt $X_n \xrightarrow{d} X$*, dann sind äquivalent:*

(i) $(X_n)_{n\geq 0}$ *ist g.i.*

(ii) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ *für alle* $n \geq 0$*,* $\mathbb{E}|X| < \infty$ *und* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}|X|$.

Aus (i) und (ii) folgt insbesondere $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$.

A.3 Der Galton-Watson-Prozess in zufällig variierenden Umgebungen: Der moderat und schwach subkritische und kritische Fall

Mit der Notation aus Abschnitt 2.2 gelten die folgenden Sätze über moderat und schwach subkritische sowie kritische GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge.

Satz A.8. ***(moderat subkritischer Fall)*** *(vgl. [12], Satz 1.2)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein moderat subkritischer GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ mit

$$\mathbb{E}(\mu_{\mathcal{U}_1}\log^2\mu_{\mathcal{U}_1})<\infty \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}\big((1+\log^-\mu_{\mathcal{U}_1})f''_{\mathcal{U}_1}(1)\big)<\infty.$$

Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z_n>0)\overset{n\to\infty}{\simeq}\frac{c_2}{\sqrt{n}}\mu_1^n$$

für ein $c_2\in(0,\infty)$. Des Weiteren existieren $b_2(k)\in[0,1]$, $k\geq 1$, mit

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z_n=k\mid Z_n>0)=b_2(k),\quad k\geq 1,$$

und $\sum_{k=1}^\infty b_2(k)=1$.

Satz A.9. ***(schwach subkritischer Fall)*** *(vgl. [12], Satz 1.3)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ ein schwach subkritischer GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge $\mathcal{U}$ mit

$$\mathbb{E}(\mu_{\mathcal{U}_1}\log\mu_{\mathcal{U}_1})<\infty.$$

Nehme weiter an, dass

$$\mathbb{E}\Big(\frac{f''_{\mathcal{U}_1}(1)}{(\mu_{\mathcal{U}_1})^{1-\alpha}}\Big)<\infty \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}\Big(\frac{f''_{\mathcal{U}_1}(1)}{(\mu_{\mathcal{U}_1})^{2-\alpha}}\Big)<\infty$$

gilt, wobei $\alpha\in[0,1]$ mit $\gamma=\mathbb{E}\big((f'_{\mathcal{U}_1}(1))^\alpha\big)$, $\gamma:=\inf_{0\leq\theta\leq 1}\mathbb{E}\big((f'_{\mathcal{U}_1}(1))^\theta\big)<(1\wedge\mathbb{E}Z_1)$ ist. Dann gilt

$$\mathbb{P}(Z_n>0)\overset{n\to\infty}{\simeq}\frac{c_3}{\sqrt{n^3}}\gamma^n$$

für ein $c_3\in(0,\infty)$. Des Weiteren existieren $b_3(k)\in[0,1]$, $k\geq 1$, mit

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z_n=k\mid Z_n>0)=b_3(k),\quad k\geq 1,$$

und $\sum_{k=1}^\infty b_3(k)=1$.

Wir geben den folgenden Satz über kritische GWPZVU mit u.i.v. Umgebungsfolge nur in einer für uns ausreichenden Form an. Für allgemeinere Resultate siehe [1] und [17].

Satz A.10. *(vgl. [1], Korollar 1.2 und Satz 1.3)*
Sei $(Z_n)_{n\geq 0}$ *ein kritischer GWPZVU mit unabhängiger, identisch verteilter Umgebungsfolge* $\mathcal{U}$ *mit*

$$0 < \mathbb{E}(\log^2 \mu_{\mathcal{U}_1}) < \infty$$

und

$$\frac{1}{(\mu_{\mathcal{U}_1})^2}\mathbb{E}(X_{1,1}^2 \mathbb{1}_{\{X_{1,1}\geq x\}} \mid \mathcal{U}) \leq d \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für ein $x \in \mathbb{N}_0$ *und* $d \in (0,\infty)$. *Dann existieren Konstanten* $c \in (0,\infty)$ *und* $\rho \in (0,1)$ *sowie eine Funktion* $l : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *mit* $\lim_{n\to\infty} l(an)/l(n) = 1$ *für alle* $a > 0$, *sodass gilt*

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \overset{n\to\infty}{\simeq} cn^{-(1-\rho)} l(n).$$

Weiter folgt unter den obigen Annahmen

$$\mathbb{P}\Big(\frac{Z_n}{\mathbb{E}Z_n} \in \cdot \;\Big|\; Z_n > 0\Big) \xrightarrow{w} Q,$$

wobei Q *eine Verteilung mit* $Q\big((0,\infty)\big) = 1$ *ist.*

Wir kommen zurück zum ZTPIZ und zeigen, dass die Ergebnisse der drei obigen Sätze auch für einen kritischen oder moderat bzw. schwach subkritischen PZZ gelten.

