Irrfahrten in zufällig variierenden Umgebungen

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik
Prof. Dr. G. Alsmeyer

Diplomarbeit

vorgelegt von
Katharina Spieß

Münster, Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Unter einer (Standard-)Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ verstehen wir einen stochastischen Prozess $(M_n)_{n\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$, der sich startend in $M_0 = 0$ im Zeitpunkt $n \geq 1$ an der Position M_n befindet, in jedem Zeitpunkt eine Position weiter nach rechts bzw. eine Position nach links zurückspringt und dies mit einer bekannten Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ bzw. $1-p$ unabhängig von seinen Zuwächsen zu anderen Zeitpunkten tut. Die Irrfahrt hat also stochastisch unabhängig und identisch verteilte Zuwächse $X_1, X_2, ...$, die Werte aus $\{+1, -1\}$ annehmen,

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1.$$

Bei einer Irrfahrt $(M_n)_{n\geq 0}$ auf $\mathbb{Z}$ handelt es sich um eine diskrete Markov-Kette (DMK), d.h.

$$P^{M_{n+1}|M_0,\ldots,M_n} = P^{M_{n+1}|M_n}$$

für alle $n \geq 0$. Nach Definition kann sich eine Irrfahrt nämlich nur um eine Position pro Zeiteinheit weiterbewegen und sie tut dies unabhängig von den Zuwächsen zu anderen Zeitpunkten. Gegeben den gesamten Verlauf der Irrfahrt bis zu einem Zeitpunkt n, müssen wir nur ihren gegenwärtigen Aufenthaltspunkt kennen, um zu wissen, wohin die Irrfahrt im nächsten Zeitpunkt mit positiver Wahrscheinlichkeit springen kann. Eine Anwendung der Theorie der DMK liefert nachfolgende Resultate über das Konvergenzverhalten von Irrfahrten:

- Falls $p \neq \frac{1}{2}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$ bzw. $= -\infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = EX_1$.

- Falls $p = \frac{1}{2}$, so ist die Irrfahrt rekurrent, also $-\infty = \liminf_{n\to\infty} M_n < \limsup_{n\to\infty} M_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = EX_1 = 0$.

(Vgl. hierzu [Als2], S.46f.)

Gegenstand dieser Arbeit sind allerdings Irrfahrten in zufällig variierenden Umgebungen. Eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen unterscheidet sich von einer Standard-Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ dadurch, dass zum einen die Wahrscheinlichkeit, in einem Punkt nach rechts zu springen, nicht in jedem $i \in \mathbb{Z}$ gleich ist, und zum anderen, dass diese Wahrscheinlichkeiten nicht fest, sondern selbst Zufallsgrößen sind. Wir werden die Folge dieser Zufallsgrößen mit $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ bezeichnen. In dieser Arbeit vereinfachen wir die Situation insoweit, dass wir die U_i als stochastisch unabhängig und identisch verteilt voraussetzen.

Die eigentliche Irrfahrt bezeichnen wir mit $(S_n)_{n\geq 0}$. Eine Realisierung besteht nicht nur aus einem Pfad $\omega \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, sondern auch aus einer Umgebung $u \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$, wobei natürlich nur der Pfad beobachtet werden kann. Wir überlegen uns leicht, dass die Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen keine DMK darstellt. Denn verfolgen wir einen Pfad bis zu einem Zeitpunkt n bei unbekannter Umgebung u, so erhalten wir sehr wohl Informationen aus der Vergangenheit darüber, wie sich die Irrfahrt im nächsten Schritt verhalten wird. Haben wir nämlich schon sehr häufig gesehen, wie die Irrfahrt in einem bestimmten Punkt weitergesprungen ist, weicht nach dem starken Gesetz der großen Zahlen die relative Häufigkeit von der theoretischen, unbekannten Wahrscheinlichkeit mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit stark ab. Dies ist der entscheidende Unterschied zwischen der Standard-Irrfahrt und der Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen: Die Standard-Irrfahrt ist eine DMK, während wir bei der Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen aus ihrem vergangenen Verlauf Informationen über ihren zukünftigen Weg erhalten.

Obwohl eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen keine DMK ist, werden wir in den Beweisen über ihr Konvergenzverhalten die Theorie diskreter Markov-Ketten anwenden können. Denn gegeben eine feste Umgebung ist eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen eine DMK aus den gleichen Gründen wie die Standard-Irrfahrt. Wir werden viele Aussagen zunächst unter einer festen Umgebung u beweisen und unter Beachtung, dass eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen eine bestimmte Eigenschaft f.s. besitzt, wenn die Irrfahrt bei gege-

bener Umgebungsfolge diese Eigenschaft für P^U-f.a. Umgebungen u P_u-f.s. besitzt, dann die eigentliche Aussage zeigen können.
Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse entstammen dem Artikel „Random walks in a random environment“ von Solomon [Sol]. Zu Beginn werden wir zunächst das Irrfahrten in zufällig variierenden Umgebungen zugrunde liegende Modell angeben. Dann werden wir uns mit dem Konvergenzverhalten von Irrfahrten beschäftigen und als Resultat erhalten, dass eine Irrfahrt in Abhängigkeit von der Verteilung der U_i entweder gegen ∞ bzw. $-\infty$ konvergiert oder rekurrent ist. Anschließend werden wir mit Hilfe des Birkhoffschen Ergodensatzes die Konvergenzgeschwindigkeit einer Irrfahrt bestimmen können. Dabei werden wir feststellen, dass eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen im Vergleich zu einer entsprechenden Standard-Irrfahrt langsamer ist: Vergleichen wir eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen mit einer Standard-Irrfahrt, die in jedem Punkt die Übergangswahrscheinlichkeit EU_1 besitzt, so konvergiert letztere schneller. Die allgemeine Theorie abschließend bestimmen wir die erwartete Anzahl der Besuche einer Irrfahrt in Punkten aus $\mathbb{Z}$.
Im dritten Kapitel betrachten wir ein Beispiel einer Irrfahrt, für die $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ gilt, die also mit Geschwindigkeit 0 gegen ∞ konvergiert. Diesen ungewöhnlichen Fall gibt es unter bestimmten Voraussetzungen bei Irrfahrten in zufällig variierenden Umgebungen. In unserem Beispiel wird die Umgebungsfolge der Irrfahrt $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ aus nicht f.s. konstanten Zufallsgrößen bestehen, die entweder mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert 1 annehmen, also rechtsreflektierende Barrieren sind, oder einen anderen festen Wert echt zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ mit Wahrscheinlichkeit p. Definieren wir T_n als die Ersteintrittszeit der Irrfahrt in den Punkt n, $n \in \mathbb{N}$, dann wird es unser Ziel sein, Funktionen f zu finden, für die $\frac{T_n}{f(n)}$ bzw. $\frac{S_n}{f(n)}$ in Wahrscheinlichkeit gegen zu bestimmende Grenzwerte konvergiert.
Herzlich bedanke ich mich bei Herrn Alsmeyer für die gute Betreuung und geduldige Hilfe bei der Erstellung dieser Diplomarbeit.

2 Irrfahrten in zufällig variierenden Umgebungen

2.1 Das Modell

Zur Modellierung einer Irrfahrt in zufälligen Umgebungen wählen wir die von den Zylindermengen erzeugten σ-Algebren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ über dem Raum der Umgebungen $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ bzw. der Menge der Pfade der Irrfahrt $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Durch Produktbildung erhalten wir $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ als σ-Algebra über $[0,1]^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.
Wir definieren nun die Irrfahrt S durch $S := (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n : [0,1]^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}, (u,\omega) \mapsto \omega_n$$

und die zufällige Umgebung U durch $U := (U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ mit

$$U_i : [0,1]^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to [0,1], (u,\omega) \mapsto u_i.$$

Da die U_i als stochastisch unabhängig und identisch verteilt vorausgesetzt werden sollen, wählen wir auf $([0,1]^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{A}_1)$ das Produkt eines Wahrscheinlichkeitmaßes auf $[0,1]$ als Verteilung von U und bezeichnen dieses mit Q.
Zu gegebenem $u \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$ sei M_u die Verteilung der zeitlich homogenen diskreten Markov-Kette, die eindeutig durch ihre Anfangsverteilung δ_0 und ihre Übergangsmatrix $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ mit

$$p_{ij} := \begin{cases} u_i, & j = i+1 \\ 1-u_i, & j = i-1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

bestimmt ist. Nun kann ein Maß P auf $([0,1]^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathfrak{A})$ durch

$$P(A \times B) := \int_A M_u(B) Q(du)$$

definiert werden. (Zur Wohldefiniertheit und den zu erfüllenden Maßeigenschaften vergleiche [Sol].) Nun können wir für die bedingten Verteilungen abkürzend definieren

$$P_U(\cdot) := P(S \in \cdot \mid U) \quad \text{und} \quad P_u(\cdot) := P(S \in \cdot \mid U = u) = M_u(\cdot).$$

Um das Grenzverhalten von Irrfahrten in zufälligen Umgebungen herzuleiten, bedienen wir uns nachfolgender Argumentation: Eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen besitzt eine bestimmte Eigenschaft P-f.s., wenn die Irrfahrt bei gegebener Umgebungsfolge diese Eigenschaft für P^U-f.a. Umgebungen u P_u-f.s. besitzt.

Lemma 2.1 *Sei $B \in \mathfrak{A}_2$ mit $P^{S|U=u}(B) = 1$ für P^U-f.a. $u \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$. Dann ist $P(S \in B) = 1$.*

Beweis: $P(S \in B) = P^{(U,S)}([0,1]^{\mathbb{Z}} \times B) = \int_{[0,1]^{\mathbb{Z}}} P^{S|U=u}(B) P^U(du) = 1.$ □

2.2 Das Grenzverhalten

Wir untersuchen nun also zunächst das Grenzverhalten von Irrfahrten bei gegebener Umgebungsfolge, um dann mit Hilfe von Lemma 2.1 auf das Grenzverhalten von Irrfahrten in zufälligen Umgebungen zu schließen.

Satz 2.2 *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine barrierefreie Umgebung, also eine Folge reeller Zahlen mit $0 < u_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.*
Wir definieren

$$v_n := 1 - u_n, \quad h_n := \frac{v_n}{u_n} \quad \textit{und} \quad g_n := \begin{cases} h_1 \cdot \ldots \cdot h_n, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ h_n \cdot \ldots \cdot h_{-1}, & n < 0 \end{cases}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, von i nach j in endlicher Zeit zu gelangen, definieren wir durch $f^*_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}_{ij}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ mit

$$f^{(n)}_{ij} := P_u(T_j = n \mid S_0 = i)$$

wobei

$$T_j := \inf\{k \geq 1 : S_k = j\}.$$

Sei außerdem $\mu_{01} := \sum_{n=1}^{\infty} n f^{(n)}_{01}$ die erwartete Zeitdauer um zum ersten Mal von 0 nach 1 zu gelangen.

(a) Sei $i > j$.
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$, so ist $f^*_{ij} = \dfrac{\sum_{n=i}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}{\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n} < 1$.
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty$, so ist $f^*_{ij} = 1$.

(b) Sei $i < j$.
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} (g_{-n})^{-1} < \infty$, so ist $f^*_{ij} = \dfrac{\sum_{n=-\infty}^{i} (h_j \cdot \ldots \cdot h_n)^{-1}}{\sum_{n=-\infty}^{j} (h_j \cdot \ldots \cdot h_n)^{-1}} < 1$.
Falls $\sum_{n=1}^{\infty} (g_{-n})^{-1} = \infty$, so ist $f^*_{ij} = 1$.

(c) Aus $f^*_{01} = 1$ folgt $\mu_{01} = \sum_{j=-\infty}^{1} (1 + h_{j-1}) \cdot h_j \cdot \ldots \cdot h_0$.

Beweis: (a) Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $j \leq i \leq k$. Wir definieren die Tabuwahrscheinlichkeit durch ${}_k f^*_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} {}_k f^{(n)}_{ij}$ mit

$${}_k f^{(n)}_{ij} := P_u(T_j = n; T_k > n \mid S_0 = i)$$

für $i \neq j, k$ und $n \geq 1$ sowie ${}_k f^*_{jj} := 1$ und ${}_k f^*_{kj} := 0$. $({}_k f^*_{ij})$ ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_j &= 1 \\ a_i &= u_i a_{i+1} + v_i a_{i-1}\ , \qquad j < i < k \\ a_k &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

(siehe Anhang, Beh.1). Sei $r \in \mathbb{Z}$ mit $j < r < k$. Dann gilt

$$a_r = (u_r + v_r) a_r = u_r a_{r+1} + v_r a_{r-1}$$

und somit

$$a_{r+1} - a_r = h_r(a_r - a_{r-1}).$$

Hieraus folgt induktiv

$$a_{r+1} - a_r = \left(\prod_{l=j+1}^{r} h_l\right)(a_{j+1} - a_j),$$

und Summation liefert für $j \leq i \leq k$

$$a_i - a_j = \sum_{r=j}^{i-1}(a_{r+1} - a_r) = \left(\sum_{r=j}^{i-1}\prod_{l=j+1}^{r} h_l\right)(a_{j+1} - a_j). \tag{2.2}$$

Damit erhalten wir

$$-1 = a_k - a_j = \left(\sum_{r=j}^{k-1}\prod_{l=j+1}^{r} h_l\right)(a_{j+1} - 1)$$

und so

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= \frac{\left(\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r\right) - 1}{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r} \\ &= \frac{\sum_{r=j+1}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r}{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r}. \end{aligned}$$

Einsetzen dieses Wertes in (2.2) liefert für $j \leq i \leq k$

$$\begin{aligned} a_i &= \left(\sum_{r=j}^{i-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r\right)(a_{j+1} - 1) + 1 \\ &= \left(\sum_{r=j}^{i-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r\right)\left(\frac{\sum_{r=j+1}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r - \sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r}{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r}\right) \\ &\quad + \frac{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r}{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r} \\ &= \frac{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r - \sum_{r=j}^{i-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r}{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1}\cdot \ldots \cdot h_r} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{r=i}^{k-1} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r}{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r}.$$

Da die ${}_k f_{ij}^*$ die eindeutige Lösung von (2.1) sind, erhalten wir

$${}_k f_{ij}^* = \frac{\sum_{r=i}^{k-1} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r}{\sum_{r=j}^{k-1} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r}.$$

Nach [Chu1], S.66 gilt

$$\lim_{k\to\infty} {}_k f_{ij}^* = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{r=i}^{k-1} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r}{\sum_{r=i}^{k-1} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r + \sum_{r=j}^{i-1} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r} = f_{ij}^*$$

und damit $f_{ij}^* = 1$ genau dann, wenn $\sum_{r=i}^{\infty} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r = \infty$ ist.
Da Addition bzw. Subtraktion von endlich vielen Summanden am Konvergenzverhalten der Reihe nichts verändert, folgt die Äquivalenz zu $\sum_{r=1}^{\infty} h_{j+1} \cdot \ldots \cdot h_r = \infty$ und weiter zu $\sum_{r=1}^{\infty} g_r = \infty$.

