



WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER
FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK

Quasi-Stationarität in einem epidemiologischen Modell

Diplomarbeit

vorgelegt von

Manuela Schmitz

Thema gestellt von

Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

30. November 2006

Einleitung

Häufig wird versucht, das Verhalten von Epidemien mit Hilfe mathematischer Modelle zu beschreiben. Frühe Modelle waren größtenteils deterministisch; stochastische Modelle wurden erst ernsthaft untersucht, nachdem die Theorie stochastischer Prozesse entsprechend entwickelt war. Einer der Hauptunterschiede zwischen diesen beiden Arten von Modellen liegt in ihrem Zustandsraum, welcher beim deterministischen Modell stetig, beim stochastischen diskret ist. Dementsprechend ist das stochastische Modell realistischer, wenn innerhalb einer Population die Anzahl infizierter Individuen betrachtet werden soll. Nun ist jedes deterministische Modell eine Approximation eines entsprechenden stochastischen Modells, wenn die Populationsgröße gegen ∞ geht. Allerdings gibt es problematische Bereiche, in denen die beiden Modelle jeweils ein gänzlich unterschiedliches Verhalten der Infektion vorhersagen, so dass manche Fragen nur mit Hilfe des stochastischen Modells geklärt werden können.

In der vorliegenden Arbeit wird das sogenannte SIS-Modell untersucht, dessen stochastische Version zum ersten Mal von Weiss und Dishon [20] im Jahre 1971 vorgestellt wurde. Es beschreibt die Übertragung einer Infektion innerhalb einer konstanten Population mit N Individuen. Die Buchstaben "SIS" stehen für die aufeinanderfolgenden möglichen Zustände eines Individuums von empfänglich ("susceptible") hin zu infiziert ("infected") und wieder zurück zu empfänglich ("susceptible"). Ein genesenes Individuum ist somit sofort wieder anfällig für die Infektion.

Das SIS-Modell kann zur Darstellung von endemischen Infektionen verwendet werden, die keine Immunität verleihen; es kann aber auch in völlig anderen Zusammenhängen zur Anwendung kommen. Zum Beispiel benutzte Bartholomew (1976) [3] es, um die Verbreitung von Gerüchten zu untersuchen, Oppenheim et al. (1977) [18] nahmen es als Modell für chemische Reaktionen.

Die Eigenschaften des Modells werden vollständig durch zwei Parameter beschrieben, nämlich durch die Populationsgröße N und durch den sogenannten "transmission factor" T , auch "basic reproduction ratio" genannt und mit R_0 bezeichnet.

In der deterministischen Version des Modells spielt nur der Parameter T eine Rolle. Ist T kleiner als 1, wird die Auslöschung der Infektion vorhergesagt, ist T

größer als 1, kann sich eine endemische Infektion etablieren, wenn zu Beginn eine positive Anzahl von Individuen infiziert ist.

Im Gegensatz dazu stirbt die Infektion im stochastischen Modell unabhängig von der Anfangsverteilung für alle Werte von T fast sicher aus. Dementsprechend hat das Modell einen absorbierenden Zustand im Ursprung sowie eine degenerierte stationäre Verteilung, die ihre gesamte Masse auf den Ursprung legt. Die Zeit bis zur Auslöschung variiert jedoch stark mit T . Sie ist ziemlich kurz und beinahe unabhängig von N , wenn T wesentlich kleiner als 1 ist, wächst aber exponentiell in N , wenn T wesentlich größer als 1 ist. Die Verteilung der Anzahl infizierter Individuen verhält sich innerhalb dieses langen Zeitraums annähernd stationär. Sie kann durch Betrachtung eben dieser Verteilung, bedingt darunter, dass die Infektion nicht ausstirbt, untersucht werden — betrachtet wird die sogenannte quasi-stationäre Verteilung.

Soll also das SIS-Modell untersucht werden, werden im Wesentlichen die quasi-stationäre Verteilung und die Zeit bis zur Auslöschung untersucht. Mit Hilfe letzterer kann bestimmt werden, wie groß der Zeitraum ist, innerhalb dessen die quasi-stationäre Verteilung eine gute Annäherung an die Verteilung der infizierten Individuen ist. Da weder die quasi-stationäre Verteilung noch die Verteilung der Zeit bis zur Auslöschung (im Ganzen) explizit bestimmt werden können, werden Approximationen gesucht. Hierfür werden zwei Prozesse betrachtet, denen ein absorbierender Zustand fehlt und deren nicht-degenerierte stationäre Verteilungen explizit angegeben werden können.

Das 1. Kapitel dieser Arbeit gibt eine kurze Übersicht über die im Modell verwendeten Markov-Sprung-Prozesse, speziell über Geburts-und-Todes-Prozesse. Definitionen und Eigenschaften quasi-stationärer Verteilungen liefert das 2. Kapitel. Im 3. Kapitel werden das SIS-Modell, seine quasi-stationäre Verteilung sowie die beiden Approximations-Prozesse vorgestellt, um dann im 4. Kapitel zu zeigen, dass die stationären Verteilungen dieser Prozesse je eine untere bzw. eine obere Schranke für die quasi-stationäre Verteilung sind. Das 5. Kapitel behandelt schließlich die erwartete Zeit bis zur Auslöschung.

Zu Beginn eines Kapitels bzw. Abschnitts werden die Quellen angegeben, nach denen hauptsächlich vorgegangen wird. Werden innerhalb der Kapitel und Abschnitte noch weitere Quellen verwendet, so werden sie an entsprechender Stelle zusätzlich angeführt.

Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Dr. Gerold Alsmeyer, der mich mit viel Geduld bei der Arbeit an diesem Thema betreut hat. Herzlich danken möchte ich auch meiner Familie, die mich während des gesamten Studiums stets unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

1	Markov-Sprung-Prozesse	7
1.1	Grundlagen: Markov-Sprung-Prozesse allgemein	7
1.2	Endliche Geburts-und-Todes-Prozesse	20
2	Quasi-stationäre Verteilungen	24
2.1	Definition der Quasi-Invarianz und Quasi-Stationarität	24
2.2	Existenz der quasi-invarianten Verteilung	25
2.2.1	Charakterisierung quasi-invarianter Verteilungen	25
2.2.2	Vorbereitung: ML-Matrizen	27
2.2.3	Ergebnis: Existenz und Eindeutigkeit	32
2.3	Äquivalenz von Quasi-Invarianz und Quasi-Stationarität	33
3	Das SIS-Modell und seine Approximationen	35
3.1	SIS-Modell und quasi-stationäre Verteilung	35
3.2	Zwei Approximationen an das SIS-Modell	41
3.2.1	Das SIS-Modell mit einem dauerhaft infizierten Individuum	41
3.2.2	Das SIS-Modell mit versperrtem Ursprung	43
4	Annäherung an die quasi-stationäre Verteilung	45
4.1	Eine untere Schranke	45
4.2	Eine obere Schranke	49
5	Zeit bis zur Auslöschung	56
5.1	1. Fall: Quasi-stationäre Anfangsverteilung	56
5.2	2. Fall: Degenerierte Anfangsverteilung	58
	Literaturverzeichnis	62

Kapitel 1

Markov-Sprung-Prozesse

Da es sich bei den Modellen, mit denen sich diese Arbeit beschäftigt, um Geburts- und-Todes-Prozesse, d.h. spezielle Markov-Sprung-Prozesse, handelt, liefert dieses Kapitel eine kurze Auflistung aller verwendeten Definitionen und allgemein bekannten Sätze (welche in den späteren Kapiteln benutzt werden und bei Bedarf hier nachgeschlagen werden können), sowie eine Erläuterung der vorliegenden speziellen Situation.

