Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Gewichtete Verzweigungsprozesse und eine stochastische Fixpunktgleichung

Diplomarbeit

vorgelegt von

Dirk Strothmann

Thema gestellt von

Prof. Dr. G. Alsmeyer

Münster, April 2005

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Stochastische Fixpunktgleichungen der allgemeinen Form

$$W \stackrel{d}{=} C + \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i W_i \tag{0.1}$$

für $(C, (T_i)_{i\in\mathbb{N}})$ mit bekannter gemeinsamer Verteilung und davon unabhängige, u. i. v. $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ treten in den verschiedensten Anwendungen stochastischer Prozesse auf. Einen kleinen Eindruck davon liefern die folgenden

0.1 Beispiele. (a) Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein superkritischer einfacher Galton-Watson-Prozess mit Reproduktionsverteilung Q und Reproduktionsmittel $\mu > 1$, der außerdem die Bedingung $\mathbb{E}\, Z_1 \log Z_1 < \infty$ erfüllt. Nach einem Satz von Kesten und Stigum konvergiert dann das Martingal $(\mu^{-n} Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ f. s. gegen eine Zufallsgröße W, die auf der Menge $\{\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty\}$ positiv ist und den Erwartungswert 1 besitzt. Dann erfüllt W die Fixpunktgleichung (0.1) mit $C = 0$, $T_1 = \cdots = T_N = \mu^{-1}$ und $T_n = 0$ für $n > N$, wobei N gerade gemäß Q verteilt ist, also

$$W \stackrel{d}{=} \mu^{-N} \sum_{i=1}^{N} W_i.$$

(b) Die Cantor-Verteilung auf $[0, 1]$ erfüllt die Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} T_1 W_1 + T_2 W_2 + 2T_1,$$

wobei T_1 Laplace-verteilt auf $\{0, \frac{1}{3}\}$ und $T_2 = \frac{1}{3} - T_1$ ist. Dies folgt leicht aus der selbstähnlichen Struktur der Cantor-Menge.

(c) Ein ähnliches Resultat liefert die Analyse des Sortieralgorithmus Quicksort durch Rösler: Bezeichnet X_n die Anzahl der notwendigen Vergleichsschritte zum Sortieren einer n-elementigen Liste reeller Zahlen und $\hat{X}_n := \frac{1}{n}(X_n - \mathbb{E}\, X_n)$ ihre

Normalisierung, so konvergiert $(\hat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} T_1 W_1 + T_2 W_2 + g(T_1),$$

wobei T_1 rechteckverteilt auf $[0,1]$, $T_2 = 1 - T_1$ und $g(t) = 1 + 2t\log t + 2(1-t)\log(1-t)$ ist (siehe [Rös1]).

Entsprechend breit gefächert sind die Resultate im Hinblick auf die Existenz und die Eigenschaften von Lösungen der Fixpunktgleichung (0.1), die bisher gezeigt worden sind – jedoch stets unter zusätzlichen Annahmen an die Zufallsgrößen $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$, etwa bezüglich ihres Wertebereichs oder der Zufallsgröße $N := \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{T_i\neq 0\}}$. Wir greifen an dieser Stelle nur einige wenige heraus:

- Alsmeyer und Rösler geben in [AR] eine vollständige Beschreibung der Lösungen im deterministischen Fall, d. h. für konstante $(T_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ sowohl für die homogene ($C = 0$) als auch für die inhomogene Version von (0.1). Die nichttrivialen Fixpunkte sind im Wesentlichen Mischungen stabiler Verteilungen bzw. diskrete Versionen davon. Auf diese Arbeit sei ferner für ein umfassendes Literaturverzeichnis für den Fall deterministischer Gewichte verwiesen.
- Für nichtnegative T_i und konstantes N leiten Kahane und Peyrière eine äquivalente Bedingung für die Existenz von Fixpunkten her, falls die $T_1,\dots,T_N$ u.i.v. sind. Ein entsprechendes Ergebnis zeigen Holley und Liggett für $T_i = c_i T$, wenn also die T_i Vielfache einer festen Zufallsgröße T sind (siehe [KP] bzw. [HL]).
- Durrett und Liggett erzielen denselben Voraussetzungen (nichtnegative T_i und konstantes N), jedoch ohne weitere Voraussetzungen an die gemeinsame Verteilung der T_i, umfassende Resultate zur Existenz und Struktur von Fixpunkten. Liu erweitert diese auf f. s. endliches N aus, das wiederum zusätzlichen Bedingungen wie $\mathbb{E}\,N < \infty$ bzw. $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[T_i(\log T_i)^+\right] < \infty$ genügen muss (siehe [DL] bzw. [Liu]).
- Darauf aufbauend untersucht Caliebe in [Cal1] die symmetrische Fixpunkte unter Rückgriff auf die verwandte Fixpunktgleichung

  $$W \stackrel{d}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} T_i^2 W_i$$

  sowie in [CR] gemeinsam mit Rösler Fixpunkte mit endlicher Varianz. [Cal2] schließlich beinhaltet eine allgemeine Darstellung von Fixpunkten als Mischungen unendlich teilbarer Verteilungen.

Die vorliegende Arbeit stützt sich im Wesentlichen auf die in [DL] dargestellten Ergebnisse und stellt eine Verbindung zum gewichteten Verzweigungsprozess von Rösler [Rös2] her.

Das erste Kapitel dient neben der exakten Formulierung des Problems vor allem der Zusammenstellung einer Reihe mathematischer Hilfsmittel, auf die wir im weiteren Verlauf zurückgreifen werden.

Im zweiten Kapitel zeigen wir das erste Hauptresultat: Wir geben eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen der Fixpunktgleichung an.

Nachdem wir die Frage nach der Existenz von Fixpunkten geklärt haben, können wir uns im abschließenden dritten Kapitel näher mit der Struktur der Fixpunktmenge befassen. Wir stellen eine Funktionsklasse vor, die die Fixpunktmenge parametrisiert. Mit Hilfe dieser Parametrisierung erhalten wir insbesondere eine Eindeutigkeitsaussage im Fall von Lösungen mit endlichem Erwartungswert. Ergebnisse zur schwachen Konvergenz gegen Fixpunkte und zur Existenz von Momenten höherer Ordnung runden unsere Betrachtungen ab.

Mein abschließender Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer für die umfassende und geduldige Betreuung bei der Entstehung dieser Arbeit und allen anderen, die auf die eine oder andere Weise zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Kapitel 1

Grundlagen

Die ersten drei Abschnitte dieses Kapitels dienen der Einführung in die Problemstellung: Zunächst stellen wir die Version der stochastischen Fixpunktgleichung (0.1) vor, die wir näher untersuchen wollen. Im zweiten Abschnitt leiten wir die Repräsentation der Fixpunktgleichung durch einen gewichteten Verzweigungsprozess her. Anschließend führen wir den Random Walk ein, der uns in den folgenden Kapiteln gute Dienste beim Finden von Fixpunkten und der Analyse der Fixpunktmenge leisten wird.

Die verbleibenden drei Abschnitte stellen einige Ergebnisse aus Erneuerungs- und Fluktuationstheorie für Random Walks sowie Martingaltheorie zusammen, die für die Beweisführung unmittelbar von Bedeutung sind. Sie sind zumeist ohne Beweis notiert. Die Darstellung orientiert sich hierbei hauptsächlich an [Als1-3].

1.1 Die stochastische Fixpunktgleichung

Bei allen nachfolgenden Betrachtungen wollen wir ausgehen von folgenden grundlegenden

1.1 Voraussetzungen. Gegeben seien $N \geq 2$ nichtnegative Zufallsgrößen $T_1, \ldots, T_N$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit bekannter gemeinsamer Verteilung F. Für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ gelte $T_i \not\sim \delta_0$. Ferner sei

$$\mathbb{E}\, T_i^\gamma < \infty \text{ für ein } \gamma > 1 \text{ und alle } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Wir betrachten die Transformation

$$K: \quad \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}, \quad \mu \mapsto \mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^{N} T_j W_j\right),$$

auf der Menge $\mathfrak{M}$ der Verteilungen auf $[0,\infty)$. Dabei seien $W_1,\dots,W_N$ unabhängige, identisch gemäß μ verteilte Zufallsgrößen, die von $T_1,\dots,T_N$ unabhängig sind, und es bezeichne $\mathcal{L}(Z)$ die Verteilung einer Zufallsgröße Z.

Die Fixpunkte von K sind gerade die Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{N} T_i W_i. \tag{1.1}$$

Ist nämlich $K\mu = \mu$ für ein $\mu \in \mathfrak{M}$, so gilt (1.1) mit $W, W_1, \dots, W_N \sim \mu$.

Wir können K auch als Transformation auf der Menge $\mathfrak{L}$ der Laplace-Transformierten (L. T.) der Elemente von $\mathfrak{M}$ auffassen. (Da keine Verwechslungsgefahr besteht, werden wir diese Abbildung ebenfalls mit K bezeichnen.) Dann ist

$$K\varphi(\theta) := [K(\varphi)](\theta) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N} \varphi(\theta T_i). \tag{1.2}$$

Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$ die Menge der nichttrivialen Fixpunkte von K:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \{\mu \in \mathfrak{M} : K\mu = \mu, \mu \neq \delta_0\} \\ &\mathrel{\hat{=}} \{\varphi \in \mathfrak{L} : K\varphi = \varphi, \varphi \not\equiv 1\} \end{aligned}$$

Die hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz eines nichttrivialen Fixpunktes, die wir in Kapitel 2 herleiten, wird formuliert mittels der Funktion

$$m : \quad [0,\infty) \to (0,\infty], \quad \alpha \mapsto \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[T_i^\alpha \mathbb{1}_{\{T_i>0\}}\right], \tag{1.3}$$

die nach Voraussetzung auf dem Intervall $[0,\gamma]$ endlich ist. m ist dort ferner differenzierbar (in 0 rechts-, in γ linksseitig) und konvex mit

$$m'(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[(\log T_i)\, T_i^\alpha \mathbb{1}_{\{T_i>0\}}\right] \quad \text{und} \quad m''(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[(\log^2 T_i)\, T_i^\alpha \mathbb{1}_{\{T_i>0\}}\right].$$

Wir benennen nun die wichtigsten Parameter der Verteilung F:

1.2 Definition. Sei $m \not\equiv 1$. Existiert ein $\chi > 0$ mit

$$m(\chi) = 1 \qquad \text{und} \qquad m'(\chi) \le 0,$$

heißt χ der *charakteristische Exponent* von F.

1.3 Bemerkung. Der charakteristische Exponent braucht nicht zu existieren: Ist etwa $T_i > 1$ f. s. für alle $i \in \{1,\dots,N\}$, so ist $m(0) = N$ und $m' > 0$. Falls er jedoch existiert, ist er eindeutig bestimmt, denn die Konvexität von m ist wegen $m \not\equiv 1$ streng.

1.4 Definition. Bezeichnen

$$\mathbb{G}_0 := \mathbb{R}, \qquad \mathbb{G}_d := d\mathbb{Z} \quad (d \in (0,\infty)), \qquad \mathbb{G}_\infty := \{0\}$$

die abgeschlossenen additiven Untergruppen von $\mathbb{R}$, so definieren wir die *Spanne* von F durch

$$d := \sup\left\{d \in [0,\infty] : \mathbb{P}(\log T_i \in \mathbb{G}_d) = 1 \text{ für alle } i \in \{1,\dots,N\}\right\}$$

und nennen F *d-arithmetisch*, falls $d \in (0,\infty)$, und *nichtarithmetisch*, falls $d = 0$.

1.5 Bemerkung. Der Fall $d = \infty$ wird durch die Voraussetzung $\mathcal{L}(T_i) \neq \delta_0$ ausgeschlossen.

Im d-arithmetischen Fall sind also die T_i auf die Menge $\{e^k : k \in \mathbb{G}_d\}$ konzentriert. Entsprechend liest sich beispielsweise (1.3) als

$$m(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k \in \mathbb{G}_d} e^{\alpha k} p_{i,k}$$

mit $p_{i,k} := \mathbb{P}(\log T_i = k)$.

1.2 Der assoziierte gewichtete Verzweigungsprozess

Wir betrachten den unendlichen N-ären Baum

$$\mathbb{T} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{0,\dots,N\}^n$$

mit $\{0,\dots,N\}^0 := \emptyset$. Jeder Knoten $v = (v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{T}$ (wir schreiben verkürzt $v = v_1 \dots v_n$) der Länge $|v| = n$ ist durch den eindeutigen Pfad $\emptyset \to v_1 \to v_1 v_2 \to \dots \to v_1 \dots v_n$ mit der Wurzel $\emptyset$ verbunden. Für zwei Knoten $v = v_1 \dots v_n$, $w = w_1 \dots w_m \in \mathbb{T}$ bezeichnet $vw := v_1 \dots v_n w_1 \dots w_m$ ihre Verkettung.

Nun definieren wir zu jedem $v \in \mathbb{T}$ Zufallsvariablen $X(v)$ und $T(v)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $X(v)$ ist eine nichtnegative Zufallsgröße.

(ii) $T(v)$ ist ein Zufallsvektor $(T_1(v),\dots,T_N(v))$ mit Verteilung F.

(iii) $(X(v))_{v\in\mathbb{T}}$ und $(T(v))_{v\in\mathbb{T}}$ sind unabhängige Familien von u. i. v. Zufallsvariablen.

Wir interpretieren $X(v)$ als zufällige Bewertung des Knotens v und $T_i(v)$ als zufälliges Gewicht der Kante von v nach vi. Bild 1 zeigt einen Ausschnitt aus $\mathbb{T}$ mit den zugehörigen Kantengewichten.

Setzen wir nun rekursiv

$$L(\emptyset) := 1 \quad \text{und} \quad L(vi) := L(v)T_i(v) \quad (i = 1,\dots,N),$$

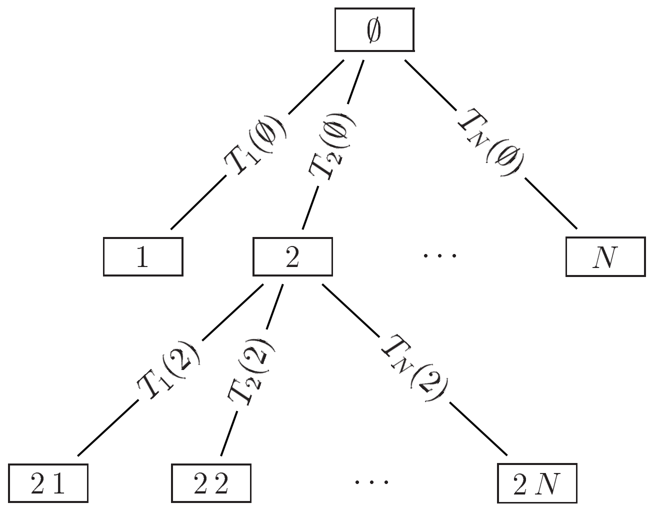

Bild 1. Ausschnitt aus dem Baum $\mathbb{T}$ mit Kantengewichten $T_n(v)$.

so ist $L(v)$ gerade das Gewicht des eindeutigen Pfades von der Wurzel $\emptyset$ zum Knoten v, das sich durch Multiplikation der einzelnen Kantengewichte ergibt, also

$$L(v_1 \dots v_n) = T_{v_1}(\emptyset) \cdot T_{v_2}(v_1) \cdot \dots \cdot T_{v_n}(v_1 \dots v_{n-1}).$$

Aus der Unabhängigkeit der Familie $(T(v))_{v \in \mathbb{T}}$ folgt dann für $v, w \in \mathbb{T}$:

$$L(w) \stackrel{d}{=} \frac{L(vw)}{L(v)}. \tag{1.4}$$

1.6 Definition. Mit den obigen Bezeichnungen heißt $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$Y_n := \sum_{|v|=n} L(v) X(v),$$

der *gewichtete Verzweigungsprozess (GVP)* zur Familie $(X(v), T(v))_{v \in \mathbb{T}}$.

