Markov-Verzweigungs-Prozesse

Antje Eimermacher

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Fachbereich Mathematik

Markov-Verzweigungs-Prozesse

Diplomarbeit

vorgelegt von
Antje Eimermacher

Dezember 1998

Das Thema dieser Arbeit wurde gestellt von
Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

Symbolverzeichnis

Contents

Chapter 0

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Population unter Berücksichtigung sowohl ihrer zeitlichen als auch ihrer genetischen Entwicklung modelliert und mithilfe dieses Modells ihr asymptotisches Verhalten untersucht.
Zielsetzung der Modellierung ist unter anderem, daß unsere Population - angelehnt an die biologische Wirklichkeit - folgende beiden Eigenschaften erfüllt:
1. Individuen erben ihren Genotyp und entwickeln sich - diesen gegeben - unabhängig von ihren Vorfahren.
2. Disjunkte Populationszweige hängen nur durch ihre gemeinsamen Vorfahren voneinander ab und entwickeln sich ansonsten unabhängig voneinander.
Dies motiviert den Versuch, die Population mithilfe der Markov-Theorie zu modellieren. Da aber auch die zeitliche Entwicklung berücksichtigt werden soll, führt uns dies in die Markov-Erneuerungstheorie (genaueres dazu in 2.7), die wir daher als theoretische Grundlage in dieser Arbeit behandeln.

Gehen wir zunächst näher auf die in Kapitel 1 behandelten Themen ein:
Nachdem wir in den Abschnitten 1.1 und 1.2 grundlegende Definitionen und Notationen festlegen, werden wir in Abschnitt 1.3 einige für uns im folgenden wichtige Eigenschaften von Kernen behandeln. Dabei halten wir uns im wesentlichen sehr eng an Nummelins (weitaus umfassenderes und ausführlicheres) Buch "General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators"([12]). In zwei Merkmalen unterscheiden wir uns von der Arbeit Nummelins: In jener werden Kerne auf einem Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ betrachtet. Wir dagegen übertragen die Ergebnisse und Definitionen auf Kerne der Form $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow [0, \infty)$. Bis auf die in Unterabschnitt 1.3.2 festgehaltenen Aussagen über die Minorisierungsbedingung können wir jedoch alles in kanonischer Form übertragen, indem wir von μ zu $\mu(\cdot, \cdot \times \mathbb{R})$ übergehen. Die zweite Abweichung liegt in der Definition des Konvergenzparameters und der damit zusammenhängenden α-Rekurrenz(-Transienz). Während Nummelin die in der sogenannten R-Theorie übliche Definition wählt, entscheiden wir uns für eine davon abweichende, z.B. auch in dem von Niemi und Nummelin verfaßten Artikel "On non-singular renewal kernels with an application to a semigroup of transition kernels" ([11]) gewählte Form. Auch hier lassen sich jedoch die Aussagen und Beweise in meist nur leicht modifizierter Art

übertragen.
Aufbauend auf diesen grundlegenden Eigenschaften von Kernen beweisen wir in Abschnitt 1.4 nach der von Nummelin in "Uniform and ratio limit theorems for Markov renewal and semi-regenerative processes on a general state space" ([13]) vorgestellten Idee ein Markov-Erneuerungstheorem. Dabei behandeln wir zuerst den von Arjas, Nummelin und Tweedie 1978 ([3]) nachgewiesenen Spezialfall, den sogenannten Atom-Fall. Danach läßt sich der allgemeine Fall durch Zurückziehen auf den Spezialfall nachweisen, indem wir den sogenannten gesplitteten Markov-Random-Walk konstruieren. Diese Konstruktion läßt sich in ähnlicher Weise in zahlreicher Literatur (z.B. Nummelin[13],[14]) wiederfinden.

Im zweiten Kapitel können wir nun mit den bisher behandelten Hilfsmitteln die Population modellieren und untersuchen. Dabei stützen wir uns grundlegend auf den 1988 erschienenen Artikel Jagers "General Branching Processes as Markov Fields"([7]). Die in der Modellierung zu berücksichtigenden Eigenschaften der Population wurden oben schon kurz erläutert, finden sich im Detail aber auch in der Motivation (2.1). Zu bemerken bleibt noch, daß in der Einschränkung auf asexuelle Vermehrung eine sehr starke Vereinfachung vorgenommen wird. Vererbungsprozesse wie Rekombination finden in unserem Modell demnach keine Berücksichtigung. Dennoch gehen wir nicht von dem Trivialfall aus, daß der Genotyp einer Mutter an ihre Kinder weitergegeben wird, sondern lassen genetische Veränderungen von Generation zu Generation zu.
Nach der Modellierung weisen wir in den Abschnitten 2.3 bis 2.5 wichtige Eigenschaften der Population nach und stellen in 2.7 einige grundlegende Voraussetzungen an sie, die uns später die Anwendungen der im ersten Kapitel erhaltenen Ergebnisse ermöglichen werden. In den Abschnitten 2.7 und 2.8 behandeln wir das sogenannte intrinsische Martingal, dessen Nutzen sich erst in nachfolgendem Abschnitt offenbaren wird. Dort betrachten wir dann das asymptotische Verhalten der Population, indem wir Konvergenzaussagen bzgl. Konvergenz in Erwartung, schwacher $\mathcal{L}_1$- und starker $\mathcal{L}_1$-Konvergenz aufstellen. Dabei erkaufen wir den Übergang zu einer stärkeren Konvergenzart stets mit zusätzlichen Voraussetzungen an die Population. Der Nachweis der Konvergenz erfolgt stets für eine ganze Klasse von Funktionen. Auf diese Weise lassen sich ganz verschiedene Aspekte der Populationsentwicklung, wie z.B. die Größe der Population, die Anzahl der Individuen mit bestimmtem Genotyp etc. mit nur einem Theorem behandeln.
Zu bemerken bleibt, daß die von Jagers ursprünglich aufgestellte Behauptung über die starke $\mathcal{L}_1$-Konvergenz in der Form nicht aufrechterhalten werden kann, da seine Beweisführung fehlerhaft ist. Die von uns stattdessen entwickelte Aussage ist weitaus schwächer, da wir Jagers Konvergenzaussage nur mit erheblichen Zusatzvoraussetzungen retten können.

Chapter 1

Kerne

1.1 Präliminarien

In diesem Abschnitt werden häufig benutzte Schreibweisen und Definitionen bereitgestellt, sowie einige Basisannahmen gemacht.

Im gesamten Kapitel bezeichne $(S, \mathcal{S})$ einen abzählbar erzeugten meßbaren Raum.
$\mathcal{B}$ bezeichne die Borelsche σ-Algebra und $\lambda\!\!\lambda$ das Lebesgue-Maß auf $\mathrm{I\!R}$.
$\mathcal{M}_+$ bezeichne die Menge aller signierten Maße auf $(S, \mathcal{S})$ mit positiver Gesamtmasse.
$\mathcal{S}_+$ sei die Menge aller nichtnegativen meßbaren Funktionen auf $(S, \mathcal{S})$ mit Werten in $(\mathrm{I\!R}, \mathcal{B})$
Es sei stets, wenn nicht anders gesagt, $A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{B},\ x \in S$.

Sind $(\Omega, \Sigma), (\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma})$ zwei meßbare Räume, so heißt eine numerische Funktion $\mu : \Omega \times \tilde{\Sigma} \to [0, \infty]$ ein *(nichtnegativer) Kern* von (Ω, Σ) nach $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma})$, wenn μ die Eigenschaften

- Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\mu(\omega, \cdot)$ ein Maß auf $\tilde{\Omega}$
- Für alle $\tilde{A} \in \tilde{\Sigma}$ ist $\mu(\cdot, \tilde{A})$ eine meßbare Funktion auf (Ω, Σ)

erfüllt.
μ heißt *Übergangskern* oder *(sub)stochastisch*, wenn $\mu(\omega, \tilde{\Omega}) = (\leq) 1 \quad \forall \omega \in \Omega$.
Im Fall $\Omega = \tilde{\Omega}, \Sigma = \tilde{\Sigma}$ spricht man auch von einem Kern auf (Ω, Σ).

Seien nun $\mu, \mu_1, \mu_2 : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to \mathrm{I\!R}_+$ sowie $Q, Q_1, Q_2 : S \times \mathcal{S} \to \mathrm{I\!R}_+$ nichtnegative Kerne , ϕ_1 (ϕ_2) ein Maß auf $(S \times \mathrm{I\!R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ $((S, \mathcal{S}))$, f_1 (f_2) eine meßbare Funktion auf $(S \times \mathrm{I\!R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ $((S, \mathcal{S}))$ mit Werten in $(\mathrm{I\!R}, \mathcal{B})$.
Die Faltung $\mu_1 * \mu_2$ wird definiert durch

$$\mu_1 * \mu_2(x, A \times B) = \int_{S \times \mathrm{I\!R}} \mu_2(y, A \times (B - u))\, \mu_1(x, dy \times du).$$

Die n-fache Faltung von μ, kurz μ^n , wird so für jedes $n \in \mathbb{N}$ induktiv definiert durch

$$\mu^n(x, A \times B) = \int_{S\times B} \mu(y, A \times (B - u))\, \mu^{(n-1)}(x, dy \times du).$$

Entsprechend werden die Faltungen von μ mit ϕ_1, von f_1 mit μ sowie von f_1 mit ϕ_1 definiert durch

$$\phi_1 * \mu(A \times B) = \int_{S\times\mathbb{R}} \mu(x, A \times B - u)\, \phi_1(dx \times du)$$
$$\mu * f_1(s, t) = \int_{S\times\mathbb{R}} f_1(x, t - u)\, \mu(s, dx \times du)$$
$$\phi_1 * f_1(t) = \int_{S\times\mathbb{R}} f_1(x, t - u)\, \phi_1(dx \times du)$$

Weiter definieren wir

$$Q_1Q_2(x, A) = \int_S Q_2(y, A)\, Q_1(x, dy)$$
$$Q^n(x, A) = \int_S Q(y, A)\, Q^{(n-1)}(x, dy)$$
$$\phi_2\mu(A \times B) = \int_S \mu(x, A \times B)\, \phi(dx)$$
$$\phi_2Q(A) = \int_S Q(y, A)\, \phi_2(dy)$$
$$Qf_2(x) = \int_S f_2(y)\, Q(x, dy)$$
$$\phi_2(f_2) = \int_S f_2(y)\, \phi_2(dy)$$
$$f_2 \otimes \phi_2(x, A) = f_s(x)\phi_s(A)$$

ν (U) bezeichne stets den Erneuerungskern von μ (von Q) definiert durch

$$\nu(x, A \times B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n(x, A \times B) \qquad U(x, A) = \sum_{n\geq 0} Q^n(x, A),$$

wobei $\mu^0(x, A \times B) := \delta_0(B)\delta_x(A)$ und $Q^0(x, A) := \delta_x(A)$.
Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sei μ_λ der durch

$$\mu_\lambda(x, A \times B) = \int_B e^{-\lambda t}\mu(x, A \times dt)$$

definierte Kern und ν_λ der zugehörige Erneuerungskern.
Entsprechend sei für ein Maß ϕ auf $(S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ ϕ_λ das durch

$$\phi_\lambda(A \times B) = \int_B e^{-\lambda t}\phi(A \times dt)$$

definierte Maß.
Die in kanonischer Weise durch μ und μ_λ induzierten Kerne auf $(S, \mathcal{S})$ bezeichnen wir mit $\bar{\mu}$ bzw. $\bar{\mu}_\lambda$, d.h.

$$\bar{\mu}(x, A) := \mu(x, A \times \mathbb{R}) \qquad \bar{\mu}_\lambda(x, A) := \mu_\lambda(x, A \times \mathbb{R}),$$

und die zugehörigen Erneuerungskerne entsprechend mit $\bar{\nu}$ und $\bar{\nu}_\lambda$.
Genauso wird das durch ϕ_1 auf $(S, \mathcal{S})$ induzierte Maß $\bar{\phi}_1$ definiert durch

$$\bar{\phi}_1(A) := \phi_1(A \times \mathbb{R}).$$

1.2 Markov-Random-Walks: Definition und Standardmodell

Definition 1.2.1 Gegeben ein stochastischer Kern $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to [0,1]$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß λ auf $(S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$.
Es sei $(M_n, X_n)_{n \geq 0}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette (siehe A.1) mit Übergangskern μ und Startverteilung λ, d.h.

$$P(M_0 \in A, X_0 \in B) = \lambda(A \times B)$$
$$P(M_{n+1} \in A, X_{n+1} \in B | M_n, X_n) = \mu(M_n, A \times B) \quad P\text{-f.s.} \quad \forall n \geq 0.$$

Mit $S_n = X_0 + \ldots + X_n$ heißt $(M_n, S_n)_{n \geq 0}$ dann *Markov-Random-Walk* (MRW). Gilt zusätzlich $\mu(x, S \times (-\infty, 0]) = 0 \quad \forall x \in S$, so heißt $(M_n, S_n)_{n \geq 0}$ auch *Markov-Erneuerungsprozeß* (MEP).

Ohne Beweis geben wir an: (zum Beweis siehe Nummelin[11])

Bemerkung 1.2.2 Ist $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to [0,1]$ substochastisch, so existiert ein MRW mit Übergangskern μ.

Definition 1.2.3 Sei $\mu : S \times \mathcal{S} \otimes \mathcal{B} \to [0,1]$ ein stochastischer Kern.
$(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, S_n)_{n \geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{B})})$ heißt *Standardmodell zu* μ, wenn
$(M_n, S_n) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}),\ n \geq 0$ unter jedem P_λ einen Markov-Random-Walk mit Startverteilung λ und Übergangskern μ bildet.
Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß ϕ auf $(S, \mathcal{S})$ schreiben wir nur kurz P_ϕ für $P_{\phi \otimes \delta_0}$.
Für $P_{\delta_{(x,t)}}$ schreiben wir auch nur $P_{x,t}$ und für $P_{x,0}$ nur P_x (wobei $x \in S, t \in \mathbb{R}$).
Folgende Gleichung läßt sich leicht nachrechnen:

$$\mu^n(x, A \times (B - t)) = P_{x,t}(M_n \in A, S_n \in B) \quad \forall x \in S$$

1.3 Eigenschaften von Kernen

Gegeben sei ein nichtnegativer Kern $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to [0, \infty]$.
In diesem Abschnitt werden wir Eigenschaften eines solchen Kernes, wie Irreduzibilität, α-Rekurrenz, Rekurrenz und Existenz von invarianten Maßen und Funktionen, und ihre Zusammenhänge untersuchen. Dabei werden wir uns nah an Nummelin[12] halten. Wir werden allerdings in der Definition von α-Rekurrenz und α-Invarianz von der von Nummelin zugrundegelegten R-Theorie abweichen. Dennoch läßt sich die Beweisführung in leicht modifizierter Form häufig übertragen.

1.3.1 Irreduzible Kerne

Hier werden wir die "Kommunikationsstruktur" von Kernen, d.h. welche Zustandsmengen von welchen aus erreichbar sind, untersuchen.
(Der Begriff der Erreichbarkeit wird nachfolgend erläutert.)

Definition 1.3.1 Sei $A \in \mathcal{S}, x \in S$.
A heißt *erreichbar* von x, kurz $x \to A$,wenn ein $n \geq 1$ existiert mit $\bar{\mu}^n(x, A) > 0$.
A heißt *abgeschlossen*, wenn A nicht-leer und A^c von keinem $x \in A$ erreichbar ist.
Offenbar ist schon $\bar{\mu}(x, A^c) = 0 \quad \forall x \in A$ hinreichend für die Abgeschlossenheit von A.

Satz und Definition 1.3.2 (irreduzible Maße) *Ein σ-endliches, positives Maß φ auf $(S, \mathcal{S})$ heißt irreduzibel für μ und μ heißt φ-irreduzibel, wenn gilt*

$$\varphi(A) > 0 \Longrightarrow x \to A \ \ \forall x \in S.$$

μ heißt irreduzibel,wenn μ φ-irreduzibel ist für ein geeignetes φ.
ψ heißt maximales irreduzibles Maß für μ,wenn ψ irreduzibel für μ und jedes weitere für μ irreduzible Maß absolut stetig bzgl. ψ ist.
Ist μ irreduzibel, gilt (siehe Nummelin[12], Proposition 2.4):
(i) Es existiert ein maximales irreduzibles Maß.
(ii) Ein für μ irreduzibles Maß ψ ist genau dann ein maximales irreduzibles Maß für μ, wenn $\psi\bar{\mu} \ll \psi$.
Ist ψ maximales irreduzibles Maß , so heißt eine Menge A voll, *wenn $\psi(A^c) = 0$.*
(Offensichtlich sind abgeschlossene Mengen stets voll.)
Wir definieren $\mathcal{S}^+ = \{f \in \mathcal{S}_+; \psi(f) > 0\}$ und schreiben auch kurz $A \in \mathcal{S}^+$, wenn $\mathbf{1}_A \in \mathcal{S}^+$.

Bemerkung 1.3.3 Ist μ irreduzibel, so gilt das auch für die Kerne $\mu_\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$, und die Mengen ihrer irreduziblen Maße stimmen überein. Damit haben diese Kerne auch (bis auf Äquivalenzen) dasselbe maximale irreduzible Maß.

Im folgenden sei μ stets als irreduzibel angenommen und ψ bezeichne ein maximales irreduzibles Maß für μ.

1.3.2 Die Minorisierungsbedingung

Definition 1.3.4 (Minorisierungsbedingung)
μ erfüllt die *Minorisierungsbedingung* $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ mit $m_0 \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $s \in \mathcal{S}^+$, φ ein positives Maß auf $(S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$, wenn

$$\mu^{m_0}(x, A \times B) \geq \beta s(x) \varphi(A \times B) \ \ \forall x \in S \, \forall B \in \mathcal{B} \, \forall A \in \mathcal{S}.$$

φ heißt *kleines Maß für μ*,wenn μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ für ein $m_0 \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, $s \in \mathcal{S}^+$ erfüllt.
s heißt *kleine Funktion für μ*, wenn μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ für ein $m_0 \in \mathbb{N}$, $\beta > 0$, positives Maß φ erfüllt.
$C \in \mathcal{S}$ heißt *kleine Menge für μ*, wenn $\mathbf{1}_C$ eine kleine Funktion ist.
Es bezeichne Σ die Menge aller kleinen Funktionen.
Obige Definitionen können alle auf einen Kern auf $(S, \mathcal{S})$ übertragen werden, mit dem einzigen Unterschied, daß φ dann ein Maß auf $(S, \mathcal{S})$ bezeichne.

Nach Nummelin[12], Theorem 2.1 erfüllt jeder irreduzible Kern μ auf $(S, \mathcal{S})$ eine Minorisierungsbedingung. Da wir dies aber nicht weiter benötigen, gehen wir darauf nicht näher ein. Wichtiger für unsere Zwecke sind folgende einfache Bemerkungen:

Bemerkung 1.3.5 Ein kleines Maß φ ist stets irreduzibel für μ. (Im Falle, daß φ auf $(\mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ definiert ist, bedeute dies, daß $\bar{\varphi}$ irreduzibel sei.)

Bemerkung 1.3.6 Erfüllt μ $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ kann ohne Einschränkung $\beta = 1$ angenommen werden, denn μ erfüllt offensichtlich auch $M(m_0, 1, \beta s, \varphi)$.

Bemerkung 1.3.7 Ist μ stochastisch und erfüllt μ $M(m_0, \beta, s, \varphi)$, so können $\beta = 1, 0 \leq s \leq 1$ und φ als Wahrscheinlichkeitsmaß angenommen werden.

Bemerkung 1.3.8 Erfüllt μ $M(m_0, \beta, s, \varphi)$, so erfüllt $\bar{\mu}$ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \bar{\varphi})$.
Der Kern μ_λ erfüllt $M(m_0, \beta, s, \varphi_\lambda)$ und entsprechend erfüllt $\bar{\mu}_\lambda$ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \bar{\varphi}_\lambda)$.

Wir werden in Satz 1.3.10 ein Kriterium für die Gültigkeit der Minorisierungsbedingung kennenlernen, welches wesentlich leichter zu überprüfen ist als ein direkter Nachweis der Minorisierungsbedingung.
Dazu zuerst folgende

Definition 1.3.9 μ heißt *quasi-$\varphi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-stetig* für ein Maß φ auf $(S, \mathcal{S})$, wenn für ψ-f.a. $x \in S$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\mu^n(x, \cdot)$ eine $\varphi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-stetige Komponente hat, d.h. es existieren ein $\varphi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-stetiges Maß $\mu_1^x \not\equiv 0$ und ein weiteres Maß μ_2^x, so daß $\mu^n(x, \cdot) = \mu_1^x(\cdot) + \mu_2^x(\cdot)$.

Satz 1.3.10 *Ist μ quasi-$\psi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-stetig, so erfüllt μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ mit m_0, β, s, φ geeignet.*

Beweis:
Vorab einige Bezeichnungen:
Wir bezeichnen die Dichten der $\psi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-stetigen Komponenten von $\mu^m(x, \cdot)$ mit $k^m(x, \cdot)$.
Nach Orey[15], Abschnitt 1.1 können wir stets Versionen von $k^m(x, \cdot)$ finden, die verbunden meßbar sind, in dem Sinne, daß k^m aufgefaßt als Funktion in (x, y) meßbar bzgl. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B})$ ist, was wir im folgenden voraussetzen.
Für $A \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$ und $B \in \mathcal{S} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$ sei

$$A \circ B := \{(a, b, c, d, e) \in S \times S \times \mathbb{R} \times S \times \mathbb{R}\ ;\ (a, b, c) \in A, (b, c, d, e) \in B\}.$$

Da $(S, \mathcal{S})$ als abzählbar erzeugt vorausgesetzt wurde, existiert eine Folge $(\mathcal{S}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ endlicher Partitionen von $\mathcal{S}$, wobei $\mathcal{S}^{i+1}$ als feiner als $\mathcal{S}^i$ angenommen werde, so daß $\mathcal{S} = \sigma(\cup_i \mathcal{S}^i)$.
Für $x \in S$ bezeichne $\mathcal{S}_x^i$ die eindeutig bestimmte Menge aus $\mathcal{S}^i$, in der x enthalten ist.

Entsprechend bezeichnen D^i endliche Partitionen von $\mathcal{B}$ mit zunehmender Feinheit und D^i_t für ein $t \in \mathbb{R}$ die Menge aus D^i, in der t enthalten ist.
Kommen wir nun zum Beweis des Satzes:
Da μ quasi-$\psi \otimes \lambda$-stetig, existieren $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ so daß

$$\int_{\mathbb{R}\times S\times S\times \mathbb{R}\times S} k^{m_2}(y,z,t-v)\; k^{m_1}(x,y,v) \\ \psi \otimes \lambda \otimes \psi \otimes \psi \otimes \lambda (dz \times dt \times dy \times dx \times dv) \quad > 0.$$

Demnach kann ein $\delta > 0$ gefunden werden, so daß mit

$$A := \{(x,y,v) \in S \times S \times \mathbb{R}\ ;\ k^{m_1}(x,y,v) \geq \delta\}$$

$$B := \{(y,v,z,t) \in S \times \mathbb{R} \times S \times \mathbb{R}\ ;\ k^{m_2}(y,z,t-v) \geq \delta\}$$

$A \circ B \quad \psi \otimes \psi \otimes \lambda \otimes \psi \otimes \lambda$ -positiv ist.
Nach dem Differentiationstheorem von Doob (Doob[6],S.612 ,Theorem 2.5) existiert eine $\psi \otimes \psi \otimes \lambda$-Nullmenge N_1 sowie eine $\psi \otimes \lambda \otimes \psi \otimes \lambda$-Nullmenge N_2, so daß

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\psi \otimes \psi \otimes \lambda \Big(A \cap (\mathcal{S}^i_x \times \mathcal{S}^i_y \times D^i_v)\Big)}{\psi \otimes \psi \otimes \lambda \Big(\mathcal{S}^i_x \times \mathcal{S}^i_y \times D^i_v\Big)} = 1 \quad \forall (x,y,v) \in A \setminus N_1$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\psi \otimes \lambda \otimes \psi \otimes \lambda \Big(B \cap (\mathcal{S}^i_y \times D^i_v \times \mathcal{S}^i_z \times D^i_t)\Big)}{\psi \otimes \lambda \otimes \psi \otimes \lambda \Big(\mathcal{S}^i_y \times D^i_v \times \mathcal{S}^i_z \times D^i_t\Big)} = 1 \quad \forall (y,v,z,t) \in B \setminus N_2$$

Sei nun ein $(a,b,k,c,l) \in A \circ B$ fest.
Wir wählen j so groß, daß

$$\psi \otimes \psi \otimes \lambda \Big(A \cap (\mathcal{S}^j_a \times \mathcal{S}^j_b \times D^j_k)\Big) \geq 3/4\ \psi \otimes \psi \otimes \lambda \Big(\mathcal{S}^j_a \times \mathcal{S}^j_b \times D^j_k\Big)$$

und

$$\psi \otimes \lambda \otimes \psi \otimes \lambda \Big(B \cap (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k \times \mathcal{S}^j_c \times D^j_l)\Big) \geq 3/4\ \psi \otimes \lambda \otimes \psi \otimes \\ \lambda \Big(\mathcal{S}^j_b \times D^j_k \times \mathcal{S}^j_c \times D^j_l\Big).$$

Wir definieren

$$C := \{x \in \mathcal{S}^j_a; \psi \otimes \lambda (A_1(x) \cap (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k)) \geq \frac{3}{4} \psi \otimes \lambda (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k)\}$$

$$D := \{(z,t) \in \mathcal{S}^j_c \times D^j_l); \psi \otimes \lambda (B_{3,4}(z,t) \cap (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k)) \geq \frac{3}{4} \psi \otimes \lambda (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k)\}$$

wobei $A_1(x) := \{(y,v) \in S \times \mathbb{R}\ ;\ (x,y,v) \in A\}$
und $B_{3,4}(z,t) = \{(y,v) \in S \times \mathbb{R}\ ;\ (y,v,z,t) \in B\}$.
Offensichtlich sind C und D ψ- bzw. $\psi \otimes \lambda$-positive Mengen und für $x \in C, (z,t) \in D$ gilt

$$\begin{aligned} &\psi \times \lambda (A_1(x) \cap B_{3,4}(z,t)) \\ &\geq \psi \times \lambda \Big(A_1(x) \cap (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k)\Big) - \psi \times \lambda \Big((B_{3,4}(z,t) \cap (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k)\Big)^c \\ &\geq \frac{1}{2}\ \psi \times \lambda (\mathcal{S}^j_b \times D^j_k) := \gamma > 0. \end{aligned}$$

Damit folgt für beliebige $x \in S, V \in \mathcal{S}, W \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}
&\mu^{m_1+m_2}(x, V \times W) \\
\geq\ & \mathbf{1}_C(x) \int_{S\times S\times\mathbb{R}\times S\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{V\times W}(z,t)\mathbf{1}_{A\circ B}(x,y,v,z,t)\mathbf{1}_D(z,t)\ k^{m_2}(y,z,t-v) \\
& \qquad\qquad k^{m_1}(x,y,v)\psi\otimes\boldsymbol{\lambda}\otimes\psi\otimes\boldsymbol{\lambda}(dy\times dv\times dz\times dt) \\
\geq\ & \mathbf{1}_C(x)\delta^2 \int_{S\times S\times\mathbb{R}\times S\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_1(x)\cap B_{3,4}(z,t)}(y,v)\mathbf{1}_{V\times W}(z,t)\mathbf{1}_D(z,t) \\
& \qquad\qquad \psi\otimes\boldsymbol{\lambda}\otimes\psi\otimes\boldsymbol{\lambda}(dy\times dv\times dz\times dt) \\
\geq\ & \mathbf{1}_C(x)\delta^2 \int_{S\times S\times\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(V\times W)\cap D}(z,t)\psi\otimes\boldsymbol{\lambda}(A_1(x)\cap B_{3,4}(z,t))\ \psi\otimes\boldsymbol{\lambda}(dz\times dt) \\
\geq\ & \mathbf{1}_C(x)\ \delta^2\ \gamma\ \psi\otimes\boldsymbol{\lambda}((V\times W)\cap D)\,.
\end{aligned}$$

Mit $s = \mathbf{1}_C, \quad \beta = \delta^2\gamma, \quad \varphi = \psi\times\boldsymbol{\lambda}(\cdot\cap D)$ gilt also die Behauptung.

□

Wir werden später s und φ aus der Minorisierungsbedingung mit der speziellen Eigenschaft benötigen, daß $\int_S s(x)\ \varphi(dx\times\cdot)$ quasi-$\boldsymbol{\lambda}$-stetig ist. Daß dies keine zusätzlichen Schwierigkeiten verursacht, zeigt folgendes

Lemma 1.3.11 *Ist μ quasi-$\psi\otimes\boldsymbol{\lambda}$-stetig, so erfüllt μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0,\beta,s,\varphi)$ derart, daß $\int_S s(x)\ \varphi(dx\times\cdot)$ nichttrivial und absolut stetig bzgl. $\boldsymbol{\lambda}$, also insbesondere quasi-$\boldsymbol{\lambda}$-stetig ist.*

Beweis:
Im Beweis von Lemma 1.3.10 ergibt sich, daß μ $M(m_0,\beta,s,\varphi)$ mit $s = \mathbf{1}_C$ für ein $C\in\mathcal{S}^+$ und mit $\varphi = \psi\times\boldsymbol{\lambda}(D\cap\cdot)$ für eine $\psi\otimes\boldsymbol{\lambda}$-positive Menge D erfüllt. Wir wählen $m\geq 1$ so groß,daß

$$\int_D \mu^m(x, C\times\mathbb{R}_+)\ \psi\otimes\boldsymbol{\lambda}(dx\times dt) \quad > 0 \tag{1.1}$$

(solch ein m muß aufgrund der Irreduzibilitätsannahme existieren, wie man sich leicht überlegen kann). Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mu^{m+m_0}(x, ds\times dt) &= \int_{S\times\mathbb{R}} \mu^m(y, ds\times d(t-u))\mu^{m_0}(x, dy\times du) \\
&\geq \int_D \mu^m(y, ds\times d(t-u))\beta\mathbf{1}_C(x)\ \psi\times\boldsymbol{\lambda}(dy\times du) \\
&= \beta\mathbf{1}_C(x)\varphi*\mu^m(ds\times dt),
\end{aligned}$$

d.h. μ erfüllt $M(m+m_0,\beta,\mathbf{1}_C,\varphi*\mu^m)$ und wegen (1.1) und der speziellen Gestalt von φ ist $\int_S s(x)\ \varphi*\mu^m(dx\times\cdot)$ nichttrivial und absolut stetig bzgl. $\boldsymbol{\lambda}$.

□

1.3.3 α-Rekurrenz und α-Transienz

Mit den in diesem Abschnitt eingeführten Begriffen des Konvergenzparameters, der α-Rekurrenz und α-Transienz wird die Wachstumsrate der gefalteten Kerne μ^n mit $n \to \infty$ beschrieben. Diese Rate wird dabei jedoch anders als in der R-Theorie exponentiell angegeben.

Definition 1.3.12 (Konvergenzparameter)
Erfüllt μ die Minorisierungsbedingung, so heißt $\alpha \in \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *Konvergenzparameter* von μ, wenn es eine abgeschlossene Menge F gibt, so daß

(i) $\int s(y)\, \bar{\nu}_\lambda(x, dy) < \infty$ auf F $\forall s \in \Sigma\ \forall \lambda > \alpha$

(ii) $\int f(y)\, \bar{\nu}_\lambda(x, dy) = \infty$ $\forall x \in S\ \forall f \in \mathcal{S}^+\ \forall \lambda < \alpha$

μ heißt α-*transient*, wenn $|\alpha| < \infty$ und für $\lambda = \alpha$ (i) gilt.
μ heißt α-*rekurrent*, wenn $|\alpha| < \infty$ und für $\lambda = \alpha$ (ii) gilt.

Die Begriffe "α-Rekurrenz", "α-Transienz" und "Konvergenzparameter" im Zusammenhang mit μ mögen im folgenden schon implizieren, daß μ die Minorisierungsbedingung erfüllt.

Nun ist keineswegs offensichtlich, daß der Konvergenzparameter überhaupt existieren muß. Es gilt jedoch sogar noch mehr:

Satz 1.3.13 *Erfüllt*
μ die Minorisierungsbedingung existiert der Konvergenzparameter α und im Falle seiner Endlichkeit ist μ entweder α-rekurrent oder
α-transient.

Beweis:
Sei $s \in \Sigma$ fest. μ erfülle also $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ für geeignete m_0, β, φ.