Korollar A.11. *Gilt* $\mathbb{E}(X^{(a)2}) < \infty$, $a \in \{0,1\}$, *so erfüllt ein moderat bzw. schwach subkritischer PZZ* $(Z_{[n]})_{n\geq 0}$ *die Voraussetzungen der Sätze A.8 bzw. A.9. Gilt zusätzlich noch* $(\mu_0, \mu_1) \neq (1,1)$, *so erfüllt ein kritischer PZZ Satz A.10.*

Beweis: Für den moderat subkritischen Fall betrachte

$$\mathbb{E}(\mu_{\mathcal{U}_1} \log^2 \mu_{\mathcal{U}_1}) = \frac{1}{2}(\mu_0 \log^2 \mu_0 + \mu_1 \log^2 \mu_1) \tag{A.1}$$

und

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((1+\log^- \mu_{\mathcal{U}_1}) f''_{\mathcal{U}_1}(1)) \\ &\quad = \frac{1}{2}\big((1+\log^- \mu_0) f''_0(1) + (1+\log^- \mu_1) f''_1(1)\big) \\ &\quad = \frac{1}{2}\big((1+\log^- \mu_0)\mathbb{E}(X^{(0)}(X^{(0)}-1)) + (1+\log^- \mu_1)\mathbb{E}(X^{(1)}(X^{(1)}-1))\big). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Aufgrung von (1.3) und $\mathbb{E}(X^{(a)2}) < \infty$, $a \in \{0,1\}$, sind beide obigen Erwartungswerte (A.1) und (A.2) endlich. Damit sind die Voraussetzungen für den moderat subkritischen Fall erfüllt.

Die Voraussetzungen für den schwach subkritischen Fall sind ebenfalls erfüllt, denn für $k \in \{1,2\}$ gilt wieder wegen (1.3) und $\mathbb{E}(X^{(a)2}) < \infty$, $a \in \{0,1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\frac{f''_{\mathcal{U}_1}(1)}{\mu_{\mathcal{U}_1}^{k-\alpha}}\Big) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{f''_0(1)}{\mu_0^{k-\alpha}} + \frac{f''_1(1)}{\mu_1^{k-\alpha}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathbb{E}(X^{(0)}(X^{(0)}-1))}{\mu_0^{k-\alpha}} + \frac{\mathbb{E}(X^{(1)}(X^{(1)}-1))}{\mu_1^{k-\alpha}}\Big) \\ &< \infty \end{aligned}$$

Auch die Voraussetzungen im kritischen Fall gelten, denn aufgrund von (1.3) und $(\mu_0, \mu_1) \neq (1,1)$ gilt

$$0 < \mathbb{E}(\log^2 \mu_{\mathcal{U}_1}) = \frac{1}{2}(\log^2 \mu_0 + \log^2 \mu_1) < \infty.$$

Da der PZZ nur zwei Umgebungen hat, folgt für $x = 0$

$$\frac{1}{(\mu_{\mathcal{U}_1})^2}\mathbb{E}(X^{(\mathcal{U}_1)2}\mathbb{1}_{\{X^{(\mathcal{U}_1)}\geq 0\}}) \leq \frac{1}{\mu_0^2}\mathbb{E}(X^{(0)2}) + \frac{1}{\mu_1^2}\mathbb{E}(X^{(1)2}) < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

nach Voraussetzung und (1.3). □

A.4 Schwache Topologie im Raum der Verteilungen

Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind entnommen aus [18].

Sei X ein metrischer Raum und $\mathbb{B}_X$ die Borelsche σ-Algebra auf X. Weiter bezeichne

$$\mathfrak{W}(X) := \{P : \mathbb{B}_X \to [0,1] \mid P(X) = 1,\ P\ \sigma\text{-additiv}\}$$

die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf X und

$$C(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt und stetig}\}$$

die Menge der stetigen, beschränkten, reellen Funktionen auf X.

Die offenen Umgebungen einer Verteilung $P \in \mathfrak{W}(X)$ sind von der Form

$$V_P(f_1, \dots, f_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \Big\{Q \in \mathfrak{W}(X) \ : \ \Big|\int f_i dP - \int f_i dQ\Big| < \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, k\Big\},$$

für $f_1, \dots, f_k \in C(X)$ und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$. Die durch diese offenen Umgebungen erzeugte Topologie auf $\mathfrak{W}(X)$ bezeichnet man als *schwache Topologie*.