1.7 Lemma. *Definieren wir zu $v \in \mathbb{T}$ die Folge $(Y_n(v))_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch*

$$Y_n(v) := \sum_{|w|=n} \frac{L(vw)}{L(v)} X(vw),$$

so gilt

(a) $(Y_n(v))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist der GVP zur Familie $(X(vw), T(vw))_{w \in \mathbb{T}}$ und eine Kopie von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ sind die Prozesse $(Y_n(v))_{n \in \mathbb{N}_0}$, $|v| = k$, stochastisch unabhängig.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die rekursive Identität

$$Y_n(v) = \sum_{i=1}^{N} T_i(v) Y_{n-1}(vi). \tag{1.5}$$

Beweis. (a) und (b) ergeben sich sofort aus der Struktur von $(X(v), T(v))_{v \in \mathbb{T}}$. Für (c) nehmen wir o. B. d. A. $v = \emptyset$ an. Offensichtlich ist $Y_n(\emptyset) = Y_n$, und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n = \sum_{i=1}^{N} T_i(\emptyset) \left(\sum_{|w|=n-1} \frac{L(iw)}{L(i)} X(iw) \right) = \sum_{i=1}^{N} T_i(\emptyset) Y_{n-1}(i).$$

Damit ist alles gezeigt. □

Den Bezug zu unserem Fixpunktproblem stellt das folgende Lemma her:

1.8 Lemma. *Gilt $Y_0 = X(\emptyset) \sim \mu$, so folgt*

$$Y_n \sim K^n \mu$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Per Induktion unter Benutzung von Lemma 1.7(c). □

Insbesondere ist μ also genau dann ein Fixpunkt von K, wenn der GVP $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bei Wahl von $Y_0 \sim \mu$ stationär ist, d. h. $Y_n \sim \mu$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

1.3 Der zugehörige Random Walk

Wir betrachten nun für $\alpha \in [0, \gamma]$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$Z_{\alpha,n} := \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}},$$

das ist in der Sprechweise von Definition 1.6 der gewichtete Verzweigungsprozess zur Familie $(1, (T_1^\alpha(v) \mathbb{1}_{\{T_1>0\}}, \ldots, T_N^\alpha(v) \mathbb{1}_{\{T_N>0\}}))_{v \in \mathbb{T}}$. Die Identität (1.5) wird dann zu

$$Z_{\alpha,n} = \sum_{i=1}^{N} T_i^\alpha \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} Z_{\alpha,n-1}(i) \tag{1.6}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Der Prozess $(Z_{\alpha,n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ liefert uns das zufällige Maß

$$\mathfrak{Z}_{\alpha,n} := \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}} \delta_{L(v)}$$

mit Gesamtmasse $Z_{\alpha,n}$. Aus (1.6) ergibt sich $\mathbb{E}\, Z_{\alpha,n} = m(\alpha)^n$, so dass das normierte Intensitätsmaß

$$\mathcal{Z}_{\alpha,n} := m(\alpha)^{-n} \sum_{|v|=n} \mathbb{E}\left[L(v)^\alpha \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}} \delta_{L(v)}\right]$$

eine Verteilung auf $[0,\infty)$ ist. Jetzt gehen wir zum negativen Logarithmus dieser Verteilung über (d. h. wir betrachten $\mathcal{L}(-\log X)$ für eine Zufallsgröße $X \sim \mathcal{Z}_{\alpha,n}$) und erhalten

$$\zeta_{\alpha,n} := m(\alpha)^{-n} \sum_{|v|=n} \mathbb{E}\left[L(v)^\alpha \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}} \delta_{-\log L(v)}\right]. \tag{1.7}$$

Die Logarithmierung dient einzig dem Zweck, die multiplikative Struktur der Verteilungen $(\mathcal{Z}_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$, der die Definition der Gewichte $L(v)$ zugrundeliegt, in eine additive zu überführen, die einen bequemeren Zugang zur Random-Walk- und Erneuerungstheorie bietet. Die entscheidende Eigenschaft der Verteilungsfamilie $(\zeta_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nun nämlich die folgende:

1.9 Lemma. *Für $\alpha \in [0,\gamma]$ bildet die Familie $(\zeta_{\alpha,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter der additiven Faltung eine Halbgruppe, d. h.*

$$\zeta_{\alpha,m} * \zeta_{\alpha,n} = \zeta_{\alpha,m+n}$$

für alle $m,n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Für $m,n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_{\alpha,m+n}\big([0,x]\big) &= m(\alpha)^{-(m+n)} \sum_{|u|=m+n} \mathbb{E}\left[L(u)^\alpha \mathbb{1}_{(0,\infty)}\big(L(u)\big)\mathbb{1}_{[0,x]}\big(-\log L(u)\big)\right] \\
&= m(\alpha)^{-(m+n)} \sum_{|v|=m}\sum_{|w|=n} \mathbb{E}\left[\left(L(v)\frac{L(vw)}{L(v)}\right)^\alpha \mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(L(v)\frac{L(vw)}{L(v)}\right)\right. \\
&\qquad \left.\cdot\, \mathbb{1}_{[0,x]}\left(-\log L(v)\frac{L(vw)}{L(v)}\right)\right] \\
&= m(\alpha)^{-(m+n)} \sum_{|v|=m} \int_{[0,\infty)} s^\alpha \sum_{|w|=n} \mathbb{E}\Big[L(w)^\alpha \mathbb{1}_{(0,\infty)}\big(sL(w)\big) \\
&\qquad \cdot\, \mathbb{1}_{[0,x]}\big(-\log s - \log L(w)\big)\Big]\, \mathbb{P}^{L(v)}(ds) \\
&= m(\alpha)^{-m} \sum_{|v|=m} \int_{[0,\infty)} s^\alpha \mathbb{1}_{(0,\infty)}(s)\zeta_{\alpha,n}\big([0,x+\log s]\big)\, \mathbb{P}^{L(v)}(ds) \\
&= \int_{[0,\infty)} \zeta_{\alpha,n}\big([0,x-s]\big)\, \zeta_{\alpha,m}(ds) \\
&= \zeta_{\alpha,m} * \zeta_{\alpha,n}\big([0,x]\big).
\end{aligned}$$

Dabei resultiert die dritte Gleichheit aus der Identität (1.4) und die fünfte aus Lemma 1.10. □

Ist also $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Standard-Random-Walk (SRW) mit Zuwachsverteilung $\zeta_{\alpha,1}$, gilt somit für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n \sim \zeta_{\alpha,n}.$$

Abschließend zeigen wir noch eine einfache Erweiterung der definierenden Identität (1.7) der Verteilung $\zeta_{\alpha,n}$:

1.10 Lemma. *Ist X eine gemäß $\zeta_{\alpha,n}$ verteilte Zufallsgröße, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in [0,\gamma]$, so gilt*

$$\mathbb{E}\, f(X) = m(\alpha)^{-n} \sum_{|v|=n} \mathbb{E}\left[L(v)^{\alpha} \mathbb{1}_{\{L(v)>0\}} f\big(-\log L(v)\big)\right]$$

für alle Borel-messbaren Funktionen f.

Der Beweis besteht lediglich in einer Anwendung des Funktions-Erweiterungsarguments: Für primitive Funktionen liefert (1.7) sofort das Gewünschte, für monoton wachsende Folgen nichtnegativer messbarer Funktionen nutzt man den Satz von der monotonen Konvergenz, und durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil erhält man die Behauptung schließlich für beliebige messbare Funktionen. □

Der Spezialfall $n = 1$ liefert

1.11 Korollar. *Ist X eine gemäß $\zeta_{\alpha,1}$ verteilte Zufallsgröße, $\alpha \in [0,\gamma]$, so gilt*

$$\mathbb{E}\, f(X) = m(\alpha)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[T_i^{\alpha} \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} f(-\log T_i)\right] \tag{1.8}$$

für alle Borel-messbaren Funktionen f.

1.12 Bemerkung. Wie man sofort aus (1.7) ersieht, sind die Verteilungen $\zeta_{\alpha,n}$ im d-arithmetischen Fall auf $\mathbb{G}_d$ konzentriert, so dass als Entsprechung zu Korollar 1.11 für beliebige Funktionen $f : \mathbb{G}_d \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\, f(X) = m(\alpha)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{G}_d} f(-k) e^{\alpha k} p_{i,k}$$

gilt, wobei an $p_{i,k} := \mathbb{P}(\log T_i = k)$ erinnert sei.

1.4 Das Erneuerungstheorem

Viele Eigenschaften der untersuchten Fixpunktverteilungen lassen sich durch Funktionen des zuvor definierten SRWs $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ausdrücken. Aussagen über das asymptotische Verhalten solcher Funktionen (sofern eine geeignete Integrabilitätsbedingung erfüllt ist) liefert das Erneuerungstheorem, das wir hier kurz zitieren wollen.

Wir betrachten für Mengen $A \in \mathbb{B}$ das zufällige Zählmaß

$$N(\omega, A) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \delta_{S_n(\omega)}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{1}_A\big(S_n(\omega)\big).$$

Von Interesse sind nun die folgenden durch Erwartungswertbildung entstehenden Intensitätsmaße:

1.13 Definition. (a) Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein SRW. Dann heißt

$$U := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}^{S_n} \tag{1.9}$$

das *Erneuerungsmaß von* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Ist τ eine Stoppzeit bezüglich $(\sigma(S_0,\dots,S_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ (vgl. Def. 1.25), nennen wir

$$V^{(\tau)} := \sum_{n=0}^{\tau-1} \mathbb{P}^{S_n}$$

das *Prä-τ-Okkupationsmaß von* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Ein hinreichendes Kriterium für die Anwendbarkeit des Erneuerungstheorems liefert die folgende

1.14 Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine Funktion sowie für $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&I_n^\delta := \big(\delta n, \delta(n+1)\big], \\
&\underline{m}_n^\delta := \inf\big\{f(t) : t \in I_n^\delta\big\}, \qquad && \overline{m}_n^\delta := \sup\big\{f(t) : t \in I_n^\delta\big\}, \\
&\underline{\sigma}(\delta) := \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{m}_n^\delta, && \overline{\sigma}(\delta) := \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{m}_n^\delta.
\end{aligned}$$

Dann heißt f *direkt Riemann-integrierbar (d. R. i.)*, falls $\underline{\sigma}(\delta)$ und $\overline{\sigma}(\delta)$ für alle $\delta > 0$ konvergieren und

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \big(\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta)\big) = 0.$$

Im Hinblick auf die konkreten Anwendungen in den folgenden Kapiteln zeigen wir zunächst die direkte Riemann-Integrierbarkeit einer speziellen Funktionenklasse:

1.15 Lemma. *Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ Riemann-integrierbar, und $e^{-\alpha x} f(x)$ sei monoton fallend für ein $\alpha > 0$. Dann ist f d. R. i.*

Beweis. Für alle $x \in I_n^\delta$ liefert die Monotonievoraussetzung

$$f(x) \le e^{\alpha((n+1)\delta - x)} f(x) = e^{\alpha(n+1)\delta} e^{-\alpha x} f(x) \le e^{\alpha(n+1)\delta} e^{-\alpha n\delta} f(n\delta) = e^{\alpha\delta} f(n\delta)$$

und somit

$$\overline{m}_n^\delta \le e^{\alpha\delta} f(n\delta).$$

Eine ganz analoge Abschätzung ergibt

$$\underline{m}_n^\delta \ge e^{-\alpha\delta} f\big((n+1)\delta\big),$$

woraus mit der Integral-Standardabschätzung sofort

$$\delta e^{-\alpha\delta} f\big((n+1)\delta\big) \le \delta \underline{m}_n^\delta \le \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} f(x)\,dx \tag{1.10}$$

folgt. Somit impliziert die Riemann-Integrierbarkeit von f die Konvergenz der $\underline{\sigma}(\delta)$ und $\overline{\sigma}(\delta)$. Außerdem gilt für $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $r < s$

$$\begin{aligned}\sum_{n=r}^{s} \overline{m}_n^\delta - \underline{m}_n^\delta &\le e^{\alpha\delta} \sum_{n=r}^{s} f(n\delta) - e^{-\alpha\delta} \sum_{n=r+1}^{s+1} f(n\delta)\\ &\le e^{\alpha\delta} f(r\delta) + (e^{\alpha\delta} - e^{-\alpha\delta}) \sum_{n=r+1}^{s} f(n\delta).\end{aligned}$$

Für $r \to -\infty$, $s \to \infty$ folgt mit (1.10) unter Beachtung von $\lim_{r\to-\infty} f(r\delta) = 0$ schließlich

$$\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta) \le \delta(e^{\alpha\delta} - e^{-\alpha\delta}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\delta) \le (e^{2\alpha\delta} - 1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \xrightarrow{\delta\downarrow 0} 0,$$

womit die direkte Riemann-Integrierbarkeit von f nachgewiesen ist. □

Für die Formulierung des Erneuerungstheorems im d- bzw. im nichtarithmetischen Fall benötigen wir noch folgende

1.16 Definition. Für eine Funktion $f : \mathbb{G}_d \to \mathbb{R}$ sei

$$d\text{-}\lim_{x\to\infty} f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} f(x), & \text{falls } d = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(nd), & \text{falls } d > 0 \end{cases}.$$

Ferner bezeichne $\lambda\!\!\lambda_0$ das gewöhnliche Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $\lambda\!\!\lambda_d$ für $d > 0$ das d-fache Zählmaß auf $\mathbb{G}_d$.

Das Erneuerungstheorem ermöglicht es uns nun, Aussagen über das asymptotische Verhalten von Faltungen der Form

$$f * U(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)\,U(ds)$$

für $x \to \pm\infty$ zu treffen, sofern f d. R. i. ist:

1.17 Erneuerungstheorem. *$(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei ein Random Walk mit Drift $\mu := \mathbb{E}\, S_1 \in (0,\infty]$. Dann gilt für jede d. R. i. Funktion f*

$$d\text{-}\lim_{x\to\infty} f * U(x) = \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} f(t)\, \lambda\!\!\lambda_d(dt)$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f * U(x) = 0.$$

Beweis. [Als2], Satz 26.3. □

1.18 Bemerkungen. (a) Betrachten wir im d-arithmetischen Fall die Funktionen $f(\cdot + r)$ für $r \in [0,d)$, so sind diese offenbar ebenfalls d. R. i., und die erste Aussage des Erneuerungstheorems impliziert die Existenz einer stetigen, d-periodischen Funktion p mit

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - p(x)| = 0.$$

(Im nichtarithmetischen Fall folgt dies für die Konstante $p \equiv \frac{1}{\mu}\int f(t)\, \lambda\!\!\lambda_0(dt)$ trivialerweise sofort.)

(b) Die Identität (1.9) liefert die äquivalente Formulierung

$$\lim_{x\to-\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\, f(x - S_n) = 0.$$

Weiterhin gilt für Random Walks $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Drift $\mu \in [-\infty, 0)$ und Erneuerungsmaß $\tilde{U}$ gerade

$$\lim_{x\to\infty} f * \tilde{U}(x) = 0.$$

Setzt man speziell $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (-S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so folgt

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\, f(x + S_n) = 0. \tag{1.11}$$

Insbesondere in dieser Form werden wir das Erneuerungstheorem häufig verwenden.

1.5 Fluktuationstheorie

Die Fluktuationstheorie befasst sich mit der Feinstruktur von Random Walks und liefert insbesondere Aussagen über den Zusammenhang zwischen dessen Zuwachsverteilung und der Verteilung der eingebetteten sogenannten Leiterhöhenprozesse,

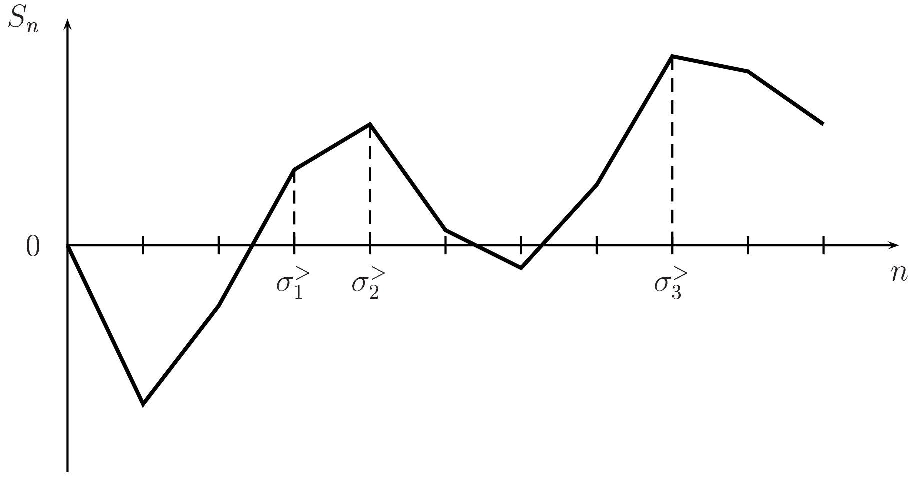

Bild 2. Pfad eines SRWs mit streng aufsteigenden Leiterindizes $\sigma_1^>$, $\sigma_2^>$ und $\sigma_3^>$.

die nur die Zeitpunkte berücksichtigen, zu denen der Random Walk Maxima bzw. Minima im bisherigen Verlauf annimmt.