$\alpha := \inf\{\lambda\, ; \bar{\nu}_\lambda s(x) < \infty$ für ein $x \in S\}$

(mit $\inf\{\emptyset\} := \infty$ und $\inf(\mathbb{R}) := -\infty$)
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir $F_\lambda := \{x \in S\, ; \bar{\nu}_\lambda s(x) < \infty\}$.
Aufgrund der Ungleichungskette

$$\infty \cdot \bar{\mu}^n_\lambda(x, F^c_\lambda) \le \int_S \bar{\nu}_\lambda s(y)\, \bar{\mu}^n_\lambda(x, dy) \le \bar{\nu}_\lambda s(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in F_\lambda$$

folgt die Abgeschlossenheit von F_λ und damit auch die von $F := \cap_{\lambda > \alpha} F_\lambda$ als Schnitt abgeschlossener Mengen. (siehe Nummelin[12],Seite 14,Proposition 2.5)
Falls $\alpha = \infty$ setzen wir $F := S$.
Wir zeigen nun, daß α der Konvergenzparameter von μ ist:
Sei dazu $x \in F$, $\lambda > \alpha$ und $s' \in \Sigma$.
μ erfüllt also $M(m_0', \beta', s', \varphi')$.Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\bar{\varphi}'_\lambda \bar{\mu}^k_\lambda s > 0$ (möglich, da μ_λ irreduzibel). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \infty \quad > \quad & \int_S s(y)\, \bar{\nu}_\lambda(x, dy) \ge \int_S s(y)\, \bar{\mu}^k_\lambda(z, dy)\, \bar{\mu}^{m_0'}_\lambda(w, dz)\, \bar{\nu}_\lambda(x, dw) \\ \ge \quad & \beta' \int_S s(y)\, \bar{\mu}^k_\lambda(z, dy)\, \bar{\varphi}'_\lambda(dz) \quad \int_S s'(w)\, \bar{\nu}_\lambda(x, dw) \end{aligned}$$

und somit $\int_S s'(w)\, \bar{\nu}_\lambda(x, dw) < \infty$.

Sei nun $x \in S$, $\lambda < \alpha$ und $f \in S^+$.
Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, daß $\bar{\varphi}_\lambda \bar{\mu}_\lambda^k f > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_S f(y)\,\bar{\nu}_\lambda(x,dy) &\geq \int_S f(y)\,\bar{\mu}_\lambda^k(z,dy)\,\bar{\mu}_\lambda^{m_0}(w,dz)\,\bar{\nu}_\lambda(x,dw)\\ &\geq \beta\int_S f(y)\,\bar{\mu}_\lambda^k(z,dy)\,\bar{\varphi}_\lambda(dz)\quad\int_S s(w)\,\bar{\nu}_\lambda(x,dw)\\ &= \infty\end{aligned}$$

und somit $\int_S f(y)\,\bar{\nu}_\lambda(x,dy) = \infty$.
Ist α endlich und existiert kein $x \in S$ mit $\bar{\nu}_\alpha s(x) < \infty$, läßt sich analog die α-Rekurrenz nachweisen. Mit $F \cap F_\alpha$ als abgeschlossene Menge folgt ebenfalls analog die α-Transienz.

□

Daß sich die α-Rekurrenz von μ auf alle μ^m überträgt zeigt folgendes

Lemma 1.3.14 *Erfüllt μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0,\beta,s,\varphi)$ und hat μ den Konvergenzparameter α, so hat auch μ^m Konvergenzparameter α für jedes $m \in \mathbb{N}$.*
μ ist genau dann α-rekurrent, wenn μ^m α-rekurrent ist für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Daß mit μ auch μ^m die Minorisierungsbedingung erfüllt und s auch für μ^m als kleine Funktion dient, ist leicht nachzuweisen.
Es bezeichne $\alpha^{(m)}$ den Konvergenzparameter von μ^m und $\nu^{(m)} := \sum_{n\geq 0}\mu^{nm}$ den zu μ^m gehörigen Erneuerungskern. F sei die abgeschlossene Menge aus der Definition des Konvergenzparameters α.
Es sei $\lambda > \alpha$.
Da s eine kleine Funktion für μ^m ist und daher

$$\int_S s(x)\bar{\nu}^{(m)}(y,dx) \leq \int_S s(x)\bar{\nu}(y,dx) < \infty \qquad \forall y \in F,$$

folgt $\alpha^{(m)} \leq \lambda$, und da $\lambda > \alpha$ beliebig gewählt war, somit $\alpha^{(m)} \leq \alpha$.
Die Ungleichung $\alpha \leq \alpha^{(m)}$ ist schwieriger nachzuweisen:
Sei dazu $\lambda > \alpha^{(m)}$.
Nach Nummelin[12],Cyclicity,S.20ff existiert ein $d \in \mathbb{N}$, so daß $\bar{\mu}_\lambda$ einen d-Zyklus durchläuft, d.h. es gibt nichtleere Mengen $S_0, S_1, \ldots, S_{d-1}$, so daß für $0 \leq i < d$

$$\bar{\mu}_\lambda(x, S_j^c) = 0 \qquad \forall x \in S_i \qquad f\ddot{u}r\ j = (i+1) mod\ d.$$

Weiter existiert ein $i \in \{0,\ldots,d-1\}$ und eine ψ-Nullmenge N mit

$$\{s > 0\} \subset S_i \cup N.$$

Ohne Einschränkung sei dieser Index 0.

Wir definieren

$$I := \{n \in \mathbb{N} \; ; \; \bar{\mu}_\lambda \text{ erfüllt } M(n, \beta_n, s, \bar{\varphi}_\lambda) \text{ für ein } \beta_n > 0\}$$

$$d := ggT(I) \qquad c_m := ggT(d, m) \qquad d_m := \frac{m}{c_m} d$$

$$S^{(m)} := S_0 \cup S_{c_m} \cup S_{2c_m} \cup \ldots \cup S_{d-c_m}$$

Folgende Eigenschaften sind leicht nachzurechnen:
Da I abgeschlossen ist bzgl. der Addition, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\{dn \; ; \; n \geq n_0\} \subset I$ $(*)$. Für $x \in S_0$ ist $\bar{\mu}_\lambda^{nm}(x, (S^{(m)})^c) = 0$.
Für $x \in S_0$ und $n \notin \{kd \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$ gilt $\bar{\mu}_\lambda^n(x, \{s > 0\}) \leq \bar{\mu}_\lambda^n(x, S_0) = 0$ $(**)$.
Definieren wir nun noch

$$\gamma := \int_S s(x) \, \bar{\varphi}_\lambda(dx) > 0,$$

gibt es wegen $(*)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_S s(x) \, \bar{\mu}_\lambda^{n_0 d_m - jd}(y, dx) \leq s(y)\gamma \qquad \forall j = 0 \cdots \frac{m}{c_m} - 1.$$

Ist nun $x \in S_0 \cap F$, gilt

$$\begin{aligned}
\gamma \sum_{n \geq 0} \bar{\mu}_\lambda^n \; s\,(x) &\overset{(**)}{=} \gamma \sum_{n \geq 0} \bar{\mu}_\lambda^{nd} \; s\,(x) \\
&= \gamma \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{m/c_m - 1} \bar{\mu}_\lambda^{nd_m + jd} \; s\,(x) \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{n \geq 0} \sum_{j=0}^{m/c_m - 1} \bar{\mu}_\lambda^{nd_m + jd} \; \bar{\mu}_\lambda^{n_0 d_m - jd} \; s\,(x) \\
&= \frac{m}{c_m} \sum_{n \geq 0} \bar{\mu}_\lambda^{(n+n_0)d_m} \; s(x) \\
&\leq \frac{m}{c_m} \sum_{n \geq 0} \bar{\mu}_\lambda^{nm} \; s(x) < \infty,
\end{aligned}$$

daher also $\alpha \leq \lambda$, und da $\lambda > \alpha^{(m)}$ beliebig gewählt war, folgt $\alpha \leq \alpha^{(m)}$.
Die Äquivalenz der α-Rekurrenzen von μ und μ^m ergibt sich analog.

□

Für den Abschnitt über invariante Maße und Funktionen benötigen wir noch folgendes

Lemma 1.3.15 *μ erfülle die Minorisierungsbedingung $M(1, 1, s, \varphi)$ und habe endlichen Konvergenzparameter α.*
Mit

$$\begin{array}{ll}
u_0^\lambda := 1 & u_n^\lambda := \bar{\varphi}_\lambda \bar{\mu}_\lambda^{n-1} s, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\
b_0^\lambda := 0 & b_n^\lambda := \bar{\varphi}_\lambda(\bar{\mu}_\lambda - s \otimes \bar{\varphi}_\lambda)^{n-1} s, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\
\hat{b}(\lambda) := \sum_{n \geq 1} b_n^\lambda & \hat{u}(\lambda) := \sum_{n \geq 0} u_n^\lambda = \bar{\varphi}_\lambda \bar{\nu}_\lambda s + 1
\end{array}$$

gilt

$$\alpha = \inf\{\lambda\,;\hat{u}(\lambda) < \infty\} = \inf\{\lambda\,;\hat{b}(\lambda) < 1\}$$

$$\mu \textit{ ist } \alpha\textit{-rekurrent } \iff \hat{u}(\alpha) = \infty \iff \hat{b}(\alpha) = 1$$

Beweis:
Eine Induktion liefert

$$\begin{aligned}\bar{\mu}^{\lambda}_{n-1} &= (\bar{\mu}_\lambda - s\otimes\bar{\varphi}_\lambda + s\otimes\bar{\varphi}_\lambda)^{n-1}\\ &= (\bar{\mu}_\lambda - s\otimes\bar{\varphi}_\lambda)^{n-1} + \sum_{m=1}^{n-1}(\bar{\mu}_\lambda - s\otimes\bar{\varphi}_\lambda)^{m-1}(s\otimes\bar{\varphi}_\lambda)\bar{\mu}_\lambda^{n-m-1}\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}u^\lambda_n &= \bar{\varphi}_\lambda\bar{\mu}_\lambda^{n-1}s\\ &= \bar{\varphi}_\lambda(\bar{\mu}_\lambda - s\otimes\bar{\varphi}_\lambda)^{n-1}s + \sum_{m=1}^{n-1}\bar{\varphi}_\lambda(\bar{\mu}_\lambda - s\otimes\bar{\varphi}_\lambda)^{m-1}(s\otimes\bar{\varphi}_\lambda)\bar{\mu}_\lambda^{n-m-1}s\\ &= \delta_0(\{n\}) + \sum_{m=0}^{n} b^\lambda_m u^\lambda_{n-m},\end{aligned}$$

also

$$\hat{u}(\lambda) = \sum_{n\geq 0} u^\lambda_n = 1 + \sum_{n\geq 1}\sum_{m=0}^{n} b^\lambda_m u^\lambda_{n-m} = 1 + \hat{b}(\lambda)\hat{u}(\lambda). \tag{1.2}$$

Sei F die abgeschlossene Menge aus Definition 1.3.12.
Wir wählen zuerst ein $\lambda > \alpha$ und $x \in \{s > 0\}\cap F$ ($\{s > 0\}\cap F \neq \emptyset$, da F mit der Abgeschlossenheit schon voll ist).

$$\begin{aligned}&\infty > \int_S s(y)\bar{\nu}_\lambda(x,dy) \geq \int_S\int_S s(y)\bar{\nu}_\lambda(z,dy)\bar{\mu}_\lambda^{m_0}(x,dz)\\ &\quad\geq \beta s(x)\int_S\int_S s(y)\bar{\nu}_\lambda(z,dy)\bar{\varphi}_\lambda(dz)\\ &\Longrightarrow \hat{u}(\lambda) < \infty\end{aligned}$$

Sei nun $\lambda < \alpha$.

$$\infty \equiv \int_S s(y)\bar{\nu}_\lambda(x,dy) \Longrightarrow \hat{u}(\lambda) = \infty$$

Damit folgt die Behauptung $\alpha = \inf\{\lambda\,;\hat{u}(\lambda) < \infty\}$.
Analog ist μ α-rekurrent $\iff$ $\hat{u}(\alpha) = \infty$ zu zeigen und wegen (1.2) und monotoner Konvergenz ($\lambda_1 > \lambda_2 \Leftrightarrow (\varphi_{\lambda_1} \leq \varphi_{\lambda_2}$ und $\mu_{\lambda_1} - s\otimes\varphi_{\lambda_1} \leq \mu_{\lambda_2} - s\otimes\varphi_{\lambda_2}$) folgen die entsprechenden Behauptungen für $\hat{b}$

□

1.3.4 Rekurrenz

Wir werden nun neben der α-Rekurrenz einen weiteren Rekurrenzbegriff einführen, der die Eigenschaft einer Markov-Kette beschreibt, gewisse Zustandsmengen fast sicher immer wieder aufzusuchen. Insbesondere werden wir den Zusammenhang zwischen α-Rekurrenz und Rekurrenz untersuchen.
Betrachten wir dazu den speziellen Fall, daß μ ein stochastischer Kern von $(S, \mathcal{S})$ nach $(S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ ist.

Definition 1.3.16 (Rekurrenz) Ist μ stochastisch und $(\Omega, \mathcal{A}, (M_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{S})})$ ein Standardmodell zu $\bar{\mu}$ (siehe A.1), so heißt μ (oder auch $(M_n)_{n\geq 0}$) *rekurrent*, wenn

$$P_x(M_n \in B \ u.o.) > 0 \ \ \forall x \in S \ \forall B \in \mathcal{S}^+$$

$$P_x(M_n \in B \ u.o.) = 1 \text{ für } \psi\text{-f.a. } x \in S \ \forall B \in \mathcal{S}^+$$

Den Zusammenhang zwischen α-Rekurrenz und Rekurrenz liefert nun

Satz 1.3.17 *Hat μ endlichen Konvergenzparameter α und ist μ_α stochastisch, so gilt*

$$\mu \textit{ ist } \alpha\textit{-rekurrent} \Longleftrightarrow \mu_\alpha \textit{ ist rekurrent}$$

Beweis:
$'' \Longrightarrow ''$
Sei $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ die Markov-Kette aus dem Standardmodell zu $\bar{\mu}_\alpha$ Für ein $B \in \mathcal{S}^+$ definieren wir $h_B^\infty(x) = P_x(M_n \in B \quad u.o.)$.
Wir zeigen:

$$h_B^\infty(x) = 1 \text{ für } \psi\text{-f.a. } x \in B. \tag{1.3}$$

Die leicht nachweisbare, aber auch anschaulich offensichtliche Abgeschlossenheit der Mengen $\{h_B^\infty = 1\}$ und $\{h_B^\infty = 0\}$ liefert dann das Gewünschte, denn da wegen (1.3) $\{h_B^\infty = 1\} \neq \emptyset$, muß aufgrund der Irreduzibilität $\psi(\{h_B^\infty = 1\}^c) = 0$ und $\{h_B^\infty > 0\} = S$ gelten.
Bleibt also nur noch die Behauptung (1.3) zu zeigen:
Wir nehmen an, diese sei nicht erfüllt.
Dann ist $(1 - h_B^\infty)1_B \in \mathcal{S}^+$ und daher

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} P_\cdot(M_n \in B, M_{n+k} \notin B \ \forall k \geq 1)1_B(\cdot) &= P_\cdot(M_n \in B \quad e.o.)1_B(\cdot) \\ &= (1 - h_B^\infty)(\cdot)1_B(\cdot) \ \in \mathcal{S}^+,\end{aligned}$$

also

$$g(\cdot) := \sum_{n\geq 0} 2^{-(n+1)} P_\cdot(M_n \in B, M_{n+k} \notin B \ \forall k \geq 1)1_B(\cdot) \ \in \mathcal{S}^+.$$

Für $y \in S$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}
&\int_S g(x)\bar{\nu}_\alpha(y,dx) \\
&= \sum_{m\geq 0} 2^{-(m+1)} \sum_{n\geq 0} \int_B P_x(M_m \in B, M_{m+k} \notin B \quad \forall k \geq 1)\ \bar{\mu}_\alpha^n(y,dx) \\
&\leq \sum_{m\geq 0} 2^{-(m+1)} \sum_{n\geq 0} P_y(M_{m+n} \in B, M_{m+n+k} \notin B \quad \forall k \geq 1) \\
&= \sum_{m\geq 0} 2^{-(m+1)} P_y(\sum_{n\geq 0} \{M_{m+n} \in B, M_{m+n+k} \notin B \quad \forall k \geq 1\}) \\
&\leq 1 < \infty,
\end{aligned}$$

was im Widerspruch zur geforderten α-Rekurrenz steht.

$'' \Longleftarrow ''$
Sei C eine kleine Menge.
Da $C \in \mathcal{S}^+$, gilt wegen der Rekurrenz $P_x(M_n \in C\ u.o.) > 0\ \forall x \in S$

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{1}_C(y)\bar{\nu}_\alpha(x,dy) &= \sum_{n\geq 0} P_x(M_n \in C) \\
&= E_x\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_C(M_n)\right) = \infty,
\end{aligned}$$

μ ist also α-rekurrent.

□

Wegen der großen Bedeutung für uns im nachfolgenden Kapitel halten wir noch einmal fest:

Korollar 1.3.18 *Für einen stochastischen, irreduziblen Kern mit Konvergenzparameter 0, sind Rekurrenz und 0-Rekurrenz äquivalent.*

1.3.5 Invariante Maße und Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir die Existenz und (im wesentlichen) Eindeutigkeit von α-invarianten Maßen und Funktionen für α-rekurrente Kerne nachweisen.

Definition 1.3.19 (α-invariante Maße) $\pi \in \mathcal{M}_+$ heißt *α-invariant* für μ, wenn

$$\pi(A) < \infty \text{ für ein } A \in \mathcal{S}^+ \text{ und } \pi = \pi\bar{\mu}_\alpha.$$

Ein 0-invariantes Maß nennen wir auch einfach *invariant*.

Ist μ Übergangskern und π endlich, so ist π also gerade die stationäre Verteilung der von μ induzierten Markov-Kette.

Bemerkung 1.3.20 Ist μ irreduzibel und besitzt μ ein α-invariantes Maß π, so ist dieses σ-endlich.

Beweis:
Nach Definition existiert ein $B \in \mathcal{S}^+$ mit $\pi(B) < \infty$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Zerlegung von S derart, daß $\mu_\alpha^n(x, B \times \mathbb{R}) > 0 \;\forall\, x \in A_n$. Da

$$\infty > \pi(B) \geq \int_{A_n} \mu_\alpha^n(x, B \times \mathbb{R})\, \pi(dx),$$

gibt es eine Folge $A_k^n \uparrow A_n$ mit $\pi(A_k^n) < \infty \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$.
Mit $B_n := A_n^1 \cup A_n^2 \cup \ldots \cup A_n^n$ gilt $B_n \uparrow S$ und $\pi(B_n) < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

□

Definition 1.3.21 (α-invariante Funktionen) Eine meßbare Funktion $h : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ heißt *α-invariant* für μ, wenn

$$h \in \mathcal{S}^+ \;,\; h \not\equiv \infty \text{ und } h = \bar{\mu}_\alpha h.$$

h heißt wieder nur *invariant*, wenn h 0-invariant ist.

Theorem 1.3.22 *Erfüllt μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ und ist μ α-rekurrent, so existiert ein α-invariantes Maß π für μ der Form*

$$\pi = \sum_{n\geq 0} \bar{\varphi}_\alpha(\bar{\mu}_\alpha^{m_0} - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)^n.$$

π ist ein maximales irreduzibles Maß für μ, $\pi(s) = 1$ und π ist bis auf Skalarmultiplikation eindeutiges α-invariantes Maß .

Beweis:
Ohne Einschränkung kann $\beta = 1$ angenommen werden.
1. Fall : $m_0 = 1$
Nach Lemma 1.3.15 ist mit den dortigen Bezeichnungen

$$\pi(s) = \sum_{n\geq 0} \bar{\varphi}_\alpha(\bar{\mu}_\alpha - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)^n s = \hat{b}(\alpha) = 1.$$

Damit ist insbesondere $\pi \in \mathcal{M}_+$ und $\pi(s > 0) < \infty$.
π ist in der Tat α-invariant für μ, denn

$$\begin{aligned}
\pi(A) \;&= \int_S \sum_{n\geq 0} (\bar{\mu}_\alpha - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)^n(x, A)\; \bar{\varphi}_\alpha(dx) \\
&= \int_S \int_S (\bar{\mu}_\alpha - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)(z, A) \sum_{n\geq 0} (\bar{\mu}_\alpha - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)^n(x, dz)\bar{\varphi}_\alpha(dx) + \bar{\varphi}_\alpha(A) \\
&= \pi\bar{\mu}_\alpha(A) - \bar{\varphi}_\alpha(A)\pi(s) + \bar{\varphi}_\alpha(A) = \pi\bar{\mu}_\alpha(A).
\end{aligned}$$

Die übrigen Behauptungen sowie die Verallgemeinerung auf den Fall $m_0 > 1$ sind Nummelin[12], Theorem 5.2 zu entnehmen. Die einzige Abweichung von dortiger Beweisführung liegt in dem Nachweis, daß mit μ auch μ^{m_0} α-rekurrent ist, was wir in Lemma 1.3.14 jedoch schon nachgewiesen haben.

□

Theorem 1.3.23 *Erfüllt μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ und ist μ α-rekurrent, so besitzt μ eine α-invariante Funktion h der Form*

$$h = \sum_{n \geq 0} (\bar{\mu}_\alpha^{m_0} - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)^n s,$$

für die weiter gilt
(i) $\{h < \infty\}$ ist abgeschlossen, also insbesondere voll.
(ii) $h > 0$ überall
(iii) $\bar{\varphi}_\alpha(h) = 1$ und $0 < \bar{\vartheta}_\alpha(h) < \infty$ für jedes kleine Maß ϑ
(iv)Ist $\tilde{h}$ eine weitere α-invariante Funktion für mit $\bar{\varphi}_\alpha(\tilde{h}) = 1$, so ist $\tilde{h} \geq h$ überall und $\tilde{h} = h$ ψ-f.ü. (ψ maximales irreduzibles Maß)

Beweis:
Es sei wieder ohne Einschränkung $\beta = 1$ angenommen.
1. Fall : $m_0 = 1$
Nach Lemma 1.3.15 ist mit den dortigen Bezeichnungen

$$1 = \hat{b}(\alpha) = \sum_{n \geq 0} \bar{\varphi}_\alpha (\bar{\mu}_\alpha - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)^n s = \bar{\varphi}_\alpha(h).$$

Damit gilt also insbesondere $h \in \mathcal{S}^+$ und $h \not\equiv \infty$.
Die α-Invarianz ergibt sich durch

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_S \int_S s(y) \sum_{n \geq 0} (\bar{\mu}_\alpha - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)^n (z, dy) (\bar{\mu}_\alpha - s \otimes \bar{\varphi}_\alpha)(x, dz) + s(x) \\
&= \int_S h(y) \bar{\mu}_\alpha(x, dy) - \int_S h(y) s(x) \bar{\varphi}_\alpha(dy) + s(x) \\
&= \int_S h(y) \bar{\mu}_\alpha(x, dy).
\end{aligned}$$

Die übrigen Behauptungen sowie die Verallgemeinerung auf den Fall $m_0 > 1$ sind wieder Nummelin[12], Theorem 5.1 in Verbindung mit Lemma 1.3.14 zu entnehmen.

□

1.4 Ein Markov-Erneuerungstheorem

Gegeben ein irreduzibler, stochastischer Kern $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to [0,1]$ mit Standardmodell $(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(\mathcal{S}\otimes\mathcal{B})})$.
ν bezeichne den Markov-Erneuerungskern $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^n$ und für $\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ ist

$$\lambda * \nu(\cdot) = \sum_{n\geq 0} P_\lambda((M_n, S_n) \in \cdot)$$

das Erneuerungsmaß bei Startverteilung λ.
ψ bezeichne wieder ein zu μ gehöriges maximales irreduzibles Maß und π (im Falle der Existenz) ein invariantes Maß für μ.
Wir wollen in diesem Kapitel für meßbare Funktionen
$f : (S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ das Verhalten von
$\nu * f(x,t) = \int_{S\times\mathbb{R}} f(y, t-u)\, \nu(x, dy \times du)$ für gegen unendlich strebendes t untersuchen. Um eine einheitliche Aussage über das Langzeitverhalten solcher Faltungen treffen zu können, bedarf es allerdings offensichtlich noch einiger Zusatzvoraussetzungen an f und μ.
Dazu vorerst folgende Definition:

Definition 1.4.1 μ heißt *positiv-α-rekurrent*, wenn μ α-rekurrent ist und

$$0 < \int_S \int_{\mathbb{R}} t\, \mu_\alpha(x, S \times dt)\, \pi(dx) \quad < \infty$$

(Da unter den gegebenen Voraussetzungen das invariante Maß eindeutig bis auf Skalarmultiplikation ist die Definition unabhängig von der speziellen Wahl von π).
Statt positiv-0-rekurrent schreiben wir auch nur kurz *positiv-rekurrent* und wir benutzen im folgenden die Abkürzung

$$\pi(m) := \int_S \int_{\mathbb{R}} t\, \mu_\alpha(x, S \times dt)\, \pi(dx).$$

1.4.1 Ein Markov-Erneuerungstheorem für den Atom-Fall

Nun werden wir ein Markov-Erneuerungstheorem für einen Spezialfall, den unten erläuterten sogenannten Atom-Fall, beweisen.
Das Besondere an diesem Fall ist die Möglichkeit, den MRW in unabhängige, identisch verteilte Zyklen zu zerlegen, was wir in nachfolgendem Satz zeigen werden. Diese zyklische Zerlegung geht grundlegend in den Beweis des Markov-Erneuerungstheorems im Atom-Fall ein, da mit ihrer Hilfe das Erneuerungstheorem für Random-Walks (siehe A.2) zum Beweis herangezogen werden kann.
Durch Zurückführung auf diesen Spezialfall werden wir dann eine allgemeinere Form des Markov-Erneuerungstheorems beweisen können.

Definition 1.4.2 Eine Menge $B \in \mathcal{S}^+$ heißt *Atom* für einen irreduziblen Kern $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}_+$, wenn

$$\mu(x, \cdot) = \mu(y, \cdot) \;\; \forall x, y \in B.$$

Ist μ stochastisch, so sei im zu μ gehörigen Standardmodell $P_B := P_x$ mit $x \in B$ beliebig.

Satz und Definition 1.4.3 *Sei μ ein stochastischer, irreduzibler, rekurrenter Kern, der ein Atom besitzt. $(M_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne den MRW aus dem zugehörigen Standardmodell.*
Die sukzessiven Eintrittszeiten in B seien definiert durch

$$\tau_B^0 \equiv 0$$

$$\tau_B^{n+1} = \inf\{n > \tau_B^n \; ; \; M_n \in B\} \qquad n \geq 1,$$

wobei $\inf(\emptyset) := \infty$. *Statt τ_B^1 schreiben wir auch einfach nur τ_B.*
Die Zuwächse dieser Folge werden mit σ_B^n bezeichnet, also

$$\sigma_B^n := \begin{cases} \tau_B^n - \tau_B^{n-1} & : \quad \tau_B^{n-1} < \infty \\ \infty & : \quad \tau_B^n = \infty \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Δ_1, Δ_2) bezeichne irgendeinen Friedhof der Kette und wir definieren $(M_\infty, X_\infty) := (\Delta_1, \Delta_2)$.

Die Zyklen des MRW seien nun gegeben durch

$$Z_n := \mathbf{1}_{\{\tau_B^{n-1}<\infty\}} \left(\sigma_B^n, (M_k, S_k - S_{\tau_B^{n-1}})_{\tau_B^{n-1}<k\leq\tau_B^n}\right) \qquad n \geq 1.$$

Dann sind für ψ-f.a.$x \in S$ die Zyklen $(Z_n)_{n\geq 1}$ unter P_x unabhängig und für $n \geq 2$ identisch verteilt mit $P_x^{Z_n} = P_B^{Z_n}$.

Beweis:
Der Beweis ist einfach unter Ausnutzung der starken Markov-Eigenschaft und der Atomeigenschaft von B. Zu bemerken ist lediglich, daß aufgrund der geforderten Rekurrenz für ψ-f.a. $x \in S$ $P_x(\tau_B < \infty) = 1$ sowie $P_B(\tau_B < \infty) = 1$ gilt.

□

Bemerkung 1.4.4 Ist μ stochastischer, irreduzibler, rekurrenter Kern mit Standardmodell $(\Omega, \mathcal{A}, (M_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathcal{W}(\mathcal{S}\otimes\mathcal{B})})$, der ein Atom besitzt, läßt sich das invariante Maß π direkt angeben:

$$\pi(A) = E_B(\sum_{k=1}^{\tau_B} \mathbf{1}_A(M_k)) \tag{1.4}$$

Für eine meßbare Funktion $f : (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ gilt

$$\int_S f(x)\, \pi(dx) = E_B(\sum_{k=1}^{\tau_B} f(M_k)). \tag{1.5}$$

Beweis:
Wegen der Rekurrenz von μ und da $B \in \mathcal{S}^+$ ist $\tau_B < \infty$ P_B-f.s. Wir können daher in nachfolgenden Rechnungen ohne Einschränkung $\tau_B < \infty$ annehmen.
(1.5) ist leicht nachzuweisen.

Da $0 < \pi(B) < \infty$ und wegen

$$
\begin{aligned}
\int_S \mu(y, A \times \mathbb{R})\, \pi(dy) &= E_B(\sum_{k=1}^{\tau_B} \mu(M_k, A \times \mathbb{R})) \\
&= E_B\left(\sum_{k=1}^{\tau_B} \mathbf{1}_A(M_{k+1})\right) \\
&= E_B\left(\sum_{k=2}^{\tau_B} \mathbf{1}_A(M_k)\right) + E_B\left(\mathbf{1}_A(M_{\tau_B+1})\right) \\
&= E_B\left(\sum_{k=2}^{\tau_B} \mathbf{1}_A(M_k)\right) + E_B\left(\mathbf{1}_A(M_1)\right) \\
&= E_B\left(\sum_{k=1}^{\tau_B} \mathbf{1}_A(M_k)\right) = \pi(A),
\end{aligned}
$$

ist π in der Tat invariant.

□

Satz 1.4.5 (Markov-Erneuerungstheorem im Atom-Fall) *Es sei* $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to [0,1]$ *ein stochastischer, irreduzibler, positiv-rekurrenter Kern, der ein Atom B besitze.*
π bezeichne das invariante Maß aus Bemerkung 1.4.4.
ϕ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S, \mathcal{S})$ mit $P_\phi(\tau_B < \infty) = 1$.
$f : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ sei eine meßbare Funktion, die mit $\bar{f}(x) := sup_{t \in \mathbb{R}} f(x,t)$

i) $\int_S \bar{f}(x)\, \pi(dx) < \infty$

ii) $\int_{S \times \mathbb{R}} f(x,t)\, \pi \otimes \lambda(dx \times dt) < \infty$

iii) $\lim_{|t| \to \infty} f(x,t) = 0 \ \ \forall x \in S$

erfülle. Gilt neben den schon vorausgesetzten Bedingungen an f und μ auch noch

a) $F_B = P_B(S_{\tau_B} \in \cdot)$ *ist quasi-λ-stetig*

b) $E_\phi(\sum_{n=0}^{\tau_B} \bar{f}(M_n)) < \infty$

so folgt

$$
\lim_{t \to \infty} \sup_{|g| \le f} |\phi * \nu * g(t) - \frac{1}{\pi(m)} \int_{\mathbb{R}} \int_S g(x,u) \pi(dx) \lambda(du)| = 0
$$
$$
\lim_{t \to -\infty} \sup_{|g| \le f} |\phi * \nu * g(t)| = 0
$$

Beweis :

In nachfolgendem Lemma werden wir $\pi(m) = E_B(S_{\tau_B})$ nachweisen.

$$\begin{aligned}
\phi * \nu * g(t) &= \int_S \int_{S\times\mathbb{R}} g(x, t-u)\ \nu(s, dx \times du)\ \phi(ds) \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_S \int_{S\times\mathbb{R}} g(x, t-u)\ P_s(M_n \in dx, S_n \in du)\ \phi(ds) \\
&= \sum_{n\geq 0} E_\phi(g(M_n, t - S_n)) \\
&= E_\phi(\sum_{k=0}^{\tau_B^1} g(M_k, t-S_k)) + \sum_{n\geq 1} E_\phi(\sum_{k=\tau_B^n+1}^{\tau_B^{n+1}} g(M_k, t-S_k)) \\
&= C(t) + \sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}} E_\phi(\sum_{k=\tau_B^n+1}^{\tau_B^{n+1}} g(M_k, t-(S_k - S_{\tau_B^n}) - w | S_{\tau_B^n} = w)) \\
&\qquad\qquad P_\phi^{S_{\tau_B^n}}(dw) \\
&= C(t) + \sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}} E_B\left(\sum_{k=1}^{\tau_B} g(M_k, t-w-S_k)\right)\ P_\phi^{S_{\tau_B^n}}(dw) \\
&= C(t) + \int_{\mathbb{R}} h(t-w)\ \sum_{n\geq 1} P_\phi^{S_{\tau_B^n}}(dw)
\end{aligned}$$

mit $C(t) := E_\phi(\sum_{k=0}^{\tau_B^1} g(M_k, t-S_k))$ und $h(t) := E_B(\sum_{k=1}^{\tau_B} g(M_k, t-S_k))$.
Es gilt

- $\sup_{t\in\mathbb{R}} h(t) \leq \int_S \bar{f}(x)\pi(dx) < \infty$ nach Voraussetzung
- $\lim_{|t|\to\infty} h(t) = 0$ wegen majorisierter Konvergenz (mit $\int_S \bar{f}(x)\ \pi(dx)$ als Majorante)
- $P_B(S_{\tau_B} \in \cdot)$ ist nach Voraussetzung quasi-λ-stetig
- $0 < E_B(S_{\tau_B}) = \pi(m) < \infty$ nach Voraussetzung (positiv rekurrent)
- $\lim_{|t|\to\infty} C(t) = 0$ wegen majorisierter Konvergenz (mit $E_\phi(\sum_{n=0}^{\tau_B} \bar{f}(M_n))$ als Majorante)

Insbesondere sind für den RW $T_n := \sum_{k=1}^{n} (S_{\tau_B^k} - S_{\tau_B^{k-1}}), n \geq 1$, die Voraussetzungen zur Anwendung der Stoneschen Zerlegung (siehe Alsmeyer[2], S.73) erfüllt, d.h. es existiert eine Darstellung der Form $\sum_{n\geq 1} P_\phi^{S_{\tau_B^n}} = V_1 + V_2$, wobei V_1, V_2 Maße auf $\mathbb{R}$, V_2 endlich und V_1 eine beschränkte, stetige λ-Dichte v_1 mit $\lim_{t\to\infty} v_1(t) = \frac{1}{E_B(S_{\tau_B})} = \frac{1}{\pi(m)}$ und $\lim_{t\to-\infty} v_1(t) = 0$ besitzt.