(b) Wir führen diesen Fall auf (a) zurück und betrachten dazu die im Nullpunkt gespiegelte Irrfahrt $(\hat{S}_n)_{n\geq 0}$, definiert durch $\hat{S}_n := -S_n$, $n \geq 0$. Analog zur Irrfahrt $(S_n)_{n\geq 0}$ definieren wir für die gespiegelte Irrfahrt die Wahrscheinlichkeiten $\hat{u}_n$, $\hat{v}_n$, $\hat{h}_n$, $\hat{g}_n$ und $\hat{f}_{ij}^*$. Wie man sich leicht überlegt, gelten dann $\hat{u}_n = v_{-n}$, $\hat{v}_n = u_{-n}$, $\hat{h}_n = (h_{-n})^{-1}$, $\hat{g}_n = (g_{-n})^{-1}$ und $\hat{f}_{ij}^* = f_{-i,-j}^*$. Ist $j > i$, dann gilt nach (a)

$$\begin{aligned} f_{ij}^* = \hat{f}_{-i,-j}^* &= \frac{\sum_{n=-i}^{\infty} \hat{h}_{-j} \cdot \ldots \cdot \hat{h}_n}{\sum_{n=-j}^{\infty} \hat{h}_{-j} \cdot \ldots \cdot \hat{h}_n} \\ &= \frac{\sum_{n=-\infty}^{i} (h_j \cdot \ldots \cdot h_n)^{-1}}{\sum_{n=-\infty}^{j} (h_j \cdot \ldots \cdot h_n)^{-1}} \end{aligned}$$

und weiter $f_{ij}^* = 1$ genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (g_{-n})^{-1} = \infty$.

c) Wir unterscheiden zwei Fälle. Zunächst nehmen wir an, dass T_1 unter $P_u(\cdot \mid S_0 = 0)$ unendlichen Erwartungswert besitzt. Wir definieren $T_1^{(m)} := T_1 \wedge m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und bezeichnen den Erwartungswert einer Zufallsgröße X unter $P_u(\cdot \mid S_0 = 0)$ mit $E_{u,o}X$. Dann ist

$$E_{u,0}T_1^{(m)} = 1 + v_0(E_{\vartheta^{-1}u,0}T_1^{(m-1)} + E_{u,0}T_1^{(m-2)}),$$

wobei ϑ die Shift-Operation, definiert durch $\vartheta(..., u_{-1}, u_0, u_1, ...) := (..., u_0, u_1, u_2, ...)$, sei. Wir schätzen ab

$$E_{u,0}T_1^{(m)} \geq 1 + v_0(E_{\vartheta^{-1}u,0}T_1^{(m-1)} + E_{u,0}T_1^{(m)})$$

und erhalten, da $E_{u,0}T_1^{(m)} \leq m < \infty$ und nach Voraussetzung $u_0 \neq 0$ gelten, die Ungleichung

$$E_{u,0}T_1^{(m)} \leq \frac{1}{u_0} + \frac{v_0}{u_0}(E_{\vartheta^{-1}u,0}T_1^{(m-1)})$$

und iterativ weiter für alle $n \leq m-1$

$$E_{u,0}T_1^{(m)} = \sum_{j=-n+1}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j + h_0 \cdot \ldots \cdot h_{-n} E_{\vartheta^{-n-1}u,0}T_1^{(m-n-1)}.$$

Für $n = m-1$ folgt also

$$E_{u,0}T_1^{(m)} = \sum_{j=-m+2}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j \leq \sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j.$$

Lassen wir m gegen ∞ laufen, ergibt sich aufgrund der Satzes von der monotonen Konvergenz

$$E_{u,0}T_1 \leq \sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j.$$

Wir hatten $E_{u,0}T_1 = \infty$ vorausgesetzt, erhalten folglich auch die Divergenz der Reihe $\sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j$ und damit, dass $E_{u,0}T_1 = \sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j$ gilt.

Im zweiten Fall betrachten wir $E_{u,0}T_1 < \infty$ und zeigen zunächst, dass dann auch $\sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j < \infty$ gilt. Wir nehmen an, es gelte

$$\sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j = \infty$$

und beachten, dass aus $E_{u,0}T_1 = \frac{1}{u_0} + h_0 E_{\vartheta^{-1}u}T_1 < \infty$ die Endlichkeit von $E_{\vartheta^{-1}u}T_1$ folgt. Nun iterieren wir und erhalten

$$\begin{aligned}
E_{u,0}T_1 &= \frac{1}{u_0} + h_0 E_{\vartheta^{-1}u}T_1 \\
&= \sum_{j=-n+1}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j + h_0 \cdot \ldots \cdot h_{-n} E_{\vartheta^{-n-1}u,0}T_1 \\
&\geq \sum_{j=-n+1}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die rechte Seite der Ungleichung für $n \to \infty$ gegen ∞ konvergiert, folgt der Widerspruch $E_{u,0}T_1 = \infty$. Deshalb muß $\sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j < \infty$ gelten. So liefert uns weitere Iteration $E_{u,0}T_1 = \sum_{j=-\infty}^{1}(1+h_{j-1})h_0 \cdot \ldots \cdot h_j$. □

Nun kann auf das Konvergenzverhalten von Irrfahrten bei gegebenen barrierefreien Umgebungen geschlossen werden.

Satz 2.3 *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Folge reeller Zahlen mit $0 < u_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(a) Aus $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{-n})^{-1} = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ P_u-f.s.

(b) Aus $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{-n})^{-1} < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ P_u-f.s.

(c) Aus $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{-n})^{-1} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ folgt die Rekurrenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Insbesondere gilt $-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ P_u-f.s.

Beweis: (a) Aus den Voraussetzungen folgt mit Satz 2.2, dass $f_{ij}^* = 1$ für $i < j$ und $f_{ij}^* < 1$ für $i > j$ gilt. Wir setzen $\sigma_0 = 0$ und definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ die Stopzeit σ_n bezüglich $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$, $\mathcal{G}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $(X_i)_{i\geq 1}$ die Folge der Zuwächse der Irrfahrt sei, durch

$$\sigma_n := \inf\{k > \sigma_{n-1} : S_k = 0, S_j = -1 \text{ für ein } \sigma_{n-1} < j < k\}.$$

Demnach ist σ_1 der erste Zeitpunkt, in dem die Irrfahrt wieder in 0 ist, nachdem sie mindestens einmal in -1 war. Da $f_{-1,0}^* = 1$ gilt, ist $P_u(\sigma_1 < \infty) = f_{0,-1}^*$. Wir zeigen nun, dass

$$P_u(\sigma_n < \infty) = f_{0,-1}^*$$

auf $\{\sigma_{n-1} < \infty\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für beliebiges $A \in \mathfrak{P}(\mathbb{Z})^k \times \mathbb{Z}^\infty$, $k \geq 1$, genügt

$$P_u((X_{\sigma_n+1}, \ldots, X_{\sigma_n+k}) \in A | \mathcal{G}_{\sigma_n}) = P_u((X_1, \ldots, X_k) \in A)$$

auf $\{\sigma_n < \infty\}$ zu zeigen, wobei $\mathcal{G}_{\sigma_n} = \{B \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} : B \cap \{\sigma_n = k\} \in \mathcal{G}_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$. Dann ist nämlich

$$P_u^{(S_{\sigma_n+k})_{k\geq 0}|\mathcal{G}_{\sigma_n}} = P_u^{(S_k)_{k\geq 0}}$$

auf $\{\sigma_n < \infty\}$. Da, gegeben eine Umgebung u, $(S_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette bildet und deshalb $P^{S_{n+1}|\mathcal{G}_n} = P^{S_{n+1}|S_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}
& P_u((X_{\sigma_n+1}, \ldots, X_{\sigma_n+k}) \in A|\mathcal{G}_{\sigma_n}) \\
= & \sum_{j\in\mathbb{N}} P_u(\sigma_n = j, S_j = 0, (X_{j+1}, \ldots, X_{j+k}) \in A|\mathcal{G}_{\sigma_n}) \\
= & \sum_{j\in\mathbb{N}} P_u(\sigma_n = j|\mathcal{G}_{\sigma_n}) P_u((X_1, \ldots, X_k) \in A) \\
= & P_u((X_1, \ldots, X_k) \in A)
\end{aligned}$$

auf $\{\sigma_n < \infty\}$. Wir erhalten

$$P_u(\sigma_0 < \infty, \ldots, \sigma_{n+1} = \infty) = (f^*_{0,-1})^n(1 - f^*_{0,-1}),$$

und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_u(\sigma_0 < \infty, \ldots, \sigma_{n+1} = \infty) = 1.$$

In endlicher Zeit besucht die Irrfahrt also letztmalig -1 und springt von dort nach rechts weiter. Dieselbe Aussage läßt sich für jedes $n \in \mathbb{Z}$ zeigen, so dass $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ gelten muß.

(b) Analog zu (a).

(c) Aus den Voraussetzungen folgt $f^*_{ij} = 1$ für sowohl $i < j$ als auch $i > j$. Damit ist $f^*_{ii} = u_i f^*_{i+1,i} + v_i f^*_{i-1,i} = 1$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, also ist die Irrfahrt rekurrent. □

Um im Anschluss auch Aussagen über das Grenzverhalten von Irrfahrten in zufällig variierenden Umgebungen machen zu können, wird nachfolgendes Lemma benötigt.

Lemma 2.4 *Sei $(Y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter, nicht f.s. konstanter endlicher Zufallsgrößen und $(Z_n)_{n\geq 0}$ der zugehörige Standard-Random-Walk. Dann gilt:*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(Z_n > 0) < \infty$ *genau dann, wenn* $\lim_{n\to\infty} Z_n = -\infty$ *f.s., und beide Aussagen implizieren* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{Z_n} < \infty$ *f.s.*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(Z_n > 0) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(Z_n < 0)$ *genau dann, wenn* $-\infty = \liminf_{n\to\infty} Z_n < \limsup_{n\to\infty} Z_n = \infty$ *f.s., und beide Aussagen implizieren* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Z_n} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} e^{Z_n}$ *f.s.*

Beweis: (a) Nach [Chu2], S.244, 265, gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(Z_n > 0) < \infty$$

genau dann, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n < \infty \quad \text{f.s.}$$

Die letzte Aussage ist nach [Als1], S.165, äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = -\infty.$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt nach [Sto], dass entweder $\limsup_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\sqrt{n}} = \infty$ f.s. oder $\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ f.s. ist. Hier kann nur $\lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\sqrt{n}} = -\infty$ f.s. gelten. Es existiert also $n' \in \mathbb{N}$ mit $Z_n < -\sqrt{n}$ für alle $n > n'$. Damit gilt

$$0 \le \sum_{n=n'}^{\infty} e^{Z_n} < \sum_{n=n'}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} < \infty,$$

woraus die Behauptung folgt.

(b) Analog zu (a) gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(Z_n > 0) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(-Z_n > 0)$$

genau dann, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} Z_n = \infty \quad \text{und} \quad \limsup_{n\to\infty} -Z_n = -\liminf_{n\to\infty} Z_n = \infty \quad \text{f.s.}$$

Die letzte Behauptung ist klar, da sowohl gegen ∞ als auch gegen $-\infty$ konvergierende Teilfolgen von $(Z_n)_{n\ge 0}$ existieren. □

Jetzt können wir beweisen, dass es für das Grenzverhalten einer Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen in Abhängigkeit von der Verteilung der Umgebung drei Möglichkeiten gibt: die Irrfahrt läuft entweder gegen ∞ oder gegen $-\infty$ oder sie ist rekurrent.

Satz 2.5 *Für die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unabhängig identisch verteilter, nicht f.s. konstanter Zufallsgrößen gelte $0 \le U_n < 1$ oder $0 < U_n \le 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir definieren*

$$G_n := \begin{cases} H_1 \cdot \ldots \cdot H_n, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ H_n \cdot \ldots \cdot H_{-1}, & n < 0 \end{cases} \quad \textit{mit} \quad H_n := \frac{1-U_n}{U_n}.$$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) < \infty$ *impliziert* $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ *f.s.*

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n < 1) < \infty$ *impliziert* $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *f.s.*

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n < 1)$ *impliziert die Rekurrenz von* $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*, insbesondere gilt* $-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ *f.s.*

Beweis: (a) Wir betrachten zunächst den Fall, dass keine Barrieren existieren, also $0 < U_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt. Wir definieren $Z_n := \sum_{i=1}^{n} \log H_i$, $n \in \mathbb{N}$. Unter der Voraussetzung

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\sum_{i=1}^{n} \log H_i > 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(e^{\sum_{i=1}^{n} \log H_i} > 1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\prod_{i=1}^{n} H_i > 1) < \infty \end{aligned}$$

folgt mit Lemma 2.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{Z_n} < \infty \quad \text{f.s.}$$

Folglich ist $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ f.s. eine Nullfolge und, da die $U_i, i \in \mathbb{Z}$, identisch verteilt sind, gilt damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{G_{-n}} = \infty \quad \text{f.s.}$$

Satz 2.3 impliziert $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ P_u-f.s für P^U-f.a Umgebungen u. Mit Lemma 2.1 folgt die Behauptung.

Seien nun rechtsreflektierende Barrieren erlaubt, es gelte also $P(U_n = 1) > 0$ und $U_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\sum_{n\geq 1} P(U_n = 1) = \infty.$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt

$$P(\limsup_{n\to\infty} \{U_n = 1\}) = 1.$$

Es gibt also f.s. unendlich viele nach rechts reflektierende Barrieren. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad \text{f.s.}$$

Es bleibt
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) < \infty$$
zu zeigen. Beachten wir, dass die H_i, $i \in \mathbb{Z}$, positiv, stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, erhalten wir nachfolgende Ungleichungen:
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (P(H_1 > 0))^n \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} (P(U_1 < 1))^n < \infty.
\end{aligned}$$

Die Aussagen (b) und (c) lassen sich weitestgehend analog zu (a) beweisen. Nur zu (b) ist anzumerken, dass, vorausgesetzt Barrieren treten nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit auf, die Voraussetzung
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(Z_n < 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(-Z_n > 0) < \infty$$
die fast sichere Konvergenz der Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-Z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^{n} \log H_i^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{G_n}$$
impliziert.

Und im anderen Fall, dass mit jeweils positiver Wahrscheinlichkeit nach links reflektierende Barrieren auftreten, kann man völlig analog zu (a) die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n < 1)$ und die der Irrfahrt gegen $-\infty$ beweisen. □

Satz 2.6 *Existiert, gegeben die Voraussetzungen von Satz 2.5, der Erwartungswert $E \log H_1$, dann gilt*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) < \infty \Leftrightarrow E \log H_1 < 0.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n < 1) < \infty \Leftrightarrow E \log H_1 > 0.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n < 1) \Leftrightarrow E \log H_1 = 0.$

Beweis: (a) Es existiere $E \log H_1$. Dieser ist nach [Als1], S.166, genau dann negativ, wenn Z_n f.s. gegen $-\infty$ konvergiert. Nach Lemma 2.4 ist dies äquivalent zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(Z_n > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) < \infty.$$

Die Aussagen (b) und (c) können analog zu (a) bewiesen werden, bei (c) unter Berücksichtigung, dass U_1 nicht f.s. konstant ist und daher

$$P(\log H_1 = 0) = P(H_1 = 1) = P(U_1 = \frac{1}{2}) < 1$$

gilt. □

Bemerkung 2.7 Der Fall, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n < 1) < \infty$$

gleichzeitig erfüllt sind, kann nicht eintreten, da nach [Chu2], S.261, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n = 1)$ immer konvergiert. Es gibt also nur die drei oben betrachteten Fälle.

2.3 Die Konvergenzgeschwindigkeit

Zur Untersuchung des Grenzverhaltens der Folge $(\frac{S_n}{n})_{n \geq 1}$ können weder das starke Gesetz der großen Zahlen noch der Birkhoffsche Ergodensatz angewandt werden, da die Zuwächse $X_n := S_n - S_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, weder unabhängig und identisch verteilt noch stationär sind, wie der anschließende Satz zeigt.