1.19 Definition. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein nichttrivialer zentrierter SRW (d. h. $\mathbb{E}\, S_1 = 0$, aber $\mathbb{P}(S_1 = 0) < 1$) und $\varrho \in \{>, \geq, <, \leq\}$ eine Ordnungsrelation. Wir setzen $\sigma_0^\varrho := 0$ und definieren für $n \in \mathbb{N}_0$

$$S_n^\varrho := S_{\sigma_n^\varrho} \quad \text{und} \quad \sigma_{n+1}^\varrho := \inf\{k > 0 : S_{\sigma_n^\varrho + k} \ \varrho \ S_n^\varrho\}.$$

Dann heißt $(\sigma_n^\varrho)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die *Folge der streng aufsteigenden/schwach aufsteigenden/ streng absteigenden/schwach absteigenden Leiterindizes* und $(S_n^\varrho)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der *streng aufsteigende/schwach aufsteigende/streng absteigende/schwach absteigende Leiterhöhenprozess zu* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

1.20 Lemma. *Ist* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein nichttrivialer zentrierter SRW und* $\varrho \in \{>, \geq, <, \leq\}$, *so ist* $(\sigma_n^\varrho)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *f. s. endlich, und* $(\sigma_n^\varrho, S_n^\varrho)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist ein SRW mit Werten in* $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}$.

Beweis. [Als2], Korollar 25.5 und Satz 27.7. □

Einen möglicherweise unerwarteten Zusammenhang zwischen bestimmten Paaren von Leiterhöhenprozessen liefert das

1.21 Dualitätslemma. *Bezeichnen* U^ϱ *und* V^ϱ *das zu* $(S_n^\varrho)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *gehörige Erneuerungsmaß bzw. Prä-*σ^ϱ*-Okkupationsmaß, so gilt*

$$V^{\varrho_1} = U^{\varrho_2}$$

für jedes Paar $(\varrho_1, \varrho_2) \in \{(>, \leq), (\geq, <), (<, \geq), (\leq, >)\}$.

Beweis. [Als3], Satz 37.2. □

Die Namensgebung ergibt sich hierbei offensichtlich aus der Gestalt der betrachteten Paare. Mit Hilfe des Dualitätslemmas kann man nun eine einfache Beziehung zwischen der Zuwachsverteilung des zugrundeliegenden SRWs $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und den Zuwachsverteilungen je zweier dualer Leiterhöhenprozesse beweisen:

1.22 Wiener-Hopf-Faktorisierung. *Es bezeichne* Q *die Zuwachsverteilung von* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und* Q^ϱ *die von* $(S_n^\varrho)_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Dann gilt für jedes duale Paar* (ϱ_1, ϱ_2)

$$Q = Q^{\varrho_1} + Q^{\varrho_2} - Q^{\varrho_1} * Q^{\varrho_2}.$$

Beweis. [Als3], Satz 37.1. □

Übertragen wir die Wiener-Hopf-Faktorisierung auf die zugehörigen momentererzeugenden Funktionen, erhalten wir schließlich das folgende

1.23 Lemma. *Für* $t \in (0, \infty)$ *gilt: Aus* $\mathbb{E}\, e^{tS_1} < \infty$ *folgt* $\mathbb{E}\, e^{tS_1^>} < \infty$.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\tilde{S}_1^\leq$ eine von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige Kopie von $S_1^\leq$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{tS_1}\, d\mathbb{P} &\geq \int_{\mathbb{R}} e^{tS_1^>}\, d\mathbb{P} - \int_{\mathbb{R}} e^{t(S_1^> + \tilde{S}_1^\leq)}\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{tS_1^>} \left(1 - e^{-t|S_1^\leq|}\right) d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\, e^{tS_1^>} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{-tx}\right) \mathbb{P}^{|S_1^\leq|}(dx),
\end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung direkt aus der Wiener-Hopf-Faktorisierung folgt. Wegen $\mathbb{P}(|S_1^\leq| > 0) > 0$ und $1 - e^{-tx} > 0$ für $x \in (0, \infty)$ muss also mit $\mathbb{E}\, e^{tS_1}$ auch $\mathbb{E}\, e^{tS_1^>}$ endlich sein. □

1.6 Martingale

Eine weitere wichtige Klasse stochastischer Prozesse stellen die sogenannten Martingale dar. Um sie zu definieren und die Eigenschaften, die für uns von Interesse sind, zu formulieren, müssen wir zunächst einige Begriffe einführen:

1.24 Definition. (a) Eine aufsteigende Folge $\mathcal{F}^{\mathbb{N}_0} := (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Unter-σ-Algebren von $\mathfrak{A}$ heißt *Filtration von* $(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Eine messbare Abbildung $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt *Stoppzeit bezüglich der Filtration* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}_0}$, falls $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt $\mathcal{F}^{\mathbb{N}_0}$*-adaptiert*, falls X_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Die definierende Eigenschaft eines Martingals besagt, dass, gegeben den Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt n, der Zuwachs im folgenden Schritt im Mittel gleich 0 ist.

1.25 Definition. Ein $\mathcal{F}^{\mathbb{N}_0}$-adaptierter Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt $\mathcal{F}^{\mathbb{N}_0}$*-Martingal*, falls

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n \quad \text{f. s.}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aus der Martingaleigenschaft folgt offenbar insbesondere $\mathbb{E}\, M_n = \mathbb{E}\, M_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Verallgemeinerung von festen Zeitpunkten auf solche, die vom bisherigen Verlauf des Prozesses abhängen, liefert das

1.26 Optional-Sampling-Theorem für beschränkte Stoppzeiten. *Es sei* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}_0}$*-Martingal und* τ *eine beschränkte* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}_0}$*-Stoppzeit. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\, M_\tau = \mathbb{E}\, M_0.$$

Beweis. [Als2], Satz 20.2. □

Schließlich halten wir noch die folgende wichtige Konvergenzaussage fest:

1.27 Martingal-Konvergenzsatz. *Jedes nichtnegative Martingal* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *konvergiert f. s. gegen eine Zufallsgröße* M *mit* $\mathbb{E}\, M \le \mathbb{E}\, M_0$.

Beweis. [Als2], Satz 21.2 und Korollar 21.4. □

Kapitel 2

Existenz von Fixpunkten

In diesem Kapitel geben wir mittels des charakteristischen Exponenten von F eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von (nichttrivialen) Fixpunkten der Abbildung K an.

2.1 Der Spezialfall $m \equiv 1$

Zunächst behandeln wir kurz den Fall $m \equiv 1$. Es zeigt sich, dass dann die Fixpunktmenge trivial ist, d. h. entweder die leere Menge oder bereits ganz $\mathfrak{M}$, so dass eine weitere Untersuchung im Folgenden unterbleiben kann.

2.1 Lemma. *Es ist $m \equiv 1$ genau dann, wenn*

$$T_i \sim B(1, p_i) \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, N\} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

Beweis. Ist $m \equiv 1$, so ist

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_i = 1) + \mathbb{E}\left[T_i^{\alpha} \mathbb{1}_{\{T_i \in (0,1)\}}\right] + \mathbb{E}\left[T_i^{\alpha} \mathbb{1}_{\{T_i > 1\}}\right]$$

für alle $\alpha \in [0, \infty)$. Da für $\alpha \to \infty$ der letzte Summand gegen ∞ und der mittlere von oben gegen 0 strebt, muss schon $\mathbb{P}(T_i > 1) = \mathbb{P}\big(T_i \in (0,1)\big) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ gelten. Also sind die T_i sämtlich $\{0,1\}$-wertig mit

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_i = 1) = 1.$$

Die Rückrichtung ist trivial. $\square$

2.2 Lemma. *Sei $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Dann ist $m(0) \geq 1$.*
Definieren wir zu $\varphi \in \mathfrak{F}$

$$f_\varphi(t) := \sum_{k=0}^{N} t^k \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} = k\right),$$

gilt weiterhin:
Ist $m(0) > 1$, so ist $\varphi(\infty) := \lim_{\theta\to\infty} \varphi(\theta)$ der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f_φ in $[0,1)$.
Ist hingegen $m(0) = 1$, so ist $f_\varphi(t) = t$, $m \equiv 1$ und

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_i=1\}} = 1 \qquad \textit{f. s.}$$

Beweis. Wegen $\varphi \in \mathfrak{F}$ gilt zunächst

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N} \varphi(\theta T_i) \tag{2.1}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\varphi(\infty) &= \lim_{\theta\to\infty} \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N} \varphi(\theta T_i) \\
&= \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N} \left(\mathbb{1}_{\{T_i=0\}} + \varphi(\infty)\mathbb{1}_{\{T_i>0\}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \varphi(\infty)^k\, \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} = k\right) \\
&= f\big(\varphi(\infty)\big).
\end{aligned}$$

Also ist $\varphi(\infty)$ ein Fixpunkt von f_φ, der wegen $\varphi \neq \delta_0$ in $[0,1)$ liegt.

Außerdem halten wir fest, dass f_φ als Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten konvex ist. Ferner gilt $f_\varphi(1) = 1$ und

$$f_\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{N} k\, \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} = k\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(T_i > 0) = m(0).$$

Somit ist $m(0) < 1$ bereits ausgeschlossen, während im Fall $m(0) > 1$ die Eindeutigkeit des Fixpunktes in $[0,1)$ folgt. Falls $m(0) = 1$, muss hingegen schon $f_\varphi(t) = t$ gelten. Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} = 1 \qquad \text{f. s.},$$

d. h. die Träger der T_i sind f. s. disjunkt. Setzen wir $T := \sum_{i=1}^N T_i$, liefert (2.1)

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E}\,\varphi(\theta T),$$

also $W \stackrel{d}{=} WT$ für ein von T unabhängiges W mit L. T. φ. Dies impliziert $T \equiv 1$ f. s., also $T_i = 1$ f. s. auf $\{T_i > 0\}$ und somit $m \equiv 1$ nach Lemma 2.1. Damit ist alles gezeigt. □

2.3 Satz. *Sei $m \equiv 1$. Dann ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \backslash \{\delta_0\}$ genau dann, wenn*

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{T_i=1\}} = 1 \qquad \text{f. s.} \tag{2.2}$$

Andernfalls ist $\mathfrak{F} = \emptyset$.

Beweis. Nach Lemma 2.1 impliziert $m \equiv 1$ die $\{0,1\}$-Wertigkeit der T_i. Ist nun $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, gilt gemäß Lemma 2.2 bereits (2.2). Daraus folgt jedoch sofort

$$\sum_{i=1}^N T_i = 1 \qquad \text{f. s.},$$

und somit $K\mu = \mu$ für jede Verteilung $\mu \in \mathfrak{M}$. □

2.2 Der Existenzsatz und ein Beispiel

Für den Rest dieses Kapitels setzen wir $m \not\equiv 1$ voraus. Zunächst formulieren wir den angekündigten

2.4 Existenzsatz. *Genau dann existiert ein Fixpunkt von K, wenn der charakteristische Exponent χ von F existiert und im im Intervall $(0, 1]$ liegt.*
Ist $\chi = 1$ und $m'(1) < 0$, existiert sogar ein Fixpunkt mit endlichem Erwartungswert.

Bevor wir uns dem Beweis des Existenzsatzes zuwenden, betrachten wir zur Motivation das folgende Beispiel, das aufgrund der überschaubaren Anzahl an Parametern die Möglichkeit zu expliziter Rechnung bietet:

2.5 Beispiel. Sei $N = 2$. Wir definieren zwei Zufallsgrößen T_1 und T_2 mit

$$\mathbb{P}(T_i = A) = p = 1 - \mathbb{P}(T_i = A^{-1}) \quad (i = 1, 2)$$

für Parameter $A > 1$ und $p \in (0, 1)$. Dann ist

$$m_{A,p}(\alpha) = 2\big(pA^\alpha + (1-p)A^{-\alpha}\big)$$

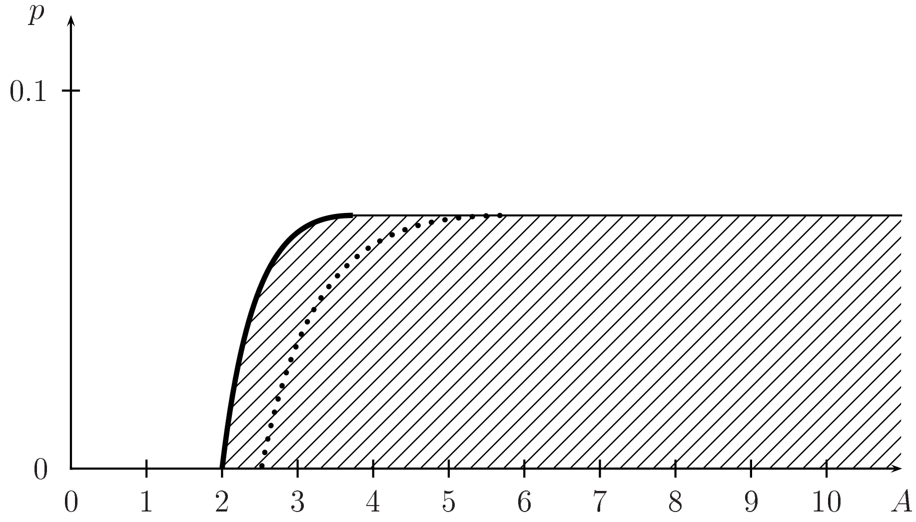

Bild 3. $\mathcal{M}$ mit Parameterkombinationen für $\chi = 1$ (fett), $\chi = \frac{3}{4}$ (gepunktet).

für $\alpha \in [0, \infty)$. Wir wollen herausfinden, für welche Wahlen von A und p der charakteristische Exponent χ im Intervall $(0, 1]$ existiert. Dazu untersuchen wir die Menge

$$\mathcal{M} := \big\{(A, p) \in (1, \infty) \times (0, 1) : m_{A,p}(\alpha) = 1, m'_{A,p}(\alpha) \leq 0 \text{ für ein } \alpha \in (0, 1]\big\}.$$

Setzen wir also $m_{A,p}(\alpha) = 1$ und lösen nach p auf, erhalten wir

$$m_{A,p}(\alpha) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^\alpha - 2}{A^{2\alpha} - 1} \text{ für } A > 2^{1/\alpha}. \tag{2.3}$$

Weiterhin ist

$$m'_{A,p}(\alpha) = 2 \log A \big(pA^\alpha - (1 - p)A^{-\alpha}\big).$$

Setzen wir nun zusätzlich $m'_{A,p}(\alpha) \leq 0$, ergibt sich mit (2.3) als Bedingung für die Existenz von χ gerade

$$p = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^\chi - 2}{A^{2\chi} - 1} \text{ für ein } A \in \big(2^{1/\chi}, (2 + \sqrt{3})^{1/\chi}\big]. \tag{2.4}$$

Bild 3 zeigt die Parameterkurven für $\chi = 1$ und $\chi = \frac{3}{4}$ in der Menge $\mathcal{M}$.