Dann folgt mit dem bisher Gezeigten

$$
\begin{aligned}
&|\phi * \nu * g(t) - \frac{1}{\pi(m)} \int_{S\times\mathbb{R}} g(x,u)\ \pi \otimes \lambda(dx \times du)| \\
&= |C(t) + \int_{\mathbb{R}} h(t-u) \sum_{n\geq 1} P_{\phi}^{S_{\tau_B^n}}(du) - \frac{1}{\pi(m)} \int_{S\times\mathbb{R}} g(x,u)\ \pi \otimes \lambda(dx \times du)| \\
&= |C(t) + \int_{\mathbb{R}} h(t-u)\ V_2(du) + \int_{\mathbb{R}} h(t-u) v_1(u)\ \lambda(du) \\
&\quad - \frac{1}{\pi(m)} \int_{S\times\mathbb{R}} g(x,u)\ \pi \otimes \lambda(dx \times du)| \\
&\leq |C(t)| + \int_{R} |h(t-u)|\ V_2(du) \\
&\quad + E_B \left(\sum_{k=1}^{\tau_B} \int_{\mathbb{R}} |g(M_k, t-u-S_k)| |v_1(u) - \frac{1}{\pi(m)}|\ \lambda(du) \right) \\
&\leq |C(t)| + \int_{R} |h(t-u)|\ V_2(du) \\
&\quad + E_B \left(\sum_{k=1}^{\tau_B} \int_{\mathbb{R}} f(M_k, u) |v_1(t-S_k-u) - \frac{1}{\pi(m)}|\ \lambda(du) \right)
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Summanden verschwinden für t gegen unendlich gleichmäßig in g wegen majorisierter Konvergenz. Wegen $\int_{S\times\mathbb{R}} f(x,t)\ \pi \otimes \lambda(dx \times dt) < \infty$ und der Beschränktheit von v_1 läßt sich aber auch auf den letzten Summanden majorisierte Konvergenz anwenden und wegen $v_1(t) \to 1/\pi(m)$ verschwindet auch dieser asymptotisch und trivialerweise gleichmäßig in g.
In Hinblick auf nachfolgendes Lemma ist der erste Teil des Theorems damit nachgewiesen.
$\lim_{t\to-\infty} \sup_{|g|\leq f} |\phi * \nu * g(t)| = 0$ weist man analog nach.

□

Das nachfolgende Lemma schließt nun den Beweis ab:

Lemma 1.4.6 *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 1.4.5 gilt*

$$E_B(S_{\tau_B}) = \pi(m)$$

Beweis:
Eine Induktion liefert unter Ausnutzung der Markov-Eigenschaft und der Tatsache, daß M_{n+1} nicht von S_n abhängt für $x \in S$:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} t\ P_x(M_k \in A^c,\ 1 \leq k \leq n,\ M_{n+1} \in A, S_{n+1} \in dt) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_S \int_{S\times\mathbb{R}} P_z(M_i \in A^c,\ 0 \leq i < n-k,\ M_{n-k} \in A) \\
&\qquad t\ P_y(M_1 \in dz, S_1 \in dt) P_x(M_i \in A^c,\ 1 \leq i \leq k,\ M_k \in dy)
\end{aligned}
$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_S m(y)\,\pi(dy) &= \int \sum_{k=1}^{\tau_B} m(M_k)\,dP_B \overset{Atom-Eig.}{=} \int \sum_{k=0}^{\tau_B-1} m(M_k)dP_B \\
&= \int_S \int_{\mathbf{R}} t\,P_y(S_1 \in dt) \sum_{m\geq 0} P_B(M_i \in B^c,\ 1 \leq i \leq m,\ M_m \in dy) \\
&\overset{Irr.}{=} \int_S \int_{S\times\mathbf{R}} \sum_{n\geq 0} P_z(M_i \in B^c, 0 \leq i < n, M_n \in B)\; t\,P_y(S_1 \in dt, M_1 \in dz) \\
&\qquad\qquad \sum_{m\geq 0} P_B(M_i \in B^c,\ 1 \leq i \leq m,\ M_m \in dy) \\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} \int_S \int_{S\times\mathbf{R}} P_z(M_i \in B^c,\ 0 \leq i < n-k,\ M_{n-k} \in B) \\
&\qquad\qquad t\,P_y(S_1 \in dt, M_1 \in dz) P_B(M_i \in B^c,\ 1 \leq i \leq k,\ M_k \in dy) \\
&\overset{Ind.}{=} \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbf{R}} t\,P_B(M_k \in B^c,\ 1 \leq k \leq n,\ M_{n+1} \in B, S_{n+1} \in dt) \\
&= E_B(S_{\tau_B}),
\end{aligned}$$

wobei $m(y) := \int_{\mathbf{R}} t\,\mu(y, S \times dt)$.

□

Im Beweis von Satz 1.4.5 benutzen wir von der geforderten 0-Rekurrenz von μ lediglich, daß damit μ (da stochastisch) schon rekurrent ist. Es würde hier in der Tat genügen, μ als rekurrent nach Definition 1.3.16 vorauszusetzen. (Die benötigte Eindeutigkeit - bis auf Skalarmultiplikation - des invarianten Maßes unter allen invarianten Maßen π mit $0 < \pi(B) < \infty$ ließe sich leicht nachweisen). Stellt sich die Frage, weshalb der mühsame Weg über die 0-Rekurrenz überhaupt gewählt wurde. Ein Grund ist die Existenzaussage bzgl. der invarianten Funktionen, die wir später - allerdings nicht mehr in diesem Kapitel - benötigen werden und die nur mit der Theorie der α-Rekurrenz nachgewiesen werden konnte. Aber auch in diesem Kapitel werden wir uns durch die Voraussetzung der α-Rekurrenz anstelle der Rekurrenz mühsame Rechenarbeit ersparen. Wir werden an entsprechender Stelle darauf hinweisen.

Betrachten wir nun das Markov-Erneuerungstheorem für den allgemeinen Fall, also ohne die Existenz eines Atoms vorauszusetzen. Die Grundidee ist, den MRW so zu erweitern, daß dieser erweiterte MRW ein Atom besitzt, auf diesen das eben bewiesene Markov-Erneuerungstheorem anzuwenden und die erhaltenen Ergebnisse wieder auf den ursprünglichen MRW zurückzuführen. Diesen erweiterten MRW, den sogenannten gesplitteten MRW, werden wir in nachfolgendem Abschnitt konstruieren.

1.4.2 Der gesplittete Markov-Random-Walk

Sei μ also nun ein stochastischer, irreduzibler, rekurrenter Kern, der die Minorisierungsbedingung $M(1, \beta, s, \varphi)$ erfülle. Die Einschränkung $m_0 = 1$ können wir im Beweis des Markov-Erneuerungstheorems glücklicherweise aufheben. Nach Bemerkung 1.3.7 bedeutet es jedoch keine Einschränkung $\beta = 1$, $0 \leq s \leq 1$ und φ als Wahrscheinlichkeitsmaß anzunehmen.
Wir werden uns nun aus μ den "gesplitteten MRW" $(M_n^*, S_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit dem Ziel, daß sich dieser in den wesentlichen Eigenschaften nicht sehr von μ unterscheidet, aber zusätzlich ein Atom besitze.

Sei im folgenden stets $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{B}, x \in S$.
$S^* := (S \times \{0, 1\})$ sei der neue Zustandsraum von M^*.
$\mathcal{S}^* := \mathcal{S} \otimes \mathcal{P}(\{0, 1\})$ die σ-Algebra auf diesem, wobei $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ die Potenzmenge auf $\{0, 1\}$ bezeichne.
Wir schreiben

$$x_0 = (x, 0) \in S^* \qquad x_1 = (x, 1) \in S^*$$

$$A_0 = A \times \{0\} \in \mathcal{S}^* \qquad A_1 = A \times \{1\} \in \mathcal{S}^*$$

Für $C \in \mathcal{S}^*$ sei

$$C^0 := p_1(C \cap S_0) \qquad C^1 := p_1(C \cap S_1),$$

wobei p_1 die Projektion auf die erste Komponente bezeichne. Eine Funktion $f : (S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}$ wird durch

$$f^*((x, 0), t) = f^*((x, 1), t) := f(x, t)$$

zu einer Funktion auf $S^* \times \mathbb{R}$ erweitert.
Ein Maß ϕ auf $(S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B})$ wird durch

$$\phi^*(A_0 \times B) := \int_{A \times B} (1 - s(x))\, \phi(dx \times dt)$$

$$\phi^*(A_1 \times B) := \int_{A \times B} s(x)\, \phi(dx \times dt)$$

zu einem Maß auf $\mathcal{S}^* \otimes \mathcal{B}$ erweitert.
Analog läßt sich ein Maß ϕ auf $(S, \mathcal{S})$ zu einem Maß auf $(S^*, \mathcal{S}^*)$ erweitern.
Für die Konstruktion des erweiterten Markov-Übergangskerns μ^*, der dann $(M_n^*, S_n^*)_{n \geq 0}$ festlege, definieren wir uns zuerst einen Kern $\bar{\mu} : S^* \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}_+$ und spalten diesen dann, aufgefaßt als Maß auf $\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}$, in der oben beschriebenen Weise auf:

$$\bar{\mu}(x_0, A \times B) := \begin{cases} (1 - s(x))^{-1}(\mu(x, A \times B) - s(x)\varphi(A \times B)) & ; \quad s(x) < 1 \\ \mathbf{1}_A(x) & ; \quad s(x) = 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\bar{\mu}(x_1, A \times B) := \varphi(A \times B) \tag{1.7}$$

Wie schon angedeutet sei nun für $z \in S^*$

$$\mu^*(z, A_0 \times B) := \int_{A\times B} (1 - s(y))\ \bar{\mu}(z, dy \times dt) \tag{1.8}$$

$$\mu^*(z, A_1 \times B) := \int_{A\times B} s(y)\ \bar{\mu}(z, dy \times dt) \tag{1.9}$$

Mit φ und μ ist auch μ^* stochastisch. Den zugehörigen MRW bezeichnen wir mit $(M_n^*, S_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$; ν^* sei der zugehörige Erneuerungskern.
Wir werden nun nachweisen, daß μ^* die Voraussetzungen des Markov-Erneuerungstheorems im Atom-Fall erfüllt:

Satz 1.4.7 *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*
μ^* ist mit μ stochastischer, irreduzibler, positiv-rekurrenter Kern, der ein Atom besitzt.

Beweis:

$$\mu^*(x, A \times B) \geq \mathbf{1}_{S_1}(x)\varphi^*(A \times B)$$

und da -wie wir nachfolgend sehen werden- ψ^* irreduzibles Maß für μ^* ist und $\psi^*(S_1) > 0$, erfüllt μ^* die Minorisierungsbedingung.
(1.7) zeigt, daß S_1 ein Atom für μ^* ist.
Für den Nachweis der Irreduzibilität und der 0-Rekurrenz bedarf es folgender Gleichungen, die sich durch Doppelinduktionen ergeben:
Für eine Funktion $f : (S^*, \mathcal{S}^*) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ gilt

$$\int_{S_1} f(x)(\mu^*)^n(S_1, dx\times\mathbb{R}) = \int_S \int_S f(x,1)s(x)\ \mu^{n-1}(y, dx\times\mathbb{R})\ \varphi(dy\times\mathbb{R}) \tag{1.10}$$

$$\int_{S_0} f(x)\ (\mu^*)^n(S_1, dx \times \mathbb{R}) = \int_S \int_S f(x,0)(1 - s(x))\ \mu^{n-1}(y, dx \times \mathbb{R})\ \varphi(dy \times \mathbb{R}) \tag{1.11}$$

$$(\mu^*)^n((x,0), S_1) = \int_S \int_S s(x)\ \mu^{n-1}(y, dx \times \mathbb{R})\ \bar{\mu}((x,0), dy \times \mathbb{R}) \tag{1.12}$$

Wir zeigen zuerst, daß ψ^* irreduzibles Maß für μ^* ist:

$$\begin{aligned} \psi^*(A) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_{A^1} s(x)\ \psi(dx) > 0 \ \vee \ \int_{A^0} (1 - s(x))\ \psi(dx) > 0 \\ &\Rightarrow \quad \psi(A^1 \cap (s > 0)) > 0 \ \vee \ \psi(A^0 \cap (s < 1)) > 0 \end{aligned}$$

Ist $\psi(A^1 \cap (s > 0)) > 0$ folgt mit (1.10) und der Irreduzibilität von μ für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (\mu^*)^n(S_1, A \times \mathbb{R}) &\geq (\mu^*)^n(S_1, A^1 \times \{1\} \times \mathbb{R}) \\ &\geq \int_S \int_{A^1} s(x)\ \mu^{n-1}(y, dx \times \mathbb{R})\ \varphi(dy \times \mathbb{R}) > 0. \end{aligned}$$

Analog für den Fall $\psi(A^0 \cap (s < 1)) > 0$.

Kommen wir nun zum Nachweis der 0-Rekurrenz:
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt μ_λ $M(1,1,s,\varphi_\lambda)$.
Jeden dieser Kerne können wir wie μ in der oben geschilderten Weise zu einem Kern μ_λ^* splitten. Offensichtlich gilt $(\mu_\lambda)^* = (\mu^*)_\lambda$.
Unter Verwendung von (1.10) folgt dann

$$(\mu_\lambda^*)^0(S_1, S_1 \times \mathbb{R}) = 1 =: u_0^\lambda$$

$$(\mu_\lambda^*)^n(S_1, S_1 \times \mathbb{R}) = \int_S \int_S s(x)\ \mu_\lambda^{n-1}(y, dx \times \mathbb{R})\ \varphi_\lambda(dx \times \mathbb{R}) =: u_n^\lambda, \quad n \geq 1$$

$$\sum_{n \geq 0} (\mu_\lambda^*)^n(S_1, S_1 \times \mathbb{R}) = \nu_\lambda^*(S_1, S_1 \times \mathbb{R}) =: \hat{u}(\lambda)$$

Lemma 1.3.15 des vorherigen Kapitels liefert nun (μ ist als 0-rekurrent vorausgesetzt)

$$\nu_\lambda^*(S_1, S_1 \times \mathbb{R}) = \hat{u}(\lambda) < \infty \qquad \forall\ \lambda > 0$$

$$\nu_\lambda^*(S_1, S_1 \times \mathbb{R}) = \hat{u}(\lambda) = \infty \qquad \forall\ \lambda \leq 0$$

Da S_1 kleine Menge für μ^* ist, folgt daraus direkt die 0-Rekurrenz von μ^*. (Die Rekurrenz von μ^* aus der von μ zu folgern, wäre erheblich aufwendiger gewesen. Hier zeigt sich also einer der angekündigten Vorteile, den Umweg über die 0-Rekurrenz zu gehen statt direkt die Rekurrenz von μ vorauszusetzen.)
Daß μ^* auch positiv-rekurrent ist, liefert weiter unten (1.17) unter Berücksichtigung, daß π^* invariantes Maß für μ^* ist. (Der Nachweis der Invarianz ist eine einfache Rechnung)

□

Wir benötigen noch folgende leicht nachzurechnende Gleichungen für ein Maß ϕ_1 (ϕ_2) auf $(S \times \mathbb{R}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{S})$ (auf $(S, \mathcal{S})$) und eine meßbare, numerische Funktion f (g) auf $S \times \mathbb{R}$ (S):

$$\phi_1^* * \mu^* = (\phi_1 * \mu)^* \tag{1.13}$$

$$\phi_1^* * f^*(t) = \phi_1 * f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

$$\phi_2^*(g^*) = \phi_2(g) \tag{1.15}$$

und daraus offensichtlich

$$\phi^* * \nu^* * f^*(t) = \phi * \nu * f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Durch einfaches Nachrechnen ergibt sich weiterhin

$$\pi^*(m^*) := \int_{S^*} \int_{S^* \times \mathbb{R}} t\ \mu^*(x, ds \times dt)\ \pi^*(dx) = \pi(m). \tag{1.17}$$

1.4.3 Ein Markov-Erneuerungstheorem für den allgemeinen Fall

Die folgenden beiden Lemmata werden wir für den Beweis des Markov-Erneuerungstheorems benötigen:

Lemma 1.4.8 *Mit den gewohnten Notationen gilt*

$P_{\delta_x^*}(\tau_{S_1} < \infty) = 1$ *für* π*-f.a.* $x \in S$.

Beweis:
Aufgrund der Rekurrenz von μ^* gilt

$P_x(\tau_{S_1} < \infty) = 1$ für π^*-f.a. $x \in S^* \qquad (*)$.

Angenommen, es gäbe eine Menge $A \in \mathcal{S}$ mit $\pi(A) > 0$ und
$P_{\delta_x^*}(\tau_{S_1} < \infty) < 1 \quad \forall x \in A$. Dann ist einer der drei Fälle erfüllt:

1) $\pi(B) > 0 \ , \ B := \{x \in S \ ; \ s(x) < 1 \wedge P^*_{(x,0)}(\tau_{S_1} < \infty) < 1\}$

2) $\pi(C) > 0 \ , \ C := \{x \in S \ ; \ s(x) > 0 \wedge P^*_{(x,1)}(\tau_{S_1} < \infty) < 1\}$

3) $\pi(D) > 0 \ , \ D := \{x \in S \ ; \ P^*_{(x,0)}(\tau_{S_1} < \infty) < 1 \wedge P^*_{(x,1)}(\tau_{S_1} < \infty) < 1\}$

Wegen $0 < \pi(D) = \pi^*(D_0 \cup D_1)$ und $(*)$ kann der dritte Fall nicht eintreten.
Auch der erste Fall ist wegen $\pi^*(B_0) = \int_B (1 - s(x)) \ \pi(dx) > 0$ und $(*)$ auszuschließen und analog kann auch der zweite Fall nicht eintreten.
Solch eine Menge A kann demnach nicht existieren.

□

Lemma 1.4.9 *Ist* $f : (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ *eine* π*-integrierbare, nichtnegative Funktion, so gilt für* π*-f.a.* $x \in S$

$$E_{\delta_x^*}\left(\sum_{n=0}^{\tau_{S_1}} f^*(M_n^*)\right) < \infty \text{ für } \pi\text{-f.a. } x \in S.$$

Beweis:
Wir zeigen zuerst

$$U_{S_1} f(x) := E_x\left(\sum_{n=1}^{\tau_{S_1}} f^*(M_n^*)\right) < \infty \qquad \text{für } \pi^*\text{-f.a. } x \in S^*. \tag{1.18}$$

Dazu definieren wir

$$\nu_{S_1} := \inf\{n \geq 0 \ ; \ M_n^* \in S_1\} \qquad G_{S_1} f(x) := E_x\left(\sum_{n=0}^{\nu_{S_1}} f^*(M_n^*)\right).$$

Für $x \in S_1$ ist $U_{S_1} f(x) = \int_S^* f^*(x) \ \pi^*(dx) = \int_S f(x) \ \pi(dx) < \infty$.
Für $x \in S_0$ ist $U_{S_1} f(x) = E_x^*\left(\sum_{n=0}^{\nu_{S_1}} f^*(M_n^*)\right) - f(x) = G_{S_1} f(x) - f(x)$.

Es reicht also aus, die Endlichkeit von $G_{S_1}f(x)$ für π^*-f.a.$x \in S^*$ nachzuweisen. Dafür wiederum genügt der Nachweis der Abgeschlossenheit von
$F := \{G_{S_1}f < \infty\}$:
Da $x \in F$ für π^*-f.a. $x \in S_1$ ist F nicht leer.
Sei $x \in S_1 \cap F$.

$$\int_{S^*} G_{S_1}f(y)\ \mu^*(x, dy \times \mathbb{R}) = E_x\left(\sum_{n=1}^{\tau_{S_1}} f^*(M_n^*)\right) = \int_{S^*} f^*(x)\ \pi^*(dx) < \infty$$

Daher $\mu^*(x, F^c \times \mathbb{R}) = 0$.
Sei nun $x \in S_0 \cap F$.

$$\int_{S^*} G_{S_1}f(y)\ \mu^*(x, dy \times \mathbb{R}) = E_x^*\left(\sum_{n=1}^{\tau_{S_1}} f^*(M_n^*)\right) = G_{S_1}f(x) - f(x) < \infty$$

Daher $\mu^*(x, F^c \times \mathbb{R}) = 0$.
F ist demnach abgeschlossen.
Zeigen wir damit nun die Aussage des Lemmas:
Wegen

$$\begin{aligned}
&E_{\delta_x^*}\left(\sum_{n=0}^{\tau_{S_1}} f^*(M_n^*)\right)\\
&= f(x) + s(x)E_{(x,1)}\left(\sum_{n=1}^{\tau_{S_1}} f^*(M_n^*)\right) + (1 - s(x))E_{(x,0)}\left(\sum_{n=1}^{\tau_{S_1}} f^*(M_n^*)\right)\\
&= f(x) + s(x)\pi^*(f^*) + (1 - s(x))U_{S_1}f((x,0))\\
&\overset{(1.15)}{=} f(x) + s(x)\pi(f) + (1 - s(x))U_{S_1}f((x_0))
\end{aligned}$$

genügt der Nachweis von

$$\pi\{x \in S\ ;\ s(x) < 1 \wedge U_{S_1}\bar{f}^*(x_0) = \infty\} = 0.$$

Angenommen, es existiere ein $A \in \mathcal{S}$ mit $\pi(A) > 0$ und $s(x) < 1 \wedge U_{S_1}\bar{f}^*(x_0) = \infty\ \forall x \in A$.
Dann folgt $\pi^*(A_0) > 0$ und $U_{S_1}\bar{f}^*(x) = \infty \quad \forall x \in A_0$.
Dies ist aber ein Widerspruch zu gerade nachgewiesenem (1.18).

□

Theorem 1.4.10 (Markov-Erneuerungstheorem) *Es sei* $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to [0,1]$ *ein stochastischer, irreduzibler, quasi-*$\psi \otimes \lambda$*-stetiger, positiv-rekurrenter Kern und* $f : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *erfülle i),ii),iii) aus Satz 1.4.5. Dann folgt für* π*-f.a.* $s \in S$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\le f} |\nu * g(s,t) - \frac{1}{\pi(m)} \int_{\mathbb{R}} \int_S g(x,u)\pi(dx)\lambda(du)| = 0$$
$$\lim_{t\to-\infty} \sup_{|g|\le f} |\nu * g(s,t)| = 0$$

Beweis:
Nach Satz 1.3.10 erfüllt μ die Minorisierungsbedingung $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ und ohne Einschränkung sei $\beta = 1$ gewählt und s und φ derart, daß $\int_S s(x)\ \varphi(dx \times \cdot)$ quasi-λ-stetig. (Bemerkung 1.3.6 bzw. Lemma 1.3.11)

1.Fall : $\mathbf{m_0 = 1}$
Wir werden nun das Markov-Erneuerungstheorem im Atom-Fall für oben konstruierten MRW $(M_n^*, S_n^*), f^*$ und Anfangsverteilung $\delta_s^*, s \in S$ anwenden und die dadurch erhaltenen Ergebnisse zum Nachweis des Markov-Erneuerungstheorems benutzen. Dazu zeigen wir zuerst, daß die Voraussetzungen für die Anwendung des Markov-Erneuerungstheorems im Atom-Fall tatsächlich erfüllt sind:
Die benötigte Voraussetzung $P_{\delta_x^*}(\tau_{S_1} < \infty) = 1$ für π-f.a. $x \in S$ haben wir in Lemma 1.4.8 schon nachgewiesen. Die Bedingungen i) und ii) aus Satz 1.4.5 sind aber wegen (1.15) erfüllt. Bedingung iii) folgt unmittelbar aus $\lim_{|t|\to\infty} f(x,t) = 0$.
a) folgt aus

$$\begin{aligned} P_{S_1}(S^*_{\tau_{S_1}} \in \cdot) &\geq P_{S_1}(M_1^* \in S_1, S_1^* \in \cdot) \\ &= \mu^*(S_1, S_1 \times \cdot) \\ &= \int_S s(x)\ \varphi(dx \times \cdot) \end{aligned}$$

und dieses Maß ist nach Voraussetzung quasi-λ-stetig.
b) Wir benötigen

$$E_{\delta_x^*}\left(\sum_{n=0}^{\tau_{S_1}} \bar{f}^*(M_n^*)\right) < \infty \text{ für } \pi\text{-f.a. } x \in S.$$

Dies war aber gerade die Aussage aus Lemma 1.4.9.

Unter Verwendung des Markov-Erneuerungstheorems im Atom-Fall folgt nun:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} |\nu * g(s,t) - 1/(\pi(m)) \int g(x,t)\ \pi(dx)\ \lambda(dt) \\ &= \lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} |\delta_s * \nu * g(t) - 1/(\pi(m)) \int g(x,t)\ \pi(dx)\ \lambda(dt) \\ &= \lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} |\delta_s^* * \nu^* * g^*(t) - 1/(\pi^*(m^*)) \int g^*(x,t)\ \pi^*(dx)\ \lambda(dt) \\ &\leq \lim_{t\to\infty} \sup_{|g^*|\leq f^*} |\delta_s^* * \nu^* * g^*(t) - 1/(\pi^*(m^*)) \int g^*(x,t)\ \pi^*(dx)\ \lambda(dt) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und analog

$$\lim_{t\to-\infty} \sup_{|g|\leq f} |\nu * g(s,t)| \leq \lim_{t\to-\infty} \sup_{|g^*|\leq f^*} |\delta_s^* * \nu^* * g^*(t)| = 0.$$

2.Fall : $\mathbf{m_0 > 1}$
Wir definieren für beliebiges $0 < \alpha < 1$ den stochastischen Kern

$$\mu^\alpha = \alpha \sum_{n\geq 1} (1-\alpha)^{n-1} \mu^n.$$

Der zugehörige MRW im Standardmodell sei $(M_n^\alpha, S_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$.
Offensichtlich ist μ^α mit μ quasi-$\psi \otimes \lambda$-stetig und π ist auch für μ^α invariant. Erfüllt μ $M(m_0, \beta, s, \varphi)$ so erfüllt μ^α $M(1, \beta\alpha(1-\alpha)^{m_0-1}, s, \varphi)$. Daß μ^α irreduzibel ist mit den gleichen irreduziblen Maßen wie μ geht aus der Gleichung (1.19) in nachfolgendem Lemma 1.4.11 hervor. Insbesondere ist also ψ auch für μ^α maximales irreduzibles Maß. Die 0-Rekurrenz von μ^α resultiert aus (1.20) unter Ausnützung der Tatsache, daß kleine Funktionen von μ auch kleine Funktionen von μ^α sind. (Der einfache Nachweis der 0-Rekurrenz von μ^α bestätigt noch einmal, daß der Weg über die 0-Rekurrenz durchaus vorteilhaft ist.) Die positive Rekurrenz folgt daraufhin aus (1.21).
μ^α erfüllt damit alle Voraussetzungen aus dem schon gezeigten Fall.
Bezeichnet ν^α das Markov-Erneuerungsmaß zu μ^α und
$\pi(m^\alpha) := \int_S \int_{\mathbb{R}} t \ \mu^\alpha(x, S \times dt) \ \pi(dx)$ erhält man nun in Anbetracht von nachfolgendem Lemma für π-f.a.$s \in S$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} |\delta_s * \nu * g(t) - \frac{1}{\pi(m)} \int\int g(x,t)\pi(dx)\lambda(dt)| \\
&= \lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} \Big(|\frac{1}{\alpha}\delta_s * \nu^\alpha * g(t) - \frac{1}{\pi(m)} \int\int g(x,t)\pi(dx)\lambda(dt)| \\
&\qquad\qquad + \frac{1-\alpha}{\alpha}|g(s,t)|\Big) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} \Big(|\delta_s * \nu^\alpha * g(t) - \frac{1}{\pi(m^\alpha)} \int\int g(x,t)\pi(dx)\lambda(dt)| \\
&\qquad\qquad + (1-\alpha)|f(s,t)|\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wieder analog erfolgt der Nachweis von

$$\lim_{t\to -\infty} \sup_{|g|\leq f} |\delta_s * \nu * g(t)| = 0.$$

□

Lemma 1.4.11 *Mit den Bezeichnungen aus Theorem 1.4.10 gilt für jedes $x \in S$:*

$$\sum_{n\geq 1} \mu_\lambda^n = \sum_{n\geq 1} \alpha^{n-1} (\frac{1}{\alpha} \mu_\lambda^\alpha)^n = \frac{1}{\alpha} \sum_{n\geq 1} (\mu_\lambda^\alpha)^n, \tag{1.19}$$

$$\nu_\lambda^\alpha(x, \cdot) = \alpha \ \nu_\lambda(\cdot) + (1-\alpha) \ \delta_{(x,0)}(\cdot) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.20}$$

$$\pi(m^\alpha) = \frac{1}{\alpha} \ \pi(m) \tag{1.21}$$

Beweis:
Für (1.19) verweisen wir auf die Resolvent-Gleichungen aus Nummelin[13],

Seite 122. Dann folgt (1.20) direkt aus (1.19).
(1.21) läßt sich folgendermaßen verifizieren :
Sei $\pi(m_k) = \int_S \int_{\mathbb{R}} t\ \mu^k(x, S \times dt)\ \pi(dx)$ für $k \in \mathbb{N}$.
Eine Induktion liefert $\pi(m_k) = k\ \pi(m)\ \forall k \geq 1$:
(IA)$k = 1$ ist trivial
(IS)

$$\begin{aligned}
\pi(m_{k+1}) &= \int_S \int_{S\times\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} t\ \mu^k(y, S \times d(t-u))\ \mu(x, dy \times du)\ \pi(dx) \\
&= \int_S \int_{S\times R} \int_{\mathbb{R}} (t-u)\ \mu^k(y, S \times d(t-u))\ \mu(x, dy \times du)\ \pi(dx) \\
&\quad + \int_S \int_{S\times\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u\ \mu^k(y, S \times d(t-u))\ \mu(x, dy \times du)\ \pi(dx) \\
&= \int_S \int_S \int_{\mathbb{R}} t\ \mu^k(y, S \times dt)\ \mu(x, dy \times \mathbb{R})\ \pi(dx) \\
&\quad + \int_S \int_{S\times\mathbb{R}} u\ \mu^k(y, S \times \mathbb{R})\ \mu(x, dy \times du)\ \pi(dx) \\
&= \int_S \int_{\mathbb{R}} t\ \mu^k(y, S \times dt)\ \pi(dy) + \int_S \int_{\mathbb{R}} u\ \mu(x, S \times du)\ \pi(dx) \\
&\overset{(IV)}{=} k\ \pi(m) + \pi(m) = (k+1)\pi(m)
\end{aligned}$$

Und damit dann

$$\pi(m^\alpha) = \alpha \sum_{k\geq 1} ((1-\alpha)^{k-1}\ \pi(m_k)) = \alpha\ \pi(m) \sum_{k\geq 1} ((1-\alpha)^{k-1} k) = \frac{\pi(m)}{\alpha}.$$

□

Der Beweis des Markov-Erneuerungstheorems für Dirac-Maße als Startverteilungen ist nun also vollständig abgeschlossen. Man kann die Klasse der Startverteilungen auch noch erweitern, stellt man gewisse Zusatzvoraussetzungen. Wir wollen darauf jedoch nur kurz hinweisen und die Beweisidee nur knapp anreißen, da für unsere Zwecke als Startverteilung das Dirac-Maß genügen wird:

Satz 1.4.12 *Seien μ und f wie in Theorem 1.4.10 gegeben.*
ϕ sei ein $\bar{f}$-reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(S, \mathcal{S})$, d.h.

$$E_\phi \left(\sum_{n=1}^{\tau_A} \bar{f}(M_n) \right) < \infty \qquad \forall A \in \mathcal{S}^+.$$

Weiterhin sei $\bar{f}$ ϕ-integrierbar und $P_{\phi^*}(\tau_{S_1} < \infty) = 1$.
Dann gilt das MET mit Startverteilung ϕ, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\leq f} |\phi * \nu * g(t) - \frac{1}{\pi(m)} \int_{\mathbb{R}} \int_S g(x,u)\pi(dx)\lambda(du)| = 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} \sup_{|g|\leq f} |\phi * \nu * g(t)| = 0$$

Bemerkung 1.4.13 Das von uns bewiesene Markov-Erneuerungstheorem bildet einen Spezialfall von obigem Satz, da - wie im Beweis von 1.4.10 nachgewiesen - unter Hinweis auf Nummelin[13], S.134 und (1.18) δ_x für π-f.a. $x \in S$ die geforderten Voraussetzungen erfüllt.

Beweisskizze:
Nach Nummelin[13], S.134 (5.4) ist, da ϕ $\bar{f}$-regulär, auch

$$E_{\phi^*}\left(\sum_{n=1}^{\tau_{S_1}} \bar{f}^*(M_n^*)\right) < \infty$$

und wegen $\int \bar{f}^*(x)\phi^*(dx) = \int \bar{f}(x)\phi(dx) < \infty$ (nach Voraussetzung) auch

$$E_{\phi^*}\left(\sum_{n=0}^{\tau_{S_1}} \bar{f}^*(M_n^*)\right) < \infty.$$

Die Voraussetzungen für die Anwendung des Markov-Erneuerungstheorem im Atom-Fall auf μ^*, f^*, ϕ^* sind demnach erfüllt und der Beweis vollzieht sich analog zum Beweis von Theorem 1.4.10.