Satz 2.8 *Die Irrfahrt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat genau dann stationäre Zuwächse $X_n, n \in \mathbb{N}$, wenn die Umgebung U f.s. aus Konstanten besteht, wenn also $EU_0^2 = (EU_0)^2$ gilt.*

Beweis: "⇒": Aus der Stationarität der Zuwächse folgt insbesondere

$$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_2 = 1, X_3 = 1). \tag{2.3}$$

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die σ-Algebra $\mathcal{F}_n$ durch $\mathcal{F}_n := \sigma(U, X_1, ..., X_n)$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist dann

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1 \mid \mathcal{F}_n) &= E(\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=1\}} P(X_{n+2} = 1 \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \\ &= E(\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=1\}} U_{S_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= E(\mathbb{1}_{\{X_{n+1}=1\}} U_{S_n+1} \mid \mathcal{F}_n) \\ &= P(X_{n+1} = 1 \mid \mathcal{F}_n) U_{S_n+1} \quad [U_{S_n+1}\ \mathcal{F}_n\text{-messbar}] \\ &= U_{S_n} U_{S_n+1} \qquad f.s. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mit (2.4) gelten weiter, da die U_i unabhängig und identisch verteilt sind,

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1, X_2 = 1) &= E(P(X_1 = 1, X_2 = 1 \mid U)) \\ &= E(U_0 U_1) \\ &= (EU_0)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1, X_3 = 1) &= \sum_{j \in \{1,-1\}} E(\mathbb{1}_{\{X_1=j\}} P(X_2 = 1, X_3 = 1 \mid \mathcal{F}_1)) \\ &= \sum_{j \in \{1,-1\}} E(\mathbb{1}_{\{X_1=j\}} U_j U_{j+1}) \\ &= \sum_{j \in \{1,-1\}} E(P(X_1 = j \mid U) U_j U_{j+1}) \\ &= E((U_0 U_1 U_2 + (1 - U_0) U_{-1} U_0)) \\ &= E(U_0 U_1 U_2) + E((U_0 - U_0^2) U_{-1}) \\ &= (EU_0)^3 + EU_0(EU_0 - EU_0^2). \end{aligned}$$

Mit (2.3) erhalten wir die Gleichung

$$(EU_0)^2 = (EU_0)^3 + EU_0(EU_0 - EU_0^2)$$

und damit

$$0 = (EU_0)^3 - EU_0 EU_0^2 = ((EU_0)^2 - EU_0^2) EU_0. \tag{2.5}$$

(2.5) ist erfüllt, wenn $U_0 = 0$ f.s. oder wenn $(EU_0)^2 = EU_0^2$, also wenn U_0 f.s. konstant ist.

"$\Leftarrow$": Sind die U_n f.s. konstant, hat $(S_n)_{n\geq 0}$ unabhängig und identisch verteilte Zuwächse. Damit ist die Folge der Zuwächse insbesondere stationär. $\square$

Auch wenn die Folge der Zuwächse $(X_n)_{n\geq 1}$ selbst nicht stationär ist, so können dennoch mit Hilfe des Birkhoffschen Ergodensatzes Aussagen über das Grenzverhalten von $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 1}$ gemacht werden. Wir definieren dazu die Ersteintrittszeit in n für $n \geq 1$ durch

$$T_n = \inf\{k > 0 : S_k = n\}, \qquad (\inf \emptyset := \infty)$$

und setzen $T_0 = 0$. Wir definieren weiter die Dauer vom ersten Besuch in $n-1$ bis zum ersten Besuch in n durch

$$\tau_n := T_n - T_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

T_{-n} und τ_{-n} definieren wir analog.
Zum anschließenden Beweis der Ergodizität der Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.9 *Seien $m, k, j \in \mathbb{N}$ mit $m > k$, und ferner $C_1, \ldots, C_k, D_1, \ldots, D_j \subseteq \mathbb{N}$ mit $D_s \subseteq (0, m-k]$ für $s = 1, \ldots, j$. Setzen wir $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als stationär voraus, gilt*

$$\begin{aligned} &P(\tau_r \in C_r, 1 \leq r \leq k; \tau_{m+s} \in D_s, 1 \leq s \leq j) \\ &= P(\tau_r \in C_r, 1 \leq r \leq k) P(\tau_s \in D_s, 1 \leq s \leq j). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Beweis: Wir definieren $A := A_1 \cap A_2$ mit

$$A_1 := \{\tau_r \in C_r, 1 \leq r \leq k\} \quad \text{und} \quad A_2 := \{\tau_{m+s} \in D_s, 1 \leq s \leq j\}.$$

A_1 hängt nur von den Komponenten $S_0, ..., S_{T_k}$ der Irrfahrt ab und A_2 von den Komponeneten $S_{T_m}, ..., S_{T_{m+j}}$. Da $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unter allen P_u, $u \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$, eine Markov-Kette ist und $m > k$ gilt, sind A_1 und A_2 unter allen P_u stochastisch unabhängig, also

$$P_u(A) = P_u(A_1) P_u(A_2).$$

Wir zeigen als nächstes, dass aufgrund der speziellen Bedingung an die D_s sogar $P_U(A_1)$ und $P_U(A_2)$ stochastisch unabhängig sind. $P_U(A_1)$ ist messbar bzgl. der von

$(U_n)_{n=-\infty}^{k-1}$ erzeugten σ-Algebra. Ist $\tau_{m+s} \in D_s, 1 \le s \le j$, so ist $\tau_{m+s} \le m-k$, und da $S_{n+1} = S_n \pm 1$ gilt, die Irrfahrt also pro Zeiteinheit nur einen Schritt vor oder zurück gehen kann, ist

$$S_n \ge m - \frac{m-k}{2} = \frac{m+k}{2}$$

auf dem Weg von m nach $m+j$. Also fällt die Irrfahrt insbesondere nicht weiter als auf k zurück. Darum ist $P_U(A_2)$ messbar bzgl. $\sigma((U_n)_{n=k}^{\infty})$. Weil die U_n stochastisch unabhängig sind, sind die σ-Algebren $\sigma((U_n)_{n=-\infty}^{k-1})$ und $\sigma((U_n)_{n=k}^{\infty})$ unabhängig und deshalb auch $P_U(A_1)$ und $P_U(A_2)$. Daraus folgt nun unter Berücksichtigung der Stationarität der Folge $(\tau_n)_{n\ge1}$

$$\begin{aligned}
& P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s, 1 \le s \le j) \\
= & \int P_u(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s, 1 \le s \le j) P^U(du) \\
= & \int P_u(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k) P_u(\tau_{m+s} \in D_s, 1 \le s \le j) P^U(du) \\
= & \int P_u(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k) P^U(du) \int P_u(\tau_{m+s} \in D_s, 1 \le s \le j) P^U(du) \\
= & \int P_u(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k) P^U(du) \int P_u(\tau_s \in D_s, 1 \le s \le j) P^U(du) \\
= & P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k) P(\tau_s \in D_s, 1 \le s \le j).
\end{aligned}$$

□

Satz 2.10 *Sei* $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ *f.s. Dann sind die* τ_n *f.s. endlich, und die Folge* $(\tau_n)_{n\ge1}$ *ist stationär und ergodisch.*

Beweis: Ist $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s., dann ist klar, dass τ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ f.s. endlich ist. Zum Beweis der Stationärität von $(\tau_n)_{n\ge1}$ überlegen wir, dass es eine Funktion f gibt, so dass für alle $k \ge 1$

$$(\tau_n)_{n\ge k} = f((U_{T_{k-1}+n})_{n\in\mathbb{Z}}, (S_{T_{k-1}+n} - S_{T_{k-1}})_{n\ge0})$$

gilt, da die τ_n für $n \ge k$ nur von der Umgebungsfolge U und der Irrfahrt ab deren Ersteintritt in $k-1$ abhängen. Kann gezeigt werden, dass

$$((U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\ge0}) \stackrel{d}{=} ((U_{T_k+n})_{n\in\mathbb{Z}}, (S_{T_k+n} - S_{T_k})_{n\ge0})$$

für alle $k \geq 1$ gilt, so folgt die Stationarität der Folge $(\tau_n)_{n\geq 1}$. Sei ϑ die Shift-Operation, definiert durch $\vartheta(..., u_{-1}, u_0, u_1, ...) := (..., u_0, u_1, u_2, ...)$. Für alle $j \geq 1$, $k \geq 1$ und $B, C \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ gilt dann, da die Irrfahrt, gegeben eine feste Umgebung u, stochastisch unabhängige Zuwächse besitzt,

$$\begin{aligned}
& P(T_k = j, \vartheta^{T_k} U \in B, (S_{T_k+n} - S_{T_k})_{n\geq 0} \in C) \\
= \;& P(T_k = j, \vartheta^j U \in B, (S_{j+n} - S_j)_{n\geq 0} \in C) \\
= \;& \int_B P(T_k = j, (S_{j+n} - S_j)_{n\geq 0} \in C \mid \vartheta^j U = u) P^{\vartheta^j U}(du) \\
= \;& \int_B P(T_k = j \mid \vartheta^j U = u) P((S_{j+n} - S_j)_{n\geq 0} \in C \mid \vartheta^j U = u) P^{\vartheta^j U}(du) \\
= \;& \int_B P_{\vartheta^{-j} u}(T_k = j) P_u((S_n)_{n\geq 0} \in C) P^U(du) \qquad [U_i, i \in \mathbb{Z}, \text{ u.i.v.}] \\
= \;& E[P(T_k = j \mid \vartheta^{-j} U) \mathbb{1}_B(U) P((S_n)_{n\geq 0} \in C \mid U)] \\
= \;& E(E[\mathbb{1}_{\{T_k = j\}} \mathbb{1}_B(U) P((S_n)_{n\geq 0} \in C \mid U) \mid \vartheta^{-1} U]) \quad [\mathbb{1}_B(U), P(S \in C \mid U) \ \sigma(U)\text{-messb.}] \\
= \;& E[\mathbb{1}_{\{T_k = j\}} \mathbb{1}_B(U) P((S_n)_{n\geq 0} \in C \mid U)] \\
= \;& E[\mathbb{1}_{\{T_k = j\}} E(\mathbb{1}_B(U) \mathbb{1}_C((S_n)_{n\geq 0}) \mid U)] \qquad [\mathbb{1}_B(U) \ \sigma(U)\text{-messb.}].
\end{aligned}$$

Summation über j liefert

$$\begin{aligned}
& P(\vartheta^{T_k} U \in B, (S_{T_k+n} - S_{T_k})_{n\geq 0} \in C) \\
= \;& E(E[\mathbb{1}_B(U) \mathbb{1}_C((S_n)_{n\geq 0}) \mid U]) \\
= \;& P(U \in B, (S_n)_{n\geq 0} \in C).
\end{aligned}$$

Damit ist die Stationarität von $(\tau_n)_{n\geq 1}$ gezeigt.
Im Nachfolgenden wird die Ergodizität der Folge $\tau := (\tau_n)_{n\geq 1}$ nicht direkt gezeigt, sondern die stärkere Aussage, dass τ mischend ist, d.h. dass

$$\lim_{m\to\infty} P(\tau \in A, \tau \in \vartheta^{-m}(B)) = \lim_{m\to\infty} P(\tau \in A, (\tau_{m+1}, ..) \in B) = P(\tau \in A) P(\tau \in B)$$

für alle $A, B \in \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gilt, wobei ϑ wieder die Shift-Operation bezeichnet. Nach [Dur], S.310, genügt es, die obige Gleichung für die Mengen eines durchschnittsstabilen Erzeugers von $\bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ zu zeigen. Wir definieren also

$$\mathcal{E} := \{(C_1 \times \ldots \times C_l \times \mathbb{N} \times \ldots) \in \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}(\mathbb{N}) : l \in \mathbb{N}\}$$

und betrachten $(C_1 \times \ldots \times C_k \times \mathbb{N} \times \ldots), (D_1 \times \ldots \times D_j \times \mathbb{N} \times \ldots) \in \mathcal{E}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir N derart, dass $P(\cup_{1 \le s \le j}\{\tau_s \in D_s \backslash (0,N)\}) < \varepsilon$ gilt. Wir können unter Berücksichtigung der Stationarität der Folge τ abschätzen:

$$\begin{aligned}
& P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) \\
\le\ & P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s, 1 \le s \le j) \\
\le\ & P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) \\
& + P(\tau_{m+s} \in D_s \backslash (0,N), 1 \le s \le j) \\
\le\ & P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) \\
& + P(\tau_s \in D_s \backslash (0,N), 1 \le s \le j) \\
\le\ & P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) \\
& + P(\cup_{1 \le s \le j}\{\tau_s \in D_s \backslash (0,N)\}) \\
\le\ & P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nun gilt weiter unter Verwendung obiger Abschätzung und (2.6)

$$\begin{aligned}
& P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k) P(\tau_s \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) \\
=\ & \lim_{m \to \infty} P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) \\
\le\ & \lim_{m \to \infty} P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s, 1 \le s \le j) \\
\le\ & \lim_{m \to \infty} P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k; \tau_{m+s} \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) + \varepsilon \\
=\ & \lim_{m \to \infty} P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k) P(\tau_s \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) + \varepsilon \\
=\ & P(\tau_r \in C_r, 1 \le r \le k) P(\tau_s \in D_s \cap (0,N], 1 \le s \le j) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Laufen nun N gegen ∞ und ε gegen 0, so folgt die Behauptung. □

Wie eben gezeigt wurde, ist unter der Voraussetzung $\limsup_{n \to \infty} S_n = \infty$ f.s. die Folge $(\tau_n)_{n \ge 1}$ ergodisch und somit eine wichtige Voraussetzung des Birkhoffschen Ergodensatzes erfüllt. Um den Ergodensatz anschließend anwenden zu können, müssen wir noch untersuchen, wann τ_1 integrierbar ist.

Lemma 2.11 *Aus* $EH_1 < 1$ *folgt* $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ *f.s.*

Beweis: Da $G_n \ge 0$ P-f.s., können wir wie folgt abschätzen:

$$P(G_n > 1) \le EG_n = EH_1 \cdot \ldots \cdot H_n = EH_1 \cdot \ldots \cdot EH_n = (EH_0)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist nun $EH_0 < 1$, dann folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(G_n > 1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (EH_0)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} (EH_0)^n < \infty.$$

Nach Satz 2.5 konvergiert S_n daher f.s. gegen ∞. □

Lemma 2.12

$$E\tau_1 = \begin{cases} \frac{1+EH_0}{1-EH_0}, & EH_0 < 1 \\ \infty, & EH_0 \geq 1 \end{cases}.$$

Beweis: Sei zunächst $\limsup_{n\to\infty} S_n < \infty$ f.s. Dann ist $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ f.s., und nach der Bemerkung 2.11 gilt damit $EH_0 \geq 1$. Außerdem folgt aus $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ f.s., dass $P(\tau_1 = \infty) > 0$ ist. Daher ist $E\tau_1 = \infty$.
Wir betrachten jetzt den Fall $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. Dann ist $f_{01}^* = 1$ f.s. Nach Satz 2.2 ist daher $E(\tau_1 \mid U) = \sum_{j=-\infty}^{1} (1 + H_{j-1}) H_j \cdot \ldots \cdot H_0$.
Integration liefert

$$\begin{aligned} E\tau_1 &= E(E(\tau_1 \mid U)) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{1} E((1 + H_{j-1}) H_j \cdot \ldots \cdot H_0) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{1} (1 + EH_0)(EH_0)^{1-j} \\ &= (1 + EH_0) \sum_{j=-\infty}^{1} (EH_0)^{1-j} \\ &= (1 + EH_0) \sum_{j=0}^{\infty} (EH_0)^j. \end{aligned}$$

Aus $EH_0 < 1$ folgt somit $E\tau_1 = \frac{1+EH_0}{1-EH_0}$. Ist hingegen $EH_0 \geq 1$, gilt $E\tau_1 = \infty$. □

Satz 2.13 *(a) Aus $EH_0 < 1$ folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{1 + EH_0}{1 - EH_0} \quad \textit{f.s.}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1 - EH_0}{1 + EH_0} \quad \textit{f.s.}$$

(b) Aus $E(H_0^{-1}) < 1$ *folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{-n}}{n} = \frac{1+E(H_0^{-1})}{1-E(H_0^{-1})} \quad \textit{f.s.}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\frac{1-E(H_0^{-1})}{1+E(H_0^{-1})} \quad \textit{f.s.}$$

(c) Aus $(EH_0)^{-1} \leq 1 \leq E(H_0^{-1})$ *folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{T_{-n}}{n} \quad \textit{f.s.}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad \textit{f.s.}$$

Beweis: (a) Nach Lemma 2.11 gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. und nach Satz 2.10 ist daher $(\tau_n)_{n\geq 1}$ stationär und ergodisch. Lemma 2.12 liefert $E\tau_1 = \frac{1+EH_0}{1-EH_0}$. Da $E|\tau_1| = E\tau_1 < \infty$, impliziert der Birkhoffsche Ergodensatz (vgl. [Brei], S.118)

$$\frac{T_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau_i}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E\tau_1 = \frac{1+EH_0}{1-EH_0} \qquad \text{f.s.}$$

Zum Beweis der Behauptung, dass die Konvergenzgeschwindigkeit der Irrfahrt f.s. $\frac{1-EH_0}{1+EH_0}$ beträgt, also $\frac{S_n}{n}$ f.s. gegen $\frac{1-EH_0}{1+EH_0}$ konvergiert, bezeichnen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ den größten Wert, der nach n Schritten erreicht wird, mit k_n, also

$$k_n := \max\{S_j : 0 \leq j \leq n\}.$$

Nach der Definition von k_n ist dann

$$T_{k_n} \leq n < T_{k_n+1}. \tag{2.7}$$

Aus $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. folgt offenkundig $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ f.s. Ferner gilt

$$k_n \leq S_n + (n - T_{k_n}) \leq S_n + (T_{k_n+1} - T_{k_n}). \tag{2.8}$$

Hat die Irrfahrt nämlich möglicherweise zu einem früheren Zeitpunkt als n schon zum ersten Mal k_n erreicht, kann sie von da an maximal $(n - T_{k_n})$ Positionen nach links gesprungen sein. Wir erhalten mit (2.8)

$$\frac{k_n}{n} - \left(\frac{T_{k_n+1} - T_{k_n}}{n}\right) \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{k_n}{n}. \tag{2.9}$$

Da sowohl $\frac{T_{k_n}}{k_n}$ als auch $\frac{T_{k_n+1}}{k_n} = \frac{T_{k_n+1}}{k_n+1} \cdot \frac{k_n+1}{k_n}$ f.s. gegen $\frac{1+EH_0}{1-EH_0}$ konvergiert, erhalten wir mit der Ungleichung (2.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \frac{1-EH_0}{1+EH_0} \quad \text{f.s.,}$$

insbesondere folgt außerdem $\lim_{n\to\infty}(\frac{T_{k_n+1}-T_{k_n}}{n}) = 0$ f.s. Aus (2.9) können wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{T_{k_n+1} - T_{k_n}}{n} \right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} \quad \text{f.s.}$$

schließen und erhalten die Behauptung.