2.3 Beweis des Existenzsatzes

Wir beweisen den Existenzsatz 2.4 in vier Schritten:

(i) $\chi = 1$, $m'(1) < 0 \Rightarrow \exists\, \mu \in \mathfrak{F} : \int x\, \mu(dx) < \infty$ (Satz 2.11)

(ii) $\chi \in (0, 1)$, $m'(\chi) < 0 \Rightarrow \mathfrak{F} \neq \emptyset$ (Satz 2.13)

(iii) $\chi \in (0, 1]$, $m'(\chi) = 0 \Rightarrow \mathfrak{F} \neq \emptyset$ (Satz 2.14)

(hinreichende Bedingung)

(iv) $\mathfrak{F} \neq \emptyset \Rightarrow \chi \in (0,1]$ (Satz 2.19)
(notwendige Bedingung)

Die Reihenfolge der Schritte (i)-(iii) ist hierbei mit Bedacht gewählt: Wir werden sehen, dass sich (ii) auf (i) und (iii) auf (ii) zurückführen lässt.

Für den Beweis von Teil (i) benötigen wir die beiden folgenden Funktionen, die wir auf den in Abschnitt 1.3 definierten Standard-Random-Walk gewinnbringend anwenden werden:

2.6 Definition. Sei $\varphi \in \mathfrak{L}$, $\varphi \not\equiv 1$ und $\alpha \in (0,1]$. Wir setzen

$$\begin{aligned} D_\alpha(x) &:= e^{\alpha x}\big(1 - \varphi(e^{-x})\big), \\ G_\alpha(x) &:= e^{\alpha x}\,\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^N \varphi(e^{-x}T_i) + \sum_{i=1}^N \big(1 - \varphi(e^{-x}T_i)\big) - 1\Big]. \end{aligned}$$

Weiterhin seien $\tilde{\varphi} := K\varphi$ sowie $\tilde{D}_\alpha$ und $\tilde{G}_\alpha$ analog zu D_α und G_α für $\tilde{\varphi}$ definiert. Schließlich bezeichne X_α eine Zufallsgröße mit Verteilung $\zeta_{\alpha,1}$ (vgl. (1.7)).

In den drei folgenden Lemmata sammeln wir zunächst einige Eigenschaften der soeben definierten Funktionen.

2.7 Lemma. $\tilde{D}_\alpha(x) = m(\alpha)\,\mathbb{E}\,D_\alpha(x + X_\alpha) - G_\alpha(x)$.

Beweis. Aus den Definitionen ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\alpha(x) &= e^{\alpha x}\big(1 - \tilde{\varphi}(e^{-x})\big) \\ &= e^{\alpha x}\,\mathbb{E}\Big[1 - \prod_{i=1}^N \varphi(e^{-x}T_i)\Big] \\ &= e^{\alpha x}\,\mathbb{E}\sum_{i=1}^N \Big[1 - \varphi(e^{-x}T_i)\Big] - G_\alpha(x) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\Big[T_i^\alpha D_\alpha(x - \log T_i)\mathbb{1}_{\{T_i>0\}}\Big] - G_\alpha(x) \\ &= m(\alpha)\,\mathbb{E}\,D_\alpha(x + X_\alpha) - G_\alpha(x), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus Korollar 1.11 folgt. □

2.8 Lemma. *(a)* $G_\alpha(x) \geq 0$.
(b) $e^{-\alpha x}G_\alpha(x)$ *ist monoton fallend.*
(c) Aus $\tilde{\varphi} \geq \varphi$ *folgt* $\tilde{G}_\alpha \leq G_\alpha$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$h: \quad [0,1]^N \to \mathbb{R}, \quad (x_1,\dots,x_N) \mapsto \prod_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N (1-x_i) - 1.$$

Dann gilt für $k \in \{1,\dots,N\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} h(x_1,\dots,x_N) = -1 + \prod_{i \neq k} x_i \leq 0.$$

Also folgt für $u_i \leq v_i$, $i \in \{1,\dots,N\}$,

$$h(u_1,\dots,u_N) \geq h(v_1,\dots,v_N).$$

Wählt man nun
(a) $u_i = \varphi(e^{-x}T_i)$, $v_i = 1$,
(b) $u_i = \varphi(e^{-x_1}T_i)$, $v_i = \varphi(e^{-x_2}T_i)$ mit $x_1 > x_2$
und
(c) $u_i = \tilde{\varphi}(e^{-x}T_i)$, $v_i = \varphi(e^{-x}T_i)$,
ergeben sich sofort die Behauptungen. □

Für das dritte Lemma, das unter anderem eine Abschätzung für G_α liefert, benötigen wir zunächst ein Resultat über L. T.:

2.9 Lemma. *Ist φ eine L. T., so ist die Funktion $f(u) := \frac{1-\varphi(u)}{u}$ monoton fallend auf $(0,\infty)$.*

Beweis. Sei $u > 0$. Wegen

$$f'(u) = \frac{-u\varphi'(u) - (1-\varphi(u))}{u^2}$$

ist $\varphi(u) - u\varphi'(u) \leq 1$ zu zeigen. Aus der Konvexität von φ folgt

$$\varphi(t) \leq \frac{\varphi(u)-1}{u} t + 1 =: g(t)$$

für $t \in [0,u]$, also wegen $\varphi(u) = g(u)$ schon

$$\varphi'(u) \geq g'(u) = \frac{\varphi(u)-1}{u},$$

und das ist die Behauptung. □

2.10 Lemma. *(a) Mit*

$$M := \sum_{i=1}^N \max\{T_i, 1\} \qquad \text{und} \qquad B(u) := e^{-(u\wedge N)} + (u \wedge N) - 1$$

gilt

$$G_\alpha(x) \leq e^{\alpha x}\, \mathbb{E}\, B\big(Me^{-\alpha x} D_\alpha(x)\big) = e^{\alpha x}\, \mathbb{E}\, B\Big(M\big(1-\varphi(e^{-x})\big)\Big).$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{G_\alpha(x)}{D_\alpha(x)} = 0.$

Beweis. (a) Unter Benutzung der Ungleichung $u \le e^{-(1-u)}$ folgt

$$\begin{aligned} G_\alpha(x) &\le e^{\alpha x}\,\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{N} e^{-\big(1-\varphi(e^{-x}T_i)\big)} + \sum_{i=1}^{N}\big(1-\varphi(e^{-x}T_i)\big) - 1\Big] \\ &= e^{\alpha x}\,\mathbb{E}\Big[e^{-\sum_{i=1}^{N}\big(1-\varphi(e^{-x}T_i)\big)} + \sum_{i=1}^{N}\big(1-\varphi(e^{-x}T_i)\big) - 1\Big] \\ &\le e^{\alpha x}\,\mathbb{E}\,B\Big(\sum_{i=1}^{N}\big(1-\varphi(e^{-x}T_i)\big)\Big), \end{aligned}$$

denn $\sum_{i=1}^{N}\big(1-\varphi(e^{-x}T_i)\big) \le N$. Ist nun $T_i \le 1$, gilt

$$1-\varphi(e^{-x}T_i) \le 1-\varphi(e^{-x}), \tag{2.5}$$

da $1-\varphi(u)$ monoton wächst; falls $T_i > 1$, folgt

$$\frac{1-\varphi(e^{-x}T_i)}{e^{-x}T_i} \le \frac{1-\varphi(e^{-x})}{e^{-x}}, \tag{2.6}$$

denn $\frac{1-\varphi(u)}{u}$ fällt monoton nach Lemma 2.9. Multiplizieren wir (2.6) mit $e^{-x}T_i$, ergibt sich zusammen mit (2.5)

$$1-\varphi(e^{-x}T_i) \le \max\{T_i, 1\}\big(1-\varphi(e^{-x})\big).$$

Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass B auf $[0,\infty)$ monoton wächst.

Für (b) halten wir zunächst fest, dass

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} D_\alpha(x) = \lim_{x\to\infty}\big(1-\varphi(e^{-x})\big) = 0.$$

Substituieren wir $e^{-\alpha x}D_\alpha(x) \rightsquigarrow t$, genügt es im Hinblick auf (a) also,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}\,B(Mt)}{t} = 0$$

zu zeigen. Dies folgt jedoch aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, da M integrierbar und $\frac{B(t)}{t}$ beschränkt ist mit $\lim_{t\downarrow 0}\frac{B(t)}{t} = 0$. □

Nach diesen Vorüberlegungen können wir nun die erste Existenzaussage beweisen, indem wir einen Fixpunkt von K durch Iteration konstruieren. Dabei ist wesentlich, dass K als Transformation der Menge $\mathfrak{L}$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, stetig ist. Es gilt nämlich für eine Folge $\varphi_n \in \mathfrak{L}$ mit gleichmäßigem Limes φ, der dann nach dem Stetigkeitssatz für L. T. (siehe [Als1], Satz 45.7) auch ein Element von $\mathfrak{L}$ ist,

$$\lim_{n\to\infty} K\varphi_n(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N}\varphi_n(\theta T_i) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^{N}\varphi(\theta T_i) = K\varphi(\theta)$$

aufgrund des Satzes von der majorisierten Konvergenz. Wenn also für ein $\varphi_0 \in \mathfrak{L}$ die Folge $(K^n\varphi_0)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $\varphi \in \mathfrak{L}$ konvergiert und nach dem Stetigkeitssatz somit schon gleichmäßige Konvergenz vorliegt, so ist wegen

$$K\varphi = K\Big(\lim_{n\to\infty} K^n\varphi_0\Big) = \lim_{n\to\infty} K^{n+1}\varphi_0 = \varphi$$

φ ein Fixpunkt von K.

2.11 Existenzsatz, Teil (i). *Sei* $\chi = 1$ *und* $m'(1) < 1$. *Dann enthält* $\mathfrak{F}$ *eine Verteilung mit endlichem Erwartungswert.*

Beweis. Als Ausgangspunkt der Iteration wählen wir $\varphi_0(t) := e^{-\theta}$ (also die L. T. von δ_1) und setzen $\varphi_{n+1} := K\varphi_n$. Eine Anwendung der Jensenschen Ungleichung auf die konkave Funktion $x \mapsto e^{-\theta x}$ liefert für alle $\theta \in [0,\infty)$

$$\varphi_1(\theta) = \mathbb{E}\exp\Big(-\theta\sum_{i=1}^{N}T_i\Big) \geq \exp\Big(-\theta\,\mathbb{E}\sum_{i=1}^{N}T_i\Big) = e^{-\theta\, m(1)} = \varphi_0(\theta).$$

Durch Iteration folgt also

$$\varphi_{n+1} \geq \varphi_n \tag{2.7}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Setzen wir $\varphi(\theta) := \lim_{n\to\infty}\varphi_n(\theta)$, so gilt

$$1 \geq \varphi(\theta) \geq \varphi_0(\theta) = e^{-\theta}.$$

Insbesondere muss $\lim_{\theta\downarrow 0}\varphi(\theta) = 1$ sein. Also ist φ ein Element von $\mathfrak{L}$ und nach den obigen Überlegungen ein Fixpunkt von K. Außerdem folgt

$$\varphi'(0) \geq \varphi_0'(0) = -1 \tag{2.8}$$

Die Verteilung mit L. T. φ hat also einen Erwartungswert ≤ 1.

Um $\varphi \in \mathfrak{F}$ zu zeigen, müssen wir nun noch $\varphi \equiv 1$ ausschließen. Dazu setzen wir $\alpha = 1$ und definieren für φ_n die Funktionen $D_{1,n}$ und $G_{1,n}$ wie in Definition 2.6. Dann folgt aus (2.7) und Lemma 2.8(c)

$$G_{1,n+1} \leq G_{1,n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wegen $m(1) = 1$ liefert Lemma 2.7

$$\begin{aligned} D_{1,n+1}(x) &= \mathbb{E}\,D_{1,n}(x+X_1) - G_{1,n}(x) \\ &\geq \mathbb{E}\,D_{1,n}(x+X_1) - G_{1,0}(x) \end{aligned}$$

mit einer gemäß $\zeta_{1,1}$ (vgl. (1.7)) verteilten Zufallsgröße X_1. Iterieren wir diese Abschätzung, so erhalten wir

$$D_{1,n}(x) \geq \mathbb{E}\, D_{1,0}(x+S_n) - \mathbb{E} \sum_{k=0}^{n-1} G_{1,0}(x+S_k), \tag{2.9}$$

wobei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ einen Standard-Random-Walk mit Zuwachsverteilung $\zeta_{1,1}$ bezeichnet. Für seine Drift liefert die Eigenschaft (1.8) der Verteilung $\zeta_{1,1}$

$$\mathbb{E}\, X_1 = -\sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[T_i \log T_i\right] = -m'(1) > 0,$$

was $\lim\limits_{x\to\infty} S_n = \infty$ f. s. impliziert. Wir halten fest:

$$D_{1,0} \text{ stetig}, \qquad \lim_{x\to\infty} D_{1,0}(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} D_{1,0}(x) = 0.$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}\, D_{1,0}(x+S_n) = 1 \tag{2.10}$$

sowie aus der Monotonie der Funktion B, Lemma 2.10(a) und dem Satz von Fubini (der Integrand ist nichtnegativ)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G_{1,0}(x)\, dx &\leq \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} e^x B(Me^{-x})\, dx \\ &= \mathbb{E} \int_0^{\infty} M \frac{B(t)}{t^2}\, dt < \infty, \qquad \text{(Substitution } Me^{-x} \rightsquigarrow t) \end{aligned}$$

da M integrierbar und B auf $[0,\infty)$ beschränkt ist mit $B(t) \simeq \frac{1}{2}t^2$ für $t \downarrow 0$. Aus der Riemann-Integrierbarkeit ergibt sich mit Lemma 1.15 die direkte Riemann-Integrierbarkeit von $G_{1,0}$, so dass das Erneuerungstheorem (vgl. (1.11))

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} G_{1,0}(x+S_k) = 0 \tag{2.11}$$

impliziert. Aus (2.9) folgt also mit (2.10) und (2.11)

$$-\varphi'(0) = \lim_{x\to\infty} e^x\big(1-\varphi(e^{-x})\big) = \lim_{x\to\infty} \lim_{n\to\infty} D_{1,n}(x) \geq 1.$$

Zusammen mit (2.8) folgt also $-\varphi'(0) = 1$, insbesondere $\varphi \not\equiv 1$. □

2.12 Bemerkung. Völlig analog läßt sich offensichtlich zu jedem $c > 0$ ein Fixpunkt mit Erwartungswert c konstruieren, indem wir die Iteration mit $\varphi_0(\theta) := e^{-c\theta}$ (der L. T. von δ_c) beginnen. In Kapitel 3 werden wir sehen, dass diese Fixpunkte im Fall (i) auch die einzigen sind.