$\square$

Nun ist natürlich die in Satz 1.4.12 geforderte Bedingung $P_{\phi^*}(\tau_{S_1} < \infty) = 1$ noch äußerst unhandlich. Wir geben daher zwei hierfür hinreichende Bedingungen an. Daß die erste tatsächlich hinreichend ist, läßt sich sehr leicht nachweisen; bei der zweiten verweisen wir wieder nur auf Nummelin[14] für den Nachweis.

1. $\phi \ll \pi \Rightarrow P_{\phi^*}(\tau_{S_1} < \infty) = 1$

2. μ werde als Harris-rekurrent angenommen, d.h.

   $$P_x(M_n \in A\, u.o.) = 1 \quad \forall x \in S \quad \forall A \in \mathcal{S}^+.$$

   Dann ist (Nummelin[14],S.311 Theorem 2) auch μ^* Harris-rekurrent und die Bedingung $P^*_{\phi^*}(\tau_{S_1} < \infty) = 1$ ist für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ϕ erfüllt.

Im Hinblick auf spätere Anwendungen wollen wir zum Ende dieses Kapitels noch eine einfache Folgerung aus dem Markov-Erneuerungstheorem anführen.

Korollar 1.4.14 *Sei $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}_+$ ein irreduzibler, quasi-$\psi \otimes \boldsymbol{\lambda}$–stetiger, α-rekurrenter Kern (also nicht mehr notwendig stochastisch).*
π bezeichne ein α-invariantes Maß und h eine α-invariante Funktion. Gilt zusätzlich

$$0 < \beta := \int_S \int_{S\times\mathbb{R}_+} th(s)\ \mu_\alpha(r, ds \times dt)\ \pi(dr) < \infty \tag{1.22}$$

und ist $f : S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine meßbare Funktion, die die Bedingungen i),ii) und iii) aus Satz 1.4.5 erfüllt, so gilt für π-f.a.s $\in S$

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\le f} |\nu_\alpha * g(s,t) - \frac{h(s)}{\beta} \int_{\mathbb{R}} \int_S g(x,u)\pi(dx)\boldsymbol{\lambda}(du)| = 0$$
$$\lim_{t\to-\infty} \sup_{|g|\le f} |\nu_\alpha * g(s,t)| = 0$$

Beweis:
In nachfolgendem Lemma werden wir zeigen, daß der durch

$$Q(s, dx \times dt) = \frac{h(x)}{h(s)}\mu_\alpha(s, dx \times dt)$$

definierte Kern die Voraussetzungen aus dem Markov-Erneuerungstheorem erfüllt mit invariantem Maß $h\pi$.
Offenbar erfüllt die Funktion $\tilde{f}(x,t) := 1/h(x)f(x,t)$ die Bedingungen i),ii),iii) aus Satz 1.4.5 ersetzt man dort π durch $h\pi$. Jetzt folgt leicht

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\le f} |\nu_\alpha * g(s,t) - \frac{h(s)}{\beta} \int_{\mathbb{R}} \int_S g(x,u)\pi(dx)\boldsymbol{\lambda}(du)| \\
&= \lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\le f} | \int_{S\times\mathbb{R}} g(x,t-u)\frac{h(s)}{h(x)} \sum_{n\ge0} Q^n(s, dx \times du) \\
&\qquad\qquad - \frac{h(s)}{\beta} \int_{\mathbb{R}} \int_S \frac{g(x,u)}{h(x)} h\pi(dx)\boldsymbol{\lambda}(du)| \\
&\le \lim_{t\to\infty} \sup_{|g|\le \tilde{f}} | \int_{S\times\mathbb{R}} g(x,t-u)h(s) \sum_{n\ge0} Q^n(s, dx \times du) \\
&\qquad\qquad - \frac{h(s)}{\beta} \int_{\mathbb{R}} \int_S g(x,u)h\pi(dx)\boldsymbol{\lambda}(du)| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\lim_{t\to-\infty} \sup_{|g|\le f} |\nu_\alpha * g(s,t)| = 0$ ist wieder analog nachzuweisen.

□

Lemma 1.4.15 *Sei μ wie im obigen Korollar.*
Dann ist $Q(s, dx \times dt) = h(x)/h(s)\mu_\alpha(s, dx \times dt)$ stochastischer, irreduzibler, quasi-$\psi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-stetiger, positiv-rekurrenter Kern und $h\pi$ definiert durch
$h\pi(A) := \int_A h(x)\pi(dx)$ ist invariantes Maß für Q.

Beweis:
Q ist aufgrund der α-Invarianz von h stochastisch.
Die Irreduzibilität und quasi-$\psi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-Stetigkeit von Q lassen sich unter Beachtung von $h > 0$ leicht auf die von μ bzw. μ_α zurückführen.
Die Invarianz von $h\pi$ für Q ist leicht nachzurechnen.
Bleibt also nur noch die 0-Rekurrenz von Q nachzuweisen. Dann ist Q wegen (1.22) offenbar schon positiv-rekurrent.
Sei dazu s eine kleine Funktion für μ. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß dann $\tilde{s}(x) := s(x)/h(x)$ kleine Funktion für Q ist und mit $\lambda > 0$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \int_S \tilde{s}(x)\, \bar{Q}^n_\lambda(y, dx) &= \frac{1}{h(y)} \int_S s(x)\bar{\nu}_{\alpha+\lambda}(y, dx) \\ &< \infty \text{ für } \psi\text{-f.a.} y \in S \ ,\end{aligned}$$

d.h. $\alpha(Q) \leq 0$ (bezeichnet $\alpha(Q)$ den Konvergenzparameter von Q.)
Mit analoger Rechnung folgt $\alpha(Q) \geq 0$ sowie die 0-Rekurrenz von Q.

$\square$

Wir werden später noch folgenden Satz benötigen, dessen Beweis analog zu dem Beweis von Theorem 6.1 in Alsmeyer[1] verläuft und den wir daher nicht noch einmal angeben.

Satz 1.4.16 *Ist $\mu : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}_+) \to [0, 1]$ irreduzibler, stochastischer, quasi-$\psi \otimes \boldsymbol{\lambda}$-stetiger und positiv-rekurrenter mit invariantem Maß π, so existiert ein (eindeutiges) σ-endliches Maß G auf $\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}_+$, welches $G * \nu = \pi \otimes \boldsymbol{\lambda}^+$ erfüllt und zwar der Form*

$$G(A \times B) = \int_S \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(t)\mu(s, A \times (t, \infty))\, \pi(ds)\, \boldsymbol{\lambda}^+(dt).$$

Chapter 2

Ein Populationsmodell

2.1 Motivation

Nachdem wir in Kapitel 1 die theoretischen Grundlagen gesetzt haben, kommen wir darauf aufbauend nun zum eigentlichen Anliegen dieser Arbeit:
Wir werden ein Populationsmodell aufstellen, in welchem sowohl die zeitliche als auch die genetische Entwicklung der Population berücksichtigt wird. Daraufhin werden wir versuchen, Aussagen über das asymptotische Langzeitverhalten der Population zu treffen. Die vorher entwickelte Markov-Erneuerungs-Theorie wird uns dabei von großem Nutzen sein.
Die Eigenschaften, die unsere Population erfüllen soll, fassen wir in folgenden Punkten zusammen:

1. Jedes Individuum besitze einen sogenannten Typ, worunter sich am besten der Genotyp eines Individuums, also die Gesamtheit seiner Erbinformation, vorzustellen ist. Dieser Typ habe wiederum folgende Eigenschaften:

   (a) Allein der Typ determiniert die Verteilung auf dem "Raum der möglichen Lebensläufe" für jedes Individuum. (Äußere Einflüsse bleiben demnach unberücksichtigt).

   (b) Der Typ eines Individuums wird bei seiner Geburt festgelegt und hängt allein vom Lebenslauf der Mutter ab, wird also in diesem Sinne vererbt (was nicht bedeute, daß jedes Kind denselben Typ wie seine Mutter habe).

2. Verschiedene Populationszweige verhalten sich bedingt unabhängig: Aufgrund der in Punkt 1 geforderten "Vererbung von Typen" können die Zweige natürlich nicht gänzlich voneinander unabhängig sein. Jedoch bedingt unter den Informationen über all ihre Vorfahren sollen sich die Zweige unabhängig voneinander entwickeln.

Wir werden an den entsprechenden Stellen noch einmal näher darauf eingehen, was diese Forderungen mathematisch präzisiert bedeuten sollen. Allerdings lassen sich schon an dieser Stelle zumindest Markovsche Strukturen erahnen: Daß nur der Typ des direkten Vorfahren für den Lebenslauf eines Individuums ausschlaggebend ist und keine Informationen über ältere Vorfahren, erinnert an die Markov-Eigenschaft. Daß wir mit Markov-Erneuerungs-Theorie statt mit einfacher Markov-Theorie arbeiten werden, ist in der oben genannten Zielsetzung begründet, daß wir nicht nur die genetische, sondern auch die zeitliche Entwicklung der Population untersuchen wollen.

2.2 Das Modell

2.2.1 Der Individuenraum

Die Identifikation von Individuen einer Population übernehmen wir aus dem klassischen Ulam-Harris-Modell: "Induktiv" wird jedes Individuum eindeutig spezifiziert durch seine Vorfahren sowie die Information, das wievielte Kind seines direkten Ahnen es ist.
Dies geschieht, indem ein Individuum x der n-ten Generation identifiziert wird mit jenem n-Tupel $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{N}^n$, für das x der x_n-te Nachfahre des x_{n-1}-ten Nachfahren des $\dots$ x_1-ten Nachfahren des *Ursprungs* ist. (*Ursprung* bezeichne das zeitlich erste Individuum der Population und werde in obiger Notation durch $\{0\} =: \mathbb{N}^0$ dargestellt.)
$I := \cup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$ ist also die Menge aller Individuen der Population, auch *Individuen-Raum* genannt.
Einige häufig benötigte Funktionen auf diesem Raum sind:

$$m(x) = mx = (x_1, \dots x_{n-1}) \qquad \text{für } x = (x_1, \dots x_n) \in I$$

welche den Ahnen, die *Mutter* des Individuums liefert. Per Konvention sei $m0 = 0$.

$$r(x) = rx = x_n \qquad \text{für } x = (x_1, \dots x_n) \in I,$$

welche den sogenannten *Rang* des Individuums angibt.

$$g(x) = gx = n \qquad \text{für } x = (x_1, \dots x_n) \in I$$

gibt an, welcher *Generation* x angehört.
Für $M \subset I$ definieren wir die (maximale) *Generation* von M

$$g(M) = \sup_{x \in M} g(x).$$

Wir führen noch folgende Kurzschreibweisen ein: Für $x = (x_1, \dots x_n), y = (y_1, \dots y_m) \in I$ sei xy das *"konkatenierte"* Individuum $(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m)$.
m^n sei die n-malige Hintereinanderschaltung von m. Damit gibt offensichtlich $m^{n+1}(x)$ die n-te Großmutter von x an, sofern x einer Generation $k > n$ ($\Leftrightarrow g(x) > n$) angehört.
Für die Verwandtschaftsverhältnisse zwischen Individuen benutzen wir folgende Notationen, wobei $x, y \in I$, $M, L \subset I$ seien

$x \prec y :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : m^k y = x \quad \hat{=} \quad y$ stammt von x ab
$M \prec x :\Leftrightarrow \exists y \in M : y \prec x \quad \hat{=} \quad x$ stammt von M ab
$M \prec L :\Leftrightarrow \forall x \in L : M \prec x \quad \hat{=} \quad L$ stammt von M ab

$x < y :\Leftrightarrow x \prec y$ und $x \neq y$ $\hat{=}$ y ist echter Nachfahre von x
$M < x :\Leftrightarrow \exists y \in M : y < x$ $\hat{=}$ x ist echter Nachfahre von M
$PrM := \{x \in I\ ;\ M \prec x\}$ $\hat{=}$ Nachkommenschaft von M
$hM := \{x \in M\ ;\ y < x \Rightarrow y \notin M\}$ $\hat{=}$ die Individuen aus M, aus denen ganz M als Nachfahren hervorgegangen sind, auch nur kurz *Kopf* von M genannt.
$AnM := \{x \in I\ ;\ \exists y \in M : x \prec y\}$ $\hat{=}$ Menge aller Vorfahren von M.

Eine Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $L_n \subset I$ heißt *aufsteigend*, wenn $L_n \prec L_{n+1}$ für alle n.
Analog heißt solch eine Folge *absteigend*, wenn $L_{n+1} \prec L_n$ für alle n.
Man beachte, daß $x \in I$ nach Definition von sich selbst abstammt und damit x selbst Nachfahre von sich ist.
Ein im folgenden wichtiger Begriff ist der der *"Populationslinie"*, kurz *Linie* oder *Stoplinie* genannt.

$L \subset I$ heißt Linie $:\Longleftrightarrow x, y \in L \Rightarrow x \not< y$

Eine Linie L *überdeckt* $M \subset I$, wenn $M \prec L$ und jedes $x \in PrM$ besitzt Nachfahren in L oder stammt selbst schon von L ab, d.h.

L überdeckt M $:\Longleftrightarrow M \prec L$ und $\forall x \in PrM \exists y \in L : x \prec y \vee y \prec x$.

Linien, die den Ursprung überdecken, d.h. jedes Individuum der Population hat Vor- oder Nachfahren in L, heißen auch einfach *überdeckend*. $\mathbb{N}^n$ ist ein typisches, häufig verwendetes Beispiel einer überdeckenden Linie.
Die Menge aller überdeckenden Linien werde auch mit $\mathcal{C}$, die Menge der überdeckenden Linien mit endlicher Generation mit $\mathcal{C}_0$ bezeichnet. Eine im folgenden wesentliche Eigenschaft der überdeckenden Linien liefert folgender

Satz 2.2.1 *Auf $\mathcal{C}$ sowie auf $\mathcal{C}_0$ wird durch "$\prec$" eine Ordnung induziert in dem Sinne, daß für $L, M \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}_0$) eine "untere Schranke" $L \wedge M \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}_0$) sowie eine "obere Schranke" $L \vee M \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}_0$) existiert, so daß für $K \subset I$*

$$L \wedge M \prec L \qquad L \wedge M \prec M \qquad (K \prec M, K \prec L) \Rightarrow K \prec L \wedge M$$

$$L \prec L \vee M \qquad M \prec L \vee M \qquad (L \prec K, M \prec K) \Rightarrow L \vee M \prec K$$

Beweis:

$$L_1 := \{x \in L; \exists y \in M, x \prec y\} \qquad L_2 := \{x \in L; M \prec x\}$$

$$M_1 := \{x \in M; \exists y \in L, x \prec y\} \qquad M_2 := \{x \in M; L \prec x\}$$

Dann folgen die Behauptungen mit $L \wedge M := L_1 \cup M_1$ und $L \vee M := L_2 \cup M_2$.
Wir zeigen nur die erste Aussage, da die zweite ähnlich zu beweisen ist.
Zu beachten ist, daß -da L und M überdeckende Linien- gilt
$x \in L \Rightarrow x \in L_1$ *oder* $\exists m \in M_1$ *mit* $m \prec x$.

1. $L \wedge M \in \mathcal{C}\ (\mathcal{C}_0)$:

Daß $L \wedge M$ Linie ist, ist einfach zu zeigen. Mit L und M hat auch $L \wedge M$ endliche Generation. Bleibt noch die Überdeckungseigenschaft nachzuweisen:
Sei dazu $x \in I$ beliebig. Dann existieren $l \in L, m \in M$ mit $(x \prec l \textit{ oder } l \prec x)$ und $(x \prec m \textit{ oder } m \prec x)$.
Wir nehmen $x \prec l, x \prec m$ an (die anderen Fälle sind ähnlich zu zeigen). Dann ist $l \in L_1$ oder $\exists \tilde{m} \in M_1$ mit $\tilde{m} \prec l$ *und* (da M Linie) $x \prec \tilde{m}$.
Für die anderen Fälle folgt ähnlich die Existenz eines $y \in M_1 \cup L_1$ mit $x \prec y$ oder $y \prec x$. Da x beliebig aus I gewählt ist $L \wedge M$ damit überdeckend.

2 $L \wedge M \prec L$

$x \in L \Rightarrow x \in L_1 \textit{ oder } \exists y \in M_1 \textit{ mit } y \prec x \Rightarrow L \wedge M \prec x$
(Entsprechend $L \wedge M \prec M$)

3. $K \prec L, K \prec M \Rightarrow K \prec L \wedge M$ folgt direkt aus $L \wedge M \subset L \cup M$.

□

2.2.2 Der Populationsraum

Mit den bisher vorgestellten Mitteln ist es also nun möglich, in unserem Modell Individuen einer Population zu spezifizieren und ihre verwandtschaftliche Beziehung untereinander zu bestimmen. Das ist natürlich noch nicht besonders viel, bedenkt man, daß eines unserer Ziele in dieser Arbeit, die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Population ist und wir bisher nicht einmal im Stande sind, die Lebensdauer oder -erwartung eines einzigen Individuums zu beobachten. Sei also zuerst einmal ein meßbarer Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben, dessen Elemente $\omega \in \Omega$ die möglichen Lebensläufe eines Individuums repräsentieren, genannt Lebenslauf-Raum. Weiter sei $(S, \mathcal{S})$ ein meßbarer Raum, dessen Elemente den sogenannten *Typ* der Individuen repräsentiere, genannt *Typenraum*. Wie schon zu Beginn des Kapitels erwähnt, stelle man sich hierunter den Genotyp eines Individuums vor.
Interessierende Meßgrößen eines Individuums lassen sich nun als meßbare Funktionen auf dem Lebenslauf-Raum darstellen. Wichtiges Beispiel hierfür sind die Funktionen

$$\tau(n) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}}) \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

wobei $\tau(n)(\omega)$ gerade das Alter eines Individuums mit Lebenslauf ω bei Geburt des n-ten Kindes angebe. (Dabei bedeute $\tau(n)(\omega) = \infty$, daß das n-te Kind nie geboren wurde.)
Auch den Typ eines Individuums werden wir mithilfe der Zufallsvariablen

$$\rho(n) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S}) \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

beobachten, wobei $\rho(n)(\omega)$ gerade der Typ des n-ten Kindes eines Individuums mit Lebenslauf ω sei.

Um nun nicht nur jedes Individuum einzeln, sondern auch die Population als Ganzes betrachten zu können, definieren wir uns den sogenannten

$$\textit{Populationsraum}(D,\mathcal{D}) := (S \times \Omega^I, \mathcal{S} \otimes \mathcal{A}^I).$$

$(s,(\omega_i)_{i\in I}) \in D$ gebe mit s den Typ des Ursprungs an, sowie für jedes Individuum $i \in I$ seinen Lebenslauf ω_i. Da der Typ eines Individuums, wie wir in (2.2) sehen werden, allein vom Lebenslauf seiner Mutter abhängt, ist hiermit auch für jedes weitere Individuum neben dem Ursprung sein Typ festgelegt.
Definieren wir uns noch für $M \subset I$ die Projektionen

$$U_M : S \times \Omega^I \to \Omega^M \qquad \tilde{U}_M : \Omega^I \to \Omega^M,$$

wobei U_x ($\tilde{U}_x$) kurz für $U_{\{x\}}$ ($\tilde{U}_{\{x\}}$) stehe, so können wir jede auf dem Lebenslauf-Raum definierte Zufallsvariable Z auf den Populationsraum übertragen durch

$$Z_x := Z \circ U_x \text{ für } x \in I.$$

Z_x gibt dann gerade den Wert von Z für das Individuum x der Population an.
Ähnlich definieren wir folgende beiden Funktionen

$$\tau_x := \tau(rx) \circ U_{mx} \quad \hat{=} \quad \text{Alter der Mutter bei Geburt von } x \tag{2.1}$$

$$\rho_x := \rho(rx) \circ U_{mx} \quad \hat{=} \quad \text{Typ von } x \tag{2.2}$$

An (2.2) läßt sich nun erkennen, daß die erste unserer gestellten Forderungen an die Population erfüllt ist: Der Typ eines Individuums hängt nur vom Lebenslauf seiner Mutter ab.
Mithilfe der letzten Funktion ρ_x kann man nun auch Zufallsvariablen Z auf $(S \times \Omega)$ durch

$$Z_x := Z(\rho_x, U_x)$$

auf den Populationsraum übertragen.
Weiter definieren wir eine *Shiftfunktion*, die die Beobachtung eines einzelnen aus einem Indivduum x hervorgegangenen Populationszweig ermöglicht, indem x in den Ursprung "geshiftet" wird:

$$S_x := (\rho_x, U_{Pr\{x\}}) \tag{2.3}$$

Interessanter als das Alter seiner Mutter bei Geburt eines Individuums x ist natürlich der absolute Zeitpunkt seiner Geburt, definiert man den Zeitpunkt der "Geburt" des Ursprungs als 0. Dieser wird durch die Zufallsgröße

$$\sigma_x = \sigma_{mx} + \tau_x \quad , \quad \sigma_0 \equiv 0$$

iterativ bestimmt.
Wir definieren weiter für $L \subset I$ die sogenannten *Prä-L-σ-Algebren*

$$\mathcal{F}_L := \mathcal{S} \times \sigma(\tilde{U}_x; L \not\prec x) = \mathcal{S} \times \sigma(\tilde{U}_x; x \notin PrL).$$

Elemente aus $\mathcal{F}_L$ sind also anschaulich Ereignisse, die nicht von Nachfahren von L (und damit insbesondere auch nicht von L selbst) abhängen. Wir schreiben wieder nur kurz $\mathcal{F}_x$ für $\mathcal{F}_{\{x\}}$.
Offensichtlich sind $\tau_x, \rho_x, \sigma_x \quad \mathcal{F}_x$-meßbar.

Folgende beiden Lemmata sind leicht nachzurechnen:

Lemma 2.2.2
$\{\mathcal{F}_L \, ; \, L \subset I\}$ *ist eine Filtration unter* $\prec$.
Insbesondere für $L, M \subset I$

$$L \subset M \Rightarrow M \prec L \Rightarrow \mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_L$$

Lemma 2.2.3
$\mathcal{F}_{L \cup M} = \mathcal{F}_M \cap \mathcal{F}_L \qquad \mathcal{F}_M = \mathcal{F}_{hM}$

2.2.3 Das Wahrscheinlichkeitsmaß

Nun geht es daran, ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Populationsraum zu definieren, welches unseren Vorstellungen von dem Modell, also insbesondere Punkt 1a) unserer Forderungen, entspricht. Gegeben sei ein stochastischer Kern $P : S \times \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$. Dabei gebe $P(s,\cdot)$ gerade die Verteilung auf dem Lebenslauf-Raum für ein Individuum mit Typ s an.
$\mathbb{N}$ sei eine Aufzählung von I derart, daß die Mutter in der Aufzählung stets ihren Kindern vorangestellt sei. (Die Funktionen m und r werden in kanonischer Weise auf $\mathbb{N}$ übertragen, d.h. $m(n)$ liefert die natürliche Zahl, die in obiger Aufzählung die Mutter des Individuums n repräsentiert und $r(n)$ gibt den Rang des Individuums n in der Aufzählung an). Ebenso sei ω_n entsprechend der Schreibweise $\omega_x, x \in I$ der Lebenslauf des Individuums n in der Aufzählung).
Für beliebiges, aber festes $s \in S$, welches den Typ des Ursprungs festlege, definieren wir

$$P_0 := P(s,\cdot)$$

und den Kern P_n von $(\underbrace{\Omega \times \ldots \times \Omega}_{n-mal}, \underbrace{\mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}}_{n-mal})$ nach $(\Omega, \mathcal{A})$

$$P_n\Big((\omega_0, \ldots \omega_{n-1}), A\Big) = P(\rho(r(n))(\omega_{m(n)}), A\Big), \quad n \geq 1,$$

wobei die spezielle Art der Aufzählung - Kinder folgen ihren Müttern - garantiert, daß $\omega_{m(n)} \in \{\omega_0, \ldots \omega_{n-1}\}$.
Nach Ionescu-Tulcea existiert dann ein eindeutig bestimmtes Maß P_s auf $(\Omega^I, \mathcal{A}^I)$ mit

$$\begin{aligned}
&P_s(A_0 \times \ldots \times A_n \times \Omega^{\mathbb{N}\setminus\{0,\ldots n\}}) \\
&= \int_{A_0} \ldots \int_{A_n} P_n((\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}), d\omega_n)\; P_{n-1}((\omega_0, \ldots, \omega_{n-2}), d\omega_{n-1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots P_0(d\omega_0) \\
&= \int_{A_0} \ldots \int_{A_n} P\Big(\rho(r(n))(\omega_{m(n)}), d\omega_n\Big)\; P(\rho(r(n-1))(\omega_{m(n-1)}), d\omega_{n-1}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots P(s, d\omega_0)
\end{aligned}$$

für $A_0, \cdots A_n \in \mathcal{A}$. Durch $\tilde{P}_s(A) = P_s(\{\omega^I \in \Omega^I; (s, \omega^I) \in A\})$ wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Populationsraum definiert, welches wir der

Einfachheit halber auch wieder mit P_s bezeichnen. Aus der Konstruktion von P_s folgt nun die gewünschte Eigenschaft 1a) der Population, daß die Lebenslauf-Verteilung eines Individuums nur von seinem Typ abhängt.
In Situationen, wo der Starttyp s beliebig, aber fest gewählt sei, die spezielle Wahl von s aber für unsere Zwecke unbedeutend ist, schreiben wir auch nur kurz P statt P_s.
E_s bezeichne den Erwartungswert unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P_s und auch hier schreiben wir der Einfachheit halber gelegentlich nur E.

2.3 Die Markov-Eigenschaft der Population

In diesem Abschnitt wollen wir die gewünschte und nun vielleicht auch schon zu vermutende bedingte Unabhängigkeit verschiedener Populationszweige in nachfolgendem Theorem verifizieren.

Theorem 2.3.1 *Gegeben eine Stoplinie $L \subset I$ und nichtnegative, meßbare Funktionen $\varphi_x : (D, \mathcal{D}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+), x \in L$. S_x sei die in (2.3) definierte Shiftfunktion. Dann gilt für jedes $s \in S$*

$$E_s \left[\prod_{x \in L} \varphi_x \circ S_x | \mathcal{F}_L \right] = \prod_{x \in L} E_{\rho_x}[\varphi_x] \qquad P_s\text{-f.s.} \tag{2.4}$$

Beweis:
Betrachten wir zunächst den Fall, daß L endlich und φ_x für alle $x \in L$ Indikatorfunktionen der Form

$$\varphi_x = \prod_{k=0}^{n_x} \mathbf{1}_{A_k^x}(U_{x_k}) \text{ mit } n_x \in \mathbb{N},\ x_0, \dots x_{n_x} \in I \text{ und } A_0^x, \dots A_{n^x}^x \in \mathcal{A}$$

sind. Ohne Einschränkung werde angenommen, daß $x_0 = 0$ und $An(\{x_0, \dots x_{n_x}\}) = \{x_o, \dots, x_{n_x}\}$, d.h. mit jedem x seien auch all seine Vorfahren in $\{x_0, \dots x_{n_x}\}$ enthalten.
Wir erinnern daran, daß xx_k die Konkatenation von x und x_k bezeichne. Damit gilt offensichtlich

$$\varphi_x \circ S_x = \prod_{k=0}^{n_x} \mathbf{1}_{A_k^x}(U_{xx_k}) \qquad \forall x \in L.$$

Sei nun $B \in \mathcal{F}_L$. Also $B = D \times \tilde{U}_{I \setminus PrL}^{-1}(C)$ für $C \in \mathcal{A}^{I \setminus PrL}$ und $D \in \mathcal{S}$ geeignet. Ohne Einschränkung sei $D = \{s\}$ (da der Rest Nullmenge unter P_s ist). Wir zeigen

$$P_s \left(B \cap \bigcap_{x \in L} \bigcap_{k=0}^{n_x} S_x^{-1} \circ U_{x_k}^{-1}(A_k^x) \right) = \int_B \prod_{x \in L} E_{\rho_x}[\varphi_x] \, dP_s$$

und damit die Behauptung, da ρ_x für alle $x \in L$ $\mathcal{F}_L$-meßbar und damit auch $\prod_{x \in L} E_{\rho_x}(\varphi_x)$ $\mathcal{F}_L$-meßbar ist.
Wir schreiben kurz $P_s^{I \setminus PrL}$ für $P_s^{U_{I \setminus PrL}}$.

$$
\begin{aligned}
P_s\left(B\cap\bigcap_{x\in L}\bigcap_{k=0}^{n_x} S_x^{-1}\circ U_{x_k}^{-1}(A_k^x)\right) &= P_s\left(B\cap\bigcap_{x\in L}\bigcap_{k=0}^{n_x} U_{xx_k}^{-1}(A_k^x)\right)\\
&= \int_C \prod_{x\in L}\left(\int_{A_0^x}\cdots\int_{A_{n_x}^x} P(\rho(r(xx_{n_x}))(\omega_{m(xx_{n_x})}), d\omega_{xx_{n_x}}\right.\\
&\qquad \left.\ldots P(\rho(r(xx_0))(\omega_{m(xx_0)}), d\omega_{xx_0})\right)\; P_s^{I\setminus PrL}(d\omega)\\
&= \int_C \prod_{x\in L}\left(\int_{A_0^x}\cdots\int_{A_{n_x}^x} P(\rho(r(x_{n_x}))(\omega_{m(x_{n_x})}), d\omega_{x_{n_x}}\right.\\
&\qquad \left.\ldots P(\rho(r(x))(\omega_{m(x)}), d\omega_0)\right)\; P_s^{I\setminus PrL}(d\omega)\\
&= \int_B \prod_{x\in L} E_{\rho_x(\omega)}(\varphi_x)\; P_s(d\omega),
\end{aligned}
$$

wobei die Produktdarstellung durch die Linieneigenschaft von L ermöglicht wird. In der 3. Gleichheit findet lediglich eine Umnumerierung unter Berücksichtigung von $x_0 = 0$ statt.

Für endliches L kann man nun leicht die Gültigkeit von (2.4) auf Funktionen der Form $\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k$ mit $\alpha_k > 0$ und u_k Indikatorfunktionen (von obiger Form) erweitern. Dann folgt mit monotoner Konvergenz die Behauptung für endliches L und nichtnegative, meßbare Funktionen. Die Erweiterung der Behauptung auf unendliche L folgt mit Hilfe einer Folge endlicher Linien $L_n \subset L \quad L_n \uparrow L$. Denn da mit

$$M_n := E_s[\prod_{x\in L}\varphi_x\circ S_x|\mathcal{F}_{L_n}]$$

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 2.2.2 inverses Martingal ist und wegen $\mathcal{F}_L = \cap_n \mathcal{F}_{L_n}$ gilt

$$M_n \xrightarrow{f.s.} E_s[\prod_{x\in L}\varphi_x\circ S_x|\mathcal{F}_L]$$

und wegen

$$x\in L\setminus L_n \Longrightarrow x\notin PrL_n \Longrightarrow S_x \text{ ist } \mathcal{F}_{L_n}\text{-meßbar}$$

folgt

$$
\begin{aligned}
E_s[\prod_{x\in L}\varphi_x\circ S_x|\mathcal{F}_L] &= \lim_{n\to\infty} E_s[\prod_{x\in L}\varphi_x\circ S_x|\mathcal{F}_{L_n}]\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{x\in L\setminus L_n}\varphi_x\circ S_x \prod_{x\in L_n} E_{\rho_x}[\varphi_x]\right)\\
&= \prod_{x\in L} E_{\rho_x}[\varphi_x] \quad P_s\text{-f.s.}
\end{aligned}
$$

$\square$

Theorem 2.3.2 *Sei $\{\tilde{P}_s \ , \ s \in S\}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem Populationsraum $(D, \mathcal{D})$ mit der Eigenschaft, daß*
$\tilde{P}_s(S_x \in \cdot | \mathcal{F}_x) = \tilde{P}_{\rho_x}(\cdot)$.
Dann sind für jede Linie $L \subset I$ unter $\tilde{P}_s$ (mit s beliebig) die $S_x, x \in L$ bedingt unter $\mathcal{F}_L$ unabhängig.