(b) Analoga zu den unter (a) verwendeten Sätzen können gezeigt werden. Mit ihnen folgen die hier zu beweisenden Aussagen auf gleiche Weise wie unter (a).

(c) Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s., so ist $(\tau_n)_{n\geq 0}$ stationär und ergodisch, und aus der Voraussetzung $EH_0 \geq 1$ folgt mit Lemma 2.12, dass τ_1 unendlichen Erwartungswert besitzt. $\frac{T_n}{n}$ konvergiert dann f.s. gegen ∞ ([Brei], S.116). Gilt andererseits $\limsup_{n\to\infty} S_n < \infty$ f.s., so existiert das Maximum $M := \max\{S_j : j \geq 0\}$, es ist also $T_n = \infty$ für alle $n > M$ und daher konvergiert $\frac{T_n}{n}$ f.s. gegen ∞. Durch analoge Argumentation kann $\lim_{n\to\infty} \frac{T_{-n}}{n} = \infty$ f.s. gezeigt werden.

Sei $-l_n$ definiert als der kleinste Wert, der nach n Schritten schon angenommen wurde,

$$-l_n := \min\{S_\nu : 0 \leq \nu \leq n\}.$$

Nach Definition gelten $0 \leq T_{k_n} \leq n$ und $0 \leq T_{-l_n} \leq n$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{k_n}}{k_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{k_n} = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{T_{-l_n}}{l_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{l_n} = \infty \quad \text{f.s.}$$

und daraus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{n} \quad \text{f.s.}$$

Nach Definition ist $S_n < k_n + 1$ und $-l_n - 1 < S_n$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{l_n}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \quad \text{f.s.}$$

und damit $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ f.s. □

Bemerkung 2.14 Die drei Fälle des obigen Satzes sind die einzig möglichen und schließen sich zudem gegenseitig aus. (Die beiden ersten Fälle schließen sich aus, weil aus $E(H_0^{-1}) < 1$ mit der Jensenschen Ungleichung $\frac{1}{EH_0} < 1$, also $EH_0 > 1$ folgt.)

Im nun folgendem Korollar werden den Irrfahrten in zufälligen Umgebungen Irrfahrten mit bekannten Übergangswahrscheinlichkeiten gegenübergestellt: Zu einer gegebenen Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen wird gerade die Irrfahrt betrachtet, die in jedem Punkt die Übergangswahrscheinlichkeit EU_0 besitzt, also die Standard-Irrfahrt mit $p = EU_0$.

Korollar 2.15 *Sei $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Standard-Irrfahrt mit $p = EU_0$.*

(a) Aus $EH_0 < 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq EU_0 - EV_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n}$ f.s.

(b) Aus $EH_0^{-1} < 1$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq EU_0 - EV_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n}$ f.s.

(c) Aus $(EH_0)^{-1} \leq 1 \leq E(H_0^{-1})$ und $EU_0 \neq \frac{1}{2}$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n} \neq 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ f.s.

Beweis: Die Irrfahrt $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat im Gegensatz zur zugehörigen Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen unabhängig und identisch verteilte Zuwächse. Deshalb ist das starke Gesetz der großen Zahlen anwendbar, und es folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n} = EX'_1 = EU_0 - EV_0$ f.s. Es gilt unter Anwendung der Jensenschen Ungleichung folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{1-EH_0}{1+EH_0} &= \frac{2-E(\frac{1}{U_0})}{E(\frac{1}{U_0})} \\
&\leq (2-E(\frac{1}{U_0}))EU_0 \\
&\leq 2EU_0 - \frac{EU_0}{EU_0} \\
&= EU_0 - EV_0.
\end{aligned}$$

Ist $EH_0 < 1$, folgt mit Satz 2.13

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1-EH_0}{1+EH_0} \leq EU_0 - EV_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n}.$$

Völlig analog berechnen wir

$$\begin{aligned}
-\frac{1-E(H_0^{-1})}{1+E(H_0^{-1})} &= -\frac{2-E(\frac{1}{V_0})}{E(\frac{1}{V_0})} \\
&\geq -(2-E(\frac{1}{V_0}))EV_0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq 1 - 2EV_0 \\
&= EU_0 - EV_0,
\end{aligned}
$$

und $EH_0^{-1} < 1$ impliziert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\frac{1 - EH_0^{-1}}{1 + EH_0^{-1}} \geq EU_0 - EV_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n}.$$

Betrachten wir den Fall $(EH_0)^{-1} \leq 1 \leq E(H_0^{-1})$ und $EU_0 \neq \frac{1}{2}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ f.s. nach Satz 2.13, während $\lim_{n\to\infty} \frac{S'_n}{n} = EU_0 - EV_0 = 2EU_0 - 1 \neq 0$ f.s. ist. $\square$

2.4 Die erwartete Anzahl von Besuchen

Jetzt wollen wir berechnen, wie oft die Irrfahrt startend in 0 ein $j \in \mathbb{Z}$ im Mittel besucht.

Satz 2.16 *Sei* $L : \mathfrak{P}(\mathbb{Z}) \to [0, \infty]$, $B \mapsto E\sum_{n\geq 0} \delta_{S_n}(B)$ *das Erneuerungsmaß von* $(S_n)_{n\geq 0}$ *und gelte* $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ *f.s.*

(a) Aus $EH_0 < 1$ *folgt* $L(\{j\}) = \begin{cases} \frac{1+EH_0}{1-EH_0}(EH_0)^{-j}, & j \leq -1 \\ \frac{1+EH_0}{1-EH_0} & j \geq 0 \end{cases}.$

(b) Aus $EH_0 \geq 1$ *folgt* $L(\{j\}) = \infty$ *für alle* $j \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall

$$-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \quad \text{f.s.}$$

Mit Bemerkung 2.11 folgt dann $EH_0 \geq 1$ und es gilt $L(\{j\}) = \infty$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.
Sei jetzt $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. Wie schon in vorherigen Beweisen betrachten wir auch hier zuerst die Irrfahrt bei gegebener Umgebungsfolge, um mit dem dabei erhaltenen Ergebnis die Aussage über die Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen zu beweisen. Wir definieren $p^*_{ij} := \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}_{ij}$ mit der Wahrscheinlichkeit $p^{(n)}_{ij}$, bei gegebener Umgebung u in n Schritten von i nach j zu gelangen. Es gilt

$$p^*_{ij} = E(\sum_{n\geq 0} \delta_{S_n}(\{j\}) \mid S_0 = i, U = u),$$

also ist p^*_{ij} der Wert der Menge $\{j\}$ unter dem Erneuerungsmaß von $(S_n)_{n\geq 0}$ und der Anfangsverteilung δ_i, gegeben eine feste Umgebung u. Zur Berechnung der p^*_{ij} benötigen wir die erzeugenden Funktionen, die definiert sind durch $\hat{p}_{ij}(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$ und $\hat{f}_{ij}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$ mit $s \in (-1,1)$. Nach [Als2], S.45, gilt für alle $i,j \in \mathbb{Z}$ und $s \in (-1,1)$

$$\hat{p}_{ij}(s) = \delta_{ij} + \hat{f}_{ij}(s)\hat{p}_{jj}(s).$$

Es ist $\lim_{s\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, falls $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. [Chu1], S.55), und deshalb gilt

$$p^*_{ij} = \delta_{ij} + f^*_{ij} p^*_{jj}. \tag{2.10}$$

Nun müssen wir also noch f^*_{ij} und p^*_{jj} berechnen um p^*_{ij} zu bestimmen. Aus der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. folgt mit Satz 2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g-n} = \infty$. Satz 2.2 impliziert

$$f^*_{ij} = \begin{cases} 1, & i < j \\ \dfrac{\sum_{n=i}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}{\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n} < 1, & i > j \end{cases}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f^*_{jj} &= u_j f^*_{j+1,j} + v_j f^*_{j-1,j} \\ &= \frac{u_j(\sum_{n=j+1}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n) + v_j(\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n)}{(\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n)} \\ &= \frac{v_j h_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}{(\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n)} < 1. \end{aligned}$$

Wir setzen dieses Ergebnis nun in (2.10) ein:

$$\begin{aligned} p^*_{jj} = \frac{1}{1-f^*_{jj}} &= \left(1 - \left(\frac{v_j h_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}{\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}{h_j - v_j h_j} \\ &= \frac{1}{v_j} \sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n. \end{aligned}$$

Es kann geschlossen werden, dass

$$
\begin{aligned}
p^*_{ij} = f^*_{ij} p^*_{jj} &= \begin{cases} 1 \cdot \left(\frac{1}{v_j} \sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n\right) & i < j \\ \left(\frac{\sum_{n=i}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}{\sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n}\right) \left(\frac{1}{v_j} \sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n\right) & i > j \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{1}{v_j} \sum_{n=j}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n\right) & i < j \\ \left(\frac{1}{v_j} \sum_{n=i}^{\infty} h_j \cdot \ldots \cdot h_n\right) & i > j \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Nun können wir mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz und unter Berücksichtigung, dass der Erwartungswert des bedingten Erwartungswertes einer Zufallsgröße ihr Erwartungswert ist, $L(\{j\})$ berechnen. Für $j \leq -1$ gilt

$$
\begin{aligned}
L(\{j\}) &= E\left(\frac{1}{V_j} \sum_{n=0}^{\infty} H_j \cdot \ldots \cdot H_n\right) \\
&= E\left(\frac{1 - U_j + U_j}{U_j}\right) E\left(\sum_{n=0}^{\infty} H_{j+1} \cdot \ldots \cdot H_n\right) \\
&= E\left(H_j + 1\right) E\left(\sum_{n=0}^{\infty} H_{j+1} \cdot \ldots \cdot H_n\right) \\
&= (EH_0 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} (EH_0)^{n-j} \\
&= \begin{cases} \frac{1+EH_0}{1-EH_0} (EH_0)^{-j}, & EH_0 < 1 \\ \infty, & EH_0 \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

und analog für $j \geq 0$

$$
\begin{aligned}
L(\{j\}) &= E\left(\frac{1}{V_j} \sum_{n=j}^{\infty} H_j \cdot \ldots \cdot H_n\right) \\
&= (EH_0 + 1) \sum_{n=j}^{\infty} (EH_0)^{n-j} \\
&= \begin{cases} \frac{1+EH_0}{1-EH_0}, & EH_0 < 1 \\ \infty, & EH_0 \geq 1 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 2.17 Wenn eine Umgebungsfolge die beiden Bedingungen $E \log H_0 < 0$ und $EH_0 \geq 1$ erfüllt, liegt eine ungewöhnliche Situation vor: Dann konvergiert S_n f.s. gegen ∞ und $\frac{S_n}{n}$ f.s. gegen 0, d.h. die Irrfahrt läuft mit Geschwindigkeit 0 gegen ∞. (Aus $E \log H_0 < 0$ folgt $EH_0^{-1} > 1$. Unter Anwendung der Jensenschen Ungleichung ist nämlich $\log EH_0 \leq E \log H_0 < 0$, woraus $EH_0 < 1$ folgt und damit ist $1 < \frac{1}{EH_0} \leq E\frac{1}{H_0}$.) Und außerdem ist $L(\{-1\}) = \infty$, obwohl aus $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. $P(S_n = -1 \;\text{ u.o.} \mid S_0 = 0) = 0$ folgt. Obwohl also die Wahrscheinlichkeit für unendlich viele Besuche in -1 startend in 0 null beträgt, werden unendlich viele Besuche erwartet.

3 Eine langsam konvergierende Irrfahrt

3.1 Das Modell

Wir betrachten nun ein Beispiel für eine Irrfahrt in zufällig variierenden Umgebungen, die mit Gewschwindigkeit 0 gegen ∞ konvergiert, d.h. für die Irrfahrt gelten $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ f.s. Die Umgebungsfolge $U = (U_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ bestehe dazu aus unabhängig und identisch verteilten Zufallsgrößen U_i, die mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit p den Wert $\frac{1}{1+\vartheta}$ annehmen, wobei $0 < p < 1$ und $0 < \vartheta < \infty$ gelte. Damit nehmen die H_i die Werte 0 oder ϑ an, und zwar mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ bzw. p. So erhalten wir $E\log H_0 = (1-p)\log 0 + p\log\vartheta = -\infty$. Daraus folgt zum einen $EH_0^{-1} > 1$, vgl. dazu Bemerkung 2.17, und zum anderen können wir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \quad \text{f.s.}$$

aus den Sätzen 2.5 und 2.6 schließen. Setzen wir $EH_0 = p\vartheta \geq 1$ voraus, so dass $(EH_0)^{-1} \leq 1 \leq EH_0^{-1}$ gilt, dann liefert Satz 2.13

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad \text{f.s.}$$

Da wir hier nur den Fall $EH_0 = p\vartheta \geq 1$ betrachten wollen, können wir im Nachfolgenden $\vartheta > 1$ voraussetzen, womit $\frac{1}{1+\vartheta}$, der eine mögliche Wert der U_i, zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt. Wir definieren nun rekursiv die Position der n-ten Barriere rechts von

0 dadurch, dass wir $W_0 = 0$ setzen und $W_n := \min\{k > W_{n-1} : U_k = 1\}$ definieren. Wir bemerken, dass aus der Konvergenz der Irrfahrt gegen ∞ und daraus, dass die W_n f.s. endlich sind, die fast sichere Endlichkeit der T_{W_n} folgt.