Der erste Teil des Existenzsatzes 2.4 ist somit bewiesen und kann umgehend für den Beweis von Teil (ii) genutzt werden:

2.13 Existenzsatz, Teil (ii). *Sei* $\chi \in (0,1)$ *und* $m'(\chi) < 0$. *Dann ist* $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Beweis. Wir definieren $\tilde{T}_i := T_i^\chi$ für $i = 1, \ldots, N$ sowie $\tilde{F}$, $\tilde{m}$, $\tilde{K}$ und $\tilde{\mathfrak{F}}$ für $(\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_N)$ analog zu F, m, K und $\mathfrak{F}$. Dann ist $\tilde{m}(\beta) = m(\chi\beta)$ und $\tilde{m}'(\beta) = \chi m'(\chi\beta)$, also $\tilde{m}(1) = m(\chi) = 1$ und $\tilde{m}'(1) = \chi m'(\chi) < 0$, d. h. $\tilde{\chi} = 1$ ist der charakteristische Exponent von $\tilde{F}$. Nach Satz 2.11 existiert dann ein $\psi \in \tilde{\mathfrak{F}}$ mit endlichem Erwartungswert. Setzen wir $\varphi(\theta) := \psi(\theta^\chi)$, so folgt

$$K\varphi(\theta) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^N \varphi(\theta T_i) = \mathbb{E}\prod_{i=1}^N \psi(\theta^\chi T_i^\chi) = \tilde{K}\psi(\theta^\chi) = \psi(\theta^\chi) = \varphi(\theta).$$

Können wir also φ als L. T. einer Verteilung auf $[0,\infty)$ identifizieren, ist der Satz bewiesen. Dazu sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess derart, dass X_t die L. T.

$$\varphi_t(\theta) := e^{-t\theta^\chi}$$

besitzt. (Zur Existenz einer stabilen Verteilung mit L. T. φ_t siehe [Fel], XIII.6.) Ferner sei τ eine von $(X_t)_{t\geq 0}$ unabhängige Zufallsgröße mit L. T. ψ. Betrachten wir nun die Zufallsgröße X_τ, definiert durch

$$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega),$$

so gilt wegen $\mathbb{P}^{X_\tau|\tau=t} = \mathbb{P}^{X_t}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, e^{-\theta X_\tau} &= \int e^{-\theta X_{\tau(\omega)}(\omega)}\, \mathbb{P}(d\omega) = \int\int e^{-\theta x}\, \mathbb{P}^{X_t}(dx)\, \mathbb{P}^\tau(dt) = \int e^{-t\theta^\chi}\, \mathbb{P}^\tau(dt) \\ &= \mathbb{E}\, e^{-\tau\theta^\chi} = \psi(\theta^\chi) = \varphi(\theta),\end{aligned}$$

d. h. φ ist die L. T. von X_τ. □

2.14 Existenzsatz, Teil (iii). *Sei* $\chi \in (0,1]$ *und* $m'(\chi) = 0$. *Dann ist* $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Beweis. Da nach Voraussetzung $m \not\equiv 1$, ist m auf $(0,\gamma]$ streng konvex. Also ist $m'(\beta) < 0$ und somit $m(\beta) > 1$ für alle $\beta \in (0,\chi)$. Nun definieren wir für $\beta \in (0,\chi)$

$$T_{\beta,i} := T_i m(\beta)^{-1/\beta} \qquad (1 \leq i \leq N)$$

sowie F_β, m_β, K_β und $\mathfrak{F}_\beta$ für $(T_{\beta,1}, \ldots, T_{\beta,N})$ analog zu F, m, K und $\mathfrak{F}$. Dann gilt

$$m_\beta(\delta) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[T_{\beta,i}^\delta \mathbb{1}_{\{T_{\beta,i}>0\}}\right] = m(\beta)^{-\delta/\beta}\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[T_i^\delta \mathbb{1}_{\{T_i>0\}}\right] = \frac{m(\delta)}{m(\beta)^{\delta/\beta}}$$

und

$$m'_\beta(\delta) = \frac{m'(\delta)}{m(\beta)^{\delta/\beta}} - \frac{\log m(\beta)}{\beta} m_\beta(\delta).$$

Somit ist $m_\beta(\beta) = 1$ und $m'_\beta(\beta) < 0$. Also ist $\chi_\beta = \beta$ der charakteristische Exponent von F_β. Nach Satz 2.13 hat für jedes $\beta \in (0, \alpha)$ die Transformation K_β einen Fixpunkt $\psi_\beta \not\equiv 1$. Wegen $\{T_i > 0\} = \{T_i^\beta > 0\}$ hängt die Funktion f_{ψ_β} aus Lemma 2.2 nicht von β ab, also ist auch ihr Fixpunkt $\theta_0 := \psi_\beta(\infty)$ unabhängig von β. Durch Einsetzen in (2.1) stellen wir fest, dass mit ψ_β auch $\psi_\beta^c(\theta) := \psi_\beta(c\theta)$ für jedes $c > 0$ ein Fixpunkt von K_β ist. Also können wir o. B. d. A. zu jedem $\beta \in (0, \chi)$ ψ_β derart wählen, dass

$$\psi_\beta(1) = \frac{\theta_0 + 1}{2}.$$

Nun konstruieren wir aus den ψ_β ein $\varphi \in \mathfrak{F}$: Sei $(\beta_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $(0, \chi)$ mit Limes χ. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass die zugehörige Folge $\mu_{\beta_n} \in \mathfrak{F}_{\beta_n}$ vag gegen ein Maß μ konvergiert. (Ansonsten gehen wir unter Verwendung des Satzes von Helly-Bray zu einer vag konvergenten Teilfolge über, vgl. [Als1], Korollar 44.3.) Dann konvergieren die zugehörigen L. T. ψ_{β_n} auf $(0, \infty)$ punktweise gegen die L. T. φ von μ. Insbesondere ist $\varphi(1) = \frac{\theta_0+1}{2}$. Da $\psi_{\beta_n} \in \mathfrak{F}_{\beta_n}$, gilt für alle $\theta \in [0, \infty)$

$$\psi_{\beta_n}(\theta) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N} \psi_{\beta_n}\left(\theta T_i m(\beta_n)^{-1/\beta_n}\right).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} m(\beta_n) = 1$ erhalten wir mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\varphi(\theta) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N} \varphi(\theta T_i) \tag{2.12}$$

für alle $\theta \in [0, \infty)$. Wiederum mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt ferner für $\varphi(0+) := \lim_{\theta\downarrow 0} \varphi(\theta)$

$$\varphi(0+) = \lim_{\theta\downarrow 0} \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N} \varphi(\theta T_i) = \varphi(0+)^N,$$

also $\varphi(0+) \in \{0, 1\}$. Wegen der Monotonie von φ auf $(0, \infty)$ und $\varphi(1) > 0$ muss dann aber $\varphi(0+) = 1$ sein. Somit ist φ als L. T. einer Verteilung auf $[0, \infty)$ identifiziert, die wegen (2.12) ein Element von $\mathfrak{F}$ ist. Dies war zu zeigen. □

Nun zeigen wir Teil (iv), also die Rückrichtung von Satz 2.4. Wir beginnen mit folgender

2.15 Definition. Zu $\alpha \in (0, 1]$ bezeichne $\mathcal{H}_\alpha$ die Menge aller Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(i) $g(0) = 1$,

(ii) $g(y)e^{-\alpha y}$ monoton fallend,

(iii) $g(y)e^{(1-\alpha)y}$ monoton wachsend,

(iv) $g(y) = m(\alpha)\,\mathbb{E}\,g(y + X_\alpha)$ für X_α mit Verteilung $\zeta_{\alpha,1}$ (vgl. (1.7)).

2.16 Lemma. *Ist die Menge $\mathcal{H}_\alpha$ nicht leer, so ist sie eine kompakte, konvexe Teilmenge des Raumes $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz.*

Beweis. Zunächst zeigen wir $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$: Ist $g \in \mathcal{H}_\alpha$, liefern die definierenden Eigenschaften (ii) und (iii) für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ und $h > 0$

$$e^{-(1-\alpha)h} g(y) \leq g(y + h) \leq e^{\alpha h} g(y)$$

und für $h < 0$ die umgekehrten Ungleichungen, also $\lim_{h\to 0} g(y + h) = g(y)$.

Die Konvexität von $\mathcal{H}_\alpha$ verifiziert man durch einfaches Nachrechnen der Eigenschaften (i)-(iv).

Als nächstes weisen wir die Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}_\alpha$ nach. Hierzu sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakt gleichmäßig konvergente Folge in $\mathcal{H}_\alpha$ mit Limes g. Man überzeugt sich sofort davon, dass g wiederum stetig ist und die Eigenschaften (i)-(iii) gelten. Sei nun $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie $(g_n(y+X_\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$, die für die Konvergenz der Erwartungswerte hinreichend ist: Unter Verwendung von (2.13) bzw. der gröberen Abschätzung $g_n(y) \leq e^{|y|}$ erhalten wir für $t \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\int_{\{g_n(y+X_\alpha)>t\}} g_n(y + X_\alpha)\, d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\left[g_n(y + X_\alpha) \mathbb{1}_{\{g_n(y+X_\alpha)>t\}}\right] \\
&= \frac{1}{m(\alpha)} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left[T_i^\alpha \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} g_n(y - \log T_i) \mathbb{1}_{\{g_n(y-\log T_i)>t\}}\right] \\
&\leq \frac{1}{m(\alpha)} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\Big[T_i^\alpha \mathbb{1}_{\{T_i>0\}} \big(e^{\alpha(y-\log T_i)} \mathbb{1}_{\{e^{y-\log T_i}>t\}} \mathbb{1}_{\{y\geq \log T_i\}} \\
&\qquad + e^{-(1-\alpha)(y-\log T_i)} \mathbb{1}_{\{e^{-(y-\log T_i)}>t\}} \mathbb{1}_{\{y<\log T_i\}}\big)\Big] \\
&= \frac{1}{m(\alpha)} \sum_{i=1}^{N} e^{\alpha y} \mathbb{P}\big(T_i \in (0, \tfrac{e^y}{t})\big) + e^{-(1-\alpha)y}\, \mathbb{E}\left[T_i \mathbb{1}_{\{T_i>te^y\}}\right],
\end{aligned}$$

und dieser von n unabhängige Ausdruck geht für $t \to \infty$ gegen 0. Somit folgt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$g(y) = \lim_{n\to\infty} g_n(y) = \frac{1}{m(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, g_n(y + X_\alpha) = \frac{1}{m(\alpha)}\, \mathbb{E}\, g(y + X_\alpha),$$

was schließlich $g \in \mathcal{H}_\alpha$ und somit die Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}_\alpha$ beweist.

Schließlich bleibt die relative Kompaktheit von $\mathcal{H}_\alpha$ zu zeigen, die zusammen mit der zuvor bewiesenen Abgeschlossenheit die Kompaktheit liefert. Damit wir den Satz von Arzelà-Ascoli (siehe [MV], Satz 4.12) anwenden können, muss die Familie $\mathcal{H}_\alpha$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sein. Für beliebiges $g \in \mathcal{H}_\alpha$ folgt wegen $g(0) = 1$ aus den Eigenschaften (ii) und (iii)

$$\begin{aligned} e^{-(1-\alpha)y} &\leq g(y) \leq e^{\alpha y} && \text{für } y > 0, \\ e^{\alpha y} &\leq g(y) \leq e^{-(1-\alpha)y} && \text{für } y < 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dies impliziert die gleichmäßige Beschränktheit auf Kompakta. Für die gleichgradige Stetigkeit sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Kompaktum und $M := \sup_{g \in \mathcal{H}_\alpha} \|g\|_K$. Dann gilt für jedes $g \in \mathcal{H}_\alpha$ und alle $x, y \in K$ mit $|x - y| \leq \delta$ analog zu (2.13)

$$|g(x) - g(y)| \leq g(x)e^{\alpha\delta} - g(x)e^{-(1-\alpha)\delta} \leq M(e^{\alpha\delta} - e^{-(1-\alpha)\delta}) \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0.$$

Somit ist die Familie $\mathcal{H}_\alpha$ in der Tat gleichgradig stetig. Damit ist alles gezeigt. □

Nun sind wir in der Lage, eine andere Darstellung von $\mathcal{H}_\alpha$ anzugeben:

2.17 Lemma. *Sei $\alpha \in (0, 1]$. Dann gilt:*

(a) Im nichtarithmetischen Fall ist $\mathcal{H}_\alpha$ der Abschluss der konvexen Hülle von

$$\mathcal{E}_{\alpha,0} := \{g_\beta : y \mapsto e^{(\alpha-\beta)y} \mid \beta \in [0, 1],\ m(\beta) = 1\}.$$

(b) Im d-arithmetischen Fall ist $\mathcal{H}_\alpha$ der Abschluss der konvexen Hülle von

$$\mathcal{E}_{\alpha,d} := \{g_{\beta,p_\beta} : y \mapsto g_\beta(y)p_\beta(y) \,|\, g_\beta \in \mathcal{E}_{\alpha,0},\ p_\beta \in \mathcal{P}_{\beta,d}\}.$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{P}_{\beta,d}$ die Menge der stetigen, d-periodischen Funktionen p mit

(i) $p(0) = 1$,

(ii) $p(y)e^{-\beta y}$ monoton fallend,

(iii) $p(y)e^{(1-\beta)y}$ monoton wachsend.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass $g_\beta \in \mathcal{H}_\alpha$ genau dann gilt, wenn $\beta \in [0, 1]$ und $m(\beta) = 1$: Während Eigenschaft (i) immer erfüllt ist, korrespondieren (ii) und (iii) gerade mit den Schranken 0 bzw. 1 für die Wahl von β und (iv) mit $m(\beta) = 1$, wie man unter Benutzung von (1.8) sofort nachrechnet. Im Fall $\mathcal{H}_\alpha = \emptyset$ ist somit alles bewiesen.

Ist $\mathcal{H}_\alpha \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{H}_\alpha$ nach Lemma 2.16 eine kompakte, konvexe Teilmenge des Raumes $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit der Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz. Nach dem Satz von Krein-Millman (siehe [MV], Satz 22.17) ist sie der Abschluss der konvexen Hülle ihrer Extremalpunkte. Es bleibt also zu zeigen, dass jeder Extremalpunkt von $\mathcal{H}_\alpha$ ein Element von $\mathcal{E}_{\alpha,0}$ bzw. $\mathcal{E}_{\alpha,d}$ ist.

Sei nun $g \in \mathcal{H}_\alpha$ ein Extremalpunkt. Wegen $g(0) = 1$ liefern die Eigenschaften (ii) und (iii) $g(y) \geq e^{\alpha y}$ für $y < 0$ bzw. $g(y) \geq e^{-(1-\alpha)y}$ für $y \geq 0$, also insbesondere $g > 0$. Setzen wir für $x \in \mathbb{R}$ nun

$$g_x(y) := \frac{g(x+y)}{g(x)},$$

so erhalten wir mit (iv)

$$g(y) = m(\alpha) \int_{\mathbb{R}} g(y+x)\, \mathbb{P}^{X_\alpha}(dx) = m(\alpha) \int_{\mathbb{R}} g_x(y) g(x)\, \zeta_{\alpha,1}(dx).$$

g ist also als Mischung der g_x darstellbar. Wie man sofort überprüft, gilt $g_x \in \mathcal{H}_\alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass aus der Extremalität von g schon $g_x = g$ für alle x im Träger $\mathfrak{T}\big(m(\alpha) g\, \zeta_{\alpha,1}\big)$ folgt. Dieser stimmt wegen $m(\alpha) > 0$ und $g > 0$ mit $\mathfrak{T}(\zeta_{\alpha,1})$ überein. Somit gilt nach der Definition der g_x

$$g(x+y) = g(x)g(y) \tag{2.14}$$

für alle $x \in \mathfrak{T}(\zeta_{\alpha,1})$ und $y \in \mathbb{R}$, mithin für beliebige $x \in \mathbb{G}_d$ und $y \in \mathbb{R}$.

Im *nichtarithmetischen Fall* folgt aus $\mathbb{G}_0 = \mathbb{R}$ und der Stetigkeit von g

$$g(y) = ae^{by}$$

für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$. Wegen (i) muss nun $a = 1$ gelten, wegen (ii) und (iii) $b \in [\alpha - 1, \alpha]$, d. h. b ist von der Form $\alpha - \beta$ für ein $\beta \in [0, 1]$. Mit (1.8) liefern (i) und (iv) schließlich

$$1 = g(0) = m(\alpha)\, \mathbb{E}\, e^{(\alpha-\beta)X_\alpha} = m(\beta)$$

und somit $g \in \mathcal{E}_{\alpha,0}$.

Im *d-arithmetischen Fall* impliziert (2.14) mit der Stetigkeit von g

$$g(y) = ae^{by} p(y)$$

für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ und d-periodisches, stetiges p. Aus (i) folgt $p(0) = 1/a$; betrachten wir die Einschränkung auf $\mathbb{G}_d$, liefern (ii)-(iv) wie oben $b = \alpha - \beta$ für ein $\beta \in [0, 1]$ mit $m(\beta) = 1$. Also können wir

$$g(y) = g_\beta(y) p(y)$$

mit $g_\beta \in \mathcal{E}_{\alpha,0}$ und $p(0) = 1$ schreiben. Schließlich ergibt sich abermals mit (ii) und (iii) die Monotonie von $p(y)e^{-\beta y}$ bzw. $p(y)e^{(1-\beta)y}$, also insgesamt $g \in \mathcal{E}_{\alpha,d}$. □

2.18 Bemerkung. Setzen wir $m \not\equiv 1$ und $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ voraus, so ist $\mathcal{H}_\alpha \neq \emptyset$ schon hinreichend für die Existenz des charakteristischen Exponenten von F in $(0, 1]$: Dies bedingt nämlich nach Lemma 2.17 die Existenz eines $\beta \in (0,1]$ mit $m(\beta) = 1$ ($\beta = 0$ ist dann wegen Lemma 2.2 ausgeschlossen). Aufgrund der strengen Konvexität von m können höchstens zwei solche β existieren. Wählen wir β dann minimal, muss bereits $m'(\beta) \leq 0$ gelten, und dieses β ist dann der charakteristische Exponent.