Als Quellen hierfür wurden das Buch "Continuous-Time Markov Chains" von Anderson [2] und ein unveröffentlichtes Skript über Markov-Sprung-Prozesse von Alsmeyer [1] verwendet.

1.1 Grundlagen: Markov-Sprung-Prozesse allgemein

Definition und grundlegende Eigenschaften der Übergangsfunktion

Definition 1.1.1. Ein stochastischer Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , mit Werten in einer abzählbaren Menge \mathcal{E} (genannt *Zustandsraum*) wird *Markov-Sprung-Prozess* genannt, wenn für jede endliche Menge $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ von Zeitpunkten und jede Menge $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j$ von Zuständen in \mathcal{E} mit

$P(X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_1) = i_1) \\ = P(X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Die Gleichung (1.1.1) wird *Markov-Eigenschaft* genannt.

Wenn für alle s, t mit $0 \leq s \leq t$ und alle $i, j \in \mathcal{E}$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X(t) = j | X(s) = i)$ nur von $t - s$ und nicht von dem speziellen s und

t abhängen, wird der Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ *zeitlich homogen* genannt; man sagt, er habe *stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten*. In diesem Fall gilt

$$P(X(t) = j | X(s) = i) = P(X(t-s) = j | X(0) = i) \quad (1.1.2)$$

und die Funktion

$$p_{ij}(t) := P(X(t) = j | X(0) = i), \quad i, j \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \quad (1.1.3)$$

wird *Übergangsfunktion* genannt.

(Anderson, [2, S. 1])

Definition 1.1.2. Sei \mathcal{E} eine abzählbare Menge, genannt Zustandsraum. Eine Funktion $p_{ij}(t)$, $i, j \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$, heißt *Übergangsfunktion* auf \mathcal{E} , wenn

1. $p_{ij}(t) \geq 0$ für alle $i, j \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$; und

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

2. $\sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij}(t) \leq 1$ für alle $i \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$.

$p_{ij}(t)$ wird *stochastisch* genannt, wenn $\sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij}(t) = 1$ für alle $i \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$, ansonsten *substochastisch*.

- 3.

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(s)p_{kj}(t), \quad i, j \in \mathcal{E}, \quad s, t \geq 0 \quad (1.1.4)$$

(*Chapman-Kolmogorov-Gleichung* genannt, oder *Halbgruppen-Eigenschaft*).

4. $p_{ij}(t)$ wird ferner *Standard-Übergangsfunktion* genannt, wenn $\lim_{t \downarrow 0} p_{ii}(t) = 1$ für alle $i \in \mathcal{E}$ (wodurch sich mit $0 \leq \sum_{j \neq i} p_{ij}(t) \leq 1 - p_{ii}(t)$ gerade $p_{ij}(t) \xrightarrow[t \downarrow 0]{} \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \mathcal{E}$ ergibt).

(Anderson, [2, S. 5])

Die so definierten $p_{ij}(t)$, $i, j \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$, bilden die Einträge der sogenannten *Übergangsmatrixfunktion* $\mathbf{P}(t) := (p_{ij}(t))_{i,j \in \mathcal{E}}$ — einer quadratischen, möglicherweise unendlich-dimensionalen Matrix. Die oben genannten Eigenschaften lassen sich mit dieser Matrix-Darstellung auch wie folgt formulieren:

1. $\mathbf{P}(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ (d.h. die Komponenten von $\mathbf{P}(t)$ sind nicht-negativ), $\mathbf{P}(0) = I$ (die Einheitsmatrix).
2. $\mathbf{P}(t)\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ für alle $t \geq 0$ (wobei $\mathbf{1}$ der Spaltenvektor ist, dessen Komponenten alle gleich 1 sind).
 $(\mathbf{P}(t))_{t \geq 0}$ ist stochastisch, wenn $\mathbf{P}(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ für alle $t \geq 0$.
3. $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$ für alle $s, t \geq 0$.

4. $\lim_{t \downarrow 0} \mathbf{P}(t) = I$ komponentenweise.

Eine quadratische, möglicherweise unendlich-dimensionale Matrix mit nicht-negativen Komponenten wird *substochastisch* genannt, wenn alle Zeilensummen ≤ 1 sind, und *stochastisch*, wenn sie = 1 sind.

Somit ist eine Übergangsfunktion genau dann stochastisch, wenn $\mathbf{P}(t)$ für alle $t \geq 0$ stochastisch ist.

(Anderson, [2, S. 6 f.])

Der folgende Satz zeigt, dass aus jeder substochastischen Übergangsfunktion durch Hinzufügen eines Zustandes zum Zustandsraum eine stochastische gemacht werden kann.

Satz 1.1.3. *Sei $p_{ij}(t)$ eine substochastische Übergangsfunktion auf \mathcal{E} , Δ ein nicht in \mathcal{E} enthaltener Punkt, $\mathcal{E}_\Delta := \mathcal{E} \cup \{\Delta\}$ und*

$$p_{ij}^\Delta(t) := \begin{cases} p_{ij}(t) & \text{falls } i, j \in \mathcal{E}, \\ 1 - \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(t) & \text{falls } i \in \mathcal{E}, j = \Delta, \\ 0 & \text{falls } i = \Delta, j \in \mathcal{E}, \\ 1 & \text{falls } i = \Delta = j. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Dann ist $p_{ij}^\Delta(t)$ eine stochastische Übergangsfunktion auf \mathcal{E}_Δ .

(Anderson, [2, Prop. 1.1.1])

Satz 1.1.4. *Sei $p_{ij}(t)$ eine (nicht notwendig Standard-) Übergangsfunktion. Es gilt:*

1. Die Funktion $\sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij}(t)$ ist nicht-wachsend in t .
2. Wenn $\mathbf{P}(t)$ für ein $t > 0$ stochastisch ist, so ist $\mathbf{P}(t)$ für alle $t > 0$ stochastisch.

(Anderson, [2, Prop. 1.1.2])

Satz 1.1.5. *Sei $p_{ij}(t)$ eine Standard-Übergangsfunktion. Dann gilt:*

1. $p_{ii}(t) > 0$ für alle $i \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$.
2. Für $i, j \in \mathcal{E}$, $i \neq j$, ist entweder $p_{ij}(t) = 0$ für alle $t \in (0, +\infty)$ oder $p_{ij}(t) > 0$ für alle $t \in (0, +\infty)$ (Lévy's Theorem genannt).
3. Wenn $p_{ii}(t) = 1$ für ein $t > 0$, dann ist $p_{ii}(t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

(Anderson, [2, Prop. 1.1.3 bzw. S. 8])

Satz 1.1.6. *Sei $p_{ij}(t)$ eine Standard-Übergangsfunktion. Für alle $t \geq 0$ gilt*

$$|p_{ij}(t + \epsilon) - p_{ij}(t)| \leq 1 - p_{ii}(|\epsilon|);$$

somit ist $p_{ij}(t)$ eine gleichmäßig stetige Funktion in t .