3.2 Vorbereitungen

Unser Ziel ist es Funktionen f zu finden, für die $\frac{T_n}{f(n)}$ bzw. $\frac{S_n}{f(n)}$ in Wahrscheinlichkeit gegen zu berechnende Grenzwerte konvergiert. In diesem Abschnitt bestimmen wir zunächst eine Funktion f derart, dass $\frac{T_{W_n}}{f(n)}$ in Wahrscheinlichkeit gegen einen reellen Wert konvergiert, um damit dann im nächsten die eigentlichen Aussagen zu beweisen. Unser Vorgehen wird sein als erstes die Laplace-Transformierte von $T_{W_{n+1}} - T_{W_n}$ zu bestimmen, dann für diese einen einfacheren Ausdruck gleicher Größenordnung zu finden und schließlich mit Hilfe des Stetigkeitsatzes für Laplace-Transformierte und unter Berücksichtigung der stochastischen Unabhängigkeit und identischen Verteilung der Folge $(T_{W_n} - T_{W_{n-1}})_{n\geq 2}$ den Grenzwert von $\frac{T_{W_n}}{f(n)}$ für geeignetes f zu bestimmen. Zur Bestimmung der Laplace-Transformierten der $T_{W_{n+1}} - T_{W_n}$ zeigen wir zunächst

Lemma 3.1 *Sei U eine Umgebungsfolge mit $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ f.s. Wir bezeichnen mit $\hat{\varphi}_X$ die Laplace-Transformierte (L.T.) einer Zufallsgröße X, gegeben eine feste Umgebungsfolge $u \in [0,1]^{\mathbb{Z}}$, also $\hat{\varphi}_X(t,u) := E(\exp(-tX) \mid U = u), t \geq 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}, t \geq 0$*

$$\frac{1}{\hat{\varphi}_{T_n}(t,u)} = \frac{u_n e^{-t}}{\hat{\varphi}_{T_{n+1}}(t,u)} + \frac{v_n e^{-t}}{\hat{\varphi}_{T_{n-1}}(t,u)}.$$

Beweis: Gegeben eine feste Umgebung u, hat die Irrfahrt stochastisch unabhängige Zuwächse $X_n := S_n - S_{n-1}$, und damit sind auch die τ_i, $i \geq 1$ stochastisch unabhängig, die, da $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ vorausgesetzt ist, f.s. endlich sind. Es ist

$$P_u(\tau_{i+1} = k) = \begin{cases} u_i, & k = 1 \\ v_i P_u(\tau_{i+1} + \tau_i = k-1), & k > 1 \end{cases}.$$

Daher gilt für alle $t \geq 0$

$$\hat{\varphi}_{\tau_{i+1}}(t,u) \quad = \quad E(\exp(-t\tau_{i+1}) \mid U = u)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m\geq 1} e^{-tm} P_u(\tau_{i+1} = m) \\
&= u_i e^{-t} + \sum_{m\geq 2} v_i e^{-tm} P_u(\tau_{i+1} + \tau_i = m-1) \\
&= u_i e^{-t} + v_i e^{-t} \sum_{m\geq 1} e^{-tm} P_u(\tau_{i+1} + \tau_i = m) \\
&= u_i e^{-t} + v_i e^{-t} \hat{\varphi}_{\tau_{i+1}+\tau_i}(t,u) \\
&= u_i e^{-t} + v_i e^{-t} \hat{\varphi}_{\tau_{i+1}}(t,u)\hat{\varphi}_{\tau_i}(t,u).
\end{aligned}$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der τ_i ist

$$\hat{\varphi}_{T_n}(t,u) = \hat{\varphi}_{\sum_{i=1}^n T_i - T_{i-1}}(t,u) = \hat{\varphi}_{\sum_{i=1}^n \tau_i}(t,u) = \hat{\varphi}_{\tau_1}(t,u)\cdot \ldots \cdot \hat{\varphi}_{\tau_n}(t,u).$$

Daher gilt

$$\hat{\varphi}_{\tau_n}(t,u) = \frac{\hat{\varphi}_{T_n}(t,u)}{\hat{\varphi}_{T_{n-1}}(t,u)}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\hat{\varphi}_{T_{n+1}}(t,u)}{\hat{\varphi}_{T_n}(t,u)} = u_n e^{-t} + v_n e^{-t} \frac{\hat{\varphi}_{T_{n+1}}(t,u)}{\hat{\varphi}_{T_{n-1}}(t,u)},$$

also die Behauptung. □

Im Nachfolgenden bezeichnen wir die L.T. einer Zufallsgröße X mit φ_X.

Lemma 3.2 *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$*

$$\varphi_{T_{W_{n+1}} - T_{W_n}}(t) = \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c(t)(p\beta(t))^j}{a(t) + b(t)(\vartheta\beta^2(t))^j},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &:= \frac{e^t}{2}(\vartheta + 1 + [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}), \\
\lambda_2(t) &:= \frac{e^t}{2}(\vartheta + 1 - [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(t) &:= \lambda_1(t) - e^t, & c(t) &:= \lambda_1(t) - \lambda_2(t), \\
b(t) &:= e^t - \lambda_2(t), & \beta(t) &:= \vartheta^{-1}\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

Beweis: Gegeben eine Umgebung u, sei $k \in \mathbb{N}$ mit $W_n(u,\omega) = w_n \leq k \leq w_{n+1} =$

$W_{n+1}(u,\omega)$, $n \geq 1$. Da in unserem Beispiel $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ gilt, folgt mit Lemma 3.1

$$\frac{1}{\hat{\varphi}_{T_k}(t,u)}\hat{\varphi}_{T_{W_n}}(t,u) = \frac{u_k e^{-t}}{\hat{\varphi}_{T_{k+1}}(t,u)}\hat{\varphi}_{T_{W_n}}(t,u) + \frac{v_k e^{-t}}{\hat{\varphi}_{T_{k-1}}(t,u)}\hat{\varphi}_{T_{W_n}}(t,u).$$

Wegen

$$\hat{\varphi}_{T_k - T_{W_n}}(t,u) = \hat{\varphi}_{\sum_{i=W_n+1}^{k}\tau_i}(t,u) = \prod_{i=W_n+1}^{k}\hat{\varphi}_{\tau_i}(t,u) = \frac{\hat{\varphi}_{T_k}(t,u)}{\hat{\varphi}_{T_{W_n}}(t,u)},$$

erhalten wir für $w_n < k < w_{n+1}$

$$\frac{1}{\hat{\varphi}_{T_k - T_{W_n}}(t,u)} = \left(\frac{1}{1+\vartheta}\right)\frac{e^{-t}}{\hat{\varphi}_{T_{k+1}-T_{W_n}}(t,u)} + \left(\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\right)\frac{e^{-t}}{\hat{\varphi}_{T_{k-1}-T_{W_n}}(t,u)}. \quad (3.1)$$

Im Folgenden wollen wir beweisen, dass

$$\hat{\varphi}_{T_k - T_{W_n}}(t,u) = \frac{c(t)\beta(t)^{k-W_n}}{a(t) + b(t)(\vartheta\beta^2(t))^{k-W_n}} =: \chi_k(t,u) \quad (3.2)$$

gilt. Zunächst überprüfen wir, dass $\chi_k(t,u)$ eine Lösung der Gleichung (3.1) ist. Bei den Rechnungen hierzu lassen wir, außer bei der Exponentialfunktion, die Argumente der Funktionen für eine bessere Übersichtlichkeit weg.

$$\frac{a + b(\vartheta\beta^2)^{k-W_n}}{c\beta^{k-W_n}} = \frac{1}{\vartheta+1}\frac{e^{-t}(a + b(\vartheta\beta^2)^{k+1-W_n})}{c\beta^{k+1-W_n}} + \frac{\vartheta}{\vartheta+1}\frac{e^{-t}(a + b(\vartheta\beta^2)^{k-1-W_n})}{c\beta^{k-1-W_n}}$$

ist äquivalent zu

$$(\vartheta+1)(a + b(\vartheta\beta^2)^{k-W_n}) = e^{-t}\beta^{-1}(a + b(\vartheta\beta^2)^{k+1-W_n}) + e^{-t}\vartheta\beta(a + b(\vartheta\beta^2)^{k-1-W_n}).$$

Weiter formen wir zu

$$a(\vartheta + 1 - e^{-t}\beta^{-1} - e^{-t}\vartheta\beta) = -b(\vartheta\beta^2)^{k-W_n}(\vartheta + 1 - e^{-t}\beta^{-1} - e^{-t}\vartheta\beta)$$

um und erhalten die Gleichwertigkeit zu

$$\vartheta + 1 - e^{-t}\beta^{-1} - e^{-t}\vartheta\beta = 0.$$

Durch Einsetzen erhalten wir die Gültigkeit der letzten Gleichung. Wir definieren $M := (\vartheta + 1 + [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2})$ und $K := [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}$. Es ist dann

$$(\vartheta + 1 - e^{-t}\vartheta\beta - e^{-t}\beta^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \vartheta + 1 - \frac{e^{-t}\vartheta}{\frac{e^t}{2}M} - e^{-t}\left(\frac{e^t}{2}(\vartheta + 1 + [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2})\right) \\
&= \frac{1}{M}\left((\vartheta+1)(\vartheta+1+K) - 2\vartheta e^{-2t} - \frac{1}{2}(\vartheta+1+K)^2\right) \\
&= \frac{1}{M}\left((\vartheta+1)^2 + (\vartheta+1)K - 2\vartheta e^{-2t} - \frac{1}{2}(\vartheta+1)^2 - (\vartheta+1)K - \frac{1}{2}[(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nun überlegen wir, dass offensichtlich $\hat{\varphi}_{T_{W_n}-T_{W_n}}(t,u) = 1$ für alle $t \geq 0$ gilt. Da W_n eine nach rechts reflektierende Barriere ist, ist $T_{W_n+1} - T_{W_n} = 1$ und damit $\hat{\varphi}_{T_{W_n+1}-T_{W_n}}(t,u) = e^{-t}$ für alle $t \geq 0$. Wir rechnen nach: Zum einen ist

$$\begin{aligned}
\chi_{W_n}(t,u) &= \frac{c(t)}{a(t)+b(t)} \\
&= \frac{\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}{\lambda_1(t) - e^{-t} + e^{-t} - \lambda_2(t)} = 1,
\end{aligned}$$

und da $\lambda_1(t) \cdot \lambda_2(t) = \frac{e^{2t}}{4}\left((\vartheta+1)^2 - (\vartheta+1)^2 + 4\vartheta e^{-2t}\right) = \vartheta$ gilt, erhalten wir zum anderen

$$\begin{aligned}
\chi_{W_n+1}(t,u) &= \frac{c\beta}{a + b(\vartheta\beta^2)} \\
&= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\lambda_1}{\vartheta}}{(\lambda_1 - e^t) + (e^t - \lambda_2)(\frac{\lambda_1^2}{\vartheta})} \\
&= \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2}{\vartheta\lambda_1 - \vartheta e^t + \lambda_1^2 e^t - \lambda_1^2\lambda_2} \\
&= \frac{\lambda_1^2 - \vartheta}{e^t(\lambda_1^2 - \vartheta) + \lambda_1(\vartheta - \lambda_1\lambda_2)} = e^{-t}.
\end{aligned}$$

Sei nun $(\xi_{W_n}(t,u), ..., \xi_{w_{n+1}}(t,u))$ eine weitere Lösung von (3.1), die $\xi_{W_n}(t,u) = 1$ und $\xi_{W_n+1}(t,u) = e^{-t}$ für alle $t \geq 0$ erfüllt. Dann können wir wie folgt schließen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\chi_{W_n+1}(t,u)} - \frac{1}{\xi_{W_n+1}(t,u)} \\
= \; &\frac{1}{\vartheta+1}\left(\frac{e^{-t}}{\chi_{W_n+2}(t,u)} - \frac{e^{-t}}{\xi_{W_n+2}(t,u)}\right) + \frac{\vartheta}{\vartheta+1}\left(\frac{e^{-t}}{\chi_{W_n}(t,u)} - \frac{e^{-t}}{\xi_{W_n}(t,u)}\right),
\end{aligned}$$

also

$$0 = \frac{1}{\vartheta+1}\left(\frac{e^{-t}}{\chi_{W_n+2}(t,u)} - \frac{e^{-t}}{\xi_{W_n+2}(t,u)}\right),$$

und damit muss $\chi_{W_n+2}(t,u) = \xi_{W_n+2}(t,u)$ gelten. Iterativ erhalten wir die Eindeutigkeit der Lösung.
Unter Berücksichtigung, dass die U_i unabhängig und identisch verteilt sind, gilt

$$\begin{aligned}
& \varphi_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}(t) \\
= \; & E(E(\exp(-t(T_{W_{n+1}} - T_{W_n})) \mid W_{n+1} - W_n)) \\
= \; & \sum_{j=1}^{\infty} E(\exp(-t(T_{W_{n+1}} - T_{W_n})) \mid W_{n+1} - W_n = j) P(W_{n+1} - W_n = j) \\
= \; & \sum_{j=1}^{\infty} E(\exp(-t(T_{W_n+j} - T_{W_n})) \mid W_{n+1} - W_n = j) \prod_{i=1}^{j-1} P\left(U_i = \frac{1}{1+\vartheta}\right) P(U_j = 1) \\
= \; & \sum_{j=1}^{\infty} E(\exp(-t(T_{W_n+j} - T_{W_n})) \mid W_{n+1} - W_n = j) p^{j-1}(1-p) \\
= \; & \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} p^j E(\exp(-t(T_{W_n+j} - T_{W_n})) \mid W_{n+1} - W_n = j).
\end{aligned}$$

Gegeben eine Umgebung u, hängt $\hat{\varphi}_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}$ von der Umgebungsfolge nur über den Abstand zwischen den Barrieren ab, da die Irrfahrt, nachdem sie die Barriere W_n erreicht hat, von da ab nicht mehr weiter als auf W_n zurückfallen kann und die Umgebung außerdem in allen Punkten zwischen den Barrieren denselben Wert $\frac{1}{1+\vartheta}$ annimmt. Daher folgt mit (3.2)

$$\varphi_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}(t) = \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c(t)(p\beta(t))^j}{a(t) + b(t)(\vartheta\beta^2(t))^j}.$$

□

Nun rechnen wir nach, dass ein einfacherer Ausdruck von der gleichen Größenordnung ist wie $\varphi_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}$.

Lemma 3.3 *Wir definieren*

$$\psi(t) = \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^j}{1 + \nu t \vartheta^j},$$

$t \geq 0$, *mit* $\nu = \frac{2\vartheta}{(\vartheta-1)^2}$. *Dann gilt für alle* $n \geq 1$

$$\varphi_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}(t) - \psi(t) = O(t), \quad t \searrow 0.$$

Beweis: Zunächst machen wir Aussagen über das Grenzverhalten der Funktionen a, b, c und β für $t \searrow 0$.

$$\begin{aligned}
a(t) &= \frac{e^t}{2}(\vartheta + 1 + [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}) - e^t \\
&= \frac{e^t}{2}(\vartheta - 1 + [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}) \\
&= \frac{e^t}{2}(\vartheta - 1 + [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta(1 - 2t + O(t^2))]^{1/2}) \\
&= \frac{e^t}{2}(\vartheta - 1 + [(\vartheta-1)^2 - 8\vartheta t + O(t^2))]^{1/2}) \\
&= \frac{e^t}{2}\left(\vartheta - 1 + \left[(\vartheta-1)^2\left(1 - \frac{4\vartheta t}{(\vartheta-1)^2}\right)^2\right]^{1/2}\right) \\
&= \frac{1+O(t)}{2}\left(\vartheta - 1 + (\vartheta-1)\left(1 - \frac{4\vartheta t}{(\vartheta-1)^2}\right)\right) \\
&= \vartheta - 1 + O(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(t) &= e^t - \frac{e^t}{2}(\vartheta + 1 - [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}) \\
&= \frac{e^t}{2}(1 - \vartheta + [(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}) \\
&= \frac{e^t}{2}\left(1 - \vartheta + (\vartheta-1)\left(1 - \frac{4\vartheta t}{(\vartheta-1)^2}\right)\right) \\
&= \frac{e^t}{2} \cdot \frac{4\vartheta t}{(\vartheta-1)} = \frac{2\vartheta t}{\vartheta - 1}(1 + O(t)) = \frac{2\vartheta t}{\vartheta-1} + O(t^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(t) &= \frac{e^t}{2}2([(\vartheta+1)^2 - 4\vartheta e^{-2t}]^{1/2}) \\
&= (1+O(t))(\vartheta-1)\left(1 - \frac{4\vartheta t}{(\vartheta-1)^2}\right) \\
&= \vartheta - 1 + O(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \frac{1+O(t)}{2\vartheta}\left(\vartheta + 1 + (\vartheta-1)\left(1 - \frac{4\vartheta t}{(\vartheta-1)^2}\right)\right) \\
&= 1 + O(t)
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$A_1(t) \;:=\; \varphi_{T_{W_{n+1}} - T_{W_n}}(t) - \frac{1-p}{p}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\vartheta-1)p^j}{a(t) + b(t)(\vartheta\beta^2)^j}$$

$$\begin{aligned}
A_2(t) &:= \frac{1-p}{p}\sum_{j=1}^{\infty}(\vartheta-1)p^j\left(\frac{1}{a(t)+b(t)(\vartheta\beta^2)^j}-\frac{1}{a(t)+b(t)\vartheta^j}\right)\\
A_3(t) &:= \frac{1-p}{p}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\vartheta-1)p^j}{a(t)+b(t)\vartheta^j}-\psi(t).
\end{aligned}$$