2.19 Existenzsatz, Teil (iv). *Ist $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, so existiert der charakteristische Exponent χ von F und liegt im Intervall $(0,1]$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathfrak{F}$. Wir wählen $\alpha \in (0,1]$ und setzen für $x \in \mathbb{R}$

$$h_x(y) := \frac{D_\alpha(x+y)}{D_\alpha(x)}.$$

Unser Ziel ist es, die Grenzfunktion für $x \to \infty$ als Element von $\mathcal{H}_\alpha$ zu identifizieren, womit nach Bemerkung 2.18 bereits alles gezeigt ist.

Wegen $\varphi \in \mathfrak{F}$ liefert Lemma 2.7

$$D_\alpha(y) = m(\alpha)\, \mathbb{E}\, D_\alpha(y + X_\alpha) - G_\alpha(y).$$

Werten wir diesen Ausdruck an der Stelle $y + x$ aus und dividieren durch $D_\alpha(x)$, ergibt sich

$$h_x(y) = m(\alpha)\, \mathbb{E}\, h_x(y + X_\alpha) - \frac{G_\alpha(y+x)}{D_\alpha(y+x)} h_x(y). \tag{2.15}$$

Wegen $\varphi \in \mathfrak{L}$ ist $D_\alpha(y)e^{-\alpha y} = 1 - \varphi(e^{-y})$ monoton fallend und $D_\alpha(y)e^{(1-\alpha)y}$ monoton wachsend (setze $u = e^{-y}$ in Lemma 2.9). Somit ist

$$-(1-\alpha)D_\alpha(y) \leq D'_\alpha(y) \leq \alpha D_\alpha(y). \tag{2.16}$$

Eine erneute Auswertung an der Stelle $x + y$ und Division durch $D_\alpha(x)$ ergibt sofort

$$-(1-\alpha)h_x(y) \leq h'_x(y) \leq \alpha h_x(y)$$

sowie mit $h_x(0) = 1$ genau wie im Beweis von Lemma 2.16

$$\begin{aligned} e^{-(1-\alpha)y} &\leq h_x(y) \leq e^{\alpha y} && \text{für } y > 0, \\ e^{\alpha y} &\leq h_x(y) \leq e^{-(1-\alpha)y} && \text{für } y < 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Die Familie $(h_x)_{x \in \mathbb{R}}$ ist also gleichmäßig beschränkt und gleichstetig auf jedem Kompaktum. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (siehe [MV], Satz 4.12) ist sie somit relativ kompakt in der Topologie der kompakt gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Sei nun also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to \infty$ und $(h_{x_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ kompakt gleichmäßig konvergent mit Limes h. Für den Grenzübergang in (2.15) liefert zunächst (1.7)

$$\mathbb{E}\, e^{\alpha X_\alpha} = \frac{m(0)}{m(\alpha)} < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\, e^{-(1-\alpha)X_\alpha} = \frac{m(1)}{m(\alpha)} < \infty. \tag{2.18}$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und Lemma 2.10(b) wird (2.15) für $x \to \infty$ zu

$$h(y) = m(\alpha)\,\mathbb{E}\,h(y + X_\alpha),$$

also erfüllt h die definierende Eigenschaft (iv) von $\mathcal{H}_\alpha$. Da außerdem h mit jedem h_x auch den Eigenschaften (i)-(iii) genügt, ist $h \in \mathcal{H}_\alpha$, und das war zu zeigen. □

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir noch eine einfache Folgerung aus Satz 2.19, die uns im folgenden Kapitel von Nutzen sein wird.

2.20 Korollar. *Ist $\varphi \in \mathfrak{F}$ und $\chi \in (0,1]$ der charakteristische Exponent von F, so gilt*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{D_\chi(x+y)}{D_\chi(x)} \leq 1, \qquad \textit{falls } m'(\chi) < 0,$$

bzw.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{D_\chi(x+y)}{D_\chi(x)} = 1, \qquad \textit{falls } m'(\chi) = 0,$$

für alle $y \in \mathbb{G}_d \cap (0,\infty)$.

Beweis. Zu Beginn des Beweises von Satz 2.19 wählen wir nicht ein beliebiges $\alpha \in (0,1]$, sondern gerade χ. Sei nun $\beta \in (0,1]$ mit $m(\beta) = 1$.

Betrachten wir zunächst den *nichtarithmetischen Fall*: Gilt $m'(\chi) < 0$, so ist $\beta \geq \chi$ nach Bemerkung 2.18, und h ist als Konvexkombination von $h_\chi \equiv 1$ und $h_\beta(y) = e^{(\chi-\beta)y}$ monoton fallend. Ist hingegen $m'(\chi) = 0$, ist schon $\beta = \chi$, und h ist konstant. Wegen $h(0) = 1$ gilt also $h(y) \leq 1$ bzw. $h(y) = 1$ für alle $y > 0$. Da die konvergente Teilfolge $(h_{x_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

Im *d-arithmetischen Fall* bleibt die obige Argumentation gültig, wenn wir die Einschränkung von h auf $\mathbb{G}_d$ betrachten. Dort verschwinden nämlich die periodischen Anteile von h, das somit auf $\mathbb{G}_d$ dieselbe Gestalt wie im nichtarithmetischen Fall hat. □

Kapitel 3

Die Struktur der Fixpunktmenge

Nachdem wir im vorhergehenden Kapitel untersucht haben, unter welchen Voraussetzungen Lösungen der Fixpunktgleichung existieren, wollen wir unser Augenmerk nun auf die Struktur der Fixpunktmenge $\mathfrak{F}$ legen.

Hauptresultat wird die Angabe einer Funktionenklasse sein, die $\mathfrak{F}$ parametrisiert, d. h. die sich bijektiv auf $\mathfrak{F}$ abbilden lässt. Ferner erhalten wir eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Elementen von $\mathfrak{L}$ gegen solche von $\mathfrak{F}$ unter Iterationen von K. Zu guter Letzt geben wir ein Kriterium für die Existenz von Fixpunkten mit Momenten höherer Ordnung an.

Wir setzen im Folgenden weiterhin $m \not\equiv 1$ sowie zusätzlich $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ voraus und erhalten somit aus Satz 2.19 die Existenz des charakteristischen Exponenten χ von F im Intervall $(0, 1]$.

3.1 Parametrisierung von $\mathfrak{F}$

Zunächst führen wir die Funktionenklasse ein, durch die wir $\mathfrak{F}$ parametrisieren wollen. Ihre Gestalt ist dabei abhängig von den zentralen Parametern der Verteilung F: der Spanne d und dem charakteristischen Exponenten χ.

3.1 Definition. Für $\chi \in (0, 1]$ und $d \in [0, \infty)$ definieren wir $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ wie folgt:

(a) Für $\chi < 1$ und $d > 0$ sei $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ die Menge aller Funktionen $p : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

  (i) p ist d-periodisch und unendlich oft differenzierbar.

  (ii) Die Funktion $h_p(\theta) := \theta^\chi p(-\log \theta)$ hat eine vollständig monotone (in 0 rechtsseitige) Ableitung, d. h. $h'_p > 0$ und $(-1)^n h_p^{(n+1)} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für $\chi = 1$ oder $d = 0$ sei $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ die Menge der positiven Konstanten auf $\mathbb{R}$.

Um den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ herstellen zu können, benötigen wir folgendes

3.2 Lemma. *Sei $\varphi \in \mathfrak{F}$. Dann ist G_χ d. R. i.*

Beweis. Im Hinblick auf Lemma 1.15 brauchen wir lediglich die gewöhnliche Riemann-Integrierbarkeit von G_χ nachzuweisen, da $e^{-\chi x} G_\chi(x)$ nach Lemma 2.8(b) monoton fällt. Dabei bedienen wir uns einer ähnlichen Abschätzung wie im Beweis von Satz 2.11: Wir haben bereits in den Lemmata 2.8(a) und 2.10(a) gezeigt, dass

$$0 \leq G_\chi(x) \leq e^{\chi x}\, \mathbb{E}\, B\big[M D_\chi(x) e^{-\chi x}\big]$$

gilt. Da M beschränkt ist, folgt zunächst

$$\int_{-\infty}^{0} G_\chi(x)\, dx < \infty.$$

Für die Abschätzung auf $[0,\infty]$ setzen wir $\tilde{d} := 1$ im nichtarithmetischen Fall und $\tilde{d} := d$, falls $d > 0$. Wählen wir nun $\varepsilon > 0$ beliebig, existiert gemäß Korollar 2.20 ein $\tilde{x}_0 > 0$, so dass für alle $x \geq \tilde{x}_0$

$$D_\chi(x + \tilde{d}) \leq (1+\varepsilon) D_\chi(x)$$

gilt. Da außerdem $D_\chi(x) e^{-\chi x} = 1 - \varphi(e^{-x})$ monoton fällt, ist für $y > 0$

$$D_\chi(x+y) \leq D_\chi(x) e^{\chi y}. \tag{3.1}$$

Schreiben wir also $x \geq \tilde{x}_0$ in der Form $x = \tilde{x}_0 + n\tilde{d} + r$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $r \in [0, \tilde{d})$, folgt

$$D_\chi(x) \leq (1+\varepsilon)^n D_\chi(\tilde{x}_0 + r) \leq D_\chi(x) \leq (1+\varepsilon)^n e^{\chi \tilde{d}} D_\chi(\tilde{x}_0) \leq c e^{\log(1+\varepsilon)x}.$$

Jetzt wählen wir $\beta > 0$ derart, dass $\beta < \frac{\chi}{2}$ und $\frac{\chi}{\chi-\beta} \leq \gamma$. Da obiges $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, existiert insbesondere ein $x_0 > 0$, so dass für alle $x \geq x_0$

$$D_\chi(x) < e^{\beta x}$$

gilt. Aus der Monotonie von B folgt nun

$$G_\chi(x) \leq e^{\chi x}\, \mathbb{E}\, B\big(M e^{(\beta-\chi)x}\big)$$

für $x \geq x_0$. Mit dem Satz von Fubini (der Integrand ist nichtnegativ) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} G_\chi(x)\, dx &\leq \mathbb{E} \int_{x_0}^{\infty} e^{\chi x} B\big(M e^{(\beta-\chi)x}\big)\, dx \\ &\leq \mathbb{E} \int_0^{\infty} \frac{M^{\frac{\chi}{\chi-\beta}}}{\chi-\beta} \frac{B(t)}{t^{1+\frac{\chi}{\chi-\beta}}}\, dt < \infty, \qquad \text{(Substitution } M e^{(\beta-\chi)x} \rightsquigarrow t) \end{aligned}$$

da $M^{\frac{\chi}{\chi-\beta}}$ integrierbar und B auf $[0,\infty)$ beschränkt ist mit $B(t) \simeq \frac{1}{2}t^2$ für $t \downarrow 0$. $\square$

3.3 Parametrisierungssatz, Teil (i). *Sei $\varphi \in \mathfrak{F}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $p \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$ mit*

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi p(-\log\theta)} = 1, \quad \textit{falls } m'(\chi) < 0,$$

bzw.

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi p(-\log\theta)|\log\theta|} = 1, \quad \textit{falls } m'(\chi) = 0.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wiederum einen Standard-Random-Walk mit Zuwachsverteilung $\zeta_{\chi,1}$ und mit $X_1, X_2, \ldots$ seine Zuwächse. Wegen $m(\chi) = 1$ und $\varphi \in \mathfrak{F}$ liefert Lemma 2.7

$$D_\chi(x) = \mathbb{E}\, D_\chi(x + X_1) - G_\chi(x). \tag{3.2}$$

Zunächst zeigen wir die Existenz einer Funktion p mit den geforderten Eigenschaften im Fall $m'(\chi) < 0$. Dann ist $\mathbb{E}\, X_1 = -m'(\chi) > 0$. Iterieren wir (3.2), erhalten wir

$$\begin{aligned} D_\chi(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, D_\chi(x+S_n) - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\, G_\chi(x+S_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, D_\chi(x+S_n) - G_\chi * U^-(x), \end{aligned}$$

wobei U^- gerade das Erneuerungsmaß des Random Walks $(-S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnet. Nun setzen wir

$$p(x) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, D_\chi(x+S_n) = D_\chi(x) + G_\chi * U^-(x).$$

Mit D_χ und $G_\chi * U^-$ ist dann auch p positiv und stetig und erfüllt außerdem

$$p(x) = \mathbb{E}\, p(x + X_\chi)$$

für eine von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige Zufallsgröße X_χ mit Verteilung $\zeta_{\chi,1}$. Weiterhin folgt für jedes $p_n(x) := \mathbb{E}\, D_\chi(x+S_n)$, dass $p_n(x)e^{-\chi x}$ monoton fällt und $p_n(x)e^{(1-\chi)x}$ monoton wächst, da dies für D_χ gilt. p erfüllt somit die Eigenschaften (ii)-(iv) aus Lemma 2.17 (beachte $m(\chi) = 1$), ist also eine Konvexkombination von Funktionen der Form

$$e^{(\chi-\beta)x} q(x)$$

mit $\beta \in [0,1]$, $m(\beta) = 1$ und stetigem sowie d-periodischem bzw. konstantem q. Wegen der Konvexität von m muss nun $\beta \geq \chi$ sein. Nehmen wir $\beta > \chi$ an, folgt $\limsup_{x\to-\infty} p(x) = \infty$. Das Erneuerungstheorem (Satz 1.17) liefert jedoch

$$\limsup_{x\to-\infty} G_\chi * U^-(x) < \infty.$$

Wegen $D_\chi(x) \leq e^{\chi x}$ gilt also $\limsup_{x\to-\infty} p(x) < \infty$ – Widerspruch! Also ist $\beta = \chi$ und p selbst somit d-periodisch bzw. konstant. Aus der Anwendung des Erneuerungstheorems „in die andere Richtung“ folgt

$$\lim_{x\to\infty} G_\chi * U^-(x) = 0$$

und somit

$$\lim_{x\to\infty} D_\chi(x) - p(x) = 0.$$

Substituieren wir $e^{-x} \rightsquigarrow \theta$, gilt also

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi p(-\log\theta)} = 1,$$

da p positiv und beschränkt ist. Es bleibt nachzuweisen, dass $h_p(\theta) := \theta^\chi p(-\log\theta)$ eine vollständig monotone Ableitung besitzt: Die Periodizität von p liefert für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\theta > 0$

$$\begin{aligned} h_p(\theta) &= \theta^\chi p(-\log\theta + nd) \\ &= e^{\chi nd}\big(1-\varphi(\theta e^{-nd})\big)\left(\frac{\theta^\chi e^{-\chi nd} p(-\log\theta + nd)}{1-\varphi(\theta e^{-nd})}\right). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch Grenzübergang $n \to \infty$

$$\theta^\chi p(-\log\theta) = \lim_{n\to\infty} e^{\chi nd}\big(1-\varphi(\theta e^{-nd})\big). \tag{3.3}$$

Differenziert man diese Identität sukzessive nach θ, folgt aus der vollständigen Monotonie von $\varphi \in \mathfrak{L}$ sofort die von h_p'.

Schließlich stellen wir fest, das im Fall $\chi = 1$ aus der Monotonie von $\frac{1-\varphi(u)}{u}$ (Lemma 2.16) und (3.3) schon die Monotonie von p folgt. Als periodische Funktion muss p dann bereits konstant sein. Damit sind für $m'(\chi) < 0$ alle Fälle abgehandelt.