(Anderson, [2, Prop. 1.1.3])

Differenzierbarkeit der Übergangsfunktion und Bedeutung der Q-Matrix

Da sich die Übergangsfunktionen eines Markov-Sprung-Prozesses — anders als die Übergangswahrscheinlichkeiten bei Markov-Ketten — meistens nicht ohne weiteres berechnen lassen, wird stattdessen die sogenannte Q-Matrix betrachtet. Anhand dieser lassen sich Aussagen über das Verhalten des Prozesses machen.

Satz 1.1.7. Für eine Standard-Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ gilt:

Die Funktion $p_{ij}(t)$, $i, j \in \mathcal{E}$, ist stetig differenzierbar für $t > 0$.

Ferner existiert die rechtsseitige Ableitung im Punkt 0, d.h.

$$q_{ij} := \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t}; \quad (1.1.6)$$

$0 \leq q_{ij} < \infty$ für alle $i, j \in \mathcal{E}$, $i \neq j$; $-\infty \leq q_{ii} \leq 0$ für alle $i \in \mathcal{E}$.

(Alsmeyer, [1, Satz 6.2 bzw. S. 11])

Definition 1.1.8. Definiere $q_i := -q_{ii}$ für $i \in \mathcal{E}$.

Ein Zustand $i \in \mathcal{E}$ heißt *stabil*, wenn $q_i < +\infty$ und *augenblicklich*, wenn $q_i = +\infty$.

Die Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ heißt *stabil*, wenn alle Zustände $i \in \mathcal{E}$ stabil sind.

Der Zustand $i \in \mathcal{E}$ wird *absorbierend* genannt, wenn $(\lim_{t \downarrow 0} \frac{1-p_{ii}(t)}{t} =)q_i = 0$, oder, äquivalent, wenn $p_{ii}(t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

(Anderson, [2, S. 9])

Definition 1.1.9. Die Matrix $Q := (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{E}}$ wird *Q-Matrix* der Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ genannt.

(Die Diagonal-Komponenten von Q sind nicht-positiv und möglicherweise unendlich, die anderen Komponenten sind nicht-negativ und endlich; die Zeilensummen sind nicht-positiv.)

Wenn alle Diagonal-Komponenten endlich sind (d.h. $|q_{ii}| < \infty$ für alle $i \in \mathcal{E}$), wird Q *stabil* genannt.

Wenn zusätzlich alle Zeilensummen gleich 0 sind (d.h. $\sum_{j \in \mathcal{E}} q_{ij} = 0$ für alle $i \in \mathcal{E}$), heißt Q *konservativ*.

Ist umgekehrt Q eine Q-Matrix, so wird eine Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ *Q-Funktion* genannt, wenn Q die Q-Matrix von $p_{ij}(t)$ ist (d.h., wenn $\mathbf{P}'(0+) = Q$).

(Anderson, [2, S. 13 bzw. S. 64])

Ist die Q-Matrix konservativ, so treten augenblickliche Zustände nicht auf.

Struktur von Markov-Sprung-Prozessen und minimale Konstruktion

Sei $(X(t))_{t \geq 0}$ ein Markov-Sprung-Prozess mit Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ und konserватiver Q-Matrix Q . Die Pfade des Prozesses werden als rechtsseitig-stetige Treppenfunktionen vorausgesetzt.

Anders als bei Markov-Ketten besitzt bei Markov-Sprung-Prozessen jeder Zustand eine zufällige Verweildauer, die wegen der Markov-Eigenschaft exponentialverteilt sein muss; die jeweiligen Parameter lassen sich anhand der Q-Matrix bestimmen.

Definition 1.1.10. Sei $i \in \mathcal{E}$ und $X(0) = i$.

$$T_i := \begin{cases} \inf\{t \geq 0 | X(t) \neq i\} & \text{falls die Menge nicht leer ist,} \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.1.7)$$

definiert die *Verweildauer* im Zustand i .

(Anderson, [2, S. 16])

Wenn $q_i = 0$, gilt $p_{ii}(t) = 1$ für alle $t \geq 0$, so dass i absorbierend und $T_i = +\infty$ ist.

Sei nun $q_i > 0$.

Satz 1.1.11. Es gilt:

1. $P(T_i > t | X(0) = i) = \exp(-q_i t), t \geq 0.$
2. $P(X(T_i) = j | X(0) = i) = q_{ij}/q_i, j \neq i.$

(Anderson, [2, Prop. 1.2.8])

Angenommen, dass $X(0) = i_0$.

Wenn $q_{i_0} = 0$, oder äquivalent, wenn i_0 ein absorbierender Zustand ist, bleibt der Prozess für immer im Zustand i_0 .

Wenn nun $q_{i_0} > 0$, so bleibt der Prozess (vgl. Satz 1.1.11, Punkt 1) für eine endliche, aber (da $q_{i_0} < +\infty$) echt positive, $\text{Exp}(q_{i_0})$ -verteilte Zeitspanne T_{i_0} im Zustand i_0 . Am Ende der Verweildauer geht der Prozess in einen anderen Zustand über. Die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Übergang in den Zustand i_1 mit $i_1 \neq i_0$ wird, ist $q_{i_0 i_1}/q_{i_0}$ (vgl. Satz 1.1.11, Punkt 2). Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade wird sich der Prozess zum Zeitpunkt T_{i_0} im Zustand i_1 befinden, d.h. $X(T_{i_0}) = i_1$. Auf Grund der Homogenität des Prozesses und wegen der Markov-Eigenschaft ist das zukünftige Verhalten des Prozesses nach dem Zeitpunkt T_{i_0}

1. unabhängig vom Verhalten des Prozesses vor dem Zeitpunkt T_{i_0} und
2. so, als würde der Prozess statt in T_{i_0} in 0 starten und i_1 als Anfangszustand haben.

Wird nun in gleicher Weise fortgefahrene, so bleibt der Prozess, sofern i_1 kein absorbierender Zustand ist, eine $\text{Exp}(q_{i_1})$ -verteilte Zeitspanne T_{i_1} im Zustand i_1 , wobei T_{i_1} unabhängig von T_{i_0} ist, und geht zum Zeitpunkt $T_{i_0} + T_{i_1}$ in einen Zustand $i_2 = X(T_{i_0} + T_{i_1})$ über. Die Wahl des Zustandes i_2 ist unabhängig von allem, was zuvor passiert ist und wird mit Wahrscheinlichkeit $q_{i_1 i_2}/q_{i_1}$ getroffen usw. ...

Definiere nun die *Sprungzeiten*

$$J_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ \inf \{t > J_{n-1} | X(t) \neq X(J_{n-1})\} & \text{falls } n \geq 1, \end{cases} \quad (1.1.8)$$

und ferner

$$X_n := X(J_n), \quad n \geq 0. \quad (1.1.9)$$

Dann ist J_n der Zeitpunkt des n -ten Übergangs, X_0 ist der Anfangszustand des Prozesses und X_n ($n \geq 1$) ist der Zustand des Prozesses zum Zeitpunkt J_n , d.h. direkt nach dem n -ten Übergang.

Im Beispiel-Fall gilt also

$$\begin{aligned} J_0 &= 0, \quad X_0 = i_0; \\ J_1 &= T_{i_0}, \quad X_1 = i_1; \\ J_2 &= T_{i_0} + T_{i_1}, \quad X_2 = i_2; \\ J_3 &= T_{i_0} + T_{i_1} + T_{i_2}, \dots \end{aligned}$$

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = +\infty$ ist, kann der Prozess auf diese Weise komplett beschrieben werden. Im Allgemeinen kann die Zufallsvariable

$$J_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow J_n \quad (1.1.10)$$

aber durchaus auch endliche Werte annehmen; es gilt insbesondere, dass, wenn $P(J_\infty \leq t | X(0) = i_0) > 0$ für ein $t > 0$, $P(J_\infty \leq t | X(0) = i_0) > 0$ für alle $t > 0$. Ist J_∞ endlich, so wird von der *Explosionszeit* gesprochen. Anschaulich bedeutet dies, dass der Pfad $X(t)$ in jedem Intervall (s, J_∞) mit $s < J_\infty$ unendlich viele Sprünge hat.