Also ist $\varphi_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}-\psi = A_1+A_2+A_3$. Daher genügt es zu zeigen, dass $A_j(t) = O(t)$, $t \searrow 0$, für $j = 1, 2, 3$ gilt.

$$\begin{aligned}
|A_1(t)| &= \left|\frac{1-p}{p}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c(t)(p\beta(t))^j-(\vartheta-1)p^j}{a(t)+b(t)(\vartheta\beta(t)^2)^j}\right|\\
&\leq \frac{1-p}{pa(t)}\sum_{j=1}^{\infty}p^j(c(t)\beta(t)^j-(\vartheta-1))\\
&= \frac{1-p}{pa(t)}\left(c(t)\sum_{j=0}^{\infty}(p\beta(t))^j-c(t)-(\vartheta-1)\sum_{j=0}^{\infty}p^j+(\vartheta-1)\right)\\
&= \frac{1-p}{pa(t)}\left(\frac{c(t)}{1-p\beta(t)}-c(t)-\frac{\vartheta-1}{1-p}+(\vartheta-1)\right)\\
&= \frac{1-p}{p(\vartheta-1+O(t))}\left(\frac{\vartheta-1+O(t)}{1-p(1+O(t))}-\frac{\vartheta-1}{1-p}+O(t)\right)=O(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_2(t)| &= \left|\frac{1-p}{p}\sum_{j=1}^{\infty}(\vartheta-1)p^j\left(\frac{1}{a(t)+b(t)(\vartheta\beta(t)^2)^j}-\frac{1}{a(t)+b(t)\vartheta^j}\right)\right|\\
&= \frac{(1-p)(\vartheta-1)}{p}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p^j}{a(t)+b(t)(\vartheta\beta(t)^2)^j}-\frac{(p\beta(t)^2)^j}{a(t)\beta(t)^{2j}+b(t)(\vartheta\beta(t)^2)^j}\right|\\
&\leq \frac{(1-p)(\vartheta-1)}{p}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{p^j-(p\beta(t)^2)^j}{a(t)+b(t)(\vartheta\beta(t)^2)^j}\right|\\
&\leq \frac{(1-p)(\vartheta-1)}{pa(t)}\sum_{j=1}^{\infty}((p\beta(t)^2)^j-p^j)\\
&= \frac{(1-p)(\vartheta-1)}{pa(t)}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(p\beta(t)^2)^j-\sum_{j=0}^{\infty}p^j\right)\\
&= \frac{(1-p)(\vartheta-1)}{pa(t)}\left(\frac{1}{1-p\beta(t)^2}-\frac{1}{1-p}\right)\\
&= \frac{(1-p)(\vartheta-1)}{p(\vartheta-1+O(t))}\left(\frac{1}{1-p(1+O(t))^2}-\frac{1}{1-p}\right)=O(t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|A_3(t)| &= \left| \frac{1-p}{p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\vartheta-1)p^j}{a(t)+b(t)\vartheta^j} - \frac{p^j}{1+\nu t\vartheta^j} \right) \right| \\
&= \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{p^j((\vartheta-1)+(\vartheta-1)\nu t\vartheta^j - a(t) - b(t)\vartheta^j)}{(a(t)+b(t)\vartheta^j)(1+\nu t\vartheta^j)} \right| \\
&\leq (a(t)-(\vartheta-1)) \left| \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^j}{(a(t)+b(t)\vartheta^j)(1+\nu t\vartheta^j)} \right| \\
&\quad + \frac{|b(t)-\nu(\vartheta-1)t|}{t} \left| \frac{(1-p)t}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^j}{(a(t)+b(t)\vartheta^j)(1+\nu t\vartheta^j)} \right| \\
&\leq (a(t)-(\vartheta-1))M + \frac{|b(t)-\nu(\vartheta-1)t|}{t} M' \\
&= (\vartheta-1+O(t)-\vartheta+1)M + \frac{\left| \frac{2\vartheta}{\vartheta-1} t + O(t^2) - \frac{2\vartheta}{(\vartheta-1)^2}(\vartheta-1)t \right|}{t} M' \\
&= O(t)M + \frac{O(t^2)}{t} M' = O(t),
\end{aligned}
$$

da für $t > 0$, t klein, M und M' aus $[0, \infty)$ existieren mit

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^j}{(a(t)+b(t)\vartheta^j)(1+\nu t\vartheta^j)} \right| &\leq \frac{1-p}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^j}{(a(t)+b(t))(1+\nu t)} \\
&\leq \frac{1-p}{p(a(t)+b(t))(1+\nu t)} \frac{p}{1-p} \\
&\leq M
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{(1-p)t}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^j}{(a(t)+b(t)\vartheta^j)(1+\nu t\vartheta^j)} \right| &\leq \frac{(1-p)t}{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^j}{a(t)\nu t\vartheta^j} \\
&\leq \frac{1-p}{p(a(t)\nu)} \sum_{j=1}^{\infty} p^j \\
&= \frac{1-p}{p(a(t)\nu)} \cdot \frac{p}{1-p} \\
&\leq M'.
\end{aligned}
$$

□

Unter Anwendung von Lemma 3.3 beweisen wir

Lemma 3.4 *(a) Aus $p\vartheta = 1$ folgt für alle $t > 0, n \geq 2$*

$$\lim_{y\to\infty} y\left(1 - \varphi_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}\left(\frac{t}{y\log y}\right)\right) = \frac{2\vartheta t}{(\vartheta-1)\log\vartheta}.$$

(b) Aus $p\vartheta > 1$ folgt für alle $t > 0$

$$\lim_{y\to\infty}\left(y\left(1 - \varphi_{T_{W_{n+1}}-T_{W_n}}\left(\frac{t}{y^\varrho}\right)\right) - Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j+\lfloor\lambda(y)\rfloor-\lambda(y)}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\lambda(y)\rfloor-\lambda(y)}}\right) = 0$$

mit $\nu := \frac{2\vartheta}{(\vartheta-1)^2}$, $K := \frac{\nu(1-p)}{p}$, $\lambda(y) := \log_{1/p} y$ und $\varrho := \log_{1/p}\vartheta > 1$.

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass $\lim_{y\to\infty}\frac{t}{y\log y} = 0$ und $\lim_{y\to\infty}\frac{t}{y^\varrho} = 0$ gelten, so dass es deshalb genügt, die Aussagen mit φ durch ψ ersetzt zu zeigen. Sei $\sigma := \sigma(x) := \log_\vartheta x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\vartheta^\sigma = x$ und somit

$$\begin{aligned}
1 - \psi\left(\frac{t}{x}\right) &= \frac{1-p}{p}\left(\frac{p}{1-p} - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{p^j}{1+\nu\frac{t}{x}\vartheta^j}\right)\\
&= \frac{1-p}{p}\left(\sum_{j=1}^{\infty}p^j - \sum_{j=1}^{\infty}\frac{p^j}{1+\nu\frac{t}{x}\vartheta^j}\right)\\
&= \frac{1-p}{p}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p^j + p^j\nu\frac{t}{x}\vartheta^j - p^j}{1+\nu\frac{t}{x}\vartheta^j}\\
&= Kt\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\vartheta^{-\sigma}(p\vartheta)^j}{1+\nu t\vartheta^{j-\sigma}}\\
&= Ktp^\sigma\sum_{j=1-\lfloor\sigma\rfloor}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

(a) Setzen wir $p\vartheta = 1$ voraus, ist $p^\sigma = (\frac{1}{\vartheta})^{\log_\vartheta x} = \frac{1}{x}$. Zunächst bemerken wir außerdem

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{1+\nu t\vartheta^j} \leq \frac{1}{\nu t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\vartheta^j} = \frac{1}{\nu t}\frac{\vartheta}{\vartheta-1} < \infty$$

und

$$\sum_{j=1-\lfloor\sigma\rfloor}^{0}\frac{\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}} \leq \sum_{j=0}^{\lfloor\sigma\rfloor-1}\nu t\vartheta^{-j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma} \leq \nu t\sum_{j=0}^{\lfloor\sigma\rfloor-1}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^j < \nu t\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^j < \infty.$$

So erhalten wir mit (3.3) für $x \to \infty$

$$\begin{aligned}
1-\psi\left(\frac{t}{x}\right) &= K\frac{t}{x}\left(\sum_{j=1-\lfloor\sigma\rfloor}^{0}\frac{1}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}\right)\\
&= K\frac{t}{x}\left(\sum_{j=1-\lfloor\sigma\rfloor}^{0}\frac{1}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}+O(1)\right)\\
&= K\frac{t}{x}\left(\lfloor\sigma\rfloor-\sum_{j=1-\lfloor\sigma\rfloor}^{0}\frac{\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}+O(1)\right)\\
&= K\frac{t}{x}\left(\lfloor\sigma\rfloor+O(1)\right).
\end{aligned}$$

Nun lassen wir x gegen ∞ laufen und erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log x}\left(1-\psi\left(\frac{t}{x}\right)\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{Kt}{\log x}(\lfloor\log_\vartheta x\rfloor+O(1))\\
&= \frac{Kt}{\log\vartheta}\\
&= \frac{1-p}{p}\cdot\frac{2\vartheta}{(\vartheta-1)^2}\cdot\frac{t}{\log\vartheta}\\
&= \frac{2\vartheta t}{(\vartheta-1)\log\vartheta}.
\end{aligned}$$

Für x setzen wir $y\log y$ ein,

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y\log y}{\log y+\log\log y}\left(1-\psi\left(\frac{t}{y\log y}\right)\right)=\frac{2\vartheta t}{(\vartheta-1)\log\vartheta},$$

und es folgt die Behauptung, da $\lim_{y\to\infty}\frac{\log y}{\log y+\log\log y}=1$ gilt.

(b) Setzen wir $p\vartheta>1$ voraus, dann ist $p^\sigma=\exp(\log_\vartheta(x)\cdot\log p)=x^{\log_\vartheta p}=x^{(-\log_{1/p}\vartheta)^{-1}}=x^{-1/\varrho}$. Wir erhalten damit

$$x^{1/\varrho}\left(1-\psi\left(\frac{t}{x}\right)\right)=x^{1/\varrho}Ktx^{-1/\varrho}\sum_{j=1-\lfloor\sigma\rfloor}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}$$

und deshalb für $x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{1/\varrho}\left(1-\psi\left(\frac{t}{x}\right)\right)-Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} -Kt \sum_{j=-\infty}^{-\lfloor\sigma\rfloor} \frac{(p\vartheta)^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\sigma\rfloor-\sigma}} = 0,$$

da $\lim_{x\to\infty}\lfloor\sigma(x)\rfloor = \lim_{x\to\infty}\lfloor\log_\vartheta x\rfloor = \infty$. Für x setzen wir nun y^ϱ ein und es folgt die Behauptung, weil

$$\sigma(x) = \sigma(y^\varrho) = \log_\vartheta(y^{\log_{1/p}\vartheta}) = \log_{1/p}(\vartheta)\log_\vartheta y = \log_{1/p} y = \lambda(y)$$

ist. □

Mit dem soeben bewiesenen Lemma können wir Funktionen f so bestimmen, dass $\frac{T_{W_n}}{f(n)}$ in Wahrscheinlichkeit gegen eine Konstante bzw. $\frac{T_{W_{n_k}}}{f(n_k)}$ für spezielle Teilfolgen $(n_k)_{k\geq 1}$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße konvergiert. Diese Resultate werden in der anschließenden Argumentation von entscheidender Bedeutung sein.

Lemma 3.5 *(a) Aus $p\vartheta = 1$ folgt $\frac{T_{W_n}}{2n\log_\vartheta n} \xrightarrow{P} \frac{\vartheta}{\vartheta-1}$.*

(b) Ist $p\vartheta > 1$ und $(n_k)_{k\geq 1}$ eine Folge natürlicher Zahlen, die gegen ∞ konvergiert mit $\lim_{k\to\infty}\log_{1/p} n_k - \lfloor\log_{1/p} n_k\rfloor = \varepsilon$, dann gilt $\frac{T_{W_{n_k}}}{n_k^\varrho} \xrightarrow{d} Y$, wobei Y eine Zufallsgröße mit L.T.

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(-Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu t\vartheta^{j-\varepsilon}}\right), \tag{3.4}$$

$t \geq 0$, ist, mit $\nu := \frac{2\vartheta}{(\vartheta-1)^2}$, $K := \frac{\nu(1-p)}{p}$ und $\varrho := \log_{1/p}\vartheta > 1$.

Beweis: Man überlegt sich leicht, dass $(T_{W_n} - T_{W_{n-1}})_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsgrößen ist, die stochastisch unabhängig von T_{W_1} sind. Für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to (0,\infty)$ mit $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\varphi_{T_{W_n}}\left(\frac{t}{f(n)}\right) &= \lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{T_{W_n}}{f(n)}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{\sum_{j=1}^n T_{W_j} - T_{W_{j-1}}}{f(n)}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(E\left(\exp\left(-t\frac{T_{W_2}-T_{W_1}}{f(n)}\right)\right)\right)^{n-1} E\left(\exp\left(-t\frac{T_{W_1}}{f(n)}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(E\left(\exp\left(-t\frac{T_{W_2}-T_{W_1}}{f(n)}\right)\right)\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{T_{W_1}}{f(n)}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\varphi_{T_{W_2}-T_{W_1}}\left(\frac{t}{f(n)}\right)\right)^n.$$

(a) Aus Lemma 3.4 folgt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\varphi_{T_{W_n}}\left(\frac{t}{n\log n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\varphi_{T_{W_2}-T_{W_1}}\left(\frac{t}{n\log n}\right)\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n(1-\varphi_{T_{W_2}-T_{W_1}}(\frac{t}{n\log n})}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\left(\frac{2\vartheta t}{(\vartheta-1)\log\vartheta}+o(1)\right)\right)^n \\
&= \exp\left(\frac{-2\vartheta t}{(\vartheta-1)\log\vartheta}\right).
\end{aligned}$$

Der Stetigkeitssatz für L.T. ([Als1], S.233) impliziert

$$\frac{T_{W_n}}{n\log n} \xrightarrow{d} \frac{2\vartheta}{(\vartheta-1)\log\vartheta}$$

und, da der Grenzwert konstant ist, sogar die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit. Daraus folgt

$$\frac{T_{W_n}}{2n\log_\vartheta n} = \frac{T_{W_n}\log\vartheta}{2n\log n} \xrightarrow{P} \frac{\vartheta}{\vartheta-1}.$$

(b) Für alle $t > 0$ gilt nach Lemma 3.4

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\varphi_{T_{W_{n_k}}}\left(\frac{t}{n_k^\varrho}\right) &= \lim_{k\to\infty}\left(\varphi_{T_{W_2}-T_{W_1}}\left(\frac{t}{n_k^\varrho}\right)\right)^{n_k} \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{n_k\left(1-\varphi_{T_{W_2}-T_{W_1}}\left(\frac{t}{n_k^\varrho}\right)\right)}{n_k}\right)^{n_k} \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{n_k}\left(Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j+\lfloor\lambda(n_k)\rfloor-\lambda(n_k)}}{1+\nu t\vartheta^{j+\lfloor\lambda(n_k)\rfloor-\lambda(n_k)}}+o(1)\right)\right)^{n_k} \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{n_k}\left(Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu t\vartheta^{j-\varepsilon}}+o(1)\right)\right)^{n_k} \\
&= \exp\left(-Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu t\vartheta^{j-\varepsilon}}\right) =: \varphi_0(t)
\end{aligned}$$

mit $\lambda(n_k) := \log_{1/p} n_k$. Da

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{W_{n_k}/n_k^\varrho}(0) = 1 = \lim_{t\searrow 0}\varphi_0(t),$$

konvergiert die Verteilung von $\frac{T_{W_{n_k}}}{n_k^{\varrho}}$ schwach gegen die Verteilung einer Zufallsgröße Y, die die L.T. $\varphi_Y(t) = \exp\left(-Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu t\vartheta^{j-\varepsilon}}\right)$ besitzt. □