Beweis:
Sei L als endlich angenommen. Also $L = \{x_1, \ldots x_n\}$. φ_{x_i} seien für $i = 1, \ldots n$ Indikatorfunktionen. Mit $x_1 \in L \Rightarrow \mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_{x_1}$ folgt nun

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_s\left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \circ S_{x_i} | \mathcal{F}_L\right] &= \tilde{E}_s\left[\tilde{E}_s[\prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \circ S_{x_i} | \mathcal{F}_{x_1}] | \mathcal{F}_L\right] \\
&= \tilde{E}_s\left[\prod_{i=2}^{n} \varphi_{x_i} \circ S_{x_i} \tilde{E}_s\left[\varphi_{x_1} \circ S_{x_1} | \mathcal{F}_{x_1}\right] | \mathcal{F}_L\right] \\
&= \tilde{E}_s\left[\prod_{i=2}^{n} \varphi_{x_i} \circ S_{x_i} \tilde{E}_{\rho_{x_1}}[\varphi_{x_1}] | \mathcal{F}_L\right] \\
&= \tilde{E}_{\rho_{x_1}}[\varphi_{x_1}] \, \tilde{E}_s\left[\prod_{i=2}^{n} \varphi_{x_i} \circ S_{x_i} | \mathcal{F}_L\right].
\end{aligned}$$

Iterativ erhält man nun unter Berücksichtigung von $\tilde{E}_{\rho_{x_i}}[\varphi_{x_i}] = \tilde{E}_s[\varphi_{x_i} \circ S_{x_i} | \mathcal{F}_L]$ (Argumentation wie oben)

$$\tilde{E}_s\left[\prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \circ S_{x_i} | \mathcal{F}_L\right] = \prod_{i=1}^{n} \tilde{E}_{\rho_{x_i}}[\varphi_{x_i}] = \prod_{i=1}^{n} \tilde{E}_s[\varphi_{x_i} \circ S_{x_i} | \mathcal{F}_L]$$

und damit das Gewünschte.
Die Verallgemeinerung auf unendliche L verläuft analog zur entsprechenden Verallgemeinerung im Beweis von Theorem 2.3.1

□

Die Aussage der Theoreme 2.3.1 und 2.3.2 werden wir auch als Markov-Eigenschaft der Population bezeichnen. Der Grund dafür liegt auf der Hand: Der Lebenslauf von Individuen aus der Nachkommenschaft einer Linie L gegeben $\mathcal{F}_L$, also die Informationen über sämtliche Individuen außer den Nachfahren von L, hängt nur von den Typen der "Linien-Individuen" ab, also nur von Informationen über die direkten Vorfahren von L. Dies ist aber doch gerade die Markovsche Struktur.
Auch eine Form zeitlicher Homogenität liegt vor:
Ist $x_1 \in I$ Nachkomme von $x_2 \in I$, also $x_1 = x_2 y$ mit $y \in I$ geeignet, so ist sein Lebenslauf gegeben die Informationen über alle "Nicht-Nachfahren" von x_2 verteilt wie der Lebenslauf von y unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\rho_{x_2}}$, unter dem der Ursprung den Typ ρ_{x_2} hat.

2.4 Optionalität

Stellt sich nun die Frage, ob ein ähnliches Analogon zur starken Markov-Eigenschaft existiert. Dazu wäre jedoch zuerst einmal ein Analogon zu Stopzeiten für Markov-Ketten erforderlich, welches nachfolgende Definition liefert:

Definition 2.4.1 Eine Abbildung $J : S \times \Omega^I \to \mathcal{P}(I)$ (mit $\mathcal{P}(I)$ = Potenzmenge von I) heißt *optional*, wenn

$$\{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L \quad \forall L \subset I. \tag{2.5}$$

Ist $J(\omega)$ auch noch Stoplinie für jedes $\omega \in D$, so heißt J *optionale Linie.*

Bemerkung 2.4.2 Es genügt in obiger Definition (2.5) nur für Linien $L \subset I$ zu fordern, da sich unter Berücksichtigung von $\{J \prec L\} = \{J \prec hL\}, \mathcal{F}_L = \mathcal{F}_{hL}$ und der Tatsache, daß hL Linie ist, an der Definition dann nichts ändert.

Analog zu den Bezeichnungen für Linien sagen wir, daß die optionale Linie J_1 eine optionale Linie J_2 *überdeckt*, wenn

$$\{J_2 \prec J_1\} \quad P_s\text{-f.s.} \quad \forall s \in S$$

und

$$\forall x \in PrJ_2 \; \exists y \in J_1 \; : \; x \prec y \vee y \prec x \quad P_s\text{-f.s.} \quad \forall s \in S.$$

Überdeckt die optionale Linie J den Ursprung, so heißt sie wieder nur kurz *überdeckend*; sie habe *endliche Generation*, wenn

$$g(J) < \infty \quad P_s\text{-f.s.} \quad \forall s \in S.$$

Die Klasse der überdeckenden optionalen Linien bezeichnen wir mit $\bar{\mathcal{C}}$, die Klasse der überdeckenden optionalen Linien mit endlicher Generation mit $\bar{\mathcal{C}}_0$. Eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt wieder *aufsteigend (absteigend)*, wenn

$$J_n \prec J_{n+1} \quad (J_{n+1} \prec J_n) \quad P_s\text{-f.s.} \quad \forall s \in S.$$

Nachfolgendes Lemma soll zeigen, daß auch auf $\bar{\mathcal{C}}_0$ durch $\prec$ eine (wenn auch schwächere) Ordnung gegeben ist. (Diesselbe Aussage ließe sich auch für $\bar{\mathcal{C}}$ treffen, ist für unsere Zwecke aber unbedeutend.)

Satz 2.4.3 *$\bar{\mathcal{C}}_0$ ist mit der Relation $\prec$ eine nach oben gerichtete Menge in dem Sinne, daß*

$$J_1, J_2 \in \bar{\mathcal{C}}_0 \Longrightarrow \exists J \in \bar{\mathcal{C}}_0 \; : \; J_1 \prec J \;\wedge\; J_2 \prec J.$$

Beweis:
Wie schon im Beweis von Satz 2.2.1 definieren wir

$$J := \{x \in J_1; J_2 \prec x\} \cup \{x \in J_2; J_1 \prec x\}.$$

Daß J eine überdeckende Linie endlicher Generation ist und $J_1 \prec J$ sowie $J_2 \prec J$ gilt, ist analog zum Beweis von Satz 2.2.1 zu zeigen.
J ist aber auch optional, denn

$$\{J \prec M\} = \{J_1 \prec M\} \cap \{J_2 \prec M\} \in \mathcal{F}_M \quad \forall M \subset I.$$

Denn:
$'' \subset " : \omega \in \{J \prec M\}$
Sei $m \in M$ beliebig $\Rightarrow \exists x \in J(\omega) : x \prec m$
1.Fall : $x \in J_1(\omega) \wedge \exists y \in J_2(\omega) : y \prec x \Rightarrow J_1(\omega) \prec m \wedge J_2(\omega) \prec x \prec m$
(Der 2.Fall $x \in J_2(\omega)$ verläuft analog)
Da $m \in M$ beliebig : $\omega \in \{J_1 \prec M\} \cap \{J_2 \prec M\}$
$'' \supset''$: $\omega \in \{J_1 \prec M\} \cap \{J_2 \prec M\}$
Sei $m \in M$ beliebig $\Rightarrow (\exists x \in J_1(\omega) : x \prec m) \wedge (\exists y \in J_2(\omega) : y \prec m)$
$\Rightarrow \exists a \in I : xa = y \vee ya = x$
Ohne Einschränkung sei $xa = y$ und damit $y \in J(\omega)$.
Da $m \in M$ beliebig gewählt, also $\omega \in \{J \prec M\}$.

$\square$

Anders als $\mathcal{C}_0$ ist $\bar{\mathcal{C}}_0$ keine nach unten gerichtete Menge mehr. Der Versuch analog zu dem Vorgehen in Satz 2.2.1
$J_1 \wedge J_2 := \{x \in J_1; \exists y \in J_2 : x \prec y\} \cup \{x \in J_2; \exists y \in J_1 : x \prec y\}$ als untere Schranke zu wählen, scheitert an der Tatsache, daß $J_1 \wedge J_2$ nicht mehr optional sein muß.

Anschaulich gibt eine optionale Linie die zufallsabhängige Auswahl von Individuen an, deren Nachfahren ein Betrachter nicht mehr beobachtet. Das Ereignis, "vor L zu stoppen",$\{J \prec L\}$, d.h. die Nachfahren von L nicht mehr zu beobachten, hängt dabei nur von den Beobachtungen bis zum Zeitpunkt L ab.
Optionale Linien in unserem Modell sind also in der Tat mit dem Konzept der Stopzeiten bei Markov-Ketten vergleichbar.

Nun einige Beispiele, um obige Begriffe etwas zu veranschaulichen:
Dabei ist zu beachten, daß wenn stets $0 \in J$ gilt, ist J optional, da $\{J \prec L\} \supset \{0 \prec L\} = S \times \Omega^I \in \mathcal{F}_L$.

- $\mathcal{Y}_t = \{x \in I; \sigma_x \leq t\}, t \in \mathbb{R} \mathrel{\hat{=}}$ Menge der bis zum Zeitpunkt t geborenen Individuen.
  Da $0 \in \mathcal{Y}$ ist wie oben erläutert $\mathcal{Y}$ optional.(Aber natürlich im allgemeinen keine Linie.)

- $\Re := \{x \in I; \sigma_x < \infty\} \mathrel{\hat{=}}$ Menge aller "realisierten", d.h. tatsächlich geborenen Individuen ist aus dem selben Grund wie $\mathcal{Y}$ optional.

- Ist $\lambda : S \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, die die Lebensdauer eines Individuums mit Lebenslauf ω angibt, so ist

$\mathcal{L} := \{x \in I; \sigma_x \leq t < \sigma_x + \lambda_x\}$ die Menge der zum Zeitpunkt t lebenden Individuen. Da λ_x eine Funktion in U_x ist und damit nicht $\mathcal{F}_x$-meßbar, ist $\mathcal{L}$ nicht optional, denn $\{\mathcal{L} \prec x\} = \cup_{k \geq 0}\{\sigma_{m^k x} \leq t < \sigma_{m^k x} + \lambda_{m^k x}\}$ ist daher nicht $\mathcal{F}_x$-meßbar.
$\mathcal{L}$ ist offensichtlich im allgemeinen auch keine Linie.

- Eine wichtige Rolle wird später die Menge der nach t folgenden Generation $\mathcal{Z}_t := \{x \in I; \sigma_{mx} \leq t < \sigma_x\}$ spielen. Daß $\mathcal{Z}_t$ die Eigenschaft der Stoplinie erfüllt, ist aus der Definition gegeben. Die Optionalität folgt aus der Darstellung $\{\mathcal{Z}_t \prec L\} = \cap_{x\in L} \cup_{k\geq 0} \{t < \sigma_{m^k x}\}$ und der Tatsache, daß $\sigma_{m^k x}$ $\mathcal{F}_L$-meßbar ist für $x \in L$ und $k \in \mathbb{N}_0$ (L sei ohne Einschränkung Linie).

- Zählt man die Individuen geordnet nach ihrem Geburtszeitpunkt auf, so sei X_n das n-te Individuum in dieser Aufzählung, d.h. das n.-Geborene. X_n ist trivialerweise eine Linie, da es nur aus einem Element besteht. Für $L \subset I$ gilt
$$\begin{aligned}&\{X_n \prec L\} = \cap_{x\in L} \cup_{k\geq 0} \{m^k x = X_n\}\\ &= \cap_{x\in L} \cup_{k\geq 0} \{\omega \in D; \#\{y \notin Prx; \sigma_y(\omega) < \sigma_{m^k x}(\omega)\} = n-1\}\\ &= \cap_{x\in L} \cup_{k\geq 0} \{\omega \in D; \#\{y \notin PrL; \sigma_y(\omega) < \sigma_{m^k x}(\omega)\} = n-1\} \in \mathcal{F}_L.\end{aligned}$$
Damit ist X_n also auch optional.

- Die "realisierte" n-te Generation $\mathbb{N}^n \cap \Re = \{x \in \mathbb{N}^n; \sigma_x < \infty\}$ ist als Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ offenbar eine Linie.
Wegen
$$\begin{aligned}\{\mathbb{N}^n \cap \Re \prec L\} &= \cap_{x\in L}\{m^{g(x)-n}x \in \Re\}\\ &= \cap_{x\in L}\{\sigma_{m^{g(x)-n}x} < \infty\} \in \mathcal{F}_L\end{aligned}$$
ist $\mathbb{N}^n \cap \Re$ also auch optional. (Existiert ein $x \in L$ mit $g(x) < n$, so ist $\{\mathbb{N}^n \cap \Re \prec L\}$ als leere Menge trivialerweise in $\mathcal{F}_L$ enthalten.)

Nun definieren wir uns für eine optionale Abbildung J analog zu $\mathcal{F}_\tau$, der σ-Algebra der τ-Vergangenheit für Stopzeiten τ, die *Prä-J -σ-Algebra* oder auch *σ-Algebra der J -Vergangenheit* $\mathcal{F}_J$:

Definition 2.4.4 Sei J optionale Linie.
$$A \in \mathcal{F}_J :\Longleftrightarrow \forall L \subset I : A \cap \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L$$

Wir werden jetzt einige nützliche Eigenschaften und Rechenregeln für optionale Abbildungen und ihre σ-Algebra der J-Vergangenheit zusammenstellen, wozu im folgenden stets $L \subset I$ und $J : S \times \Omega^I \to \mathcal{P}(I)$ angenommen werde.

Lemma 2.4.5
J ist optional $\Longleftrightarrow \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L$ für alle endlichen L

Ist J optional, so ist $A \in \mathcal{F}_J \Longleftrightarrow A \cap \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L$ für alle endlichen L

Beweis:
Wir zeigen nur die Rückrichtung der zweiten Behauptung, da ihre Hinrichtung trivial und die erste Behauptung mit ähnlichen Argumenten zu zeigen ist.
Es gelte $A \cap \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L$ für alle endlichen L. Wähle zu beliebigem L endliche L_n mit $L_n \uparrow L$. Nach Lemma 2.2.2 ist $\mathcal{F}_{L_{n+1}} \subset \mathcal{F}_{L_n}$ und damit $\mathcal{F}_L = \cap_n \mathcal{F}_{L_n}$. Mit $\cap_n\{J \prec L_n\} = \{J \prec \cup_n L_n\}$ folgt dann
$$\begin{aligned}&A \cap \{J \prec L\} = A \cap \{J \prec \cup_n L_n\} = A \cap \cap_n\{J \prec L_n\} \in \mathcal{F}_{L_n}\ \forall n \in \mathbb{N}\\ &\Longrightarrow A \cap \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L.\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.4.6 *Sei $M \subset I$.*

$$J \equiv M \Longrightarrow J \textit{ ist optional und } \mathcal{F}_J = \mathcal{F}_M$$

Beweis:
$\{J \prec L\} \in \{\emptyset, S \times \Omega^I\}$ und damit ist J optional.

$$A \in \mathcal{F}_J \Rightarrow A = A \cap \{J \prec M\} \in \mathcal{F}_M$$
$$A \in \mathcal{F}_M \Rightarrow A \cap \{J \prec L\} = \begin{cases} \emptyset & : \quad M \not\prec L \\ A & : \quad M \prec L \end{cases}$$

Und da aus $M \prec L \quad \mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_L$ folgt, damit $A \cap \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L$, d.h. ($L$ beliebig) $A \in \mathcal{F}_J$.

$\square$

Lemma 2.4.7
$$J \textit{ optional } \Longrightarrow \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_J$$

Beweis:
Mit Lemma 2.2.2 und Lemma 2.2.3 folgt

$$\{J \prec L\} \cap \{J \prec M\} \in \mathcal{F}_L \cap \mathcal{F}_M = \mathcal{F}_{L \cup M} \subset \mathcal{F}_M.$$

$\square$

Lemma 2.4.8 *Seien J_1 und J_2 optional.*

$$J_1 \prec J_2 \Longrightarrow \mathcal{F}_{J_1} \subset \mathcal{F}_{J_2}$$

Beweis:
Für $A \in \mathcal{F}_{J_1}$ ist wegen $\{J_2 \prec L\} \subset \{J_1 \prec L\}$

$$A \cap \{J_2 \prec L\} = A \cap \{J_1 \prec L\} \cap \{J_2 \prec L\} \in \mathcal{F}_L.$$

$\square$

Lemma 2.4.9 *Sei J optionale Linie.*

$$\{x \in J\} \in \mathcal{F}_J \cap \mathcal{F}_x$$

Beweis:
Mit Hilfe von Lemma 2.4.7 folgt $\{x \in J\} \stackrel{JLinie}{=} \{J \prec x\} \cap \{J \prec mx\}^c \in \mathcal{F}_J$ und wegen $\mathcal{F}_{mx} \subset \mathcal{F}_x$ ist $\{x \in J\}$ damit auch schon in $\mathcal{F}_x$.

□

Lemma 2.4.10 *Sei J optionale Linie.*

$$\{L \subset J\} \in \mathcal{F}_J \cap \mathcal{F}_L \textit{ und } \{J \subset L\} \in \mathcal{F}_J$$

Beweis:

$$\{L \subset J\} = \bigcap_{x \in L} \{x \in J\} \in \mathcal{F}_J \text{ nach Lemma 2.4.9}$$

$$\begin{aligned} \{L \subset J\} &= \bigcap_{x \in L} \{x \in J\} \stackrel{JLinie}{=} \bigcap_{x \in L} (\{J \prec x\} \cap \{J \prec mx\}^c) \\ &= \{J \prec L\} \cap \bigcap_{x \in L} \{J \prec mx\}^c \in \mathcal{F}_L \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Optionalität und Lemma 2.4.7 folgt.

$$\{J \subset L\} = \{L^c \subset J^c\} = \bigcap_{x \in L^c} \{x \in J\}^c \in \mathcal{F}_J \text{ nach Lemma 2.4.9}$$

□

Lemma 2.4.11 *Sei J optionale Linie.*

$$\{J = L\} \in \mathcal{F}_J$$

Beweis:
Folgt direkt aus $\{J = L\} = \{J \subset L\} \cap \{L \subset J\}$ und Lemma 2.4.10.

□

Lemma 2.4.12 *Sei J optionale Linie und $A \in \mathcal{F}_L$ oder $A \in \mathcal{F}_J$.*

$$A \cap \{J = L\} \in \mathcal{F}_J \cap \mathcal{F}_L$$

Beweis:
Sei $A \in \mathcal{F}_L$. (Für $A \in \mathcal{F}_J$ ist der Nachweis ähnlich.)

$$A \cap \{J = L\} = A \cap \{J = L\} \cap \{J \prec L\} \in \mathcal{F}_L,$$

denn $\{J = L\} \in \mathcal{F}_J$ (Lemma 2.4.11)

$$\begin{aligned} A \cap \{J = L\} \cap \{J \prec M\} &= A \cap \{J = L\} \cap \{L \prec M\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & : L \not\prec M \\ A \cap \{J = L\} & : L \prec M \end{cases} \end{aligned}$$

Und mit $L \prec M \Rightarrow \mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_M$ und dem schon Gezeigtem ist damit

$$A \cap \{J = L\} \cap \{J \prec M\} \in \mathcal{F}_M.$$

□

Lemma 2.4.13 *Ist $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine absteigende Folge optionaler Linien, gilt*

$$J := h\bigcup_n J_n \text{ ist optionale Linie und } \mathcal{F}_J = \bigcap_n \mathcal{F}_{J_n}.$$

Beweis:
Sei $L \subset I$ endlich, d.h. $L = \{x_1, \dots x_m\}$.

$$\begin{aligned}\{J \prec L\} &= \{L \subset Pr(\cup_n J_n)\} = \{L \subset \cup_n PrJ_n\} \overset{(*)}{=} \cup_n\{L \subset PrJ_n\} \\ &= \cup_n\{J_n \prec L\} \in \mathcal{F}_L,\end{aligned}$$

denn offenbar ist $\cup_n PrJ_n = Pr(\cup_n J_n)$ und die Gleichheit $(*)$ gilt wegen $\cup_n\{L \subset PrJ_n\} \subset \{L \subset \cup_n PrJ_n\}$ (klar) und $L \subset \cup_n PrJ_n(\omega) \Rightarrow x_k \in PrJ_{n_k}(\omega) \quad \forall k = 1\dots m$ ($n_1, \dots, n_k$ geeignet) $\Rightarrow L \subset PrJ_{max\{n_1,\dots n_m\}}(\omega)$.
Nach Lemma 2.4.5 ist J optional und nach Definition (als Kopf einer Menge) auch Linie. Für die zweite Behauptung des Lemmas erhält man wegen $J \prec J_n \; \forall n$ und Lemma 2.4.8 $\mathcal{F}_J \subset \cap_n \mathcal{F}_{J_n}$.
Für endliches L und $A \in \cap_n \mathcal{F}_{J_n}$ gilt $A \cap \{J \prec L\} \overset{(*)}{=} \cup_n A \cap \{J_n \prec L\} \in \mathcal{F}_L$ und mit Lemma 2.4.5 damit $A \in \mathcal{F}_J$. Die Gleichheit bei (*) resultiert aus der schon nachgewiesenen Beziehung $\{J \prec L\} = \cup_n\{J_n \prec L\}$.

□

Lemma 2.4.14 *Sei J optionale Linie und $K \subset I$.*

$J \cap K$ ist optionale Linie.

Beweis:
Die Linieneigenschaft ist klar. Für den Nachweis der Optionalität sei zuerst K endlich.

$$\{J \cap K \prec L\} = \bigcup_{M\subset K;\, M\prec L} \{M \subset J\} \in \mathcal{F}_L,$$

da nach Lemma 2.4.10 $\{M \subset J\} \in \mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_L$ für $M \prec L$.
(Die Endlichkeit von K wurde wegen der benötigten Abzählbarkeit der Vereinigung gewählt.)
Sei nun K beliebig und $K_n \uparrow K$ mit K_n endlich.

$$J \cap K = \cup_n(J \cap K_n) \overset{J\cap K \text{ Linie}}{=} h(\cup_n(J \cap K_n))$$

und mit $J \cap K_{n+1} \prec J \cap K_n$, Lemma 2.4.13 und eben Gezeigtem folgt die Optionalität von $J \cap K$.

□

Lemma 2.4.15 *Sei J optional.*

$$J \cap \Re = J \cap \{x \in I; \sigma_x < \infty\} \text{ ist optional.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\{J \cap \Re \prec L\} &= \bigcap_{x \in hL} \bigcup_{k=0}^{g(x)} (\{m^k x \in J\} \cap \{\sigma_{m^k x} < \infty\}) \\ &= \bigcap_{x \in hL} \bigcup_{k=0}^{g(x)} \Big(\{J \prec L\} \cap \{m^k x \in J\}) \cap \{\sigma_{m^k x} < \infty\}\Big) \in \mathcal{F}_L\end{aligned}$$

In letzter Gleichung geht Lemma 2.4.9 ein.

□

Obiger Beweis läßt sich leicht erweitern für folgende Erweiterung von Lemma 2.4.15:

Lemma 2.4.16 *Sei J_1 optionale Linie und J_2 so, daß $\{x \in J_2\} \in \mathcal{F}_L\ \forall x \in (L \cup AnL)$.*
Dann ist $J_1 \cap J_2$ eine optionale Linie.

2.5 Die starke Markov-Eigenschaft der Population

Nachdem wir nun einige Rechenregeln zusammengestellt haben, bekommen wir nun die ersten "interessanteren" Resultate:

Lemma 2.5.1 *Sei $\varphi : (D, \mathcal{D}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ eine meßbare, nichtnegative Funktion, J eine optionale Linie und $L \subset I$. Dann gilt*

$$E[\varphi|\mathcal{F}_J]\mathbf{1}_{\{J=L\}} = E[\varphi|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}} \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
Wir zeigen zuerst, daß $E[\varphi|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}}$ $\mathcal{F}_J$-meßbar ist:
Sei $A \in \mathcal{B}_+, M \subset I$ beliebig.
1.Fall : $0 \notin A$

$$\begin{aligned}&\Big(E[\varphi|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}}\Big)^{-1}(A) \cap \{J \prec M\} \\ &= E[\varphi|\mathcal{F}_L]^{-1}(A) \cap \{J = L\} \cap \{J \prec M\} \\ &= \left\{\begin{array}{rcl} \emptyset & : & L \not\prec M \\ E[\varphi|\mathcal{F}_L]^{-1}(A) \cap \{J = L\} \cap \{J \prec M\} & : & L \prec M \end{array}\right. \quad \in \mathcal{F}_M\end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von $\{J = L\} \in \mathcal{F}_J$ (Lemma 2.4.11) und
$L \prec M \Rightarrow \mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_M$.
Der Fall $0 \in A$ verläuft analog unter Beachtung von

$$\begin{aligned}&\Big(E[\varphi|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}}\Big)^{-1}(A) \cap \{J \prec M\} \\ &= (\{J \neq L\} \cap \{J \prec M\}) \cup \Big(\{J = L\} \cap \{J \prec M\} \cap E[\varphi|\mathcal{F}_L]^{-1}(A)\Big)\end{aligned}$$

Damit ist die $\mathcal{F}_J$-Meßbarkeit gezeigt. Sei nun $A \in \mathcal{F}_J$.

$$\begin{aligned}\int_A E[\varphi|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}}dP &= \int_{A\cap\{J=L\}} E[\varphi|\mathcal{F}_L]dP \\ &\overset{*}{=} \int_{A\cap\{J=L\}} \varphi dP,\end{aligned}$$

wobei die Gleichheit in $(*)$ aus Lemma 2.4.12 folgt. Da nach Lemma 2.4.11 $\{J = L\} \in \mathcal{F}_J$ damit also

$$E[\varphi|\mathcal{F}_J]\mathbf{1}_{\{J=L\}} = E[\varphi\mathbf{1}_{\{J=L\}}|\mathcal{F}_J] = E[\varphi|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}} \quad P\text{-f.s.}$$

□

Korollar 2.5.2 *Sei $\varphi : (D, \mathcal{D}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ eine meßbare, nichtnegative Funktion und J eine optionale Linie, die nur abzählbar viele Werte annimmt. $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(I)$ bezeichne diese Menge. Dann gilt*

$$E[\varphi|\mathcal{F}_J] = \sum_{L\in\mathcal{L}} E[\varphi|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}} \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
Mit der Darstellung $E[\varphi|\mathcal{F}_J] = \sum_{L\in\mathcal{L}} E[\varphi|\mathcal{F}_J]\mathbf{1}_{\{J=L\}}$ P-f.s. ist unter Hinweis auf Lemma 2.5.1 nichts mehr zu zeigen.

□

Unter Beachtung, daß die endlichen Teilmengen von I abzählbar sind, werden wir dieses Korollar häufig für endliche optionale Linien, d.h. optionale Linien, die als Werte nur endliche Teilmengen aus I annehmen, anwenden.

Nun sind wir soweit, das entsprechende Pendant zur starken Markov-Eigenschaft für Markov-Ketten zu beweisen, welches lautet:

Theorem 2.5.3 *Seien $\varphi_x : S \times \Omega^I \to [0, 1]$ für jedes $x \in I$ meßbare Funktionen und J eine optionale Linie. Dann gilt*

$$E\left[\prod_{x\in J} \varphi_x \circ S_x|\mathcal{F}_J\right] = \prod_{x\in J} E_{\rho_x}[\varphi_x] \quad P\text{-f.s.}$$

Beweis:
$\varphi := \prod_{x\in J} \varphi_x \circ S_x$.
Sei J als endlich angenommen und bezeichne fI die Menge der endlichen Teilmengen von I. Mit Korollar 2.5.2 und Theorem 2.3.1 erhält man

$$\begin{aligned}E[\varphi|\mathcal{F}_J] &= \sum_{L\in fI} E[\prod_{x\in L} \varphi_x \circ S_x|\mathcal{F}_L]\mathbf{1}_{\{J=L\}} \\ &= \sum_{L\in fI} \prod_{x\in L} E_{\rho_x}[\varphi_x]\mathbf{1}_{\{J=L\}} \\ &= \prod_{x\in J} E_{\rho_x}[\varphi_x] \quad P\text{-f.s.}\end{aligned}$$

Sei nun J nicht mehr als endlich vorausgesetzt.
Wir definieren für endliche $K_n \subset I$ mit $K_n \uparrow I$ die (nach Lemma 2.4.14) optionalen, endlichen Linien $J_n := J \cap K_n$. Da offensichtlich $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ absteigende Folge und $h(\cup_n J_n) = h(J) = J$ gilt nach Lemma 2.4.13 $\mathcal{F}_J = \cap_n \mathcal{F}_{J_n}$.
Wegen $\mathcal{F}_{J_{n+1}} \subset \mathcal{F}_{J_n}$ ist $(E[\varphi|\mathcal{F}_{J_n}])_{n\in\mathbb{N}}$ inverses Martingal und daher (siehe Neveu[9], Seite 118)

$$E[\varphi|\mathcal{F}_{J_n}] \overset{P\text{-f.s.}}{\to} E[\varphi|\mathcal{F}_J]$$

und damit

$$\begin{aligned} E[\varphi|\mathcal{F}_J] &= \lim_{n\to\infty} E[\prod_{x\in J} \varphi_x \circ S_x|\mathcal{F}_{J_n}] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[\prod_{x\in J\setminus J_n} \varphi_x \circ S_x \prod_{x\in J_n} \varphi_x \circ S_x|\mathcal{F}_{J_n}] \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \prod_{x\in J\setminus J_n} \varphi_x \circ S_x \prod_{x\in J_n} E_{\rho_x}[\varphi_x] \\ &= \prod_{x\in J} E_{\rho_x}[\varphi_x] \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Die in $(*)$ benötigte $\mathcal{F}_{J_n}$-Meßbarkeit von $\prod_{x\in J\setminus J_n} \varphi_x \circ S_x$ läßt sich leicht nachweisen.

□

Wir nennen die Aussage dieses Theorems im folgenden auch nur starke Markov-Eigenschaft.

2.6 Die Malthusische Population

Um das asymptotische Verhalten der Population, also ihr Langzeitverhalten untersuchen zu können, müssen wir eine wesentliche Voraussetzung an sie stellen: Ihr Wachstum muß "in den Griff zu bekommen sein". Diese Forderung werden wir nun mathematisch präzisieren:
Wir definieren den *Reproduktionsprozeß* ξ, den *Reproduktionkern* μ sowie den zugehörigen Erneuerungskern ν durch

$$\xi(A\times B) = \#\{n\in\mathbb{N}; \rho(n)\in A, \sigma(n)\in B\}$$

$$\xi_x(A\times B) = \xi(A\times B)\circ U_x$$

$$\mu(s, A\times B) = \int_\Omega \xi(A\times B)(\omega)P(s,d\omega) = E_s[\xi_0(A\times B)]$$

$$\nu(s, A\times B) = \sum_{n\geq 0} \mu^n(s, A\times B)$$

mit $s \in S,\ A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{B}$.
μ werde als irreduzibel (π bezeichne das maximale irreduzible Maß) und quasi-$\pi \otimes \lambda$-stetig angenommen. Nach Abschnitt 1.3.2, Satz 1.3.10 erfüllt μ damit die Minorisierungsbedingung und μ sei α-rekurrent, habe also insbesondere endlichen Konvergenzparameter α. (Dies ist gerade die oben genannte Voraussetzung an das Populationswachstum.)
Unter diesen Voraussetzungen existieren nach Abschnitt 1.3.5, Theorem 1.3.22 und Theorem 1.3.23 für μ_α eine invariante Funktion h sowie ein invariantes Maß, welches auch maximales irreduzibles Maß für μ ist und daher ohne Einschränkung schon π selbst dieses Maß sei.
Nun definieren wir uns den Kern $Q : S \times (\mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$Q(r, ds \times dt) = \frac{h(s)}{h(r)}\, \mu_\alpha(r, ds \times dt)$$

und setzen voraus, daß

$$0 < \beta := \int_S \int_{S \times \mathbb{R}_+} t h(s) \mu_\alpha(r, ds \times dt) \pi(dr) \ < \infty. \tag{2.6}$$

Nach Kapitel 1.4, Satz 1.4.15 ist Q nichtnegativer, irreduzibler, quasi-$\pi \otimes \lambda$-stetiger, positiv-rekurrenter Übergangskern mit invariantem Maß $h\pi$, definiert durch

$$h\pi(A) := \int_A h(s)\pi(ds).$$

Wir nehmen zusätzlich an, daß $h\pi$ endlich ist, also ohne Einschränkung ein Wahrscheinlichkeitsmaß.
Sind all diese Voraussetzungen gegeben, nennen wir die Population *Malthusisch* und α den *Malthusischen Parameter*. Schauen wir uns diese gegebenen Voraussetzungen nun noch einmal aus anschaulicher Perspektive an:
$\mu(s, A \times B)$ gibt offenbar die durchschnittliche Anzahl von Individuen erster Generation an, deren Typ in A und Geburtszeitpunkt in B liegt. Entsprechend erhält man durch einfache Rechnung, daß μ^n die durchschnittliche Anzahl von Individuen der n-ten Generation mit Typ in A und Geburtszeitpunkt in B angibt. Der Erneuerungskern ν ist also nichts anderes als die durchschnittliche Anzahl aller Individuen der Population mit Typ in A und Geburtszeitpunkt in B. Die durchschnittliche Anzahl der Individuen erster Generation kann nun durch Übergang zu μ_α exponentiell erhöht oder verringert werden. Dabei gibt der Malthusische Paramter genau denjenigen Wert α an, daß eine Abweichung von α nach oben bzw. unten zum Aussterben zumindest einiger Typenmengen (nämlich den kleinen Mengen) bzw. zur Explosion der Population führen würde. Aus diesen Gründen heißt eine Population auch *superkritisch*, wenn $\alpha > 0$, *kritisch*, wenn $\alpha = 0$ und *subkritisch*, wenn $\alpha < 0$. Mit der Voraussetzung $\alpha \geq 0$ schließen wir den eher uninteressanten subkritischen Fall aus.
Irreduzibilität besagt gerade, daß keine "disjunkten Typenmengen" existieren sollen, d.h. die Möglichkeit, daß ein Individuum mit Typ s keine Nachfahren mit Typ in $A \in \mathcal{S}^+$ haben kann, wird ausgeschlossen.