Definiere nun für $i, j \in \mathcal{E}$

$$p_{ij} := \begin{cases} \delta_{ij} & \text{falls } q_i = 0, \\ 0 & \text{falls } q_i > 0 \text{ und } j = i, \\ q_{ij}/q_i & \text{falls } q_i > 0 \text{ und } j \neq i. \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Da Q konservativ ist, gilt $\sum_{j \in \mathcal{E}} p_{ij} = 1$ für alle $j \in \mathcal{E}$.

$(X_n)_{n \geq 0}$ wie oben definiert ist eine Markov-Kette mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} ; sie wird *eingebettete Markov-Kette von $(X(t))_{t \geq 0}$* genannt.

Bis zum Zeitpunkt J_∞ — ob dies nun endliche oder unendliche Werte annehmen — wird der Markov-Sprung-Prozess vollständig beschrieben durch

1. die eingebettete Markov-Kette $(X_n)_{n \geq 0}$, die die Folge aller Zustände darstellt, durch die $(X(t))_{t \geq 0}$ verläuft, und durch
 2. die Verweildauern T_{i_n} ($i_n \in \mathcal{E}$, $n \geq 0$) in den aufeinanderfolgend von $(X(t))_{t \geq 0}$ bzw. $(X_n)_{n \geq 0}$ besuchten Zuständen.
- (Anderson, [2, S. 17 f.])

Ist nun eine konservative Q-Matrix Q gegeben, kann ausgehend von einer diskreten Markov-Kette $(X_n)_{n \geq 0}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten wie in (1.1.11) und einer Folge von Verweildauern $(T_{i_n})_{n \geq 0}$ auf kanonische Weise ein Markov-Sprung-Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ konstruiert werden. Problematisch wird es allerdings, wenn die Explosionszeit J_∞ endliche Werte annimmt. In diesem Fall determiniert das Konstruktionsverfahren den Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ nur bis zur Explosionszeit und seine Fortsetzung über J_∞ hinaus unter Gewährleistung der Markov-Eigenschaft ist durch Q nicht mehr eindeutig festgelegt, d.h. zu Q können mehrere Standard-Übergangsmatrixfunktionen mit $\mathbf{P}'(0+) = Q$ existieren. Dieses Problem kann jedoch durch die Erweiterung von \mathcal{E} um den absorbierenden Zustand Δ und Übergang zu der durch Differentiation von $(\mathbf{P}^\Delta(t))_{t \geq 0}$ (festgelegt durch (1.1.5)) entstandenen Q-Matrix $Q^\Delta = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{E}_\Delta}$ gelöst und so zu einer beliebigen konservativen Q-Matrix Q ein Markov-Sprung-Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden konstruiert werden.

Zum Explosionszeitpunkt J_∞ können statt der Absorption in Δ auch noch andere Fortsetzungen über J_∞ hinaus unter Gültigkeit der Markov-Eigenschaft gefunden werden. Jedoch gilt für jede weitere zu Q gehörende substochastische Standard-Übergangsmatrixfunktion $\tilde{\mathbf{P}}(t) = (\tilde{p}_{ij}(t))_{i,j \in \mathcal{E}}$

$$\tilde{p}_{ij}(t) \geq p_{ij}(t), \quad i, j \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0.$$

Auf Grund dieser Minimalitätseigenschaft wird $(X(t))_{t \geq 0}$ auch als die zu Q gehörende *minimale Konstruktion* bezeichnet.

(Alsmeyer, [1, S. 33 ff.])

Satz 1.1.12 (Reuters Explosionskriterium). *Die minimale Konstruktion $(X(t))_{t \geq 0}$ ist genau dann nicht-explodierend, wenn $x = 0$ die einzige nicht-negative und beschränkte Lösung der Gleichung $Qx = x$ bildet.*

(Hierbei wird ein Vektor $x = (x_i)_{i \in \mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ als nicht-negativ bzw. beschränkt bezeichnet, wenn $x_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{E}$ bzw. $\sup_{i \in \mathcal{E}} |x_i| < \infty$.)

(Alsmeyer, [1, Satz 7.3])

Vorwärts- und Rückwärts-Differentialgleichungen

In der Praxis besteht die Bedeutung der hier vorgestellten Differentialgleichungssysteme darin, dass sich — sobald die Einträge der Q-Matrix bekannt sind — mit ihrer Hilfe in manchen Fällen die Übergangsfunktionen berechnen lassen.

Satz 1.1.13. Sei $(\mathbf{P}(t))_{t \geq 0}$ eine Standard-Übergangsmatrixfunktion mit konservativer Q-Matrix Q . Dann gelten die Kolmogorovschen Rückwärts-Differentialgleichungen

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} q_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \quad (1.1.12)$$

also

$$\mathbf{P}'(t) = Q\mathbf{P}(t), \quad t \geq 0.$$

(Alsmeyer, [1, Satz 6.3])

Satz 1.1.14. Sei $(\mathbf{P}(t))_{t \geq 0}$ eine Standard-Übergangsmatrixfunktion mit konservativer Q-Matrix Q . Dann gelten die Kolmogorovschen Vorwärts-Differentialgleichungen

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{ik}(t) q_{kj}, \quad i, j \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \quad (1.1.13)$$

also

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)Q, \quad t \geq 0,$$

wenn $(\mathbf{P}(t))_{t \geq 0}$ die eindeutig bestimmte Standard-Übergangsmatrixfunktion mit Q-Matrix Q ist.

(Alsmeyer, [1, Satz 6.4])

Die minimale Konstruktion erfüllt — auch wenn sie substochastisch ist — sowohl die Vorwärts-, als auch die Rückwärts-Differentialgleichungen.

Existenz und Eindeutigkeit der Q-Funktion, Gestalt der minimalen Q-Funktion

Wie schon erwähnt, ist die Q-Funktion eines Markov-Sprung-Prozesses bzw. die Lösung der obigen Differentialgleichungen keineswegs eindeutig bestimmt; auch ihre Existenz ist nur unter bestimmten Bedingungen gesichert.

Theorem 1.1.15. Sei Q eine stabile aber nicht notwendig konservative Q-Matrix. Dann existiert eine (möglicherweise substochastische) Übergangsfunktion $p_{ij}^*(t)$, welche sowohl die Rückwärts- als auch die Vorwärts-Differentialgleichungen erfüllt, und jeweils die minimale Lösung dieser Gleichungen ist, in dem Sinne, dass, wenn $p_{ij}(t)$ irgendeine nicht-negative Lösung (nicht notwendig eine Übergangsfunktion) der Rückwärts- oder Vorwärts-Differentialgleichungen ist, für alle $i, j \in \mathcal{E}, t \geq 0$, $p_{ij}^*(t) \leq p_{ij}(t)$ gilt.