Eine Folge von Verteilungen $(P_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathfrak{W}(X)$ konvergiert dann bzgl. der schwachen Topologie oder *schwach* gegen $P \in \mathfrak{W}(X)$, in Zeichen $P_n \xrightarrow{w} P$, genau dann, wenn für alle $f \in C(X)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f dP_n = \int f dP.$$

Ist $X = \mathbb{R}$ bzw. $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, dann erhalten wir die wohlbekannte Definition der schwachen Konvergenz von Verteilungen auf den reellen Zahlen.

Satz A.12. *(vgl. [18], Satz 6.2)*
$\mathfrak{W}(X)$ kann metrisiert werden zu einem separablen, metrischen Raum genau dann, wenn X ein separabler, metrischer Raum ist.

Satz A.13. *(vgl. [18], Satz 6.5)*
Sei X ein separabler, metrischer Raum. Dann ist $\mathfrak{W}(X)$ vollständig genau dann, wenn X vollständig ist.

Bemerkung A.14. Die gemäß Satz A.12 induzierte Metrik d auf $\mathfrak{W}(X)$ ist gegeben durch

$$d(P,Q) = \sup\left\{\left| \int f dP - \int f dQ \right| \;:\; ||f||_\infty \leq 1, f \text{ gleichmäßig stetig}\right\}$$

für $P, Q \in \mathfrak{W}(X)$.

Für eine Folge $(P_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathfrak{W}(X)$ und $P \in \mathfrak{W}(X)$ gilt also

$$P_n \xrightarrow{w} P \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} d(P_n, P) = 0.$$

Literaturverzeichnis

[1] Afanasyev, I. V. ; Geiger, J. ; Kersting, G. ; Vatutin, V. A.: Criticality for branching processes in random environment. In: *The Annals of Probability* 33 (2005)

[2] Afanasyev, I. V. ; Geiger, J. ; Kersting, G. ; Vatutin, V. A.: Functional limit theorems for strongly subcritical branching processes in random environment. In: *Stochastic Processes and their Applications* 115 (2005)

[3] Alsmeyer, G.: *Branching processes in stationary random environment: The extinction problem revisited.* – unveröffentlicht

[4] Alsmeyer, G.: *Stochastische Prozesse Teil 1.* 3. Auflage. Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 33, 2005

[5] Alsmeyer, G.: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* 4. Auflage. Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, 2005

[6] Alsmeyer, G.: *Verzweigungsprozesse.* 2007. – Skript, WWU Münster

[7] Athreya, K. B. ; Karlin, S.: On branching processes with random environments I. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 42 (1971)

[8] Athreya, K. B. ; Karlin, S.: On branching processes with random environments II. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 42 (1971)

[9] Athreya, K. B. ; Ney, P. E.: *Branching Processes.* Dover Publications, 2004

[10] Bansaye, V.: Proliferating parasites in dividing cells: Kimmel's branching model revisited. In: *The Annals of Applied Probability* 18 (2008)

[11] Benjamini, I. ; Peres, Y.: Markov chains indexed by trees. In: *The Annals of Probability* 22 (1994)

[12] Geiger, J. ; Kersting, G. ; Vatutin, V. A.: Limit theorems for subcritical branching processes in random environment. In: *Annals de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques* 39 (2003)

[13] Guyon, J.: Limit theorems for bifurcating markov chains. Application to the detection of cellular aging. In: *The Annals of Applied Probability* 17 (2007)

[14] Harary, F.: *Graphentheorie.* R. Oldenbourg Verlag, 1974

[15] Jagers, P.: *Branching Processes with Biological Applications.* J. Wiley, 1975

[16] Kimmel, M.: Quasistationarity in a branching model of division-within-devision. In: Athreya, K. B. (Hrsg.) ; Jagers, P. (Hrsg.): *Classical and Modern Branching Processes.* Springer, 1997

[17] Kozlov, M. V.: On the asymptotic behavior of the probability of non-extinction for critical branching processes in a random environment. In: *Theory of Probability and its Applications* 21 (1976)

[18] Parthasarathy, K. R.: *Probability Measures on Metric Spaces.* Academic Press, 1967

[19] Smith, W. L. ; Wilkinson, W.: On branching processes in random environments. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 40 (1969)

[20] Stewart, E. J. ; Madden, R. ; Paul, G. ; Taddei, F.: Aging and death in an organism that reproduces by morphologically symmetric division. In: *PLoS Biology* 3 e45 (2005)

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 16. September 2009 Sören Gröttrup