2.7 Das intrinsische Martingal

Als wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung des Langzeitverhaltens einer Malthusischen Population wird uns der folgende *intrinsische Prozess* $\{w_M; M \subset I\}$ dienen, definiert durch

$$w_M = \sum_{x \in M} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x).$$

Offensichtlich gilt $w_M = w_{M \cap \Re}$.
Wir nennen eine Folge $(w_{L_n})_{n\in\mathbb{N}}$ auch *aufsteigend*, wenn dies für $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt. In den Theoremen 2.7.3 und 2.8.7 werden wir nachweisen, daß $\{w_M; M \in \mathcal{C}_0\}$ sowie $\{w_J; J \in \bar{\mathcal{C}}_0\}$ Martingale bzgl. $(\mathcal{F}_M)_{M\in\mathcal{C}_0}$ bzw. $(\mathcal{F}_J)_{J\in\bar{\mathcal{C}}_0}$ bilden. Im nachfolgenden Kapitel werden wir dann ihr Konvergenzverhalten untersuchen. Eine Theorie über Martingale mit nach oben gerichteter Indexmenge, wie sie nach den Sätzen 2.2.1 und 2.4.3 mit der Relation $\prec$ durch $\mathcal{C}_0$ und $\bar{\mathcal{C}}_0$ gegeben ist, findet sich in Neveu[9], Kapitel 5, worauf wir des öfteren verweisen werden. Bevor wir nun aber den intrinsischen Prozeß genauer betrachten, zwei im folgenden sehr hilfreiche Lemmata:

Lemma 2.7.1 *Seien $x, y \in I$ und S_x die in (2.3) definierte Shift-Funktion. Dann gilt*

$$\sigma_{xy} = \sigma_x + \sigma_y \circ S_x \qquad \rho_{xy} = \rho_y \circ S_x.$$

Beweis:
Für $x = (x_1, \ldots x_n) \in I$ beliebig liefert eine einfache Induktion über n

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{n} \tau(x_k) \circ U_0 \circ S_{(x_1,\ldots,x_{k-1})} \text{mit } S_\emptyset \text{ die Identität.}$$

Unter Ausnützung von $S_{xy} = S_y \circ S_x$ und mit $x = (x_1, \ldots x_{n_x}), y = (y_1, \ldots y_{n_y})$ folgt nun

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \sum_{k=1}^{n_x} \tau(x_k) \circ U_0 \circ S_{(x_1,\ldots,x_{k-1})} + \sum_{k=1}^{n_y} (\tau(y_k) \circ U_0 \circ S_{(y_1,\ldots,y_{k-1})} \circ S_x) \\ &= \sigma_x + \sigma_y \circ S_x\end{aligned}$$

$$\rho_{xy} = \rho(r(xy)) \circ U_0 \circ S_{m(xy)} = \rho(r(y)) \circ U_0 \circ S_{m(y)} \circ S_x = \rho_y \circ S_x$$

□

Lemma 2.7.2 *Sei $f : (S \times \mathbb{R}, \mathcal{S} \otimes \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_+)$ eine nichtnegative, meßbare Funktion.*
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^n} E_s[f(\rho_x, \sigma_x)] = \int_{S \times \mathbb{R}} f(r,t)\, \mu^n(s, dr \times dt) \tag{2.7}$$

und

$$\sum_{x \in I} E_s[f(\rho_x, \sigma_x)] = \int_{S \times \mathbb{R}} f(r,t)\, \nu(s, dr \times dt). \tag{2.8}$$

Beweis:
Es genügt, (2.7) nachzuweisen, da (2.8) direkt aus (2.7) folgt.
Für n=0 ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.
Der Reproduktionsprozeß ξ_0 läßt sich unter jedem P_s , $s \in S$ als das zufällige Zählmaß zu dem durch $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ induzierten stochastischen Punktprozeß mit Marken $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(S, \mathcal{S})$ auffassen.
Dann ist $E_s[\xi_0(dr \times dt)] = \mu(s, dr \times dt)$ das zugehörige Campbell-Maß und die Behauptung für $n = 1$ folgt aus der Campbell-Formel für Punkt-Prozesse (siehe Baccelli und Brémaud [4], Seite 20 (3.3.2)).
Induktiv folgt nun

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\mathbb{N}^{n+1}} E_s[f(\rho_x, \sigma_x)] \\
&\quad = \sum_{x\in\mathbb{N}^n} \sum_{y\in\mathbb{N}} E_s\left[E_s[f(\rho_y \circ S_x, \sigma_x + \sigma_y \circ S_x)|\mathcal{F}_x]\right] \\
&\quad = \sum_{x\in\mathbb{N}^n} \sum_{y\in\mathbb{N}} E_s\left[E_{\rho_x}[f(\rho_y, \sigma_x + \sigma_y)]\right] \\
&\quad \overset{(IV)}{=} \sum_{x\in\mathbb{N}^n} E_s\left[\int_{S\times\mathbb{R}} f(y, \sigma_x + t)\, \mu(\rho_x, dy \times dt)\right] \\
&\quad \overset{(IV)}{=} \int_{S\times\mathbb{R}} \int_{S\times\mathbb{R}} f(y, u + t)\, \mu(x, dy \times dt)\, \mu^n(s, dx \times du) \\
&\quad = \int_{S\times\mathbb{R}} \int_{S\times\mathbb{R}} f(y, t) \mu^{n+1}(s, dy \times dt).
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.7.3 *Gegeben $L \prec M$ Stoplinien, gilt*

$$E[w_M|\mathcal{F}_L] \le w_L \quad P\text{-f.s.}$$

und im Fall, daß $g(M) < \infty$ und M L überdeckt, gilt sogar Gleichheit.

Beweis:
Sei M als endlich angenommen, also $M \subset L \times \cup_{k=0}^{n} \mathbb{N}^k$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$
Wir beweisen die Ungleichung durch eine Induktion über dieses n:
(IA):n=0
$\quad M \subset L \Longrightarrow E[w_M|\mathcal{F}_L] \le E[w_L|\mathcal{F}_L] = w_L$
(IS):$n - 1 \to n$
$$M = (M \cap (L \times \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathbb{N}^k)) \,\cup\, (M \cap (L \times \mathbb{N}^n))$$
Mit $A := \{mx : x \in M \cap (L \times \mathbb{N}^n)\}$ ist $M \cap (L \times \mathbb{N}^n) \subset \{xi; x \in A, i \in \mathbb{N}\}$ und da $\mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_{L\times\mathbb{N}^{n-1}}$

$$\begin{aligned}
E[w_{M\cap(L\times\mathbb{N}^n)}|\mathcal{F}_L] &\le E\left[\sum_{x\in A} E[\sum_{i\in\mathbb{N}} e^{-\alpha\sigma_{xi}} h(\rho_{xi})|\mathcal{F}_{L\times\mathbb{N}^{n-1}}]|\mathcal{F}_L\right] \\
&= E\left[\sum_{x\in A} e^{-\alpha\sigma_x} E[\sum_{i\in\mathbb{N}} e^{-\alpha(\sigma_i\circ S_x)} h(\rho_i \circ S_x)|\mathcal{F}_{L\times\mathbb{N}^{n-1}}]|\mathcal{F}_L\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\left[\sum_{x\in A} e^{-\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}[\sum_{i\in\mathbb{N}} e^{-\alpha\sigma_i} h(\rho_i)]|\mathcal{F}_L\right] \\
&= E\left[\sum_{x\in A} e^{-\alpha\sigma_x} \int_{S\times\mathbb{R}} e^{-\alpha t} h(s)\,\mu(\rho_x, ds\times dt)|\mathcal{F}_L\right] \\
&= E[w_A|\mathcal{F}_L] \quad P\text{-f.s.}
\end{aligned}
$$

wobei in vorletzter Zeile Lemma 2.7.2 und in letzter Zeile die α-Invarianz von h eingeht.
Damit also

$$
E[w_M|\mathcal{F}_L] \le E[w_{(M\cap(L\times\cup_{k=0}^{n-1}\mathbb{N}^k))\cup A}|\mathcal{F}_L] \overset{(IV)}{\le} w_L \quad P\text{-f.s.}
$$

(Die für die IV benötigte Tatsache, daß $(M\cap(L\times\cup_{k=0}^{n-1}\mathbb{N}^k)\cup A)$ eine Linie ist mit $L \prec (M\cap(L\times\cup_{k=0}^{n-1}\mathbb{N}^k)\cup A)$ und Untermenge von $L\times\cup_{k=0}^{n-1}\mathbb{N}^k$ ist, läßt sich direkt auf die Definition von A und die gestellten Voraussetzungen an M und L zurückführen.)
Wird M nun nicht mehr als endlich vorausgesetzt, folgt die Behauptung mit Hilfe endlicher $M_n \subset I$ mit $M_n \uparrow M$ und monotoner Konvergenz.

Für die Gleichheit benötigen wir folgendes

Lemma 2.7.4 *Für $L \in \mathcal{C}_0$ ist $E_s[w_L] = h(s) \quad \forall s \in S$.*

Beweis:
Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Wieder unter Ausnutzung von Lemma 2.7.2 folgt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in\mathbb{N}^k} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x)] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{N}^{k-1}} \sum_{i\in\mathbb{N}} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} E_s[e^{-\alpha(\sigma_i\circ S_x)} h(\rho_i\circ S_x)|\mathcal{F}_x]] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{N}^{k-1}} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} \sum_{i\in\mathbb{N}} E_{\rho_x}[e^{-\alpha\sigma_i} h(\rho_i)]] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{N}^{k-1}} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} \int_{S\times\mathbb{R}} e^{-\alpha t} h(r)\mu(\rho_x, dr\times dt)] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{N}^{k-1}} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x)].
\end{aligned}
$$

Iterativ erhält man nun

$$
\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{N}^k} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x)] &= \sum_{x\in\mathbb{N}} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x)] \\
&= \int_{S\times\mathbb{R}} e^{-\alpha t} h(r)\,\mu(s, dr\times dt) \\
&= h(s).
\end{aligned}
$$

Sei nun $L \in \mathcal{C}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $g(L) \leq n$. Dann folgt mit obiger Rechnung

$$\begin{aligned} h(s) &= \sum_{x \in \mathbb{N}^n} E_s[e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x)] = \sum_{x \in L} \sum_{y \in \mathbb{N}^{n-g(x)}} E_s[e^{-\alpha\sigma_{xy}} h(\rho_{xy})] \\ &= \sum_{x \in L} E_s \left[e^{-\alpha\sigma_x} \sum_{y \in \mathbb{N}^{n-g(x)}} E[e^{-\alpha\sigma_y \circ S_x} h(\rho_y \circ S_x) | \mathcal{F}_x] \right] \\ &= \sum_{x \in L} E_s \left[e^{-\alpha\sigma_x} \sum_{y \in \mathbb{N}^{n-g(x)}} E_{\rho_x}[e^{-\alpha\sigma_y} h(\rho_y)] \right] \\ &= E_s \left[\sum_{x \in L} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) \right] = E_s[w_L] \ , \end{aligned}$$

wobei in der ersten und fünften Gleichung obige Rechnung benutzt wird und die zweite Gleichung aus der Überdeckungseigenschaft von L und $g(L) \leq n$ folgt.

$\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas läßt sich nun die Gleichheit in Theorem 2.7.3 im Falle, daß M L überdeckt und $g(M) < \infty$ beweisen:
Dazu definieren wir $A_x := \{y; xy \in M\}$ und behaupten, daß $A_x \in \mathcal{C}_0$ für jedes $x \in L$. Daß A_x Linie ist, folgt sofort aus der Linieneigenschaft von M. A_x hat mit M offensichtlich auch endliche Generation. Bleibt also noch die Überdeckungseigenschaft nachzuweisen. Der Beweis formalisiert lediglich, was man sich schon anschaulich leicht klarmachen kann.
Dazu sei $z \in I$ beliebig.
Dann gibt es ein $m \in M$ mit $m \prec xz$ oder $xz \prec m$.
Nehmen wir erst einmal $m \prec xz$ an.
Da L Linie und $L \prec M$, muß damit schon $x \prec m \prec xz$ gelten und daraus offensichtlich mit $y \in A_x$, so gewählt, daß xy=m schon $A_x \ni y \prec z$.
Betrachten wir nun den Fall $xz \prec m$. Dann existiert ein $y \in I$ mit m=xzy, d.h. $zy \in A_x$ und damit offensichtlich $z \prec zy \in A_x$.
Jedes $z \in I$ hat also entweder Vorfahren oder Nachfahren in A_x, was zu zeigen war.
Für nachfolgende Rechnung ist zu beachten, daß für jedes $m \in M$ wegen $L \prec M$ und da L Linie ist, eine eindeutige Darstellung von m als ly mit $l \in L$ und $y \in I$ existiert.
Nun gilt mit Hilfe von obigem Lemma

$$\begin{aligned} E[w_M | \mathcal{F}_L] &= E\left[\sum_{x \in M} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) | \mathcal{F}_L \right] \\ &= \sum_{x \in L} e^{-\alpha\sigma_x} E\left[\sum_{y; xy \in M} e^{-\alpha\sigma_y \circ S_x} h(\rho_y \circ S_x) | \mathcal{F}_L \right] \\ &= \sum_{x \in L} e^{-\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}\left[\sum_{y; xy \in M} e^{-\alpha\sigma_y} h(\rho_y) \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{x \in L} e^{-\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}[w_{A_x}]$$
$$= \sum_{x \in L} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) = w_L \quad P\text{-f.s.}$$

wobei für die vorletzte Gleichung das vorangegangene Lemma benutzt wurde.

□

Wir haben nun also folgendes wie wir sehen werden noch sehr nützliches

Korollar 2.7.5 $\{w_L; L \in \mathcal{C}_0\}$ *ist ein Martingal bzgl. der Filtration* $\{\mathcal{F}_L; L \in \mathcal{C}_0\}$*, das sogenannte intrinsische Martingal.*

2.8 Gleichgradige Integrierbarkeit und Konvergenz des intrinsischen Martingals

Wie im vorangegangenen Korollar festgestellt, ist $\{w_L; L \in \mathcal{C}_0\}$ ein offensichtlich nichtnegatives Martingal unter jedem $P_s, s \in S$. Für jede aufsteigende Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_0$ konvergiert demnach w_{L_n} P_s-f.s. gegen eine Zufallsgröße w_s. Wir werden nun zur $\mathcal{L}_1$-Konvergenz übergehen. Nach Neveu[9], Seite 96, Lemma V-1-1 genügt es, für die $\mathcal{L}_1$-Konvergenz des intrinsischen Martingals die $\mathcal{L}_1$-Konvergenz jeder aufsteigenden Folge w_{L_n} des intrinsischen Martingals nachzuweisen. Hierfür wiederum ist die gleichgradige P_s-Integrierbarkeit jeder solcher Folge hinreichend, die unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen der nachfolgende Satz liefert.
Vorab aber eine

Definition 2.8.1 Mit

$$\bar{\xi} := \int_{S\times\mathbb{R}_+} e^{-\alpha t} h(s)\, \xi_0(ds \times dt) = \sum_{i\in\mathbb{N}} e^{-\alpha\sigma_i} h(\rho_i)$$

erfüllt eine Malthusische Population nach Definition die *x log x-Bedingung*, wenn

$$E_\pi[\bar{\xi} log^+ \bar{\xi}] < \infty,$$

wobei E_π den Erwartungswert unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\int_S P_s(d\omega)\, \pi(ds)$ bezeichne.

Satz 2.8.2 *Erfüllt die Malthusische Population die x log x-Bedingung, so ist für* π*-f.a.* $s \in S$ *jede aufsteigende Folge in* $\{w_L; L \in \mathcal{C}_0\}$ *gleichgradig* P_s*-integrierbar. Die Menge der* $s \in S$*, die dies erfüllen bezeichnen wir mit* S_{log}.

Beweis:
Sei $s \in S$ beliebig, aber fest.
Wir nehmen an, $\sup_{n\in\mathbb{N}} w_{\mathbb{N}^n}$ sei P_s-integrierbar.
Sei $L \in \mathcal{C}_0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g(L) \le n_0$.
Mit Theorem 2.7.3 folgt

$$w_L = E_s[w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_L] \le E_s[\sup_{n\in\mathbb{N}} w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_L] \quad P_s\text{-f.s.} \quad \forall n \ge n_0$$

Sei $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nun eine aufsteigende Folge in $\mathcal{C}_0$.
Da $E_s[\sup_n w_{\mathbf{N}^n}] < \infty$ ist mit

$$M_n := E_s[\sup_{n\in\mathbf{N}} w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_{L_n}] \geq w_{L_n} \quad P_s\text{-f.s.}$$

$(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nichtnegatives Martingal, welches in $\mathcal{L}_1$ und P_s-f.s. konvergiert.
Daher ist $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und damit auch $(w_{L_n})_{n\in\mathbf{N}}$ gleichgradig P_s-integrierbar.

Es genügt demnach die P_s-Integrierbarkeit von $\sup_{n\in\mathbf{N}} w_{\mathbf{N}^n}$ für π-f.a. $s \in S$ nachzuweisen, was wir nun verifizieren werden:
Dazu definieren wir zunächst

$$\begin{aligned}
&\eta := \bar{\xi} - h(\rho_0) \\
&\bar{\xi}_x := \bar{\xi} \circ S_x \quad x \in I \\
&\eta_x := \eta \circ S_x = \bar{\xi}_x - h(\rho_x), \quad x \in I \\
&\delta(s,t) := e^{-\alpha t} E_s[\eta \mathbf{1}_{|\eta|>e^{\alpha t}}] \quad s \in I, t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

In nachfolgenden Rechnungen ist zu beachten, daß

$$E_s[\eta] = E_s[\bar{\xi}] - h(s) = h(s) - h(s) = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
w_{\mathbf{N}^{n+1}} &= \sum_{x\in\mathbf{N}^n} \sum_{i\in N} e^{-\alpha\sigma_{xi}} h(\rho_{xi}) = \sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-\alpha\sigma_x} \sum_{i\in N} e^{-\alpha\sigma_i \circ S_x} h(\rho_i \circ S_x) \\
&= \sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-\alpha\sigma_x} \bar{\xi} \circ S_x = \sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-\alpha\sigma_x} (\eta_x + h(\rho_x)) \\
&= \left(\sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-\alpha\sigma_x} \eta_x \right) + w_{\mathbf{N}^n},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
w_{\mathbf{N}^{n+1}} - w_{\mathbf{N}^n} &= \sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-\alpha\sigma_x} \eta_x \\
&= \sum_{x\in\mathbf{N}^n} \left(e^{-\alpha\sigma_x} \eta_x \mathbf{1}_{\{|\eta_x| \leq e^{\alpha\sigma_x}\}} + \delta(\rho_x, \sigma_x) \right) \\
&\quad + \sum_{x\in\mathbf{N}^n} \left(e^{-\alpha\sigma_x} \eta_x \mathbf{1}_{\{|\eta_x| > e^{\alpha\sigma_x}\}} - \delta(\rho_x, \sigma_x) \right) \\
&=: a_{n+1} + b_{n+1}.
\end{aligned}$$

Mit

$$E_s[\eta \mathbf{1}_{|\eta|\leq e^{\alpha t}}] = E_s[\eta] - e^{\alpha t}\delta(s,t) = -e^{\alpha t}\delta(s,t) \tag{2.9}$$

folgt

$$\begin{aligned}
E_s[a_{n+1}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}] &= \sum_{x\in\mathbf{N}^n} \left(e^{-\alpha\sigma_x} E_s[(\eta \circ S_x)\mathbf{1}_{\{|\eta\circ S_x| \leq e^{\alpha\sigma_x}\}}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}] + \delta(\rho_x, \sigma_x) \right) \\
&= \sum_{x\in\mathbf{N}^n} \left(e^{-\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}[\eta \mathbf{1}_{\{|\eta| \leq e^{\alpha\sigma_x}\}}] + \delta(\rho_x, \sigma_x) \right) \\
&\overset{(2.9)}{\equiv} 0.
\end{aligned}$$

Damit dann auch $E_s[a_{n+1}] = 0$ und mit analoger Rechnung $E_s[b_{n+1}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}] \equiv 0$ und $E_s[b_{n+1}] = 0$.

Wir werden nun folgende beiden Ungleichungen nachweisen

$$E_s\left(\sup_{n\in\mathbf{N}} |\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}|\right) < \infty \quad \pi\text{-f.s.} \tag{2.10}$$

$$E_s\left(\sum_{n\geq 0} |b_{n+1}|\right) < \infty \quad \pi\text{-f.s.} \tag{2.11}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{n\in\mathbf{N}} w_{\mathbf{N}^n} = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sum_{k=0}^{n}(w_{\mathbf{N}^{k+1}} - w_{\mathbf{N}^k}) + w_{\mathbf{N}^0} \\
&= \sup_{n\in\mathbf{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} + \sum_{k=0}^{n} b_{k+1}\right) + h(\rho_0) \\
&\leq \sup_{n\in\mathbf{N}} |\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}| + \sum_{k\geq 0} |b_{k+1}| + h(\rho_0)
\end{aligned}$$

und nach den gezeigten Abschätzungen (2.10) und (2.11) folgt die P_s-Integrierbarkeit von $\sup_n w_{\mathbf{N}^n}$ für π-f.a. $s \in S$.

Weisen wir also zuerst (2.10) nach:
Unser erstes Teilziel ist die Abschätzung $\sum\limits_{n\geq 0} Var_s[a_{n+1}] < \infty$.

$$\begin{aligned}
&Var_s[a_{n+1}] = E_s[Var_s[a_{n+1}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}]] + Var_s[E_s[a_{n+1}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}]] \\
&= E_s[Var_s[a_{n+1}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}]] \\
&= E_s\left[\sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-2\alpha\sigma_x}\left(E[\eta_x^2 \mathbf{1}_{\{|\eta_x|\leq e^{\alpha\sigma_x}\}}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}] - E[\eta_x \mathbf{1}_{\{|\eta_x|\leq e^{\alpha\sigma_x}\}}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}]^2\right)\right] \\
&\leq E_s\left[\sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-2\alpha\sigma_x} E[\eta_x^2 \mathbf{1}_{\{|\eta_x|\leq e^{\alpha\sigma_x}\}}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}]\right] \\
&= E_s\left[\sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-2\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}[\eta^2 \mathbf{1}_{\{|\eta|\leq e^{\alpha\sigma_x}\}}]\right],
\end{aligned}$$

wobei in dritter Gleichung die $\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}$-Meßbarkeit von $\delta(\rho_x, \sigma_x)$ zu beachten ist.

Dann läßt sich der abzuschätzende Term unter Beachtung von Lemma 2.7.2 wie folgt schreiben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Var_s[a_{n+1}] \quad \leq \quad \sum_{n=0}^{\infty} E_s\left[\sum_{x\in\mathbf{N}^n} e^{-2\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}[\eta^2 \mathbf{1}_{\{|\eta|\leq e^{\alpha\sigma_x}\}}]\right]$$

$$= \quad E_s\left[\sum_{x\in I} e^{-2\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}[\eta^2 \mathbf{1}_{\{|\eta|\le e^{\alpha\sigma_x}\}}]\right]$$
$$= \quad \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-2\alpha t} E_r[\eta^2 \mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\ \nu(s, dr\times dt)$$

Es bezeichne G das Maß , welches $G * \sum_{n\ge 0} Q^n = h\pi\otimes\boldsymbol{\lambda}^+$ erfüllt (siehe Satz 1.4.16).
Wir falten nun dieses letzte Ergebnis mit G und erhalten

$$\int_{S\times\mathbf{R}}\int_{S\times\mathbf{R}} e^{-2\alpha t} E_r[\eta^2\mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\ \nu(s, dr\times dt-u)\ \frac{1}{h(s)}\ G(ds\times du)$$
$$= \int_{S\times\mathbf{R}}\int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha(t+u)} E_r[\eta^2\mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\frac{1}{h(r)}\sum_{n\ge 0} Q^n(s, dr\times dt-u) G(ds\times du)$$
$$\overset{\alpha>0}{\le} \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha t} E_r[\eta^2\mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\frac{1}{h(r)}\ G*\sum_{n\ge 0} Q^n(dr\times dt)$$
$$= \int_S\int_{\mathbf{R}} e^{-\alpha t} E_r[\eta^2\mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\ \boldsymbol{\lambda}^+(dt)\ \pi(dr).$$

Dieser Term läßt sich nun nach oben gegen unendlich abschätzen (weshalb diese Faltung überhaupt nur vorgenommen wurde) durch

$$\overset{Fubini}{=} \quad \int_S\int_D \eta^2 \int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}_{\{|\eta|\le e^{\alpha t}\}} e^{-\alpha t}\ \boldsymbol{\lambda}^+(dt)\ P_r(d\omega)\ \pi(dr)$$
$$= \quad \int_S\int_D \eta^2 \frac{1}{\alpha|\eta|}\ P_r(d\omega)\ \pi(dr) = \frac{1}{\alpha} E_\pi[|\eta|]$$
$$\le \quad \frac{1}{\alpha}\left(E_\pi[\bar{\xi}] + \int_S h(s)\pi(ds)\right)$$
$$= \quad \frac{1}{\alpha}\left(\int_S\int_{S\times\mathbf{R}} h(s)\ \mu_\alpha(r, ds\times dt)\ \pi(dr) + 1\right)$$
$$= \quad \frac{2}{\alpha} < \infty.$$

Damit ist also

$$e^{-2\alpha u}\int_{S\times\mathbf{R}} e^{-2\alpha t} E_r[\eta^2\mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\nu(s, dr\times dt)\frac{1}{h(s)}$$
$$\le \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-2\alpha t} E_r[\eta^2\mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\nu(s, dr\times dt-u)\frac{1}{h(s)} < \infty \quad G\text{-f.s.}$$

und damit schließlich (schaut man sich die genaue Gestalt von G an)

$$\sum_{n\ge 0} Var_s[a_{n+1}] \le \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-2\alpha t} E_r[\eta^2\mathbf{1}_{|\eta|\le e^{\alpha t}}]\nu(s, dr\times dt) < \infty \quad \pi\text{-f.s.}$$

Da a_n $\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}$-meßbar ist, wie man sich leicht überlegen kann, und wegen $E_s[a_{n+1}|\mathcal{F}_{\mathbf{N}^n}] \equiv 0$ ist mit $M_n := \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$ $(M_n)_{n\ge 1}$ Martingal bzgl. der

Filtration $(\mathcal{F}_{\mathbb{N}^n})_{n\geq 1}$ mit

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} E_s(M_n^2) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} E_s[(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1})^2] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n-1} Var_s[a_{k+1}] \\ &= \sum_{k\geq 0} Var_s[a_{k+1}] < \infty \quad \pi\text{-f.s.}\end{aligned}$$

Dann folgt nach Neveu (Seite 68,Proposition IV-2-8)

$$E_s[(\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}|)^2] = E_s[(\sup_{n\in\mathbb{N}} |M_n|)^2] < \infty \quad \pi\text{-f.s.}$$

und damit auch (2.10), was zu zeigen war.

Kommen wir nun zum Nachweis von (2.11):
Unter Beachtung von

$$\begin{aligned}E_s[e^{-\alpha\sigma_x}|\eta_x|\mathbf{1}_{\{|\eta_x|>e^{\alpha\sigma_x}\}}] &= E_s[e^{-\alpha\sigma_x}E_s[|\eta_x|\mathbf{1}_{\{|\eta_x|>e^{\alpha\sigma_x}\}}|\mathcal{F}_x]] \\ &= E_s[e^{-\alpha\sigma_x}E_{\rho_x}[|\eta|\mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha\sigma_x}\}}]]\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}0 &\leq E_s\left(\sum_{n\geq 0}|b_{n+1}|\right) \\ &\leq E_s\left(\sum_{x\in I}\left(e^{-\alpha\sigma_x}|\eta_x|1_{\{|\eta_x|>e^{\alpha\sigma_x}\}} + |\delta(\rho_x,\sigma_x)|\right)\right) \\ &\leq 2\sum_{x\in I} E_s\left(e^{-\alpha\sigma_x}E_{\rho_x}[|\eta|1_{\{|\eta|>e^{\alpha\sigma_x}\}}]\right) \\ &= 2\int_{S\times\mathbb{R}} e^{-\alpha t}E_r[|\eta|1_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}]\ \nu(s,dr\times dt),\end{aligned}$$

wobei in letzter Gleichung wieder einmal Lemma 2.7.2 eingeht.
Nun falten wir wieder mit G analog zur Abschätzung der a_{n+1}:

$$\begin{aligned}&\int_{S\times\mathbb{R}_+}\int_{S\times\mathbb{R}_+} e^{-\alpha(t+u)}E_r[|\eta|\mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}]\frac{1}{h(s)}\ \nu(s,dr\times dt-u)\ G(ds\times du) \\ &\leq \int_{S\times\mathbb{R}_+}\int_{S\times\mathbb{R}_+} e^{-\alpha(t-u)}E_r[|\eta|\mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}]\frac{1}{h(s)}\ \nu(s,dr\times dt-u)\ G(ds\times du) \\ &= \int_S\int_{\mathbb{R}_+} E_r[|\eta|\mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}]\ \lambda^+(dt)\ \pi(dr) \\ &= \int_S\int_D |\eta|\int_{\mathbb{R}_+}\mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}\ \lambda^+(dt)\ P_r(d\omega)\ \pi(dr) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_S E_r[|\eta|\log|\eta|\mathbf{1}_{\{|\eta|>1\}}]\ \pi(dr) \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_S E_r[(\bar{\xi}-E_r[\bar{\xi}])\log(\bar{\xi}-E_r[\bar{\xi}])\mathbf{1}_{\{\bar{\xi}>1+E_r[\bar{\xi}]\}}] \\ &\qquad +E_r[(E_r[\bar{\xi}]-\bar{\xi})\log(E_r[\bar{\xi}]-\bar{\xi})\mathbf{1}_{\{E_r[\bar{\xi}]>1+\bar{\xi}\}}]\ \pi(dr)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_S E_r[\bar{\xi} \log \bar{\xi} \mathbf{1}_{\{\bar{\xi}>1\}}] + E_r[E_r[\bar{\xi}] \log E_r[\bar{\xi}] \mathbf{1}_{\{E_r[\bar{\xi}]>1\}}]\ \pi(dr) \\
&\leq \frac{2}{\alpha} \int_S E_r[\bar{\xi} \log^+ \bar{\xi}]\ \pi(dr) \\
&< \infty \quad \text{nach Voraussetzung (x log x-Bedingung),}
\end{aligned}
$$

wobei in vorletzter Gleichung zu beachten ist, daß $xlog^+x$ eine konvexe Funktion ist und daher die Jensensche Ungleichung anwendbar ist.

Man hat also die G-fast sichere Endlichkeit von

$$
\begin{aligned}
&\int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha(t+u)} E_r[|\eta| \mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}] \frac{1}{h(s)}\ \nu(s, dr \times dt - u) \\
&= \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha(t+2u)} E_r[|\eta| \mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha(t+u)}\}}] \frac{1}{h(s)} \nu(s, dr \times dt) \\
&\geq \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha(t+2u)} \frac{1}{h(s)} \left(E_r[|\eta| \mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}] - E_r[|\eta|^2 \mathbf{1}_{\{|\eta|\leq e^{\alpha(t+u)}\}}] e^{-\alpha t} \right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu(s, dr \times dt) \\
&= e^{-2\alpha u} \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha t} \frac{1}{h(s)} E_r[|\eta| \mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}]\ \nu(s; dr \times dt) \\
&\quad - \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-2\alpha(t+u)} \frac{1}{h(s)} E_r[|\eta|^2 \mathbf{1}_{\{|\eta|\leq e^{\alpha(t+u)}\}}]\ \nu(s, dr \times dt).
\end{aligned}
$$

Da der sich der zweite Term schon bei der Abschätzung der a_{n+1} als G-fast sicher endlich erwiesen hat, muß auch der erste Term schon G-fast sicher endlich sein und damit

$$
\int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha t} E_r[|\eta| \mathbf{1}_{|\eta|>e^{\alpha t}}]\ \nu(s; dr \times dt) < \infty \qquad \pi\text{-f.s.}
$$

Wir haben also nun die gewünschte Abschätzung

$$
E_s \left(\sum_{n\geq 0} |b_{n+1}| \right) \leq 2 \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha t} E_r[|\eta| \mathbf{1}_{\{|\eta|>e^{\alpha t}\}}]\ \nu(s, dr \times dt) < \infty \qquad \pi\text{-f.s.}
$$

□

Wie schon zu Beginn des Kapitels angedeutet, haben wir nun folgendes

Korollar 2.8.3 *Erfüllt die Malthusische Population die x log x-Bedingung und ist $s \in S_{log}$, so konvergiert jede aufsteigende Folge $(w_{L_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{w_L \ ; \ L \in \mathcal{C}_0\}$ P_s-f.s. und in $\mathcal{L}_1$ (bzgl. P_s).*
Insbesondere konvergiert also das intrinsische Martingal $\{w_L; L \in \mathcal{C}_0\}$ in $\mathcal{L}_1$ (bzgl P_s). Wir bezeichnen den Grenzwert mit w_s.

Beweis:
Da unter den gegebenen Voraussetzungen nach dem vorher Gezeigten für $s \in S_{log}$ jede solche Folge $(w_{L_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ein gleichgradig P_s-integrierbares, nichtnegatives Martingal ist, ist nichts zu zeigen.