Ferner ist $p_{ij}^*(t)$ die minimale Q-Funktion, d.h., wenn $p_{ij}(t)$ irgendeine andere Q-Funktion ist (nicht notwendig eine Lösung der Rückwärts- oder Vorwärts-Differentialgleichungen), gilt $p_{ij}^*(t) \leq p_{ij}(t)$ für alle $i, j \in \mathcal{E}, t \geq 0$.
(Anderson, [2, Thm. 2.2.2])

Definition 1.1.16. Eine Q-Matrix Q heißt *gleichmäßig beschränkt*, wenn

$$\sup_{i \in \mathcal{E}} q_i < +\infty.$$

(Anderson, [2, S. 83])

Satz 1.1.17. Sei Q eine nicht notwendig konservative, gleichmäßig beschränkte Q-Matrix. Dann ist die minimale Lösung $p_{ij}^*(t)$ die eindeutig bestimmte Q-Funktion. Wenn Q zudem konservativ ist, so ist die minimale Lösung $p_{ij}^*(t)$ außerdem stochastisch.

(Anderson, [2, Prop. 2.2.9, Cor. 2.2.5])

Satz 1.1.18. Sei Q eine gleichmäßig beschränkte, nicht notwendig konservative Q-Matrix, c eine Konstante mit

$$\sup_{i \in \mathcal{E}} q_i \leq c.$$

Definiere die substochastische Matrix

$$\hat{\mathbf{P}} = c^{-1}Q + I,$$

d.h.

$$\hat{p}_{ij} = \frac{1}{c}q_{ij} + \delta_{ij}, \quad i, j \in \mathcal{E}.$$

Dann ist die minimale Lösung $p_{ij}^*(t)$ die eindeutig bestimmte Q-Funktion und kann explizit durch

$$p_{ij}^*(t) = \exp(-ct) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} \hat{p}_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

ausgedrückt werden (wobei $\hat{p}_{ij}^{(n)}$ die i,j -te Komponente von $\hat{\mathbf{P}}^n$ ist).

$p_{ij}^*(t)$ ist genau dann stochastisch, wenn Q konservativ ist.

(Anderson, [2, Prop. 2.2.10])

Bemerkung 1.1.19. Ist \mathcal{E} ein endlicher Zustandsraum, so kann die Darstellung von $p_{ij}^*(t)$ noch wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 (p_{ij}^*(t))_{i,j \in \mathcal{E}} &:= \mathbf{P}^*(t) = \exp(-ct) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} \hat{\mathbf{P}}^n \\
 &= \exp(-ct) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (Q + cI)^n \\
 &= \exp(-ct) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^k Q^{n-k} \\
 &= \exp(-ct) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(tQ)^{n-k}}{(n-k)!} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tQ)^m}{m!} := \exp(tQ).
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$p_{ij}^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} q_{ij}^{(n)}, \quad i, j \in \mathcal{E}, t \geq 0, \quad (1.1.14)$$

wobei $q_{ij}^{(n)}$ die i,j -te Komponente von Q^n bezeichnet.
(Anderson, [2, S. 85 f.])

Klassifikation von Zuständen

Sei nun $p_{ij}(t)$, $i, j \in \mathcal{E}$, eine Standard-Übergangsfunktion und sei $(X(t))_{t \geq 0}$ ein Markov-Sprung-Prozess mit Zustandsraum \mathcal{E} , der $p_{ij}(t)$ als Übergangsfunktion hat.

Die folgende Klassifikation von Elementen des Zustandsraums soll — genau wie bei diskreten Markov-Ketten — die möglichen Pfade des Prozesses aufzeigen.

Definition 1.1.20. Sind $i, j \in \mathcal{E}$ gegeben, so ist j von i aus erreichbar, in Zeichen $i \rightarrow j$, wenn $p_{ij}(t) > 0$ für ein (und damit für alle) $t > 0$.

Die Zustände i und j heißen verbunden oder auch kommunizierend, in Zeichen $i \leftrightarrow j$, wenn $i \rightarrow j$ und $j \rightarrow i$.

(Anderson, [2, S. 155])

Definition 1.1.21. ” \leftrightarrow ” ist eine Äquivalenzrelation, die den Zustandsraum \mathcal{E} in disjunkte Äquivalenzklassen, Kommunikationsklassen genannt, aufteilt.

Die Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ heißt irreduzibel, wenn der gesamte Zustandsraum \mathcal{E} die einzige Kommunikationsklasse bildet, wenn also alle Zustände in \mathcal{E} miteinander verbunden sind.

Eine Kommunikationsklasse \mathcal{C} heißt *abgeschlossen*, wenn $p_{ij}(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und $i \in \mathcal{C}$, $j \notin \mathcal{C}$, d.h., wenn sie nicht mehr verlassen werden kann.
(Anderson, [2, S. 155])

Definition 1.1.22. Ein Zustand $i \in \mathcal{E}$ ist *rekurrent*, wenn

$$\int_0^\infty p_{ii}(t)dt = +\infty,$$

und andernfalls *transient*.

(Anderson, [2, S. 155])

Definition 1.1.23. Ein rekurrenter Zustand $i \in \mathcal{E}$ heißt *positiv rekurrent*, wenn $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ii}(t) > 0$, und *null-rekurrent*, wenn $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ii}(t) = 0$.
(Anderson, [2, S. 158])

Wird die speziellere Situation eines *regulären* Markov-Sprung-Prozesses (d.h. eines nicht-explodierenden Markov-Sprung-Prozesses in einem Standard-Modell mit rechtsseitig stetigen, stückweise konstanten Pfaden, einer Standard-Übergangsmatrixfunktion und einer konservativen Q-Matrix) betrachtet, kann für stabile Zustände auch folgende Definition der Rekurrenzegenschaft angeben werden.

Hierfür werden die sukzessiven *Eintrittszeiten* $(E_n(i))_{n \geq 0}$ in einen Zustand $i \in \mathcal{E}$ eingeführt mit

$$E_0(i) \equiv 0, \quad E_n(i) := \inf \{J_k > E_{n-1}(i) : X(J_k) = X_k = i\} \quad \text{für } n \geq 1; \quad (1.1.15)$$

zusätzlich werden

$$\begin{aligned} f_{ij}^* &:= P(E_1(j) < \infty | X(0) = i) =: P_i(E_1(j) < \infty); \\ \mu_{ij}^* &:= \mathbf{E}_i(E_1(j)) \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

definiert (wobei \mathbf{E}_i den Erwartungswert unter P_i bezeichnet).
(Alsmeyer, [1, S. 39 f.])

Definition 1.1.24. Ein stabiler Zustand $i \in \mathcal{S}$ heißt

- *rekurrent*, wenn $f_{ii}^* = 1$, und *transient*, wenn $f_{ii}^* < 1$.
- *positiv rekurrent* (oder *ergodisch*), wenn $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii}^* < \infty$, und *nullrekurrent*, wenn $f_{ii}^* = 1$ und $\mu_{ii}^* = \infty$.

μ_{ii}^* heißt *mittlere Rekurrenzzeit* von i .
(Alsmeyer, [1, 8.3])

Satz und Definition 1.1.25. *Rekurrenz, Transienz, positive Rekurrenz und Null-Rekurrenz sind Solidaritätseigenschaften, d.h. sie werden von kommunizierenden Zuständen geteilt.*

(Alsmeyer, [1, Satz 8.8])

Stationäre Maße

Bei der Beschreibung des Langzeitverhaltens eines Markov-Sprung-Prozesses spielen die sogenannten stationären Maße eine zentrale Rolle.