Im Fall $m'(\chi) = 0$ gilt entsprechend $\mathbb{E}\, X_1 = 0$. Wir können also das Erneuerungstheorem nicht direkt auf den Random Walk $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ anwenden. Stattdessen setzen wir für $n \in \mathbb{N}_0$

$$M_n := D_\chi(x + S_n) - \sum_{k=0}^{n-1} G_\chi(x + S_k) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_n := \sigma\big((S_k)_{k\leq n}\big).$$

Nun folgt mittels (3.2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left[D_\chi(x+S_{n+1})\middle|\mathcal{F}_n\right] - \sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}\left[G_\chi(x+S_k)\middle|\mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{E}\left[D_\chi(x+S_n+X_{n+1}) - G_\chi(x+S_n)\middle|\mathcal{F}_n\right] - \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[G_\chi(x+S_k)\middle|\mathcal{F}_n\right]\\ &= D_\chi(x+S_n) - \sum_{k=0}^{n-1} G_\chi(x+S_k) = M_n.\end{aligned}$$

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Das Optional-Sampling-Theorem für beschränkte Stoppzeiten (Satz 1.26) liefert nun

$$D_\chi(x) = \mathbb{E}\,D_\chi(x+S_{\sigma_1^>\wedge n}) - \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\sigma_1^>\wedge n-1} G_\chi(x+S_k)$$

für den ersten streng aufsteigenden Leiterindex $\sigma_1^>$, der nach Lemma 1.20 f. s. endlich ist. Lemma 1.23 liefert mit (2.18) weiterhin

$$\mathbb{E}\,e^{S_1^>} < \infty \tag{3.4}$$

und somit wegen $D_\chi(x) \le e^{\chi x}$ und $S_n \le S_1^>$ für $n < \sigma_1^>$

$$D_\chi(x) = \mathbb{E}\,D_\chi(x+S_1^>) - \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\sigma_1^>-1} G_\chi(x+S_k).$$

Wir setzen

$$W(x) := \mathbb{E}\sum_{k=1}^{\sigma_1^>-1} G_\chi(x+S_k) = \mathbb{E}\,D_\chi(x+S_1^>) - D_\chi(x). \tag{3.5}$$

Bezeichnen wir mit $V^>$ das zu $(-S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Prä-$\sigma_1^>$-Okkupationsmaß, mit $(R_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ den schwach absteigenden Leiterhöhenprozess sowie mit $U^\leq$ das Erneuerungsmaß von $(-R_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, folgt aus dem Dualitätslemma 1.21

$$W(x) = G_\chi * V^>(x) = G_\chi * U^\leq(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\,G_\chi(x+R_k).$$

Wegen $\mathbb{E}\,R_1 \in (0,\infty]$ können wir auf den schwach absteigenden Leiterhöhenprozess nun das Erneuerungstheorem 1.17 anwenden und erhalten gemäß Bemerkung 1.18(a)

$$\lim_{x\to\infty} R(x) - \tilde{p}(x) = 0 \tag{3.6}$$

für ein stetiges und konstantes bzw. d-periodisches $\tilde{p}$.

Wir betrachten nun zunächst den nichtarithmetischen Fall. Dazu schreiben wir (3.5) als

$$W(z) = \mathbb{E}\int_0^{S_\tau} D'_\chi(z+y)\,dy = \int_0^\infty D'_\chi(z+y)\mathbb{P}(S_\tau \geq y)\,dy, \tag{3.7}$$

wobei wir wegen (3.4) und (2.16) die Integrationsreihenfolge vertauschen dürfen. Integrieren wir beide Seiten nach z und vertauschen abermals (mit derselben Rechtfertigung) die Integrationsreihenfolge, erhalten wir

$$\int_0^x W(z)\,dz + c = \int_0^\infty D_\chi(x+y)\mathbb{P}(S_\tau \geq y)\,dy \tag{3.8}$$

mit $c := \int_0^\infty D_\chi(y)\mathbb{P}(S_\tau \geq y)\,dy < \infty$. Da $D_\chi(x)e^{-\chi x}$ monoton fällt, gilt

$$\frac{D_\chi(x+y)}{D_\chi(x)} \leq e^{\chi y}$$

für alle $y \geq 0$. Wenden wir nun (3.4) und den Satz von der majorisierten Konvergenz an, liefert die zweite Aussage von Korollar 2.20

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x W(z)\,dz + c}{D_\chi(x)} = \mathbb{E}\,S_\tau,$$

und $\mathbb{E}\,S_\tau$ ist positiv und wegen (3.4) endlich. Invertieren wir die letzte Gleichung und beachten, dass aus (3.6) $\int_0^\infty W(z)\,dz + c \simeq \frac{x}{\tilde{p}}$ folgt, ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{D_\chi(x)}{x} = \frac{\tilde{p}}{\mathbb{E}\,S_\tau}. \tag{3.9}$$

Im d-arithmetischen Fall ersetzen wir wie üblich Integrale durch Summen und Ableitungen durch Differenzen. Wir beginnen mit

$$W(x) = \sum_{k\in\mathbb{G}_d} D_\chi(x+k)\mathbb{P}(S_\tau = k) - D_\chi(x) \tag{3.5'}$$

und erhalten nach analoger Rechnung für $r \in [0,d)$

$$d\text{-}\lim_{x\to\infty} \frac{D_\chi(x+r)}{x+r} = \frac{p(r)}{\mathbb{E}\,S_\tau}. \tag{3.9'}$$

Diese Aussage ist a priori schwächer als ihr Pendant (3.9): Schreiben wir für $r \in [0,d]$ und $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(r) := \frac{D_\chi(nd+r)}{nd+r},$$

entspricht (3.9') der punktweisen Konvergenz der Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, während (3.9) gerade die gleichmäßige Konvergenz auf $[0,d]$ impliziert. Mit (3.1) folgt jedoch

$$\frac{D_\chi(nd+r)}{nd+r} \leq \frac{D_\chi(nd)e^{\chi r}}{nd}$$

und somit aus (3.9') bereits die Beschränktheit von $\frac{D_\chi(x)}{x}$ in ∞ sowie mit (2.16) die Beschränktheit der Ableitung in ∞. Somit sind die $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichstetig auf $[0,d]$, so dass aus der punktweisen bereits die gleichmäßige Konvergenz folgt.

Substituieren wir nun $\frac{\tilde{p}}{\mathbb{E}\, S_\tau} \rightsquigarrow p$ und $e^{-x} \rightsquigarrow \theta$, erhalten wir somit die geforderte Gleichung. Um den Existenzbeweis abzuschließen, ist jetzt nur noch zu zeigen, dass $p \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$ gilt. Die zugehörige Rechnung ist jedoch völlig analog zum Fall $m'(\chi) < 0$.

Zur Eindeutigkeit von p bleibt abschließend zu sagen, dass für zwei Funktionen $p_1, p_2 \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$, die die geforderte Gleichung erfüllen,

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{p_1(-\log\theta)}{p_2(-\log\theta)} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_1(x)}{p_2(x)} = 1$$

gelten muss und somit p_1 und p_2 als konstante bzw. d-periodische Funktionen bereits übereinstimmen müssen. □

Leider gibt Satz 3.3 noch keine hinreichende Auskunft darüber, ob die gewählte Parametrisierung geeignet ist in dem Sinne, dass zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ tatsächlich eine Bijektion existiert: Wir wissen weder, ob jedes Element von $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ eine Entsprechung in $\mathfrak{F}$ hat, noch können wir ausschließen, dass zwei Elementen von $\mathfrak{F}$ dasselbe Element in $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ zugeordnet wird.

3.2 Konvergenz gegen Fixpunkte

Um diesem Mangel abzuhelfen, zeigen wir zunächst ein Konvergenzresultat, das wir im anschließenden zweiten Teil des Parametrisierungssatzes für die Eindeutigkeitsaussage heranziehen können.

Hierzu kehren wir noch einmal zum gewichteten Verzweigungsprozess aus Abschnitt 1.2 zurück. Wir erinnern an die Definition

$$L(\emptyset) := 1, \qquad L(vi) := L(v)T_i(v) \quad (i = 1, \ldots, N),$$

so dass $L(v)$ für $v \in \mathbb{T}$ gerade das Gewicht des Pfades von $\emptyset$ zu v angibt. Nun setzen wir

$$R_n := \max_{|v|=n} L(v)$$

und zeigen

3.4 Lemma. *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \qquad f.\,s.$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt bereits

$$\mathbb{P}(\max_{1\le i\le N} T_i = 1) < 1,$$

denn sonst wäre stets $m > 1$, also $\mathfrak{F} = \emptyset$. Ist nun $\max_{1\le i\le N} T_i \le 1$ f. s., folgt die Behauptung sofort. Somit bleibt nur noch der Fall $\mathbb{P}(\max_{1\le i\le N} T_i > 1) > 0$ zu betrachten. Dann folgt

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} R_n = 0) + \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} R_n = +\infty) = 1.$$

Also genügt es, $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} R_n < \infty$ f. s. zu zeigen. Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}_0$

$$M_n := \sum_{|v|=n} L(v)^\alpha \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_n := \sigma\big((L(v))_{|v|\le n}\big).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\Big[\sum_{|v|=n+1} L(v)^\alpha \Big| \mathcal{F}_n\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{|w|=n}\sum_{i=1}^N L(w)^\alpha T_i(w)^\alpha \Big| \mathcal{F}_n\Big] \\ &= \sum_{|w|=n} L(w)^\alpha \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\, T_i^\alpha = M_n m(\alpha) = M_n.\end{aligned}$$

Also ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein nichtnegatives Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Nach dem Martingal-Konvergenzsatz 1.27 konvergiert daher $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ f. s. gegen eine beschränkte Zufallsgröße M. Wegen $R_n^\alpha < M_n$ ist somit auch $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} R_n < \infty$ f. s., und das war zu zeigen. □

3.5 Bemerkung. Die Aussage von Lemma 3.4 bleibt offensichtlich richtig, wenn wir allgemeiner

$$L_\theta(\emptyset) := \theta, \qquad L_\theta(vi) := L_\theta(v)T_i(v) \quad (i = 1, \dots, N)$$

für $\theta \in \mathbb{R}$ definieren, also die Gesamtgewichte mit dem Faktor θ skalieren. Mit dieser Verallgemeinerung können wir die Fixpunktgleichung (1.2) für L. T. iterieren und erhalten

$$K^n\varphi(\theta) = \mathbb{E}\prod_{|v|=n} \varphi(L_\theta(v)), \tag{3.10}$$

wie man induktiv mühelos nachrechnet.

Mit diesem Ergebnis beweisen wir nun den angekündigten

3.6 Konvergenzsatz. *Für $\varphi \in \mathfrak{F}$ und $\psi \in \mathfrak{L}$ gelte*

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{1-\psi(\theta)} = 1.$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} K^n\psi = \varphi.$$

Beweis. Falls $m'(\chi) < 0$, liefert Satz 3.3 für jedes $c > 0$

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(c\theta)}{(c\theta)^\chi p(-\log c - \log\theta)} = 1 = \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi p(-\log\theta)}$$

für ein $p \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$. Setzen wir erneut $h_p(\theta) := \theta^\chi p(-\log\theta)$, folgt

$$\liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(c\theta)}{1-\varphi(\theta)} = \liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{h_p(c\theta)}{h_p(\theta)} \quad \text{und} \quad \limsup_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(c\theta)}{1-\varphi(\theta)} = \limsup_{\theta\downarrow 0} \frac{h_p(c\theta)}{h_p(\theta)}.$$

Wegen

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{\log c\theta}{\log\theta} = 1$$

bleibt dies auch im Fall $m'(\chi) = 0$ gültig. Nach Definition von $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ ist h_p streng monoton wachsend auf $[0,\infty)$. Daher gilt

$$\liminf_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(c\theta)}{1-\varphi(\theta)} > 1, \text{ falls } c > 1, \quad \text{und} \quad \limsup_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(c\theta)}{1-\varphi(\theta)} < 1, \text{ falls } c < 1. \tag{3.11}$$

Wir wählen ein beliebiges $c > 1$ und setzen

$$\underline{\varphi}(\theta) := \varphi(c\theta) \quad \text{und} \quad \overline{\varphi}(\theta) := \varphi(c^{-1}\theta).$$

Offensichtlich sind mit φ auch $\underline{\varphi}$ und $\overline{\varphi}$ Elemente von $\mathfrak{F}$. Wegen der asymptotischen Gleichheit von $1-\varphi$ und $1-\psi$ folgt nun aus (3.11)

$$\underline{\varphi}(\theta) < \psi(\theta) < \overline{\varphi}(\theta)$$

auf einem Intervall $(0,\theta_0]$ für ein $\theta_0 > 0$. Dies impliziert

$$\prod_{|v|=n} \underline{\varphi}(L_\theta(v)) \le \prod_{|v|=n} \psi(L_\theta(v)) \le \prod_{|v|=n} \overline{\varphi}(L_\theta(v))$$

auf der Menge $\{R_n \le \theta_0\}$. Mit (3.10) und Lemma 3.4 folgt nun aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\liminf_{n\to\infty} K^n\underline{\varphi}(\theta) \le \liminf_{n\to\infty} K^n\psi(\theta) \le \limsup_{n\to\infty} K^n\psi(\theta) \le \limsup_{n\to\infty} K^n\overline{\varphi}(\theta).$$

Wegen $\underline{\varphi}, \overline{\varphi} \in \mathfrak{F}$ liegen somit alle Teilfolgenlimites von $K^n\psi(\theta)$ in $[\varphi(c\theta), \varphi(c^{-1}\theta)]$. Da $c > 1$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

Jetzt können wir die vollständige Umkehrung von Satz 3.3 zeigen und erhalten somit wie gewünscht die Existenz einer Bijektion zwischen F und $\mathfrak{P}_{\chi,d}$.

3.7 Parametrisierungssatz, Teil (ii). *Sei $p \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathfrak{F}$ mit*

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi p(-\log\theta)} = 1, \quad \textit{falls } m'(\chi) < 0,$$

bzw.

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi p(-\log\theta)|\log\theta|} = 1, \quad \textit{falls } m'(\chi) = 0.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit ergibt sich sofort aus dem Konvergenzsatz 3.6.

Falls $\chi = 1$ oder $d = 0$, besteht $\mathfrak{P}_{\chi,d}$ nur aus positiven Konstanten. Sei $p > 0$ vorgegeben und $\psi \in \mathfrak{F}$ beliebig. Dann existiert nach Satz 3.3 ein $q > 0$ mit

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\psi(\theta)}{\theta^\chi} = q \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\psi(\theta)}{\theta^\chi|\log\theta|} = q.$$

Setzen wir nun $c := \frac{p}{q}$ und $\varphi(\theta) := \psi\bigl(c^{1/\chi}\theta\bigr)$, so ist φ offensichtlich ebenfalls ein Element von $\mathfrak{F}$, und wir erhalten sofort

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi} = p \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^\chi|\log\theta|} = p.$$

Im Folgenden sei nun $\chi < 1$ und $d > 0$. Wir setzen zur Abkürzung $h_p(\theta) := \theta^\chi p(-\log\theta)$ wie in Definition 3.1.