Wir beenden unsere Vorbereitungen mit

Bemerkung 3.6 Sei $(Y_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, die die Verteilungen

$$P^{Y_j} = \exp\left(-\frac{Kp^{j-\varepsilon}}{\nu}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu^{-1}Kp^{j-\varepsilon})^n}{n!}P_j^{*(n)}$$

besitzen, wobei P_j die Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\kappa_j)$, $\kappa_j := \frac{1}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}$, und $P_j^{*(n)}$ als n-fache Faltung von P_j die Erlang-Verteilung $\Gamma(n,\kappa_j)$ bezeichne. Y_j ist zusammengesetzt Poisson-verteilt und hat nach [Fel], S.427, da die L.T. der $\mathrm{Exp}(\kappa_j)$-Verteilung durch $\varphi_j(t) = \frac{\kappa_j}{t+\kappa_j}$ gegeben ist, die L.T.

$$\begin{aligned}
\varphi_{Y_j}(t) &= \exp\left(-\frac{Kp^{j-\varepsilon}}{\nu} + \frac{Kp^{j-\varepsilon}}{\nu}\cdot\frac{\kappa_j}{t+\kappa_j}\right)\\
&= \exp\left(-K(p\vartheta)^{j-\varepsilon}\left(\frac{1}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}} - \frac{1}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\cdot\frac{(\nu\vartheta^{j-\varepsilon})^{-1}}{t+(\nu\vartheta^{j-\varepsilon})^{-1}}\right)\right)\\
&= \exp\left(-K(p\vartheta)^{j-\varepsilon}\left(\frac{1}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}} - \frac{1}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\cdot\frac{1}{1+\nu t\vartheta^{j-\varepsilon}}\right)\right)\\
&= \exp\left(-K(p\vartheta)^{j-\varepsilon}\cdot\frac{t}{1+\nu t\vartheta^{j-\varepsilon}}\right).
\end{aligned}$$

Weiter gilt nach Feller

$$\varphi_{Y_j}(t) = \exp\left(-\int_0^{\infty}(1-e^{-tx})\left(\frac{Kp^{j-\varepsilon}}{\nu}\frac{1}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\exp\left(-\frac{x}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\right)\right)dx\right),$$

also hat das Lévy-Maß von Y_j die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{K}{\nu^2}\left(\frac{p}{\vartheta}\right)^{j-\varepsilon}\exp\left(-\frac{x}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\right).$$

Da die Y_j stochastisch unabhängig sind, erhalten wir

$$\varphi_{\sum_{j=-\infty}^{\infty}Y_j}(t) = \exp\left(-Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu t\vartheta^{j-\varepsilon}}\right),$$

also (3.4) als L.T. von $\sum_{j=-\infty}^{\infty}Y_j$. Der Satz von der monotonen Konvergenz impliziert, dass das Lévy-Maß von $\sum_{j=-\infty}^{\infty}Y_j$, bezeichnet mit $\hat{P}$, die Dichte

$$f(x) = \frac{K}{\nu^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\frac{p}{\vartheta}\right)^{j-\varepsilon}\exp\left(-\frac{x}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\right)$$

besitzt. Es ist nun für $t > 0$

$$\begin{aligned}
\hat{P}((t,\infty)) &= \int_{(t,\infty)} f(x)\lambda(dx) \\
&= \int_t^\infty \frac{K}{\nu^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{\vartheta}\right)^{j-\varepsilon} \exp\left(-\frac{x}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\right) dx \\
&= 0 - \sum_{j=-\infty}^{\infty} -\frac{K}{\nu} p^{j-\varepsilon} \exp\left(-\frac{t}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\right) \\
&= \frac{K}{\nu} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p^{j-\varepsilon} \exp\left(-\frac{t}{\nu\vartheta^{j-\varepsilon}}\right).
\end{aligned}$$

Damit folgt $\hat{P}((0,\infty)) = \lim_{t\searrow 0} \hat{P}((t,\infty)) = \infty$ und nach [Kes], S.11, hat daher die Verteilung von $\sum_{j=-\infty}^{\infty} Y_j$ keine Atome. Da $\sum_{j=-\infty}^{\infty} Y_j$ f.s. nur positive Werte annimmt, folgt, dass ihre Verteilung stetig ist und nur Werte in $(0,\infty)$ besitzt.

3.3 Die Konvergenzgeschwindigkeit

Zur Bestimmung von Funktionen f, so dass $\frac{T_n}{f(n)}$ in Wahrscheinlichkeit gegen eine Konstante konvergiert, benötigen wir die nachfolgenden Abschätzungen, um mit Hilfe von Lemma 3.5 argumentieren zu können.

Lemma 3.7 *Seien $(W_x)_{x\in[0,\infty)}$, $(T_x)_{x\in[0,\infty)}$ nicht fallende Familien von positiven Zufallsgrößen mit $\frac{W_x}{x} \xrightarrow{P} \frac{1}{\gamma}$, $0 < \gamma < \infty$. Dann gilt für jedes $0 < \delta < \gamma$ und jede Folge reeller Zahlen $(y_k)_{k\geq 1}$ mit $\lim_{k\to\infty} y_k = \infty$*

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \mathscr{L}\left(\frac{T_{W_{y_k(\gamma+\delta)}}}{f(y_k)}\right) &\leq \liminf_{k\to\infty} \mathscr{L}\left(\frac{T_{y_k}}{f(y_k)}\right) &(3.5)\\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \mathscr{L}\left(\frac{T_{y_k}}{f(y_k)}\right) \leq \limsup_{k\to\infty} \mathscr{L}\left(\frac{T_{W_{y_k(\gamma-\delta)}}}{f(y_k)}\right), &(3.6)
\end{aligned}$$

wobei $\mathscr{L}(X)$ die L.T. von X bezeichne und $f > 0$ gelte.

Beweis: Wir definieren $x := x_k := (\gamma+\delta)y_k$ und damit $I := I_{x,\delta} := \left(\frac{x}{\gamma+\delta}, \frac{x}{\gamma-\delta}\right)$. Wir bemerken, dass aus $W_x \in I$, also wenn $W_x > \frac{x}{\gamma+\delta}$ gilt, $T_{W_x} \geq T_{x/\gamma+\delta} = T_{y_k}$ folgt. Damit zeigen wir unter Beachtung, dass L.T. durch 1 beschränkt sind,

$$\mathscr{L}\left(f(y_k)^{-1} T_{W_x}\right)(t) = E\left(E\left(\exp\left(-tf(y_k)^{-1} T_{W_x}\right) \middle| W_x\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_I E\left(\exp\left(-tf\left(y_k\right)^{-1} T_{W_x} \middle| W_x = y_k\right)\right) P^{W_x}(dy_k) \\
&\quad + \int_{I^c} E\left(\exp\left(-tf\left(y_k\right)^{-1} T_{W_x} \middle| W_x = y_k\right)\right) P^{W_x}(dy_k) \\
&\leq \int_I E\left(\exp\left(-tf\left(y_k\right)^{-1} T_{y_k} \middle| W_x = y_k\right)\right) P^{W_x}(dy_k) + P^{W_x}(I^c) \\
&\leq \int E\left(\exp\left(-tf\left(y_k\right)^{-1} T_{y_k} \middle| W_x = y_k\right)\right) P^{W_x}(dy_k) + P^{W_x}(I^c) \\
&= \mathscr{L}\left(f\left(y_k\right)^{-1} T_{y_k}\right)(t) + P^{W_x}(I^c).
\end{aligned}$$

Weil nach Voraussetzung $\frac{W_x}{x}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{\gamma}$ konvergiert, ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} P(W_x \in I^c) &= \lim_{x\to\infty} P\left(W_x \leq \frac{x}{\gamma+\delta} \vee W_x \geq \frac{x}{\gamma-\delta}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} P\left(\left|\frac{x}{W_x} - \gamma\right| > \delta\right) = 0,
\end{aligned}$$

womit die Richtigkeit von (3.5) folgt. Die Ungleichung (3.6) kann auf gleiche Weise bewiesen werden. □

Unter Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen erhalten wir

Satz 3.8 *(a) Aus $p\vartheta = 1$ folgt $\frac{T_n}{2n\log_\vartheta n} \xrightarrow{P} 1$.*

(b) Ist $p\vartheta > 1$ und $(n_k)_{k\geq 1}$ eine Folge natürlicher Zahlen, die gegen ∞ konvergiert und für die $\lim_{k\to\infty} \log_{1/p} n_k - \lfloor \log_{1/p} n_k \rfloor = \varepsilon$ gilt, dann gilt $\frac{T_{n_k}}{n_k^\varrho} \xrightarrow{d} Z$, wobei $\varphi_Z(t) = \exp(-Lt\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^{j-\eta}}{1+\mu t\vartheta^{j-\eta}})$ mit $\mu := \frac{(1-p)^\varrho 2\vartheta}{(\vartheta-1)^2}$, $L := \frac{\mu(1-p)}{p}$, $\eta := \varepsilon + \log_{1/p}(1-p) - \lfloor \log_{1/p}(1-p) \rfloor$ und $\varrho := \log_{1/p} \vartheta > 1$.

Beweis: Sowohl $\frac{\lfloor x \rfloor}{W_{\lfloor x \rfloor}}$ als auch $\frac{\sum_{j=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{1}_{\{U_j=1\}}}{\lfloor x \rfloor}$ geben den Anteil der Barrieren in der Umgebungsfolge an. Das starke Gesetz der großen Zahlen impliziert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{W_{\lfloor x \rfloor}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{W_{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{\sum_{j=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbb{1}_{\{U_j=1\}}} = \frac{1}{P(U_j = 1)} = \frac{1}{1-p} =: \frac{1}{\gamma} \qquad \text{f.s.}$$

(a) Für $0 < \delta < \gamma$ und $t \geq 0$ folgt mit Lemma 3.5 und dem Stetigkeitssatz für L.T.

$$\mathscr{L}\left(\frac{T_{W_{\lfloor n(\gamma\pm\delta)\rfloor}}}{2n\log_\vartheta n}\right)(t) = \mathscr{L}\left(\frac{T_{W_{\lfloor n(\gamma\pm\delta)\rfloor}}}{2n(\gamma\pm\delta)\log_\vartheta(n(\gamma\pm\delta))} \cdot \frac{(\gamma\pm\delta)\log_\vartheta(n(\gamma\pm\delta))}{\log_\vartheta n}\right)(t)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \exp\left(-\frac{t\vartheta(\gamma\pm\delta)}{\vartheta-1}\right),$$

da $\frac{\log_\vartheta(n(\gamma\pm\delta))}{\log_\vartheta n} \to 1$ für n gegen ∞. Damit können wir mit Hilfe von Lemma 3.7 abschätzen:

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{t\vartheta(\gamma+\delta)}{\vartheta-1}\right) &= \liminf_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{T_{W_{\lfloor n(\gamma+\delta)\rfloor}}}{2n\log_\vartheta n}\right)\right)\\
&\le \liminf_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{T_n}{2n\log_\vartheta n}\right)\right)\\
&\le \limsup_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{T_n}{2n\log_\vartheta n}\right)\right)\\
&\le \limsup_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{T_{W_{\lfloor n(\gamma-\delta)\rfloor}}}{2n\log_\vartheta n}\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{t\vartheta(\gamma-\delta)}{\vartheta-1}\right).
\end{aligned}$$

Lassen wir δ gegen 0 laufen, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left(-t\frac{T_n}{2n\log_\vartheta n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{t\vartheta\gamma}{\vartheta-1}\right).$$

Wieder folgt mit dem Stetigkeitssatz für L.T.

$$\frac{T_n}{2n\log_\vartheta n} \xrightarrow{d} \frac{\vartheta\gamma}{\vartheta-1} = \frac{\vartheta}{\vartheta-1}(1-\frac{1}{\vartheta}) = 1.$$

Da der Grenzwert konstant ist, folgt die Behauptung.

(b) Analog zu (a) folgt für $0<\delta<\gamma$ und $t\ge 0$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(\frac{T_{W_{\lfloor n_k(\gamma\pm\delta)\rfloor}}}{n_k^\varrho}\right)(t) &= \mathscr{L}\left(\frac{T_{W_{\lfloor n_k(\gamma\pm\delta)\rfloor}}}{(n_k(\gamma\pm\delta))^\varrho}\right)(t(\gamma\pm\delta)^\varrho)\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-Kt(\gamma\pm\delta)^\varrho\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j-\hat\eta}}{1+\nu t(\gamma\pm\delta)^\varrho\vartheta^{j-\hat\eta}}\right)
\end{aligned}$$

mit $\hat\eta := \varepsilon + \log_{1/p}(\gamma\pm\delta) - \lfloor\log_{1/p}(\gamma\pm\delta)\rfloor$, da

$$\begin{aligned}
&\log_{1/p}\lfloor n_k(\gamma\pm\delta)\rfloor - \lfloor\log_{1/p}\lfloor n_k(\gamma\pm\delta)\rfloor\rfloor\\
=\ &\log_{1/p}\frac{\lfloor n_k(\gamma\pm\delta)\rfloor}{n_k(\gamma\pm\delta)} + \log_{1/p} n_k(\gamma\pm\delta) - \lfloor\log_{1/p}\lfloor n_k(\gamma\pm\delta)\rfloor\rfloor\\
\equiv\ &\log_{1/p} n_k - \lfloor\log_{1/p} n_k\rfloor + \log_{1/p}(\gamma\pm\delta) - \lfloor\log_{1/p}(\gamma\pm\delta)\rfloor
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \log_{1/p} \frac{\lfloor n_k(\gamma \pm \delta) \rfloor}{n_k(\gamma \pm \delta)} \mod 1 \\
\to \quad & \varepsilon + \log_{1/p}(\gamma \pm \delta) - \lfloor \log_{1/p}(\gamma \pm \delta) \rfloor \mod 1.
\end{aligned}
$$

Ferner gilt analog zu (a)

$$
\begin{aligned}
& \exp\left(-Kt(\gamma+\delta)^{\varrho} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^{j-\hat{\eta}}}{1+\nu t(\gamma+\delta)^{\varrho}\vartheta^{j-\hat{\eta}}} \right) \\
\leq \quad & \liminf_{k\to\infty} \mathscr{L}\left(\frac{T_{n_k}}{n_k^{\varrho}} \right)(t) \\
\leq \quad & \limsup_{k\to\infty} \mathscr{L}\left(\frac{T_{n_k}}{n_k^{\varrho}} \right)(t) \\
= \quad & \exp\left(-Kt(\gamma-\delta)^{\varrho} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^{j-\hat{\eta}}}{1+\nu t(\gamma-\delta)^{\varrho}\vartheta^{j-\hat{\eta}}} \right).
\end{aligned}
$$

Damit folgt, dass $\frac{T_{n_k}}{n_k^{\varrho}}$ für $\delta \searrow 0$ in Verteilung gegen die Zufallsgröße Z konvergiert, da $\hat{\eta} = \varepsilon + \log_{1/p}(\gamma \pm \delta) - \lfloor \log_{1/p}(\gamma \pm \delta) \rfloor$ für $\delta \searrow 0$ gegen $\eta = \varepsilon + \log_{1/p}(1-p) - \lfloor \log_{1/p}(1-p) \rfloor$ konvergiert. □

Korollar 3.9 *Ist $p\vartheta > 1$, dann konvergiert $\frac{\log T_n}{\log n}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\varrho = \log_{1/p} \vartheta > 1$.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass zu jeder wachsenden Folge $(n_k)_{k\geq 1}$ natürlicher Zahlen eine Teilfolge $(m_k)_{k\geq 1}$ existiert mit $\frac{\log T_{m_k}}{\log m_k} \xrightarrow{\mathrm{P}} \log_{1/p} \vartheta$. Definieren wir nämlich $a_n = P\left(|\frac{\log T_n}{\log n} - \varrho| > \varepsilon \right)$ zu gegebenem $\varepsilon > 0$ beliebig und existiert zu jeder Teilfolge $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ von $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Teilfolge $(a_{m_k})_{k\geq 1}$, die gegen 0 konvergiert, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen 0 und damit $\frac{\log T_n}{\log n}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\log_{1/p} \vartheta$. Wir betrachten daher nun eine Teilfolge einer Teilfolge der natürlicher Zahlen, bezeichnet mit $(m_k)_{k\geq 1}$, für die $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$ und $\lim_{k\to\infty} \log_{1/p} m_k - \lfloor \log_{1/p} m_k \rfloor = \varepsilon$ gelten. Satz 3.8 impliziert die Konvergenz in Verteilung von $\frac{T_{m_k}}{m_k^{\varrho}}$ gegen Z, wobei Z wie oben die Zufallsgröße mit der L.T. $\varphi_Z(t) = \exp(-Lt(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^{j-\eta}}{1+\mu t\vartheta^{j-\eta}}))$ bezeichne. Mit Bemerkung 3.6 folgt $P^Z((0,\infty)) = 1$. Für $\delta > 0$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
1 \quad = \quad & F_Z(\infty) - F_Z(0) \\
= \quad & \lim_{k\to\infty} F_{T_{m_k}/m_k^{\varrho}}(m_k^{\delta}) - F_{T_{m_k}/m_k^{\varrho}}\left(\frac{1}{m_k^{\delta}} \right)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} P\left(\frac{1}{m_k^\delta} < \frac{T_{m_k}}{m_k^\varrho} < m_k^\delta\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} P((\varrho-\delta)\log m_k < \log T_{m_k} < (\varrho+\delta)\log m_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} P\left(\left|\frac{\log T_{m_k}}{\log m_k} - \varrho\right| < \delta\right).
\end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass $\lim_{k\to\infty} P\left(\left|\frac{\log T_{m_k}}{\log m_k} - \varrho\right| \geq \delta\right) = 0$ gilt, also dass $\frac{\log T_{m_k}}{\log m_k}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\varrho = \log_{1/p}\vartheta$ konvergiert. □

Abermals maßgeblich unter Verwendung von Lemma 3.5 können wir nun beweisen:

Satz 3.10 *(a) Aus* $p\vartheta = 1$ *folgt* $\frac{S_n}{n/\log_\vartheta n} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}$.