Definition 1.1.26. Gegeben sei eine Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$. Ein Vektor $\xi := (\xi_i)_{i \in \mathcal{E}}$ mit $\xi_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{E}$ und

$$\sum_{i \in \mathcal{E}} \xi_i p_{ij}(t) = \xi_j, \quad j \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

bzw. in Matrix-Schreibweise

$$\xi \mathbf{P}(t) = \xi, \quad t \geq 0,$$

wird *invariantes* oder *stationäres Maß* für $p_{ij}(t)$ genannt.

Wenn zudem $\sum_{i \in \mathcal{E}} \xi_i = 1$, wird ξ *invariante* oder *stationäre Verteilung* genannt. (Anderson, [2, S. 159])

Theorem 1.1.27. *Sei $p_{ij}(t)$ eine irreduzible Übergangsfunktion.*

1. *Dann existieren die Grenzwerte $\xi_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{ij}(t)$ und sind unabhängig von i für alle $j \in \mathcal{E}$. Der Vektor $(\xi_j)_{j \in \mathcal{E}}$ ist ein invariantes Maß und entweder gilt*
 - (a) $\xi_j = 0$ für alle $j \in \mathcal{E}$ oder
 - (b) $\xi_j > 0$ für alle $j \in \mathcal{E}$ und $\sum_{j \in \mathcal{E}} \xi_j = 1$.
2. *Ist $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_j)_{j \in \mathcal{E}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\tilde{\xi} \mathbf{P}(t) = \tilde{\xi}$ für ein $t > 0$, so gilt $\tilde{\xi} \mathbf{P}(t) = \tilde{\xi}$ für alle $t \geq 0$ (d.h. $\tilde{\xi}$ ist eine invariante Verteilung) und $\tilde{\xi} = \xi$ mit ξ wie in Punkt 1.*

(Anderson, [2, Thm. 5.1.6])

Satz 1.1.28. *Sei $p_{ij}(t)$ die Übergangsfunktion eines irreduziblen Markov-Sprung-Prozesses. Der Prozess ist genau dann positiv rekurrent, wenn eine invariante Verteilung für $p_{ij}(t)$ existiert.*

(Anderson, [2, Prop. 5.1.7])

Ein stationäres Maß lässt sich auch über seine Beziehung mit der Q-Matrix Q charakterisieren.

Aus $\xi \mathbf{P}(t) = \xi$ folgt $\xi(\mathbf{P}(t) - I) = 0$ für alle $t \geq 0$ und somit

$$\xi Q = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\xi(\mathbf{P}(t) - I)}{t} = 0,$$

sofern der Limes auch bei linksseitiger Multiplikation mit Maßen mit dem Operator Q übereinstimmt.

Ist nun ein regulärer Markov-Sprung-Prozess gegeben, gilt folgender Satz:

Satz 1.1.29. *Sei $(X(t))_{t \geq 0}$ ein regulärer Markov-Sprung-Prozess mit Q -Matrix Q . Ein σ -endliches Maß $\xi \neq 0$ auf \mathcal{E} ist genau dann stationär für den Prozess, wenn es der Gleichung $\xi Q = 0$ genügt.*

(Alsmeyer, [1, S. 47 bzw. Satz 9.2])

ζ -subinvariante und ζ -invariante Maße

Die im Folgenden behandelten ζ -invarianten Maße werden sich im nächsten Kapitel bei der Untersuchung der sogenannten quasi-stationären Verteilung als nützlich erweisen.

Definition 1.1.30. Sei $p_{ij}(t)$ eine Standard-Übergangsfunktion, \mathcal{C} eine Kommunikationsklasse für $p_{ij}(t)$, $\zeta \geq 0$. Ein Vektor $(m_i)_{i \in \mathcal{C}}$ mit $m_i > 0$ für alle $i \in \mathcal{C}$ und

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} m_i p_{ij}(t) \leq \exp(-\zeta t) m_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad t \geq 0, \quad (1.1.17)$$

heißt ζ -subinvariantes Maß für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} .

Wenn in (1.1.17) Gleichheit gilt, wird $(m_i)_{i \in \mathcal{C}}$ ζ -invariantes Maß für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} genannt.

(Anderson, [2, S. 174 f.])

Theorem 1.1.31. *Sei \mathcal{C} eine Kommunikationsklasse für die Standard-Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$.*

1. *Es existiert ein $\omega_{\mathcal{C}} \geq 0$, genannt Zerfallsparameter von \mathcal{C} , so dass für jedes Paar $i, j \in \mathcal{C}$*

$$\frac{1}{t} \log p_{ij}(t) \rightarrow -\omega_{\mathcal{C}} \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

2. *Für alle $i \in \mathcal{C}$, $t > 0$, gilt*

$$p_{ii}(t) \leq \exp(-\omega_{\mathcal{C}} t).$$

3. *Für jedes Paar $i, j \in \mathcal{C}$ existiert eine Konstante $M_{ij} > 0$, so dass*

$$p_{ij}(t) \leq M_{ij} \exp(-\omega_{\mathcal{C}} t).$$

4. $\omega_{\mathcal{C}} \leq \inf_{i \in \mathcal{C}} q_i$.
 5. Wenn $\omega_{\mathcal{C}} > 0$, so ist die Klasse \mathcal{C} transient.
- (Anderson, [2, Thm. 5.1.9])

Bemerkung 1.1.32. Falls ein ζ -subinvariantes Maß existiert, so gilt

$$m_j p_{jj}(t) \leq \sum_{i \in \mathcal{C}} m_i p_{ij}(t) \leq \exp(-\zeta t) m_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad t > 0,$$

und damit

$$-\frac{\log p_{jj}(t)}{t} \geq \zeta, \quad j \in \mathcal{C}, \quad t > 0,$$

also $\zeta \leq \omega_{\mathcal{C}}$.

(Anderson, [2, S. 175])

Theorem 1.1.33. Sei \mathcal{C} eine Kommunikationsklasse mit Zerfallsparameter $\omega_{\mathcal{C}} \geq 0$. Dann existiert ein $\omega_{\mathcal{C}}$ -subinvariantes Maß für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} .

(Anderson, [2, Thm. 5.2.7])

Definition 1.1.34. Ein Zustand $i \in \mathcal{C}$ heißt $\omega_{\mathcal{C}}$ -rekurrent, wenn

$$\int_0^\infty p_{ii}(t) \exp(\omega_{\mathcal{C}} t) dt = +\infty$$

und andernfalls $\omega_{\mathcal{C}}$ -transient.

(Anderson, [2, S. 177])

Satz 1.1.35. $\omega_{\mathcal{C}}$ -Rekurrenz und $\omega_{\mathcal{C}}$ -Transienz sind Solidaritätseigenschaften.

(Anderson, [2, S. 177])

Theorem 1.1.36. Die Kommunikationsklasse \mathcal{C} habe Zerfallsparameter $\omega_{\mathcal{C}}$ und sei $\omega_{\mathcal{C}}$ -rekurrent. Dann ist das $\omega_{\mathcal{C}}$ -subinvariante Maß $(m_i)_{i \in \mathcal{C}}$ bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmt und sogar $\omega_{\mathcal{C}}$ -invariant.

(Anderson, [2, Thm. 5.2.8])

1.2 Endliche Geburts-und-Todes-Prozesse

Kapitel 3 bis 6 der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich mit speziellen Markov-Sprung-Prozessen, nämlich mit endlichen Geburts-und-Todes-Prozessen, die hier kurz eingeführt werden.