□

Daß sämtliche aufsteigenden Folgen $(w_{L_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{w_L \ ; \ L \in \mathcal{C}_0\}$ P_s-f.s. und in $\mathcal{L}_1$ bzgl. P_s konvergieren, heißt noch nicht, daß der Grenzwert auch stets mit dem Grenzwert des intrinsischen Martingals w_s übereinstimmt. In Theorem 2.8.5 werden wir allerdings eine Klasse solcher Folgen ermitteln, die diese Eigenschaft besitzen. Ein vorläufiges Ergebnis liefert

Lemma 2.8.4 *Ist die x log x-Bedingung erfüllt und $s \in S_{log}$, so gilt für jede aufsteigende Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}_0$ mit $\inf_{x\in L_n} g(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$*

$$w_{L_n} \longrightarrow w_s \quad \textit{in} \quad \mathcal{L}_1 \ (\textit{bzgl.}\ P_s) \quad \textit{und} \quad P_s\textit{-f.s.}$$

Beweis:
Aufgrund der $\mathcal{L}_1$-Konvergenz des intrinsischen Martingals unter P_s gilt

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists L_\epsilon \in \mathcal{C}_0 \ : \ E_s[|w_L - w_s|] < \epsilon \quad \forall L_\epsilon \prec L \in \mathcal{C}_0.$$

Da L_ϵ von endlicher Dimension und überdeckend ist, gilt aufgrund der gestellten Bedingung an die L_n schon $L_\epsilon \prec L_n \quad \forall n \geq n_0$ mit n_0 geeignet und daher die Behauptung.

□

Nachfolgendes Theorem liefert nun unter anderem eine noch schwächere Voraussetzung an eine Folge L_n für deren Konvergenz gegen w_s:

Theorem 2.8.5 *Unter der x log x-Bedingung existiert eine Zufallsgröße $w \geq 0$ auf dem Populationsraum, so daß für $s \in S_{log}$*

$$w_L = E_s[w|\mathcal{F}_L] \quad P_s\text{-f.s.} \quad \forall L \in \mathcal{C}_0 \tag{2.12}$$

und das intrinsische Martingal konvergiert in $\mathcal{L}_1$ bzgl. P_s gegen w. Insbesondere gilt also nach Lemma 2.7.4 $E_s[w] = h(s)$.
Ist $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{C}_0$, so daß für jedes $x \in I$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß x Nachfahren in L_n hat, so konvergiert auch w_{L_n} in $\mathcal{L}_1$ bzgl. P_s und P_s-f.s. gegen w.

Beweis:
Wir definieren w durch

$$w = \liminf_{n\to\infty} w_{\mathbb{N}^n}. \tag{2.13}$$

Dann gilt offenbar nach dem vorherigen Lemma für $s \in S_{log}$

$$w = \liminf_{n\to\infty} w_{\mathbb{N}^n} = \lim_{n\to\infty} w_{\mathbb{N}^n} = w_s \qquad P_s\text{-f.s.}$$

und daher ist die behauptete Konvergenz des intrinsischen Martingals gegen w klar. Um (2.12) nachzuweisen, wählen wir zu beliebigem $L \in \mathcal{C}_0$ eine aufsteigende Folge $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\inf_{x\in L_n} g(x) \to \infty$, in der L enthalten ist. Nach Lemma 2.8.4 ist w_{L_n} gleichgradig P_s-integrierbares Martingal, welches in $\mathcal{L}_1$ (bzgl. P_s) und P_s-f.s. gegen w_s konvergiert (mit $s \in S_{log}$) und daher nach Neveu[9], Seite 65, Proposition IV-2-3

$$w_L = E_s[w_s|\mathcal{F}_L] = E_s[w|\mathcal{F}_L] \quad P_s\text{-f.s.},$$

also (2.12). Ist nun $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie im Theorem gefordert, so gilt

$$(\forall x \in I\ \exists n \in \mathbb{N} : x \notin PrL_n) \Longrightarrow \left(\forall x \in I\ \exists n \in \mathbb{N} : \mathcal{S} \times \sigma(\tilde{U}_x) \subset \mathcal{F}_{L_n}\right)$$

und daher $\mathcal{D} = \sigma\left(\cup_x \mathcal{S} \times \sigma(\tilde{U}_x)\right) \subset \sigma(\cup_n \mathcal{F}_{L_n}) \subset \mathcal{D}$.
Nach Neveu[9], Seite 29, Proposition II-2-11 folgt also unter Berücksichtigung von $\mathcal{F}_{L_n} \subset \mathcal{F}_{L_{n+1}}$

$$w_{L_n} = E_s[w|\mathcal{F}_{L_n}] \longrightarrow E_s[w|\sigma(\cup_n \mathcal{F}_{L_n})] = E_s[w|\mathcal{D}] = w$$

in $\mathcal{L}_1$ (bzgl. P_s) und P_s-f.s.

□

Wie wir später sehen werden, spielen nicht nur die w_L für feste Stoplinien L, sondern auch die w_J für optionale Linien J eine wichtige Rolle für unsere asymptotische Betrachtungen. Aus diesem Grund richten wir nun auf den vorangegangenen Beobachtungen basierend unseren Augenmerk auf diese.

Theorem 2.8.6 *Es sei die x log x-Bedingung erfüllt. Ist J eine überdeckende optionale Linie endlicher Generation, so gilt für* $s \in S_{log}$

$$E_s[w|\mathcal{F}_J] = w_J \qquad P_s\text{-f.s.}$$

Insbesondere gilt also $E_s[w_J] = E_s[w] = h(s) < \infty$.

Beweis:
Sei J wie im Theorem gefordert und $s \in S_{log}$.
Für eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen von I mit $K_n \uparrow I$ definieren wir die endlichen optionalen Linien $J_l := J \cap K_l$.
(Ist J selbst schon endlich, ist dies überflüssig, da sich die Behauptungen direkter ergeben. Da aber der kompliziertere Beweis für den unendlichen Fall den Beweis des endlichen Falls miteinschließt, betrachten wir nur diesen.)

Da offensichtlich $J_{l+1} \prec J_l$ und $h(\cup_l J_l) = h(J) = J$ ist nach Lemma 2.4.13 $\mathcal{F}_J = \cap_l \mathcal{F}_{J_l}$ und als inverses Martingal konvergiert $E_s[w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_{J_l}]$ in l P_s-f.s. gegen $E_s[w_{\mathbf{N}^n}|\cap_l \mathcal{F}_{J_l}] = E_s[w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_J]$. (für $n \in \mathbb{N}$ beliebig)
Da weiterhin

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{1}_{\{g(J_l)\le n\}} = \mathbf{1}_{\{g(J)\le n\}} \qquad P\text{-f.s.}$$

gilt für $n \in \mathbb{N}$ beliebig aufgrund der Endlichkeit der J_l (fI bezeichne wie schon vorher die Menge der endlichen Teilmengen von I)

$$\begin{aligned}
E[w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_J]\mathbf{1}_{\{g(J)\le n\}} &= \lim_{l\to\infty} E[w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_{J_l}]\mathbf{1}_{\{g(J_l)\le n\}} \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{M\in fI} E[w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_M]\mathbf{1}_{\{g(M)\le n\}}\mathbf{1}_{\{J_l=M\}} \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{M\in fI} E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrM}|\mathcal{F}_M]\mathbf{1}_{\{g(M)\le n\}}\mathbf{1}_{\{J_l=M\}} \\
&\quad + \lim_{l\to\infty} \sum_{M\in fI} E[w_{\mathbf{N}^n\cap PrM}|\mathcal{F}_M]\mathbf{1}_{\{g(M)\le n\}}\mathbf{1}_{\{J_l=M\}} \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{M\in fI} E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrM}|\mathcal{F}_M]\mathbf{1}_{\{g(M)\le n\}}\mathbf{1}_{\{J_l=M\}} \\
&\quad + \lim_{l\to\infty} \sum_{M\in fI} w_M\mathbf{1}_{\{g(M)\le n\}}\mathbf{1}_{\{J_l=M\}} \\
&= \lim_{l\to\infty} \Big(E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_l}|\mathcal{F}_{J_l}]\mathbf{1}_{\{g(J_l)\le n\}} + w_{J_l}\mathbf{1}_{\{g(J_l)\le n\}}\Big) \\
&\overset{(*)}{=} w_J\mathbf{1}_{\{g(J)\le n\}} \quad P\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß auf $\{g(M) \le n\}$ M von $PrM \cap \mathbb{N}^n$ überdeckt wird und daher Theorem 2.7.3 angewendet werden kann. Die Gültigkeit von $(*)$ folgt aus

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_l}|\mathcal{F}_{J_l}]\mathbf{1}_{\{g(J_l)\le n\}} &= \lim_{l\to\infty} E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_l}\mathbf{1}_{\{g(J_l)\le n\}}|\mathcal{F}_{J_l}] \\
&\le \lim_{l\to\infty} E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_k}\mathbf{1}_{\{g(J_k)\le n\}}|\mathcal{F}_{J_l}]\ \forall k \in \mathbb{N} \\
&= E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_k}\mathbf{1}_{\{g(J_k)\le n\}}|\mathcal{F}_J]\ \forall k \in \mathbb{N}\ P\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{l\to\infty} E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_l}|\mathcal{F}_{J_l}]\mathbf{1}_{\{g(J_l)\le n\}} \le \lim_{k\to\infty} E[w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_k}\mathbf{1}_{g(J_k)\le n}|\mathcal{F}_J] = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

da $\lim_k w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_k}\mathbf{1}_{\{g(J_k)\le n\}} = \lim_k w_{\mathbf{N}^n\setminus PrJ_k}\mathbf{1}_{\{g(J)\le n\}} = 0$
denn da J überdeckend ist $\mathbb{N}^n \setminus PrJ_k \downarrow \mathbb{N}^n \setminus PrJ = \emptyset$ auf $\{g(J) \le n\}$.
Mit dem bisher Gezeigten läßt sich nun die Aussage des Theorems beweisen :
Da nach Lemma 2.8.4 $w_{\mathbf{N}^n} \to w$ P_s-f.s. und $\sup_n w_{\mathbf{N}^n}$ P_s-integrierbar ist (Beweis von Satz 2.8.2), folgt

$$E_s[w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_J] \longrightarrow E_s[w|\mathcal{F}_J]\ P_s\text{-f.s.}$$

Da $g(J) < \infty$ gilt weiterhin $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\{g(J)\le n\}} = 1$ P_s-f.s.
Also

$$E_s[w|\mathcal{F}_J] \;=\; \lim_{n\to\infty} \Big(E_s[w_{\mathbf{N}^n}|\mathcal{F}_J]\mathbf{1}_{\{g(J)\le n\}}\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} w_J \mathbf{1}_{\{g(J)\le n\}}$$
$$= w_J \qquad P_s\text{-f.s.}$$

□

Es ergibt sich nun sofort folgendes

Theorem 2.8.7 *Es gelte die x log x-Bedingung und es sei $s \in S_{log}$.*
Dann ist $\{w_J; J \in \bar{\mathcal{C}}_0\}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_J)_{J\in\bar{\mathcal{C}}_0}$, welches in $\mathcal{L}_1$ (bzgl.P_s) gegen w konvergiert. Ist $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\bar{\mathcal{C}}_0$ mit der Eigenschaft, daß jedes $x \in I$ Nachfahren in einem J_n hat, so konvergiert w_{J_n} P_s-f.s. und in $\mathcal{L}_1$ bzgl. P_s gegen w.

Beweis:
Die Martingaleigenschaft ergibt sich sofort aus dem vorangegangenem Theorem.
Nach Neveu[9], Seite 96, Proposition V-1-2, gilt

$$(w_J)_{J\in\bar{\mathcal{C}}_0} = (E[w|\mathcal{F}_J])_{J\in\bar{\mathcal{C}}_0} \xrightarrow{\mathcal{L}_1} E[w| \bigcup_{J\in\bar{\mathcal{C}}_0} \mathcal{F}_J] \overset{(*)}{=} E[w|\mathcal{D}] = w.$$

(Die dafür benötigte Voraussetzung $E_s[w] < \infty$ ist erfüllt, da $E_s[w] = h(s)$.)
$(*)$, d.h.$\bigcup_{J\in\bar{\mathcal{C}}_0} \mathcal{F}_J = \mathcal{D}$ ist im nachfolgenden Teil des Beweises implizit enthalten.
Für eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der im Theorem geforderten Eigenschaft, zeigen wir nun $\cup_n \mathcal{F}_{J_n} = \mathcal{D}$ und damit die Behauptung:
Sei dazu $x \in I$, $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{A}$ beliebig.
Aufgrund der gestellten Voraussetzung an die J_n gilt
$\cup_n \cup_{y\in I\setminus 0} \{xy \in J_n\} = D$. Daher

$$A \times \tilde{U}_x^{-1}(B) = \bigcup_n \Big((A \times U_x^{-1}(B)) \cap \cup_{y\in I\setminus 0}\{xy \in J_n\}\Big) \in \cup_n \mathcal{F}_{J_n}.$$

Denn $(A \times \tilde{U}_x^{-1}(B)) \cap \cup_{y\in I\setminus 0}\{xy \in J_n\} \in \mathcal{F}_{J_n}$, wie man sich leicht überlegen kann. Und damit

$$\mathcal{D} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{A}^I = \sigma(\cup_{x\in I}\mathcal{S} \otimes \sigma(\tilde{U}_x)) \subset \cup_n \mathcal{F}_{J_n} \subset \mathcal{D},$$

also das Gewünschte.

□

Satz 2.8.8 *Es sei die x log x-Bedingung erfüllt.*
J_1, J_2 seien zwei optionale überdeckende Linien mit $J_1 \prec J_2$. J_2 habe endliche Generation. Dann gilt für $s \in S_{\log}$

$$E_s[w_{J_2}|\mathcal{F}_{J_1}] = w_{J_1} \quad P_s\text{-f.s.}$$

Beweis:
Da mit $g(J_2) < \infty$ auch $g(J_1) < \infty$ P_s-f.s. $\forall s \in S$ folgt wie im Beweis von Theorem 2.8.6 gezeigt

$$\lim_{n\to\infty} E[w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_{J_i}] = E[w|\mathcal{F}_{J_i}] = w_{J_i} \ P_s\text{-f.s. für } i = 1, 2.$$

und daher

$$\begin{aligned}
w_{J_1} &= \lim_{n\to\infty} E_s[w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_{J_1}] \\
&= \lim_{n\to\infty} E_s\left[E_s[w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_{J_2}]|\mathcal{F}_{J_1}\right] \\
&= E_s\left[\lim_{n\to\infty} E[w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_{J_2}]|\mathcal{F}_{J_1}\right] \\
&= E[w_{J_2}|\mathcal{F}_{J_1}] \quad P_s\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

wobei die 3. Gleichheit aus $\sup_n E_s[w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_{J_2}] \leq E_s[\sup_n w_{\mathbb{N}^n}|\mathcal{F}_{J_2}]$ und der P_s-Integrierbarkeit von $\sup_n w_{\mathbb{N}^n}$ folgt.

□

2.9 Asymptotische Entwicklungen der Population in reeller Zeit

Das letzte Kapitel warf vermutlich die Frage auf, weshalb das intrinsische Martingal überhaupt definiert und mühsam seine Martingaleigenschaft sowie Konvergenzen nachgewiesen wurde. In diesem Abschnitt folgt nun aber eine nützliche Anwendung dieser Ergebnisse, die Erfassung des "Langzeitverhaltens" der Population, d.h. des asymptotischen Verhaltens bei gegen unendlich strebendem Zeitparameter.
Was man nun explizit beobachten will, z.B. die Zahl der bisher Geborenen, die Zahl der Individuen, die zum Zeitpunkt t jünger als s Zeiteinheiten sind etc. muß nicht genau spezifiziert werden, sondern man stellt solche Betrachtungen allgemein auf für spezielle Funktionen auf dem Populationsraum, mit denen man die eben genannten Größen dann darstellen kann. Um Aussagen über das asymptotische Verhalten dieser treffen zu können, bedarf es dann allerdings noch gewisser Voraussetzungen, auf die wir an entsprechender Stelle genauer eingehen werden.

2.9.1 Charakteristiken

Formal beginnen wir mit der Definition einer *Charakteristik*. Diese sei eine meßbare Funktion

$$\chi : D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit den zusätzlichen Bedingungen

- $\chi(s,\omega^I,t)=0 \qquad \forall t\in[-\infty,0[\qquad \forall(s,\omega^I)\in D$
- $\chi(s,\omega^I,\cdot)$ ist rechtsseitig stetig mit linksseitigem Limes für alle $(s,\omega^I)\in D$

Wir schreiben wie üblich wieder $\chi_x(s,\omega^I,t):=\chi(S_x(s,\omega^I),t)$.
Die sogenannte *χ-zählende Population zur Zeit t*, z_t^χ, wird definiert als

$$z_t^\chi := \sum_{x\in I}\chi(S_x,t-\sigma_x).$$

Statt $\chi(S_x,t)$ schreiben wir im folgenden auch oft einfach $\chi_x(t)$ und statt $\chi(S_0,t)$ auch nur $\chi(t)$.
An dieser Stelle drei einfache Beispiele :

1. Definieren wir die Charakteristik

$$\chi(s,\omega^I,t):=\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$$

ergibt sich als χ-zählende Population

$$\begin{aligned} z_t^\chi &= \sum_{x\in I}\chi(S_x,t-\sigma_x)\\ &= \#\{x\in I\ ;\ 0\le t-\sigma_x<\infty\}\\ &= \#\{x\in I\ ;\ \sigma_x\le t\}\\ &\hat{=}\ \text{Anzahl der bis zum Zeitpunkt } t \text{ geborenen Individuen.}\end{aligned}$$

2. Definieren wir die Charakteristik

$$\chi(s,\omega^I,t):=\mathbf{1}_{[0,s)}(t)$$

ergibt sich als χ-zählende Population

$$\begin{aligned} z_t^\chi &= \sum_{x\in I}\chi(S_x,t-\sigma_x)\\ &= \#\{x\in I\ ;\ 0\le t-\sigma_x<s\}\\ &\hat{=}\ \text{Anzahl der Individuen, die zum Zeitpunkt } t \text{ jünger}\\ &\qquad \text{als } s \text{ Zeiteinheiten sind.}\end{aligned}$$

3. Sei $\lambda: S\times\Omega\to\mathbb{R}_+$ eine Zufallsgröße derart, daß $\lambda(s,\omega)$ die Lebensdauer eines Individuums mit Typ s und Lebenslauf ω angebe und sei $\lambda_x=\lambda(\rho_x,U_x)$.
Definieren wir die Charakteristik

$$\chi(s,\omega^I,t)=\mathbf{1}_{[0,\lambda_0(s,\omega^I)[}(t)$$

ergibt sich als χ-zählende Population

$$\begin{aligned} z_t^\chi &= \sum_{x\in I}\chi(S_x,t-\sigma_x)=\sum_{x\in I}\mathbf{1}_{[0,\lambda_x[}(t-\sigma_x)\\ &= \#\{x\in I; \sigma_x\le t<\sigma_x+\lambda_x\}\\ &\hat{=}\ \text{Anzahl der zum Zeitpunkt } t \text{ lebenden Individuen.}\end{aligned}$$

Die Beispiele machen deutlich, weshalb asymptotische Betrachtungen von z_t^χ durchaus von Interesse sind. Wir werden in diesem Kapitel unter gewissen Voraussetzungen Aussagen über die Konvergenz von $E_s[z_t^\chi]$ sowie die schwache und starke $\mathcal{L}_1$-Konvergenz von z_t^χ treffen.
Zu beachten ist, daß in obigen Beispielen χ_x allein von Typ und Lebenslauf des Individuums x abhängt. Solche speziellen Charakteristiken werden als *Individual-Charakteristiken* bezeichnet.
Eine im folgenden sehr nützliche "Aufsplittung" der χ-zählenden Population liefert folgendes

Lemma 2.9.1 *Sei J eine optionale überdeckende Linie. Dann gilt die sogenannte fundamentale Gleichung*

$$z_t^\chi = \sum_{x<J} \chi(S_x, t-\sigma_x) + \sum_{x\in J} z_{t-\sigma_x}^\chi \circ S_x,$$

wobei $x < J := \exists y \in J : x < y$.

Beweis:

$$\begin{aligned} z_t^\chi &= \sum_{x\in I} \chi(S_x, t-\sigma_x) \\ &= \sum_{x<J} \chi(S_x, t-\sigma_x) + \sum_{x\in PrJ} \chi(S_x, t-\sigma_x) \\ &= \sum_{x<J} \chi(S_x, t-\sigma_x) + \sum_{x\in J}\sum_{y\in I} \chi(S_{xy}, t-\sigma_{xy}) \\ &= \sum_{x<J} \chi(S_x, t-\sigma_x) + \sum_{x\in J}\sum_{y\in I} \chi(S_y\circ S_x, t-\sigma_x-\sigma_y\circ S_x) \\ &= \sum_{x<J} \chi(S_x, t-\sigma_x) + \sum_{x\in J} z_{t-\sigma_x}^\chi \circ S_x \end{aligned}$$

□

Zu bemerken ist, daß im letzten Term die Shift-Funktion S_x nicht auf den Ausdruck $t-\sigma_x$ angewandt wird. Diese etwas ungenaue Schreibweise werden wir der Einfachheit halber noch des öfteren verwenden. Definieren wir nun

$$\zeta_t := e^{-\alpha t} z_t^\chi$$

$$\varphi_J(t) := \sum_{x<J} \chi(S_x, t-\sigma_x),$$

wird uns eine weitere Gleichung im folgenden bei vielen Rechnungen hilfreich sein:

Lemma 2.9.2 *Ist J optionale überdeckende Linie, so gilt mit obigen Bezeichnungen*

$$\zeta_t = e^{-\alpha t}\varphi_J(t) + \sum_{x\in J} \zeta_{t-\sigma_x} \circ S_x e^{-\alpha\sigma_x}. \tag{2.14}$$

Der Beweis ist eine einfache Anwendung der fundamentalen Gleichung.

□

Aus dieser Gleichung läßt sich nun mit Hilfe des intrinsischen Prozesses $\{w_M; M \subset I\}$ weiter herleiten:

$$\begin{aligned} E[\zeta_t|\mathcal{F}_J] &= e^{-\alpha t}E[\varphi_J(t)|\mathcal{F}_J] + \sum_{x\in J} e^{-\alpha\sigma_x}E[\zeta_{t-\sigma_x}\circ S_x|\mathcal{F}_J] \\ &= e^{-\alpha t}E[\varphi_J(t)|\mathcal{F}_J] + \int_{S\times\mathbf{R}_+}\frac{1}{h(s)}E_s[\zeta_{t-u}]\, w_J(ds\times du) \end{aligned}$$

und daraus offensichtlich

$$E[\zeta_t] = e^{-\alpha t}E[\varphi_J(t)] + \int_{S\times\mathbf{R}_+}\frac{1}{h(s)}E_s[\zeta_{t-u}]\; E[w_J(ds\times du)].$$

2.9.2 Konvergenz des Erwartungswertes

Kommen wir also zum ersten Resultat, der Konvergenz des Erwartungswertes von z_t^χ:

Theorem 2.9.3 *Ist χ eine Charakteristik, für die gilt*

- $\int_S \sup_{t\in\mathbf{R}}(e^{-\alpha t}E_s[\chi(t)])\;\pi(ds) < \infty$
- $\int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha t}E_s[\chi(t)]\;\pi\otimes\lambda\!\!\lambda(ds\times dt) < \infty$
- $\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}E_s[\chi(t)] = 0 \qquad \forall s\in S$

so gilt für π-f.a. $s\in S$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}E_s[z_t^\chi] = \frac{h(s)}{\beta}\int_{\mathbf{R}}\int_S e^{-\alpha u}E_r[\chi(u)]\;\pi(dr)\,\lambda\!\!\lambda(du),$$

wobei β in (2.6) definiert wurde.

Beweis :

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t}E_s[z_t^\chi] &= e^{-\alpha t}E_s\left[\sum_{x\in I}E_s[\chi(S_x, t-\sigma_x)|\mathcal{F}_x]\right] \\ &= e^{-\alpha t}E_s\left[\sum_{x\in I}E_{\rho_x}[\chi(t-\sigma_x)]\right] \\ &\overset{Lemma 2.7.2}{=} e^{-\alpha t}\int_{S\times\mathbf{R}} E_r[\chi(t-u)]\;\nu(s, dr\times du) \\ &= \int_{S\times\mathbf{R}} e^{-\alpha(t-u)}E_r[\chi(t-u)]\;\nu_\alpha(s, dr\times du) \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt mit Kapitel 1.4, Korollar 1.4.14.

□

Wir benutzen im folgenden der Einfachheit halber die Bezeichnungen

$$E_\pi[\hat\chi(\alpha)] := \int_{\mathbf{R}}\int_S e^{-\alpha u}E_r[\chi(u)]\;\pi(dr)\,\lambda\!\!\lambda(du) \qquad \gamma := \frac{1}{\beta}E_\pi[\hat\chi(\alpha)].$$

2.9.3 schwache $\mathcal{L}_1$-Konvergenz

Wir erinnern an die Definition der überdeckenden optionalen Linie

$$\mathcal{Z}_t = \{x \in I \; ; \; \sigma_{mx} \leq t < \sigma_x\},$$

definieren

$$y_t := \#\{\mathcal{Y}_t\} = \#\{x \in I; \sigma_x \leq t\}$$

und zeigen folgendes

Lemma 2.9.4 *Gilt für ein $t \in \mathbb{R}$ $y_t < \infty$ P_s-f.s. für alle $s \in S$ so ist*

$$g(\mathcal{Z}_t) < \infty \; P_s\text{-f.s.} \; \forall s \in S.$$

$\mathcal{Z}_t$ ist also optionale, überdeckende Linie endlicher Generation.
Ist zusätzlich $\xi(S \times \mathbb{R}) < \infty$ P_s-f.s. für alle $s \in S$, so ist weiter

$$\#\{\mathcal{Z}_t \cap \Re\} = \#\{x \in I \; ; \; \sigma_{mx} \leq t < \sigma_x < \infty\} < \infty \quad P_s\text{-f.s. für alle } s \in S.$$

Beweis:
Die erste Behauptung ergibt sich durch

$$\begin{aligned} g(\mathcal{Z}_t) &= \sup\{g(x); \sigma_{mx} \leq t < \sigma_x\} \\ &\leq \sup\{g(x); \sigma_{mx} \leq t\} \\ &= \sup\{g(x); \sigma_x \leq t\} + 1 \\ &= g(\mathcal{Y}_t) + 1 < \infty \quad P_s\text{-f.s.} \quad \forall s \in S. \end{aligned}$$

(da $y_t = \#\mathcal{Y}_t$ als f.s. endlich vorausgesetzt wurde.)

Sei für den Nachweis der zweiten Behauptung $s \in S$ beliebig.

$$\begin{aligned} & P_s(\{\#(\mathcal{Z}_t \cap \Re) = \infty\}) \\ &= P_s\left(\{\sum_{x \in \mathcal{Y}_t} \sum_{y \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{(t,\infty)}(\sigma_{xy}) \; = \infty\}\right) \\ &= P_s\left(\bigcup_{x \in \mathcal{Y}_t} \{\sum_{y \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{(t,\infty)}(\sigma_{xy}) \; = \infty\}\right) \\ &\leq E_s\left(\sum_{x \in \mathcal{Y}_t} P_s(\{\sum_{y \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{(t,\infty)}(\sigma_x + \sigma_y \circ S_x) \; = \infty\} | \mathcal{F}_{\mathcal{Y}_t})\right) \\ &\leq E_s\left(\sum_{x \in \mathcal{Y}_t} P_s(\{\sum_{y \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(\sigma_y \circ S_x) \; = \infty\} | \mathcal{F}_{\mathcal{Y}_t})\right) \\ &\leq \sum_{x \in I} E_s\left(P_{\rho_x}(\{\sum_{y \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(\sigma_y) = \infty\})\right) \\ &= \sum_{x \in I} E_s\left(P_{\rho_x}(\{\xi(S \times \mathbb{R}) = \infty\})\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei die Endlichkeit von y_t in dritter Gleichung eingeht. □

Theorem 2.9.5 *Sei χ eine Charakteristik, die die Bedingungen aus Theorem 2.9.3 erfüllt.*
Weiter gelte für die Population

- *Die x log x-Bedingung ist erfüllt*
- $\xi(S \times \mathbb{R}) < \infty \qquad P_s$*-f.s.* $\forall s \in S$
- $k := \inf\ h > 0$
- y_t *ist für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *gleichgradig integrierbar über seinen Starttyp, d.h.* $\lim_{a\to\infty} \sup_{s\in S} E_s[\mathbf{1}_{\{|y_t|>a\}}(|y_t| - a)] = 0$

Dann konvergiert für π*-f.a.* $s \in S$ $e^{-\alpha t} z_t^\chi$ *schwach in* $\mathcal{L}_1$ *bzgl.* P_s *gegen* γw*, d.h.*

$$\lim_{t\to\infty} \int_A e^{-\alpha t} z_t^\chi \, dP_s = \gamma \int_A w \, dP_s \text{ für alle } A \in \mathcal{S}.$$

Beweis:
Wir nehmen zuerst einmal an, daß ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\chi(t) = 0 \; \forall t \geq n \text{ und } \chi(t) \leq n \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sei $t_0 > n$ und $t \geq t_0 > n$.
Unter Beachtung von

$$x < \mathcal{Z}_{t-n} \Rightarrow t - \sigma_x \geq n \Rightarrow \chi(S_x, t - \sigma_x) = 0 \text{ also } \varphi_{\mathcal{Z}_{t-n}}(t) = 0 \tag{2.15}$$

und

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{Z}_{t-n} \quad &\Rightarrow \quad t - \sigma_x < n \\ &\Rightarrow \quad \chi(S_y \circ S_x, t - \sigma_x - \sigma_y \circ S_x) = 0 \quad \forall y \in I \text{ mit } \sigma_y \circ S_x \geq n \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \zeta_t \quad &\overset{(2.14)}{=} \quad \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x} \zeta_{t-\sigma_x} \circ S_x \\ &= \quad \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x} e^{-\alpha(t-\sigma_x)} z_{t-\sigma_x}^\chi \circ S_x \\ &\leq \quad \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x} z_{t-\sigma_x}^\chi \circ S_x \\ &= \quad \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x} \sum_{y\in I} \chi(S_y \circ S_x, t - \sigma_x - \sigma_y \circ S_x) \\ &\leq \quad \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x} n \, \#\{y \in I; \sigma_y \circ S_x \leq n\} \\ &= \quad n \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x} y_n \circ S_x. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung werden wir nun die gleichgradige Integrierbarkeit von $(\zeta_t)_{t\geq t_0}$ unter jedem $P_s, s \in S_{log}$ zeigen. Sei dazu nun $s \in S_{log}$ gegeben.

1. Schritt : Es gilt

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall t \geq t_0 :\ P_s(A|\mathcal{Z}_{t-n}) < \delta \Rightarrow \sup_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} E_s[y_n \circ S_x \mathbf{1}_A|\mathcal{Z}_{t-n}] < \epsilon. \tag{2.17}$$

Denn:

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} E_s[y_n \circ S_x \mathbf{1}_A|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}] \\
&\quad \leq \sup_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} E_s[\mathbf{1}_{\{|y_n\circ S_x|>a\}}(y_n \circ S_x - a)|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}] \\
&\qquad +a \sup_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} E_s[\mathbf{1}_{\{A\cap|y_n\circ S_x|>a\}}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}] + aE_s[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}] \\
&\quad \leq \sup_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} E_{\rho_x}[\mathbf{1}_{\{|y_n|>a\}}(y_n - a)] + 2aP_s(A|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}})
\end{aligned}$$

und daher die Behauptung wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit von y_n bzgl. des Starttyps.

Mit Hilfe von (2.17) weisen wir im 2.Schritt nun nach, daß

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 :\ P_s(A) < \delta \Rightarrow \sup_{t\geq t_0} \int_A \zeta_t \, dP_s < \epsilon. \tag{2.18}$$

Da weiterhin nach dem schon Gezeigten

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq t_0} E_s[\zeta_t] &\overset{(2.16)}{\leq} \sup_{t\geq t_0} nE_s\left[\sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x} E[y_n \circ S_x|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}]\right] \\
&\leq \frac{n}{k} \sup_{s\in S} E_s[y_n] \sup_{t\geq t_0} E_s[w_{\mathcal{Z}_{t-n}}] < \infty
\end{aligned}$$

(nach Theorem 2.8.6 und der gleichgradigen Integrierbarkeit von y_n), folgt damit dann die gleichgradige Integrierbarkeit von $(\zeta_t)_{t\geq t_0}$ unter P_s.

Zeigen wir also nun (2.18):
Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig.
Nach (2.17) existiert ein δ_0, so daß

$$P_s(A|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}) < \delta_0 \Rightarrow \sup_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} E_s[y_n \circ S_x \mathbf{1}_A|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}] < \frac{\epsilon}{2} \frac{k}{nE_s[w]} \qquad \forall\, t \geq t_0.$$

Aufgrund der P_s-Integrierbarkeit von w kann ein $\delta_1 > 0$ so gewählt werden, daß

$$P_s(B) < \delta_1 \Longrightarrow \int_B w\, dP_s < \frac{\epsilon k}{2n \sup_{x\in S} E_x[y_n]}.$$

Wir definieren $\delta := \delta_0\delta_1$ und weisen nach, daß für δ (2.18) erfüllt ist. Sei $A \in \mathcal{D}$ mit $P_s(A) < \delta$ und $t \geq t_0$ beliebig.
Mit $B := \{P_s(A|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}) > \delta_0\}$ ($\Rightarrow P_s(B) < \delta_1$) folgt

$$
\begin{aligned}
E_s[\mathbf{1}_A\zeta_t] &\overset{(2.16)}{\leq} \frac{n}{k}E_s[\mathbf{1}_A\sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x}h(\rho_x)y_n\circ S_x] \\
&= \frac{n}{k}E_s\left[\mathbf{1}_B\sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x}h(\rho_x)E_s[\mathbf{1}_A\, y_n\circ S_x|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}]\right] \\
&\quad +\frac{n}{k}E_s\left[\mathbf{1}_{B^c}\sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-n}} e^{-\alpha\sigma_x}h(\rho_x)E_s[\mathbf{1}_A\, y_n\circ S_x|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-n}}]\right] \\
&\leq \frac{n}{k}\sup_{x\in S}E_x[y_n]E_s[\mathbf{1}_B w_{\mathcal{Z}_{t-n}}]+\frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{n}{k}\sup_{x\in S}E_x[y_n]E_s[\mathbf{1}_B w]+\frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \epsilon,
\end{aligned}
$$

wobei in vorletzter Zeile die $\mathcal{Z}_{t-n}$-Meßbarkeit von B und Satz 2.8.6 zu beachten sind.