(b) Ist $p\vartheta > 1$ *und* $(n_k)_{k\geq 1}$ *eine Folge natürlicher Zahlen mit* $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ *und* $\lim_{k\to\infty} \log_\vartheta n_k - \lfloor \log_\vartheta n_k \rfloor = \varepsilon$, *dann gilt für alle* $x > 0$

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{S_{n_k}}{n_k^{1/\varrho}} < x\right) = 1 - F_{\zeta(x)}(((1-p)x)^{-\varrho}),$$

wobei $\zeta(x) := \varepsilon + \log_{1/p}((1-p)x)$ *und* $F_{\zeta(x)}$ *die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße* $Y_{\zeta(x)}$ *mit L.T.* $\varphi_{Y_{\zeta(x)}}(t) = \exp(-Kt\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(p\vartheta)^{j-\zeta(x)}}{1+\nu t\vartheta^{j-\zeta(x)}})$.

Beweis: Sei $N(n)$ die Anzahl der Barrieren, die nach n Zeiteinheiten überschritten wurden, also das Niveau, auf dem sich die Irrfahrt nach n Zeiteinheiten befindet. $N(n)$ ist also die eindeutig bestimmte natürliche Zahl mit $W_{N(n)} \leq S_n < W_{N(n)+1}$. Aus der Definition folgt

$$P(N(n) \geq y) = P(T_{W_{\lceil y\rceil}} \leq n). \tag{3.7}$$

Wir bemerken außerdem, dass

$$1 \leq \frac{S_n}{W_{N(n)}} < \frac{W_{N(n)+1}}{W_{N(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{P-f.s.}$$

gilt, $\frac{S_n}{W_{N(n)}}$ also P-f.s. gegen 1 konvergiert.

(a) Sei $g(t) := t\log_\vartheta t$, $t \geq 0$, und $s > 0$. Dann folgt mit (3.7)

$$P\left(\frac{g^{-1}(n)}{s} \leq N(n)\right) \quad = \quad P\left(T_{W_{\lceil g^{-1}(n)/s\rceil}} \leq n\right)$$

$$= \quad P\left(\frac{T_{W_{\lceil g^{-1}(n)/s\rceil}}}{\alpha\log_\vartheta\alpha} \le \frac{n}{\alpha\log_\vartheta\alpha}\right),$$

wobei $\alpha := \frac{g^{-1}(n)}{s}$. Wir formen die rechte Seite um:

$$\begin{aligned}\frac{n}{\frac{g^{-1}(n)}{s}\log_\vartheta\frac{g^{-1}(n)}{s}} &= \frac{s}{\frac{g^{-1}(n)}{n}\log_\vartheta g^{-1}(n) - \frac{g^{-1}(n)}{n}\log_\vartheta s}\\ &= \frac{s}{1-\frac{g^{-1}(n)}{n}\log_\vartheta s},\end{aligned}$$

weil für m_n mit $g(m_n) = m_n\log_\vartheta m_n = n$

$$\frac{g^{-1}(n)}{n}\log_\vartheta g^{-1}(n) = \frac{m_n}{m_n\log_\vartheta m_n}\log_\vartheta m_n = 1$$

gilt. Wir erhalten mit Lemma 3.5 und unter Berücksichtigung, dass $\frac{g(n)^{-1}}{n}$ für $n\to\infty$ gegen 0 konvergiert

$$P\left(\frac{g^{-1}(n)}{N(n)} \le s\right) = P\left(\frac{T_{W_{\lceil\alpha\rceil}}}{\alpha\log_\vartheta\alpha} \le \frac{s}{1-\frac{g^{-1}(n)}{n}\log_\vartheta s}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left(\frac{2\vartheta}{\vartheta-1}\le s\right).$$

Da $\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{n} = \frac{1}{1-p}$ P-f.s., folgt mit dem Satz von Slutzky ([Als1], S.185)

$$\frac{g^{-1}(n)}{W_{N(n)}} = \frac{g^{-1}(n)}{N(n)}\cdot\frac{N(n)}{W_{N(n)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \frac{2\vartheta}{\vartheta-1}(1-p) = 2$$

und daraus

$$\frac{S_n}{g^{-1}(n)} = \frac{S_n}{W_{N(n)}}\cdot\frac{W_{N(n)}}{g^{-1}(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \frac{1}{2}.$$

Unter Berücksichtigung, dass

$$g^{-1}(n) = m_n \simeq \frac{m_n\log_\vartheta m_n}{\log_\vartheta(m_n\log_\vartheta m_n)} = \frac{n}{\log_\vartheta n}$$

gilt und der Grenzwert konstant ist, folgt die Behauptung.

(b) Für $x>0$ gilt mit Gleichung (3.7) und Lemma 3.5

$$\begin{aligned}P\left(\frac{N(n_k)}{n_k^{1/\varrho}} \ge x\right) &= P\left(T_{W_{\lceil n_k^{1/\varrho}x\rceil}} \le n_k\right)\\ &= P\left(\frac{T_{W_{\lceil n_k^{1/\varrho}x\rceil}}}{\lceil n_k^{1/\varrho}x\rceil^\varrho} \le \frac{1}{x^\varrho}\frac{n_k x^\varrho}{\lceil n_k^{1/\varrho}x\rceil^\varrho}\right)\end{aligned}$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \quad F_{Y_{\zeta(x/1-p)}}(x^{-\varrho})$$

wegen

$$\begin{aligned}
& \log_{1/p}(xn_k^{1/\varrho}) - \lfloor \log_{1/p}(xn_k^{1/\varrho}) \rfloor \\
\equiv \quad & \log_{1/p} x + \log_{1/p} n_k^{1/\log_{1/p}\vartheta} - \lfloor \log_{1/p} n_k^{1/\log_{1/p}\vartheta} \rfloor \quad \bmod 1 \\
\equiv \quad & \log_{1/p} x + \frac{1}{\log_{1/p}\vartheta} \log_{1/p} n_k - \lfloor \frac{1}{\log_{1/p}\vartheta} \log_{1/p} n_k \rfloor \quad \bmod 1 \\
\equiv \quad & \log_{1/p} x + \log_\vartheta n_k - \lfloor \log_\vartheta n_k \rfloor \quad \bmod 1 \\
\xrightarrow[k\to\infty]{} \quad & \log_{1/p} x + \varepsilon = \zeta\left(\frac{x}{1-p}\right) \quad \bmod 1.
\end{aligned}$$

Also folgt, da $\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n}(1-p) = 1$ P-f.s.,

$$P\left(\frac{W_{N(n_k)}}{n_k^{1/\varrho}} \geq x\right) = P\left(\frac{W_{N(n_k)}}{N(n_k)}(1-p)\frac{N(n_k)}{n_k^{1/\varrho}} \leq x(1-p)\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} F_{\zeta(x)}((x(1-p))^{-\varrho})$$

und daraus die Behauptung

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{S_{n_k}}{n_k^{1/\varrho}} < x\right) = \lim_{k\to\infty} 1 - P\left(\frac{S_{n_k}}{W_{N(n_k)}} \cdot \frac{W_{N(n_k)}}{n_k^{1/\varrho}} \geq x\right) = 1 - F_{\zeta(x)}((x(1-p))^{-\varrho}).$$

□

Analog zu Korollar 3.9 gilt

Korollar 3.11 *Aus $p\vartheta > 1$ folgt $\frac{\log S_n}{\log n} \xrightarrow{P} \log_\vartheta \frac{1}{p}$.*

Beweis: Wie im Beweis von Korollar 3.9 betrachten wir eine Teilfolge einer Teilfolge der natürlichen Zahlen, bezeichnet mit $(m_k)_{k\geq 1}$, die $\lim_{k\to\infty} m_k = \infty$ und $\lim_{k\to\infty} \log_\vartheta m_k - \lfloor \log_\vartheta m_k \rfloor = \varepsilon$ erfüllt. Dann gilt nach Satz 3.10 für alle $x > 0$

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{S_{m_k}}{m_k^{1/\varrho}} < x\right) = 1 - F_{\zeta(x)}(((1-p)x)^{-\varrho}) =: G(x).$$

Es genügt zu zeigen, dass G die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße $Z_{\zeta(x)}$ ist, für die $P^{Z_{\zeta(x)}}((0,\infty)) = 1$ gilt. Wir zeigen hier, dass $G(x) \searrow 0$ für $x \searrow 0$ gilt. $G(x) \nearrow 1$

für $x \nearrow \infty$ kann analog bewiesen werden. Zunächst bemerken wir, dass $F_{Y_\varepsilon} =: F_\varepsilon$ in ε periodisch mit Periode 1 ist, da die L.T.

$$\varphi_{Y_\varepsilon}(t) = \exp\left(-Kt \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(p\vartheta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu t \vartheta^{j-\varepsilon}}\right),$$

$t \geq 0$, in ε periodisch mit Periode 1 ist. Nach Bemerkung 3.6 gilt $F_{Y_\varepsilon}(x) \nearrow 1, x \nearrow \infty$. Deshalb existiert zu jedem $\delta > 0$ ein x_0, so dass $F_\varepsilon((x(1-p))^{-\varrho}) > 1-\delta$ für alle $0 < x < x_0$ gilt. Nun wählen wir ein x_1 mit $0 < x_1 < x_0$ und $\zeta(x_1) = \varepsilon + \log_{1/p}((1-p)x_1) \equiv \varepsilon \mod 1$. Dann ist $F_{\zeta(x_1)}((x_1(1-p))^{-\varrho}) = F_\varepsilon((x_1(1-p))^{-\varrho}) > 1-\delta$. Deshalb ist $G(x_1) < \delta$, und da G als Limes von Verteilungsfunktionen monoton wächst, gilt auch $G(x) < \delta$ für $0 < x < x_1$. Weiter schließen wir wie im Beweis von Korollar 3.9. Für $\delta > 0$ gilt

$$1 = \lim_{k\to\infty} P\left(\left|\frac{\log S_{m_k}}{\log m_k} - \frac{1}{\varrho}\right| < \delta\right),$$

so dass $\frac{\log S_{m_k}}{\log m_k}$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\frac{1}{\varrho} = \log_\vartheta \frac{1}{p}$ konvergiert. $\square$

4 Anhang

Behauptung 1 $({}_k f^*_{ij})$ *ist die eindeutige Lösung des Gleichungssystems*

$$\begin{aligned} a_j &= 1 \\ a_i &= u_i a_{i+1} + v_i a_{i-1}\ , \qquad j < i < k \\ a_k &= 0 \end{aligned}$$

Beweis: a) Existenz: Es gilt ${}_k f^*_{jj} = 1$ und ${}_k f^*_{kj} = 0$ nach Definition, und für $i \in \mathbb{Z}$ mit $j < i < k$ ist

$$\begin{aligned} {}_k f^*_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} {}_k f^{(n)}_{ij} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} u_i\ {}_k f^{(n-1)}_{i+1,j} + v_i\ {}_k f^{(n-1)}_{i-1,j} \\ &= u_i\ {}_k f^*_{i+1,j} + v_i\ {}_k f^*_{i-1,j}. \end{aligned}$$

b) Eindeutigkeit: Seien $\hat{a} = (\hat{a}_j, \ldots, \hat{a}_k), \tilde{a} = (\tilde{a}_j, \ldots, \tilde{a}_k)$ zwei Lösungen des Gleichungssystems. Wir definieren $\Delta_r := \hat{a}_r - \tilde{a}_r$, $k \leq j \leq k$. Dann ist $\Delta_k = 0$, $\Delta_j = 0$ und $\Delta_i = u_i \Delta_{i+1} + v_i \Delta_{i-1}$. Sei nun $r \in \mathbb{Z}$ mit $j < r < k$. Dann gilt

$$\Delta_r = (u_r + v_r)\Delta_r = u_r \Delta_{r+1} + v_r \Delta_{r-1}$$

und damit

$$\Delta_{r+1} - \Delta_r = h_r(\Delta_r - \Delta_{r-1}).$$

Hieraus folgt induktiv

$$\Delta_{r+1} - \Delta_r = \left(\prod_{l=r}^{j-1} h_l \right) (\Delta_j - \Delta_{j-1}),$$

und Summation liefert für $j \leq i \leq k$

$$\Delta_i - \Delta_j = \sum_{r=j}^{i-1} (\Delta_{r+1} - \Delta_r) = \left(\sum_{r=j}^{i-1} \prod_{l=j+1}^{r} h_l \right) (\Delta_{j+1} - \Delta_j).$$

Damit erhalten wir

$$0 = \Delta_k - \Delta_j = \left(\sum_{r=j}^{k-1} \prod_{l=j+1}^{r} h_l \right) (\Delta_{j+1}).$$

Da $\left(\sum_{r=j}^{k-1} \prod_{l=j+1}^{r} h_l \right) > 0$ ist, gilt $\Delta_{j+1} = 0$ und deshalb $\Delta_i = 0$ für $j < i < k$. $\square$

Literaturverzeichnis

[Als1] Alsmeyer, G. Wahrscheinlichkeitstheorie (2.Auflage), Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr.30, Universität Münster, 2000

[Als2] Alsmeyer, G. Stochastische Prozesse, Teil 1, Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr.33, Universität Münster, 2000

[Brei] Breiman, L. Probability, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1968

[Chu1] Chung, K. L. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Springer, Berlin 1960

[Chu2] Chung, K. L. A Course in Probability Theory, Harcourt, Brace and World, New York 1968

[Dur] Durrett, R. Probability: Theory and Examples, Duxbury Press, Belmont, 1991

[Fel] Feller, W. An Introduction to Probability Theory and its Applications 2 , Wiley, New York, 1966

[Kes] Kesten, H. Memoir 93, American Mathematical Society, Providence, 1969

[Sol] Solomon, F. Random walks in a random environment, The Annals of Probability 3, 1975

[Sto] Stone, C. J. The growth of a random walk, Ann. Math. Statist. 40, 1969

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und dabei keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet zu haben.

Münster, den 12.10.2005