Definition 1.2.1. Gegeben sei eine Menge $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}$, sowie nicht-negative Zahlen λ_i und μ_i , $i \in \mathcal{S}$.

Ein *endlicher Geburts-und-Todes-Prozess* $(X(t))_{t \geq 0}$ ist ein Markov-Sprung-Prozess mit Zustandsraum \mathcal{S} und Q-Matrix gegeben durch

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{falls } j = i + 1, 0 \leq i < N, \\ \mu_i & \text{falls } j = i - 1, 0 < i \leq N, \\ -(\lambda_i + \mu_i) & \text{falls } j = i, 0 \leq i \leq N, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

d.h.

$$Q = \begin{pmatrix} -(\lambda_0 + \mu_0) & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda_N + \mu_N) \end{pmatrix}; \quad (1.2.2)$$

der Prozess kann also von jedem Zustand i nur in die Nachbarzustände $i + 1$ oder $i - 1$ springen.

Die λ_i werden als *Geburtsraten*, die μ_i als *Sterberaten* bezeichnet.
(Anderson, [2, S. 96] bzw. Alsmeyer, [1, S. 64 f.])

Alle in dieser Arbeit betrachteten endlichen Geburts-und-Todes-Prozesse sind zeitlich homogen.

Die Q-Matrix (1.2.2) ist tridiagonal und stabil; konservativ ist sie genau dann, wenn $\mu_0 = 0$ ist (vgl. Definition 1.1.9).

Satz 1.2.2. *Ist eine Q-Matrix der Form (1.2.2) gegeben, so existiert eine eindeutig bestimmte Q-Funktion, welche auch eindeutig bestimmte Lösung der Kolmogorovschen Vorwärts- und Rückwärtsdifferentialgleichungen ist.*

Beweis. Die Existenz der Q-Funktion folgt aus der Stabilität von Q (vgl. Theorem 1.1.15). Da Q zudem gleichmäßig beschränkt ist, gilt die Eindeutigkeit mit Satz 1.1.17. \square

Somit müssen hier auch keine weiteren Gedanken auf die minimale Konstruktion des Prozesses verwendet werden und mit Reuters Explosionskriterium 1.1.12 folgt direkt:

Korollar 1.2.3. *Ein endlicher Geburts-und-Todes-Prozess ist nicht-explodierend.*

Werden die möglichen Übergänge innerhalb eines hinreichend kurzen Zeitraumes $(t, t + h]$ betrachtet, so ist es auch möglich, die Übergangswahrscheinlichkeiten

ohne Umstände direkt anzugeben; sie lauten

$$p_{ij}(t, t+h) = p_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & \text{falls } j = i+1, 0 \leq i < N, \\ \mu_i h + o(h) & \text{falls } j = i-1, 0 < i \leq N, \\ 1 - \lambda_i h - \mu_i h + o(h) & \text{falls } j = i, 0 \leq i \leq N, \\ o(h) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

wobei $o(\cdot)$ das Landau-Symbol bezeichnet, d.h. $o(h)$ ist eine Funktion in h , so dass $o(h)/h \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Mit Hilfe dieser Übergangswahrscheinlichkeiten kann die Gestalt der Vorwärts-Differentialgleichungen $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)Q$ wie folgt anschaulich hergeleitet werden (vgl. Feller [8], S. 371 f.).

Grundsätzlich gibt es folgende Übergangsmöglichkeiten, die dafür sorgen, dass sich der Prozess zum Zeitpunkt $t+h$ im Zustand i befindet:

1. Zum Zeitpunkt t befindet sich der Prozess im Zustand i und zwischen t und $t+h$ findet kein Übergang statt.
2. Zum Zeitpunkt t befindet sich der Prozess im Zustand $i-1$ und zwischen t und $t+h$ findet ein Übergang in den Zustand i statt.
3. Zum Zeitpunkt t befindet sich der Prozess im Zustand $i+1$ und zwischen t und $t+h$ findet ein Übergang in den Zustand i statt.
4. Zwischen den Zeitpunkten t und $t+h$ finden zwei oder mehr Übergänge statt.

Die Wahrscheinlichkeit für letzteres ist — da wir es mit einem Geburts-und-Todes-Prozess zu tun haben — $o(h)$; die anderen Möglichkeiten schließen sich jeweils gegenseitig aus, ihre Wahrscheinlichkeiten werden daher aufaddiert. Somit ergibt sich für alle $i = 1, \dots, N-1$

$$p_i(t+h) = (1 - \lambda_i h - \mu_i h)p_i(t) + \lambda_{i-1} h p_{i-1}(t) + \mu_{i+1} h p_{i+1}(t) + o(h)$$

und Umformung führt auf der linken Seite zu dem Differenzenquotienten von $p_i(t)$, nämlich

$$\frac{p_i(t+h) - p_i(t)}{h} = \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_i(t) + \mu_{i+1} p_{i+1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Lässt man jetzt h gegen 0 gehen, so gilt

$$p'_i(t) = \lambda_{i-1} p_{i-1}(t) - (\lambda_i + \mu_i) p_i(t) + \mu_{i+1} p_{i+1}(t).$$

Für den Fall $i = 0$ existieren nur die Möglichkeiten 1., 3. und 4.; für $i = N$ die Möglichkeiten 1., 2. und 4. Analog zu dem Fall $i = 1, \dots, N$ ergeben sich die

Gleichungen

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -(\lambda_0 + \mu_0)p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ p'_N(t) &= \lambda_{N-1} p_{N-1}(t) - (\lambda_N + \mu_N) p_N(t), \end{aligned}$$

also genau die oben genannten Differentialgleichungen.

Die Komponenten q_{ij} der Q-Matrix haben durch ihre Definition $q_{ij} = p'_{ij}(0+)$ auch eine anschauliche Bedeutung in Bezug auf den Prozess. Diese Definition ist äquivalent zu der Gleichung

$$P(X(t+h) = j | X(t) = i) = p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h).$$

Durch Vergleich mit (1.2.3) wird offensichtlich, dass die q_{ij} gerade die in (1.2.1) angegebene Form haben.
(Anderson, [2, S. 62 f.])

Insgesamt gesehen kann im Fall endlicher Geburts-und-Todes-Prozesse immer davon ausgegangen werden, dass alle möglichen Fälle gutartig sind.

Es kann ein Standard-Modell zugrunde gelegt werden, bei der Übergangsfunktion handelt es sich — wie in (1.2.3) zu sehen — um eine Standard-Übergangsfunktion und es kann angenommen werden, dass alle Pfade unter jeder Anfangsverteilung fast sicher rechtsseitig stetig sind und linksseitige Limiten haben; solche Prozesse werden *càdlàg* genannt. Die Menge der Punkte, durch die sich der Prozess von einem anderen gleichverteilten unterscheidet, wäre eine Nullmenge (z.B. könnte es vorkommen, dass der eine Prozess sich im Moment des Sprungs noch im alten, der andere aber schon im neuen Zustand befindet; in dieser Arbeit wird letzteres angenommen).