Ist $m'(\chi) < 0$, definieren wir

$$g(\theta) := e^{-\theta}.$$

Da g offenbar vollständig monoton ist, ist nach Kriterium 2 in [Fel], XIII.4,

$$\psi(\theta) := g\bigl(h_p(\theta)\bigr)$$

nach stetiger Fortsetzung in 0 ein Element von $\mathfrak{L}$, das außerdem

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\psi(\theta)}{h_p(\theta)} = 1 \tag{3.12}$$

erfüllt. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ gilt, wählen wir nun ein beliebiges $\tilde\psi \in \mathfrak{F}$. Nach Satz 3.3 existiert dann ein $\tilde p \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$ derart, dass

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\tilde\psi(\theta)}{h_{\tilde p}(\theta)} = 1. \tag{3.13}$$

Wegen $p \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$ ist h_p streng monoton wachsend mit $h_p(0+) = 0$ und $h_p(\infty) = \infty$, und Gleiches gilt für $h_{\tilde p}$. Beide Funktionen sind also bijektive Transformationen von $[0,\infty)$. Somit ist $u := h_{\tilde p}^{-1} \circ h_p$ wohldefiniert. Da h_p für $k \in \mathbb{Z}$ die Funktionalgleichung

$$h_p(\theta e^{kd}) = e^{\chi kd} h_p(\theta)$$

erfüllt (ebenso wie $h_{\tilde{p}}$), folgt aus der Identität

$$h_{\tilde{p}}\big(u(\theta e^{kd})\big) = h_p(\theta e^{kd}) = e^{\chi kd} h_p(\theta) = e^{\chi kd} h_{\tilde{p}}\big(u(\theta)\big)$$

mit der Bijektivität von $h_{\tilde{p}}$ bereits

$$u(\theta e^{kd}) = e^{kd} u(\theta).$$

Setzen wir nun $\varphi := \tilde{\psi} \circ u$, folgt

$$\varphi(\theta T_i) = \tilde{\psi}\big(u(\theta\, T_i)\big) = \tilde{\psi}\big(u(\theta) T_i\big)$$

und somit

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^{N} \varphi(\theta T_i) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N} \tilde{\psi}\big(u(\theta\, T_i)\big) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{N} \tilde{\psi}\big(u(\theta) T_i\big) = \tilde{\psi}\big(u(\theta)\big) = \varphi(\theta),$$

also $K\varphi = \varphi$. Weiterhin gilt unter Ausnutzung der Stetigkeit von u^{-1} in 0 sowie von (3.13)

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{\theta^{\chi} p(-\log\theta)} = \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\tilde{\psi}\big(u(\theta)\big)}{h_p(\theta)} = \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\tilde{\psi}(\theta)}{h_{\tilde{p}}(\theta)} = 1. \tag{3.14}$$

φ erfüllt also neben der Fixpunktgleichung auch die geforderte Identität. Es bleibt noch $\varphi \in \mathfrak{L}$ nachzuweisen. Aus (3.12) und (3.14) folgt

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\varphi(\theta)}{1-\psi(\theta)} = 1.$$

Nun können wir genau wie im Beweis von Satz 3.6 folgern, dass

$$\lim_{n\to\infty} K^n \psi = \varphi$$

gilt. (Hierfür reicht bereits die Gültigkeit von (3.14) anstelle der Voraussetzung $\varphi \in \mathfrak{F}$ des Satzes aus.) Da φ nach Konstruktion stetig ist, muss außerdem $\lim_{\theta\downarrow 0}\varphi(\theta) = \varphi(0) = 1$ sein. Somit ist $\varphi \in \mathfrak{L}$, und alles ist gezeigt.

Der Beweis im Fall $m'(\chi) = 0$ verläuft weitgehend analog. Diesmal setzen wir jedoch

$$g(\theta) := \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\theta x}}{1+x^2}\, dx \quad \text{und} \quad \psi(\theta) := g\big(\chi^{-1} h_p(\theta)\big).$$

Um das Äquivalent zu (3.12) zu erhalten, stellen wir fest, dass

$$\lim_{\theta\downarrow 0} \frac{g(\theta)}{1-\theta|\log\theta|} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{\log \chi^{-1} h_p(\theta)}{\log\theta} = \chi$$

gelten. Somit ergibt sich mit der Stetigkeit von h_p in 0

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{1-\psi(\theta)}{h_p(\theta)|\log\theta|} &= \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{g\big(\chi^{-1}h_p(\theta)\big)}{-h_p(\theta)|\log\theta|} = \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{g\big(\chi^{-1}h_p(\theta)\big)}{-\chi^{-1}h_p(\theta)|\log\chi^{-1}h_p(\theta)|} \\ &= \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{g(\theta)-1}{-\theta|\log\theta|} = \lim_{\theta\downarrow 0} \frac{g(\theta)}{1-\theta|\log\theta|} = 1. \end{aligned} \tag{3.12'}$$

Für beliebiges $\tilde{\psi} \in \mathfrak{F}$ existiert nun nach Satz 3.3 wiederum ein $\tilde{p} \in \mathfrak{P}_{\chi,d}$ mit

$$\lim_{\theta \downarrow \infty} \frac{1 - \tilde{\psi}(\theta)}{h_{\tilde{p}}(\theta) |\log \theta|} = 1. \tag{3.13'}$$

Da wegen $\frac{h_p(\theta)}{h_{\tilde{p}}(\theta)} = \frac{p(-\log \theta)}{\tilde{p}(-\log \theta)}$

$$0 < \liminf_{\theta \downarrow 0} \frac{u(\theta)}{\theta} \leq \limsup_{\theta \downarrow 0} \frac{u(\theta)}{\theta} < \infty$$

gilt, folgt

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{\log u(\theta)}{\log \theta} = 1,$$

so dass wir schließlich

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{1 - \varphi(\theta)}{\theta^{\chi} p(-\log \theta) |\log \theta|} = 1 \tag{3.14'}$$

erhalten. □

3.8 Bemerkung. Eine besonders anschauliche Interpretation hat der nun vollständig bewiesene Parametrisierungssatz im Fall $\chi = 1$, $m'(1) < 0$. Bei dieser Konstellation gibt es zu jedem $c > 0$ genau einen Fixpunkt, der zudem den Erwartungswert c besitzt. Somit ist klar, dass außer den im Beweis von Satz 2.11 bzw. in Bemerkung 2.12 konstruierten keine weiteren Fixpunkte existieren.

3.3 Ein Momentenresultat

Im letzten Abschnitt begeben wir uns nochmals in die in der letzten Bemerkung angesprochene Situation $\chi = 1$, $m'(1) < 0$. Sämtliche Fixpunkte von K besitzen dann endlichen Erwartungswert. Der folgende Satz beantwortet die naheliegende Frage nach der Existenz von Momenten höherer Ordnung. Es dürfte keine Überraschung mehr darstellen, dass diese ebenfalls vom Verhalten der Funktion m abhängt:

3.9 Satz. *Sei $\chi = 1$ und $m'(1) < 0$. Ist dann $\mu \in \mathfrak{F}$ und $\beta > 1$, so gilt*

$$\int_0^\infty x^\beta \, \mu(dx) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad m(\beta) < 1.$$

Beweis. Für die Hinrichtung halten wir fest, dass für $x_1, \ldots, x_N \geq 0$ wegen $\beta > 1$

$$\Big(\sum_{i=1}^N x_i \Big)^\beta \geq \sum_{i=1}^N x_i^\beta$$

gilt und Gleichheit genau dann vorliegt, wenn höchstens ein $x_i > 0$ ist. Sind dann $W, W_1, \ldots, W_N$ u. i. v. Zufallsgrößen mit Verteilung μ, folgt aus $\mu \in \mathfrak{F}$

$$W^\beta \stackrel{d}{=} \Big(\sum_{i=1}^N T_i W_i\Big)^\beta \geq \sum_{i=1}^N T_i^\beta W_i^\beta.$$

Diese Ungleichung muss auf einer Menge von positiver Wahrscheinlichkeit streng sein: Anderenfalls hätten die T_i bereits f. s. disjunkte Träger, und nach Lemma 2.2 wäre $m \equiv 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt

$$\mathbb{E}\, W^\beta > \mathbb{E}\, W^\beta \sum_{i=1}^N T_i^\beta = m(\beta)\, \mathbb{E}\, W^\beta$$

und somit $m(\beta) < 1$.

Nun setzen wir umgekehrt $m(\beta) < 1$ voraus und bezeichnen mit k die eindeutig bestimmte natürliche Zahl mit $k < \beta \leq k+1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^N x_i\Big)^\beta &\leq \Big(\sum_{i=1}^N x_i^{\beta/(k+1)}\Big)^{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^N x_i^\beta + \sum_{(j_1,\ldots,j_N)\in\mathcal{S}} \binom{k+1}{j_1 \ldots j_N} \big(x_1^{j_1} \cdots x_N^{j_N}\big)^{\frac{\beta}{k+1}},\end{aligned} \tag{3.15}$$

wobei

$$\mathcal{S} := \Big\{(j_1, \ldots, j_N) \in \mathbb{N}_0^N : \max j_i \leq k, \sum_{i=1}^N j_i = k+1\Big\}.$$

Nun seien $Y, Y_1, \ldots, Y_N$ u. i. v. nichtnegative Zufallsvariablen mit beliebiger Verteilung ν. Dann liefert eine Anwendung der Jensenschen Ungleichung auf die Funktion

$$\phi(x) = x^{\frac{j_i\beta}{k(k+1)}},$$

die wegen $j_i \leq k$ und $\beta \leq k+1$ konkav ist,

$$\prod_{i=1}^N \mathbb{E}\, Y_i^{\frac{j_i\beta}{k+1}} = \prod_{i=1}^N \mathbb{E}\Big[(Y_i^k)^{\frac{j_i\beta}{k(k+1)}}\Big] \leq \prod_{i=1}^N \big(\mathbb{E}\, Y_i^k\big)^{\frac{j_i\beta}{k(k+1)}} = \big(\mathbb{E}\, Y^k\big)^{\frac{\beta}{k}}.$$

Setzen wir nun T_iY_i in (3.15) ein und bilden den Erwartungswert, erhalten wir

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^N T_i Y_i\Big)^\beta \leq m(\beta)\, \mathbb{E}\, Y^\beta + c\big(\mathbb{E}\, Y^k\big)^{\frac{\beta}{k}}$$

mit einer Konstanten c, die von β und der Verteilung F, nicht jedoch von ν abhängt. In Integralschreibweise entspricht dies

$$\int_{(0,\infty)} x^\beta\, K\nu(dx) \leq m(\beta) \int_{(0,\infty)} x^\beta\, \nu(dx) + c\Big(\int_{(0,\infty)} x^k\, \nu(dx)\Big)^{\frac{\beta}{k}}. \tag{3.16}$$

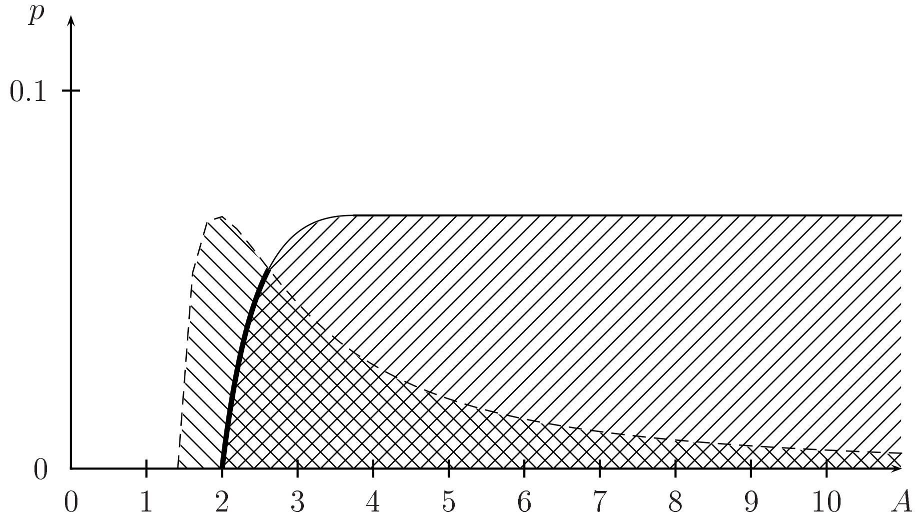

Bild 4. $m(2) = 1$ (gestrichelt), Parameterkombinationen mit 2. Moment (fett).

O. B. d. A. sei nun $\mathbb{E}\,Y = 1$ (vgl. Bemerkung 2.12). Dann ist μ gemäß Satz 2.11 der schwache Limes der Verteilungsfolge $(K^n\delta_1)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Aus (3.16) folgt somit

$$\int_{(0,\infty)} x^\beta\,\mu(dx) \le m(\beta)\int_{(0,\infty)} x^\beta\,\mu(dx) + c\Big(\int_{(0,\infty)} x^k\,\mu(dx)\Big)^{\frac{\beta}{k}}.$$

Wegen $m(\beta) < 1$ existiert also mit dem Moment der Ordnung k bereits das der Ordnung β. Falls $\beta \in (1,2]$, also $k = 1$, ist alles gezeigt. Da wegen der strengen Konvexität von m im Intervall $(1,\beta]$ notwendig $m < 1$ ist, können wir im Fall $k > 1$ das Argument $(k-1)$-mal wiederholen, indem wir sukzessive $k, k-1, \ldots, 2$ anstelle von β wählen, und erhalten wiederum aus der (gegebenen) Existenz des ersten die des β-ten Momentes. □

Abschließend werfen wir noch einmal einen Blick auf das in Kapitel 2 vorgestellte

3.10 Beispiel (Fortsetzung von 2.5). Aus (2.4) folgt, dass genau dann für Fixpunkte von K das erste Moment existiert, wenn

$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{A-2}{A^2-1} \text{ für ein } A \in (2, 2+\sqrt{3}). \tag{3.17}$$

Man rechnet leicht nach, dass $m_{A,p}(\beta)$ für gegebenes $\beta > 1$ und $p \in (0,1)$ monoton wachsend in A ist für $A > 2$. Dann erhalten wir durch Einsetzen von (3.17) in die Definition von $m_{A,p}(\beta)$

$$\chi = 1,\ m'_{A,p}(1) < 0 \text{ und } m_{A,p}(\beta) < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{A-2}{A^2-1} \text{ für ein } A \in (2, A_\beta),$$

wobei A_β die eindeutig bestimmte Lösung > 2 der Gleichung

$$(A-2)A^\beta - 2A + 1 = 0$$

ist. Offenbar fällt für $\beta \to \infty$ die Intervallgrenze A_β gegen 2 und somit die Menge der Parameterkombinationen, für die Lösungen mit einem Moment der Ordnung β existieren, gegen $\emptyset$, während umgekehrt für $A \downarrow 2$ bzw. $p \downarrow 0$ die Ordnung der existierenden Momente gegen ∞ strebt.

Bild 4 zeigt die Parameterkombinationen für $\beta = 2$; hier ergibt sich die Intervallgrenze A_2 zu $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$.

Literaturverzeichnis

[Als1] Alsmeyer, G. *Wahrscheinlichkeitstheorie (2. Auflage).* Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30, Universität Münster (2000).

[Als2] Alsmeyer, G. *Stochastische Prozesse, Teil 1: Diskrete Markov-Ketten, Martingale und Erneuerungstheorie (2. erweiterte Auflage).* Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 33, Universität Münster (2002).

[Als3] Alsmeyer, G. *Fluktuationstheorie.* Vorlesungsskript, Universität Münster (2005).

[AR] Alsmeyer, G. und Rösler, U. A stochastic fixed point equation related to weighted branching with deterministic weights. *Bericht Nr. 10/03-S*, Angewandte Mathematik und Informatik, Universität Münster (2003).

[Cal1] Caliebe, A. Symmetric fixed points of a smoothing transformation. *Adv. Appl. Prob.* **35**, 377-394 (2003).

[Cal2] Caliebe, A. Representation of fixed points of a smoothing transformation. In *Mathematics and Computer Science III*, eds. M. Drmota et al., Trends Math., Birkhäuser, Basel, 311-324 (2004).

[CR] Caliebe, A. und Rösler, U. Fixed points with finite variance of a smoothing transformation. *Stoch. Proc. Appl.* **107**, 105-129 (2003).

[DL] Durrett, R. und Liggett, T. M. Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **64**, 275-301 (1983).

[Fel] Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications, Volume II.* Wiley, New York (1966).

[HL] Holley, R. und Liggett, T. M. Generalized potlatch and smoothing processes. *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **55**, 165-195 (1981).

[KP] Kahane, J. P. und Peyrière, J. Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot. *Adv. Math.* **22**, 131-145 (1976).

[Liu] Liu, Q. Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk. *Adv. Appl. Prob.* **30**, 85-112 (1998).

[MV] Meise, R. und Vogt, D. *Einführung in die Funktionalanalysis.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (1992).

[Rös1] Rösler, U. A limit theorem for Quicksort. *Inform. Théor. Appl./Theor. Inform. Appl.* **25**, 85-100 (1991).

[Rös2] Rösler, U. A fixed point theorem for distributions. *Stoch. Proc. Appl.* **42**, 195-214 (1992).

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine weiteren Hilfsmittel als die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen verwendet habe.

Münster, den 26. April 2005