Mit $(\zeta_t)_{t\geq t_0}$ ist aber auch $(E_s[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}])_{t\geq t_0}$ gleichgradig integrierbar, wie man sich leicht überlegen kann.
Nun ist $(E_s[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}])_{t\in\mathbb{R}}$ aber auch P_s-f.s. konvergent für π-f.a. $s\in S$, wie man wie folgt sieht:
Für $t\geq 2t_0$ gilt

$$x<\mathcal{Z}_{t_0}\Rightarrow\sigma_x\leq t_0\Rightarrow t-\sigma_x\geq t_0>n\Rightarrow\varphi_{\mathcal{Z}_{t_0}}(t)=\sum_{x<\mathcal{Z}_{t_0}}\chi(S_x,t-\sigma_x)=0.$$

Damit und unter Ausnützung der fundamentalen Gleichung folgt nun für π-f.a. $s\in S$

$$
\begin{aligned}
E_s[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}] &\overset{(2.14)}{=} \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t_0}} e^{-\alpha\sigma_x}E_{\rho_x}[\zeta_{t-\sigma_x}] \\
&= \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t_0}} e^{-\alpha\sigma_x}e^{-\alpha(t-\sigma_x)}E_{\rho_x}[z^{\chi}_{t-\sigma_x}] \\
&= \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t_0}\cap\Re} e^{-\alpha\sigma_x}e^{-\alpha(t-\sigma_x)}E_{\rho_x}[z^{\chi}_{t-\sigma_x}] \\
&\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\beta}E_\pi[\hat{\chi}(\alpha)]w_{\mathcal{Z}_{t_0}}=\gamma w_{\mathcal{Z}_{t_0}} \qquad P_s\text{-f.s.},
\end{aligned}
$$

wobei für die fast sichere Konvergenz zu beachten ist, daß wegen der Endlichkeit von $\xi(S\times\mathbb{R})$ und y_{t_0} (da y_{t_0} integrierbar) nach Lemma 2.9.4 $\mathcal{Z}_{t_0}\cap\Re$ endlich ist und daher Theorem 2.9.3 auf die einzelnen Summanden anwendbar ist.

Für π-f.a. $s\in S$ ist $(E_s[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}])_{t\geq t_0}$ demnach gleichgradig P_s-integrierbar und P_s-f.s. konvergent gegen $\gamma w_{\mathcal{Z}_{t_0}}$ und damit auch konvergent in $\mathcal{L}_1$ bzgl. P_s.
Insgesamt folgt jetzt die schwache $\mathcal{L}_1$-Konvergenz, denn für $A\in\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}$ beliebig

ist

$$
\begin{aligned}
|\int_A e^{-\alpha t} z_t^{\chi}\, dP_s - \gamma \int_A w\, dP_s| &= |\int_A E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}]\, dP_s - \gamma \int_A E[w|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}]\, dP_s| \\
&\leq \int_D |E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_0}}] - \gamma w_{\mathcal{Z}_{t_0}}|\, dP_s \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Da $t_0 > n$ beliebig gewählt war und $\sigma((\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_t})_{t>n}) = D$ (zur Begründung siehe Beweis von Theorem 2.8.7) folgt die Behauptung für χ mit den gemachten Voraussetzungen.

Diese Einschränkung gilt es nun aufzuheben:
Für beliebiges χ definieren wir χ_n durch

$$\chi_n(s,\omega^I,t) := 1_{[0,n[}(t)(\chi(s,\omega^I,t) \wedge n) \qquad (s,\omega^I) \in D, t \in \mathbb{R}$$

und analog zu γ definieren wir

$$\gamma_n := \frac{1}{\beta}\, E_\pi[\hat{\chi}_n(\alpha)].$$

Dann gilt für $A \in \mathcal{D}$

$$
\begin{aligned}
&|\int_A e^{-\alpha t} z_t^{\chi}\, dP_s - \gamma \int_A w\, dP_s| \\
&\leq |\int_D e^{-\alpha t} z_t^{\chi} - e^{-\alpha t} z_t^{\chi_n}\, dP_s| + |\int_A e^{-\alpha t} z_t^{\chi_n} - \gamma_n\, w\, dP_s| + (\gamma - \gamma_n) E_s[w].
\end{aligned}
$$

Der 2. Summand konvergiert für t gegen unendlich aber nach dem schon bewiesenen Spezialfall gegen 0.
Der 1. Summand konvergiert nach Theorem 2.9.3 gegen $h(s)(\gamma - \gamma_n)$.
Da aber mit monotoner Konvergenz $(\gamma - \gamma_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt, ist das Theorem nun vollständig bewiesen.

□

2.9.4 starke $\mathcal{L}_1$-Konvergenz

Nun kommen wir zur stärksten Konvergenzart, die hier nachgewiesen werden wird, der starken $\mathcal{L}_1$-Konvergenz.
Dazu vorab einige Vorbereitungen:
Wir definieren für eine Charakteristik χ für $t \in \mathbb{R}, s \in S$

$$m_s(t) := E_s[\zeta_t] \qquad \eta_t := \zeta_t - m_{\rho_0}(t)$$

Die Hauptarbeit des Beweises von Theorem 2.9.8 verlegen wir in Lemma 2.9.7.
Für dessen Beweis benötigen wir aber zuerst noch folgendes

Lemma 2.9.6 *Es seien für die Population und eine Charakteristik* χ *die Bedingungen aus Theorem 2.9.5 gegeben. Weiter existiere ein* $n \in \mathbb{N}$*, so daß*

$$\chi \leq n \text{ und } \chi(s, \omega^I, t) = 0 \; \forall t \geq n, (s, \omega^I) \in D.$$

Dann sind für $c \in \mathbb{R}$ *beliebig die* $(\eta_t)_{t \leq c}$ *gleichgradig integrierbar unter der Startverteilung* P_s*, d.h.*

$$\forall \, \epsilon > 0 \; \exists \, a_0 \in \mathbb{R} : \sup_{t \leq c} \sup_{s \in S} \int_{\{|\eta_t| > a\}} |\eta_t| \, dP_s \; < \; \epsilon \quad \forall a \geq a_0.$$

Beweis :
Sei $t \leq c$ beliebig. Dann gilt

$$\zeta_t \leq \sum_{x \in I} \chi(S_x, t - \sigma_x) \overset{t \leq c}{\leq} n \, \#\{x \in I; \sigma_x \leq c\} = n y_c \tag{2.19}$$

$$E_s[\zeta_t] \leq n E_s[y_c] \tag{2.20}$$

und damit

$$\{|\eta_t| > a\} \subset \{\zeta_t > a\} \cup \{E_{\rho_0}[\zeta_t] > a\} \subset \{n y_c > a\} \cup \{n E_{\rho_0}[y_c] > a\}. \tag{2.21}$$

Also für $\epsilon > 0$ beliebig

$$\begin{aligned} \int_{\{|\eta_t| > a\}} |\eta_t| \, dP_s &\leq \int_{\{|\eta_t| > a\}} \zeta_t \, dP_s + \int_{\{|\eta_t| > a\}} E_s[\zeta_t] \, dP_s \\ &\leq \int_{\{n y_c > a\}} \zeta_t \, dP_s + \int_{\{n E_s[y_c] > a\}} \zeta_t \, dP_s + \int_{\{n y_c > a\}} E_s[\zeta_t] \, dP_s \\ &\quad + \int_{\{n E_s[y_c] > a\}} E_s[\zeta_t] \, dP_s \end{aligned}$$

und der Beweis wird nun durch geeignete Abschätzung dieser 4 Summanden vervollständigt:
1. Summand:

$$\sup_{t \leq c} \sup_{s \in S} \int_{\{n y_c > a\}} \zeta_t \, dP_s \leq \sup_{s \in S} n \int_{\{y_c > \frac{a}{n}\}} y_c \, dP_s \; < \epsilon \; \forall a \geq a_1$$

für ein $a_1 \in \mathbb{R}$, was aus der vorausgesetzten gleichgradigen Integrierbarkeit von y_c über den Starttyp resultiert.
2. und 4. Summand:
Da aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von y_c über den Starttyp $\sup_s E_s[y_c] < \infty$ folgt, gilt

$$\exists a_2 \in \mathbb{R} \; : \; \{n \; E_s[y_c] > a\} = \emptyset \quad \forall s \in S \; \forall a \geq a_2$$

und daher verschwinden beide Summanden für $a \geq a_2$.
3. Summand:

$$\begin{aligned} \sup_{t \leq c} \sup_{s \in S} \int_{\{n \; y_c > a\}} E_s[\zeta_t] \, dP_s \quad &\leq \quad \sup_{s \in S} \int_{\{n \; y_c > a\}} n E_s[y_c] \, dP_s \\ &\leq \quad n \sup_{s \in S} E_s[y_c] \sup_{s \in S} P_s(y_c > \frac{a}{n}) \\ &< \quad \epsilon \quad \forall a \geq a_3 \end{aligned}$$

für ein $a_3 \in \mathbb{R}$, was sich wiederum aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von y_c über den Starttyp ergibt.
Mit $a_0 := max\{a_1, a_2, a_3\}$ folgt die Behauptung.

$\square$

Lemma 2.9.7 *Es seien für die Population und eine Charakteristik χ die Bedingungen aus Theorem 2.9.5 gegeben. Weiter existiere ein $n \in \mathbb{N}$, so daß*

$$\chi \leq n \text{ und } \chi(s, \omega^I, t) = 0 \; \forall t \geq n, (s, \omega^I) \in D.$$

Mit $c > n$ gilt für π-f.a. $s \in S$

$$\zeta_t - E[\zeta_t | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}] \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ in Wahrscheinlichkeit bzgl. } P_s.$$

Beweis:
Für $t > c$ (und damit $\varphi_{\mathcal{Z}_{t-c}}(t) = 0$) beliebig gilt

$$\begin{aligned} \zeta_t - E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}] &= \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} e^{-\alpha t} z^{\chi}_{t-\sigma_x} \circ S_x - \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} e^{-\alpha t} E[z^{\chi}_{t-\sigma_x} \circ S_x | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}] \\ &= \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} e^{-\alpha \sigma_x} (\zeta_{t-\sigma_x} \circ S_x - E_{\rho_x}[\zeta_{t-\sigma_x}]) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} e^{-\alpha \sigma_x} (\eta_{t-\sigma_x} \circ S_x) \end{aligned} \tag{2.22}$$

und weiter für beliebiges $v \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} P(|\eta_{t-\sigma_x} \circ S_x| e^{-\alpha\sigma_x} > v | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} P_{\rho_x}(|\eta_{t-\sigma_x}| > v e^{\alpha \sigma_x}) \\ &\leq \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} E_{\rho_x}(\mathbf{1}_{\{|\eta_{t-\sigma_x}| > v e^{\alpha\sigma_x}\}} |\eta_{t-\sigma_x}|) \frac{1}{v} e^{-\alpha\sigma_x} \\ &\leq \frac{1}{vk} \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t-c}} E_{\rho_x}(\mathbf{1}_{\{|\eta_{t-\sigma_x}| > v e^{\alpha\sigma_x}\}} |\eta_{t-\sigma_x}|) e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) \\ &\leq \epsilon w_{\mathcal{Z}_{t-c}} \end{aligned}$$

für beliebiges $\epsilon > 0$ und $t \geq a_0 + c$ mit a_0 so groß, daß
$\sup_{s \in S} \sup_{t \leq c} E_s(\mathbf{1}_{\{|\eta_t| > v e^{\alpha a}\}} |\eta_t|) < \epsilon v k \quad \forall a \geq a_0$.
(und damit $x \in \mathcal{Z}_{t-c} \Rightarrow (t - \sigma_x \leq c$ und $\sigma_x \geq a_0))$

Sei nun eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegeben mit $t_n \to \infty$ und ein ω aus der unter jedem $P_s, s \in S_{log}$ sicheren Menge $\{\omega \in D \; ; \; \lim_n w_{\mathcal{Z}_{t_n - c}}(\omega) \text{ existiert}\}$.

Wir definieren

$$k_n(\omega) := \#(\mathcal{Z}_{t_n-c}(\omega) \cap \Re(\omega))$$

$$\{x; x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}(\omega) \cap \Re(\omega)\} := \{x_{n1}, \ldots, x_{nk_n}\}$$

$$X_{nj} := \eta_{t_n - \sigma_{x_{nj}}(\omega)} \circ S_{x_{nj}} e^{-\alpha\sigma_{x_{nj}}(\omega)} \qquad j = 1 \ldots k_n$$

Dann ist für jedes n $\zeta_{t_n} - E[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}]$ unter $P(\cdot|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega)$ eine Summe unabhängiger zentrierter Zufallsgrößen und zwar gerade die Summe der $X_{nj}, j = 1 \ldots k_n$, die “asymptotisch gleichgradig vernachlässigbar” sind, d.h. für $v > 0$ beliebig

$$\max_{j=1 \ldots k_n} P(|X_{nj}| \geq v|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(Dies folgt aus der schon gezeigten Ungleichung $\sum_{j=1}^{k_n} P(|X_{nj}| > v|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega) \leq \epsilon w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}(\omega)$ und der Konvergenz von $w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}(\omega)$ für n gegen unendlich.)
Sei $\bar{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß für daß $\bar{P}^{X_{nj}} = P(X_{nj} \in \cdot|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega)\ \forall n, j$ gelte und $\bar{X}$ eine unter $\bar{P}$ $N(0,0)$-verteilte Zufallsgröße. Wir zeigen nun, wobei wir uns eng an Loève[8], Kapitel VI halten, die Behauptung

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{nj} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{X} \qquad \text{in Verteilung unter } \bar{P}. \tag{2.23}$$

Dazu definieren wir analog zur Notation in Loève

$$F_{nj}(A) := P(X_{nj} \in A|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{D}$$

$$a_{nj}(\tau) := \int_{|x|<\tau} x \, dF_{nj}$$

$$\sigma_{nj}^2(\tau) := \int_{|x|<\tau} x^2 \, dF_{nj} - (a_{nj})^2$$

Nach Loève[8], Seite 316 sind zum Nachweis von (2.23) folgende drei Punkte für jedes $\epsilon > 0$ und ein $\tau > 0$ nachzuweisen :

a) $\sum_{j=1}^{k_n} P(|X_{nj}| \geq \epsilon|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

b) $\sum_{j=1}^{k_n} |a_{nj}(\tau)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

c) $\sum_{j=1}^{k_n} |\sigma_{nj}^2(\tau)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

a) haben wir bereits nachgewiesen.
zu b)
Wir wählen $\tau > 0, \epsilon > 0$ beliebig

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k_n} |a_{nj}(\tau)| &= \sum_{j=1}^{k_n} |E[\mathbf{1}_{\{|X_{nj}|<\tau\}} X_{nj} | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}](\omega)| \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} |E[\mathbf{1}_{\{|X_{nj}|>\tau\}} X_{nj} | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}](\omega)| \qquad (X_{nj} \text{ zentriert}) \\
&= \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} e^{-\alpha\sigma_x} |E_{\rho_x}[\eta_{t_n-\sigma_x} \mathbf{1}_{\{|\eta_{t_n-\sigma_x}|>\tau e^{\alpha\sigma_x}\}}](\omega)| \\
&\leq \frac{1}{k} \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c} E_s[|\eta_t| \mathbf{1}_{\{|\eta_t|>\tau e^{\alpha\sigma_x}\}}](\omega)| \\
&\leq \epsilon w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}} \qquad \forall n \geq n(\epsilon),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung aus der gleichgradigen Integrierbarkeit der $(\eta_t)_{t\leq c}$ über den Starttyp folgt. (Lemma 2.9.6)
zu c)
Für $\tau > 0$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k_n} |\sigma_{nj}^2(\tau)| \leq \sum_{j=1}^{k_n} | \int_{|x|<\tau} x^2 \, dF_{nj}| + \sum_{j=1}^{k_n} \left(\int_{|x|<\tau} x \, dF_{nj} \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k_n} |E[X_{nj}^2 \mathbf{1}_{|X_{nj}|<\tau} | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}](\omega)| + \sum_{j=1}^{k_n} \Big(E[X_{nj} \mathbf{1}_{|X_{nj}|<\tau} | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}](\omega) \Big)^2 .
\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist analog zur Abschätzung der Summe der a_{nj} als konvergent gegen 0 nachzuweisen.
Schätzen wir also nur den ersten Summand weiter ab: Dazu sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt.

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} E[(\eta_{t_n-\sigma_x} \circ S_x)^2 e^{-2\alpha\sigma_x} \mathbf{1}_{\{|\eta_{t_n-\sigma_x} \circ S_x| e^{-\alpha\sigma_x} \leq \tau\}} | \mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}](\omega) \\
&\quad \leq \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} E_{\rho_x}[(\eta_{t_n-\sigma_x})^2 e^{-2\alpha\sigma_x} \mathbf{1}_{\{|\eta_{t_n-\sigma_x}|<\epsilon e^{\alpha\sigma_x}\}}](\omega) \\
&\qquad +| \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} E_{\rho_x}[(\eta_{t_n-\sigma_x})^2 e^{-2\alpha\sigma_x} \mathbf{1}_{\{|\eta_{t_n-\sigma_x}|<\tau e^{\alpha\sigma_x}\}}](\omega) \\
&\qquad\quad - \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} E_{\rho_x}[(\eta_{t_n-\sigma_x})^2 e^{-2\alpha\sigma_x} \mathbf{1}_{\{|\eta_{t_n-\sigma_x}|<\epsilon e^{\alpha\sigma_x}\}}](\omega)| \\
&\quad \leq \frac{\epsilon}{k} \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c} E_s[|\eta_t|] \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) \\
&\qquad + \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} E_{\rho_x}[(\eta_{t_n-\sigma_x})^2 e^{-2\alpha\sigma_x} \mathbf{1}_{\{\epsilon e^{\alpha\sigma_x} < |\eta_{t_n-\sigma_x}| < \tau e^{\alpha\sigma_x}\}}](\omega) \\
&\quad \leq \frac{\epsilon}{k} \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c} E_s[|\eta_t|] w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}} \\
&\qquad + \frac{\tau}{k} \sum_{x \in \mathcal{Z}_{t_n-c}} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) E_{\rho_x}[|\eta_{t_n-\sigma_x}| \mathbf{1}_{\{\epsilon e^{\alpha\sigma_x} < |\eta_{t_n-\sigma_x}|\}}](\omega)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\epsilon}{k} \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c} E_s[|\eta_t|] w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}} \\
&\quad + \frac{\tau}{k} \sum_{x\in \mathcal{Z}_{t_n-c}} e^{-\alpha\sigma_x} h(\rho_x) \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c} E_s[|\eta_t| \mathbf{1}_{\{\epsilon e^{\alpha\sigma_x} < |\eta_t|\}}](\omega) \\
&\leq \frac{\epsilon}{k} \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c} E_s[|\eta_t|] w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}} \\
&\quad + \frac{\tau}{k} w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}} \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c} E_s[|\eta_t| \mathbf{1}_{\{\epsilon e^{\alpha(t_n-c)} < |\eta_t|\}}](\omega)
\end{aligned}
$$

Da ϵ beliebig gewählt war, folgt c) mithilfe der fast sicheren Konvergenz von $w_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}$ und der gleichgradigen Integrierbarkeit der $(\eta_t)_{t\leq c}$. (Lemma 2.9.6)
Damit ist also nun (2.23) gezeigt.
Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P(\zeta_{t_n} - E[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}] \leq t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega) \\
&\stackrel{(2.22)}{=} \lim_{n\to\infty} P(\sum_{x\in\mathcal{Z}_{t_n-c}} \eta_{t_n-\sigma_x} \circ S_x e^{-\alpha\sigma_x} \leq t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\sum_{j=1}^{k_n} X_{nj} \leq t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})(\omega) = \begin{cases} 1 & : \quad t>0 \\ 0 & : \quad t<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

und dann mit majorisierter Konvergenz für $s \in S_{log}$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P_s(\{\zeta_{t_n} - E[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}] \leq t\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} E_s\left[P(\{\zeta_{t_n} - E[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}] \leq t\}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}})\right] = \begin{cases} 1 & : \quad t>0 \\ 0 & : \quad t<0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

und daher die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von $\zeta_{t_n} - E[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}]$ unter P_s gegen 0.
Da t_n eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_n \to \infty$ war, gilt damit also nach Neveu[9], Seite 96 Lemma V-1-1

$$
\zeta_t - E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}] \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{in Wahrscheinlichkeit bzgl. } P_s.
$$

□

Jagers schließt nun weiter in seinem Artikel, daß unter den gegebenen Voraussetzungen $\zeta_t \longrightarrow \gamma w$ in Wahrscheinlichkeit bzgl. P_s für π-f.a. $s \in S$ gilt. Zusammen mit der schon nachgewiesenen schwachen $\mathcal{L}_1$-Konvergenz würde dann nach Zaanen[17], Seite 385 die starke $\mathcal{L}_1$-Konvergenz folgen. Leider ist die Beweisführung in der Form falsch, so daß wir die von ihm aufgestellte Aussage über die starke $\mathcal{L}_1$-Konvergenz nur unter zusätzlichen Voraussetzungen beweisen können. Wir stellen hier zwei Möglichkeiten vor, von denen die zweite den Vorteil hat, daß die in ihr gestellten Zusatzvoraussetzungen für den Fall einer endlichen Typenmenge S kaum gravierend sind. Wir erinnern vorab an

$$
\gamma = \frac{1}{\beta} E_\pi[\chi(\hat{\alpha})] = \frac{1}{h(s)} \lim_{t\to\infty} E_s[e^{-\alpha t} z_t^\chi] = \frac{1}{h(s)} \lim_{t\to\infty} m_s(t) \quad \text{für } \pi\text{-f.a. } s\in S,
$$

wobei für die zweite Gleichung Theorem 2.9.3 heranzuziehen ist.

1. Wir setzen voraus, daß $(E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}])_{t\in\mathbb{R}}$ monoton wachsend in t ist. (P_s-f.s. $\forall s \in S$)
Aus
$$\begin{aligned} E_s[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}] &\overset{(2.14)}{=} \sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-c}} e^{-\alpha\sigma_x} E_{\rho_x}[\zeta_{t-\sigma_x}] \\ &\leq \frac{1}{k} \sup_{s\in S} \sup_{t\leq c}(E_s[\zeta_t]) w_{\mathcal{Z}_{t-c}} \quad P\text{-f.s.} \end{aligned}$$
geht unter Berücksichtigung von (2.19) und der vorausgesetzten gleichgradigen Integrierbarkeit von y_c zusätzlich die f.s.Beschränktheit jeder Folge $(E_s[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \uparrow \infty$ hervor. (P_s-f.s. für π-f.a. $s \in S$)
Für jede Folge $t_n \uparrow \infty$ existiert demnach eine Zufallsgröße X mit
$$E_s[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}] \longrightarrow X \quad P_s\text{-f.s. für } \pi\text{-f.a. } s \in S.$$
Aus $\zeta_{t_n} - E_s[\zeta_{t_n}|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t_n-c}}] \overset{i.W.}{\longrightarrow} 0$ ergibt sich direkt $\zeta_{t_n} \overset{i.W.}{\longrightarrow} X$ und daher aus der schon nachgewiesenen schwachen $\mathcal{L}_1$-Konvergenz mit Neveu[10], Proposition IV-2-2 $\zeta_t \overset{i.W.}{\longrightarrow} \gamma w$. Daraus folgt jetzt zusammen mit der schon nachgewiesenen schwachen $\mathcal{L}_1$-Konvergenz die starke $\mathcal{L}_1$-Konvergenz bzgl. P_s von ζ_t gegen γw. (Zaanen[17], Seite 385) für π-f.a.$s \in S$.

2. Wir machen folgende beiden zusätzlichen Voraussetzungen:
   - $E_s\zeta_t \longrightarrow \gamma h(s)$ gleichmäßig in s, d.h.
     $$\lim_{t\to\infty} \sup_{s\in S} |E_s[\zeta_t] - \gamma h(s)| = 0$$
     (Diese Voraussetzung ist trivialerweise erfüllt, falls S endlich.)
   - $\exists\, r \in \mathbb{R} \;:\; P_s^{\tau_x}((r,\infty)) = 0 \quad \forall x \in I\; \forall s \in S$
     Dies ist sogar eine sehr realitätsnahe Einschränkung, denn die Tatsache, daß Individuen ab einem bestimmten Alter r keine Nachfahren mehr bekommen, wäre zum Beispiel schon durch eine obere Altersschranke für die Individuen gegeben.

   Damit gilt:
$$\begin{aligned} E[|E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}] - \gamma w_{\mathcal{Z}_{t-c}}|] &\overset{(2.14)}{\leq} E[\sum_{x\in\mathcal{Z}_{t-c}} e^{-\alpha\sigma_x}|E_{\rho_x}[\zeta_{t-\sigma_x}] - \gamma h(\rho_x)|] \\ &\leq \frac{1}{k} E[w_{\mathcal{Z}_{t-c}}] \sup_{u\geq c-r} \sup_{s\in S} |E_s[\zeta_u] - \gamma h(s)|. \end{aligned}$$
   (denn $x \in \mathcal{Z}_{t-c} \Rightarrow \sigma_{mx} \leq t-c \Rightarrow \sigma_x \leq t-c+r \Rightarrow t-\sigma_x \geq c-r$)
   Man hat also
$$\forall \epsilon > 0\; \exists c_0 > 0 \;:\; t > c > c_0 \;\Rightarrow\; E[|E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}] - \gamma w_{\mathcal{Z}_{t-c}}|] \leq \epsilon.$$

Zusammen mit

$$\gamma w_{\mathcal{Z}_{t-c}} \longrightarrow \gamma w \quad \text{in } \mathcal{L}_1 \text{ bzgl. } P_s \text{ für } \pi\text{-f.a.} s \in S$$

folgt für π-f.a.$s \in S$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists c_0 > 0, t_0 > 0 \, : \, t > t_0 \, \Rightarrow \, E_s[|E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c_0}}] - \gamma w|] \leq \epsilon.$$

Mit

$$\zeta_t - E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c_0}}] \xrightarrow{i.W.} 0$$

folgt nun leicht

$$\zeta_t \xrightarrow{i.W.} \gamma w$$

und wie eben zusammen mit der schwachen $\mathcal{L}_1$-Konvergenz die starke $\mathcal{L}_1$-Konvergenz bzgl. P_s für π-f.a.$s \in S$.

Zuletzt läßt sich nun noch die Einschränkung an die Charakteristik ($\chi \leq n, \chi(t) = 0 \, \forall t \geq n$) wie im Beweis von Theorem 2.9.5 aufheben.
Dazu definieren wir uns χ_n wie schon am Ende des Beweises von Theorem 2.9.5 Dann gilt

$$\begin{aligned} E[|e^{-\alpha t} z_t^{\chi} - \gamma w|] \leq \; & E[|e^{-\alpha t} z_t^{\chi} - e^{-\alpha t} z_t^{\chi_n}|] + E[|e^{-\alpha t} z_t^{\chi_n} - \frac{1}{\beta} E_\pi[\hat{\chi}_n(\alpha)] w|] \\ & + E[|\frac{1}{\beta}(E_\pi[\hat{\chi}_n(\alpha)] - E_\pi[\hat{\chi}(\alpha)]) w|]. \end{aligned}$$

Der erste Summand läßt sich wie schon zum Ende von Theorem 2.9.5 gezeigt, beliebig klein abschätzen. Für den zweiten Summanden gilt nach dem eben behandelten Spezialfall dasselbe. Der dritte Summand konvergiert aufgrund von monotoner Konvergenz gegen 0.

Wir fassen das Gezeigte in einem Theorem zusammen

Theorem 2.9.8 *Es seien für die Population und eine Charakteristik χ die Bedingungen aus Theorem 2.9.5 gegeben. Zusätzlich sei*

$$(E[\zeta_t|\mathcal{F}_{\mathcal{Z}_{t-c}}])_{t \in \mathbb{R}} \text{ monoton in } t \; P_s\text{-f.s. } \forall s \in S$$

oder es gelte für ein $r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{s \in S} |E_s[\zeta_t] - \gamma h(s)| = 0 \text{ und } P_s^{\tau_x}((r, \infty)) = 0 \quad \forall x \in I \, \forall s \in S.$$

Dann gilt für π-f.a. $s \in S$

$$e^{-\alpha t} z_t^{\chi} \xrightarrow{t \to \infty} \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}} \int_S e^{-\alpha u} E_r[\chi(u)] \, \pi(dr) \, \lambda\!\!\lambda(du) \, w = \gamma w \text{ in } \mathcal{L}_1 \text{ bzgl. } P_s.$$

Appendix A

Es sei $(S, \mathcal{S})$ ein meßbarer Raum und $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{B}$.

A.1 Markov-Ketten

Definition:
Gegeben ein stochastischer Kern $\mu : S \times \mathcal{S} \to [0,1]$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß λ auf $(S, \mathcal{S})$.
Eine stochastische Folge $(M_n)_{n \geq 0}$ mit Zustandsraum $(S, \mathcal{S})$ heißt *zeitlich homogene Markov-Kette* (MK) mit *Übergangskern* μ und *Startverteilung* λ, wenn

$$P^{M_0} = \lambda$$
$$P^{M_{n+1}|(M_k)_{0 \leq k \leq n}}(\cdot) = \mu(M_n, \cdot) \quad \text{P-f.s.} \quad \forall n \geq 0$$

Standardmodell:
Sei $\mu : S \times \mathcal{S} \to [0,1]$ ein stochastischer Kern.
$(\Omega, \mathcal{A}, (M_n)_{n \in \mathbb{N}}, (P_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{S})})$ heißt *Standardmodell* zu μ, wenn $M_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathcal{S})$ unter jedem P_λ eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Startverteilung λ und Übergangskern μ bildet.
Wir schreiben auch kurz P_x statt P_{δ_x} für $x \in S$.

A.2 Ein Erneuerungstheorem für Random-Walks

Für einen RW $(S_n)_{n \geq 0}$ mit quasi-$\lambda\!\!\!\lambda$-stetigen Zuwächsen $X_1, X_2, \ldots$ und $\mu := EX_1 > 0$ gilt mit $\nu := \sum_{n \geq 0} P^{S_n}$

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{|g| \leq f} |\nu * g(t) - \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}} g(x) \, \lambda\!\!\!\lambda(dx)| = 0$$

$$\lim_{t \to -\infty} \sup_{|g| \leq f} |\nu * g(t)| = 0$$

für alle $0 \leq f \in L_1 \cap L_\infty$ mit $\lim_{|t| \to \infty} f(t) = 0$.

Bibliography

[1] ALSMEYER,G. *The Markov Renewal Theorem and Related Results.* Markov Processes and Related Fields 3, S.103-127 (1997)

[2] ALSMEYER,G. *Erneuerungstheorie.* R.G.Teubner, Stuttgart (1991)

[3] ARJAS,E., NUMMELIN,E., TWEEDIE,R.L. *Uniform limit theorems for non-singular renewal and Markov renewal processes.* Journal of Applied Probabilities (1978)

[4] BACCELLI,F., BRÉMAUD,P. *Elements of Queueing Theory.* Springer-Verlag (1994)

[5] CINLAR,E. *Introduction To Stochastic Processes.* Prentice -Hall, New Jersey (1975)

[6] DOOB,J.L. *Stochastic processes.* Wiley and Sons, New York (1953)

[7] JAGERS,P. *General Branching Processes as Markov Fields.* Stochastic Processes and their Applications 32, S.183-212 (1988)

[8] LOÈVE,M. *Probability Theory.* Van Nostrand, New York (1955)

[9] NEVEU,J. *Discrete-Parameter Martingales.* North-Holland, Amsterdam (1975)

[10] NEVEU,J. *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability.* Holden-Day Inc. (1965)

[11] NIEMI,S., NUMMELIN,E. *On non-singular renewal kernels with an application to a semigroup of transition kernels.* Stochastic Processes and their Applications 22, S.177-202 (1986)

[12] NUMMELIN,E. *General Irreducibel Markov Chains and Non-Negative Operators.* Cambridge Univ. Press, Cambridge (1984)

[13] NUMMELIN,E. *Uniform and ratio limit theorems for Markov renewal and semi-regenerative processes on a general state space.* Annales de l'Institut Henri Poincare 14, S.119-143 (1978)

[14] NUMMELIN,E. *A splitting Technique for Harris Recurrent Markov Chains.* Zeitung für Wahrscheinlichkeitstheorie (1978)

[15] OREY,S. *Lecture Notes and Limit Theorems for Markov Chains and Transition Probabilities*. Van Nostrand Reinhold, London (1971)

[16] TWEEDIE,R.L. *R-theory for Markov Chains on a general state space I: solidarity properties and R-recurrent chains*. Ann Probab.2, S.840-864 (1974)

[17] ZAANEN,A.C. *Integration*. North-Holland, Amsterdam (1967)

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die den Ausführungen anderer Autoren wörtlich oder sinngemäß entnommen sind, habe ich durch Angabe der Quellen als solche kenntlich gemacht.

Münster, den 15. Dezember 1998