Kapitel 2

Quasi-stationäre Verteilungen

Ausgangslage dieses Kapitels ist ein zeitlich homogener Markov-Sprung-Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ mit endlichem Zustandsraum $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}$, 0 als einzigm absorbierendem Zustand und $\mathcal{C} = \{1, \dots, N\}$ als transienter Kommunikationsklasse. Die Q-Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$ ist konservativ und damit gleichmäßig beschränkt. Es existiert eine eindeutig bestimmte stochastische Standard-Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$. Damit die Wahrscheinlichkeit, 0 zu erreichen, gegeben, dass der Prozess in \mathcal{C} startet, positiv ist, wird davon ausgegangen, dass $q_{i0} > 0$ für mindestens ein $i \in \mathcal{C}$. Tatsächlich wird der Prozess dann fast sicher in 0 absorbiert und hat eine degenerierte stationäre Verteilung. Diese liefert jedoch keine Informationen über das Verhalten des Prozesses während des Zeitraums bis zur Absorption.

Es bietet sich an, den Prozess bedingt unter Nicht-Absorption zu betrachten, und zu schauen, ob sich dann eine Art stationäres Verhalten zeigt — man gelangt so zu dem Begriff der Quasi-Stationarität.

In diesem Kapitel werden zunächst die in diesem Zusammenhang gängigen Definitionen vorgestellt — der Übersichtlichkeit halber wird zwischen "quasi-invariante" und "quasi-stationärer Verteilung" unterschieden. Ziel ist der Beweis der Existenz einer quasi-invarianten Verteilung sowie der Äquivalenz der Begriffe "quasi-invariant" und "quasi-stationär" — alles für die oben beschriebene spezielle Situation.

2.1 Definition der Quasi-Invarianz und Quasi-Stationarität

In der Literatur finden sich zwei verschiedene Definitionen des Begriffs "quasi-stationäre Verteilung". Die eine — hier mit der Bezeichnung "quasi-invariante Verteilung" — beschreibt die Invarianz der Verteilung des bedingten Prozesses; sie ist eine Anfangsverteilung auf den nicht-absorbierenden Zuständen, so dass

die Verteilung von $X(t)$, bedingt darunter, dass der Prozess zum Zeitpunkt t noch nicht absorbiert ist, unabhängig von t ($t \geq 0$) ist. Die andere benennt den Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ der Verteilung von $X(t)$ bedingt darunter, dass der Prozess zum Zeitpunkt t noch nicht absorbiert ist (sofern existent).

Definition 2.1.1. Sei $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{C}}$ Anfangsverteilung des Prozesses $(X(t))_{t \geq 0}$ auf den nicht-absorbierenden Zuständen (d.h. $\pi_0 = 0$). π heißt *quasi-invariante Verteilung*, wenn

$$P_\pi(X(t) = j | X(t) \neq 0) = \pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad t \geq 0. \quad (2.1.1)$$

Formal ausgedrückt heißt π also quasi-invariante Verteilung, wenn

$$\frac{p_j(t)}{\sum_{i \in \mathcal{C}} p_i(t)} = \pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad t \geq 0, \quad (2.1.2)$$

wobei

$$p_j(t) := \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(t), \quad j \in \mathcal{S}, \quad t \geq 0. \quad (2.1.3)$$

Bemerkung 2.1.2. Für eine quasi-invariante Verteilung gilt immer $\pi_j > 0$, $j \in \mathcal{C}$ (vgl. Satz 1.1.5 und obige Gleichungen (2.1.2), (2.1.3)).

Definition 2.1.3. Gegeben irgendeine Anfangsverteilung, wird $P(X(t) = j | X(t) \neq 0)$, $j \in \mathcal{C}$, für $t \rightarrow \infty$ betrachtet. Wenn der Grenzwert

$$\tilde{\pi}_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = j | X(t) \neq 0), \quad j \in \mathcal{C}, \quad (2.1.4)$$

existiert, so heißt $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_j)_{j \in \mathcal{C}}$ *quasi-stationäre Verteilung*.

2.2 Existenz der quasi-invarianten Verteilung

Nair und Pollett haben in ihrer Arbeit [14] die Existenz einer quasi-invarianten Verteilung mit der Existenz einer ζ -invarianten Verteilung verknüpft. Im Folgenden wird ihr Ergebnis präsentiert. Als Vorbereitung für den Beweis der Existenz einer ζ -invarianten Verteilung werden (aufbauend auf der Perron-Frobenius-Theorie) ML-Matrizen vorgestellt, und schließlich kann mit Hilfe dieser Ergebnisse und der Grundlagen des ersten Kapitels die Existenz einer eindeutig bestimmten quasi-stationären Verteilung gefolgert werden.

2.2.1 Charakterisierung quasi-invarianter Verteilungen

Satz 2.2.1. Eine Verteilung $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{C}}$ auf \mathcal{C} ist genau dann quasi-invariant, wenn sie für ein $\zeta > 0$ ein ζ -invariantes Maß für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} ist.

Beweis. Zunächst sei π ein ζ -invariantes Maß für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} mit $\zeta > 0$, $p_j(t)$ wie in (2.1.3) für alle $t \geq 0$. Laut Definition der ζ -Invarianz gilt $p_j(t) = \exp(-\zeta t)\pi_j$, und da π eine Verteilung ist, gilt außerdem $\sum_{j \in \mathcal{C}} p_j(t) = \exp(-\zeta t) \sum_{j \in \mathcal{C}} \pi_j = \exp(-\zeta t)$. Es ergibt sich

$$\pi_j = \frac{p_j(t)}{\exp(-\zeta t)} = \frac{p_j(t)}{\sum_{i \in \mathcal{C}} p_i(t)},$$

woraus mit (2.1.2) die Quasi-Invarianz von π folgt.

Umgekehrt sei nun π eine quasi-invariante Verteilung für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} . Mit (2.1.2) ergibt sich

$$p_j(t) = g(t)\pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad t > 0, \quad (2.2.1)$$

wobei $g(t) := \sum_{j \in \mathcal{C}} p_j(t)$ eine stetige Funktion bildet.

Zu zeigen bleibt also, dass $g(t) = \exp(-\zeta t)$ für ein $\zeta > 0$.

Hierfür wird die Chapman-Kolmogorov-Gleichung $p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$, $i, j \in \mathcal{S}$, $s, t \geq 0$, verwendet. Multiplikation mit π_i , Summation über $i \in \mathcal{C}$, sowie Verwendung der Gleichung (2.1.3) und der Tatsache, dass 0 absorbierend ist, liefert

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(s+t) &= \sum_{i \in \mathcal{C}} \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ik}(s)p_{kj}(t) \\ \Leftrightarrow p_j(s+t) &= \sum_{k \in \mathcal{S}} p_k(s)p_{kj}(t) \\ \Leftrightarrow p_j(s+t) &= \sum_{k \in \mathcal{C}} p_k(s)p_{kj}(t), \quad j \in \mathcal{C}, \quad s, t \geq 0. \end{aligned}$$

Durch Summation dieses Ausdrucks über $j \in \mathcal{C}$ und Verwendung der Definition von $g(t)$ sowie der Gleichungen (2.2.1) und (2.1.3) ergibt sich nun, dass g folgender Funktionalgleichung genügt:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{C}} p_j(s+t) &= \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{k \in \mathcal{C}} p_k(s)p_{kj}(t) \\ \Leftrightarrow g(s+t) &= \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{k \in \mathcal{C}} g(s)\pi_k p_{kj}(t) \\ \Leftrightarrow g(s+t) &= g(s) \sum_{j \in \mathcal{C}} p_j(t) \\ \Leftrightarrow g(s+t) &= g(s)g(t), \quad s, t \geq 0. \end{aligned}$$

Da $p_j(t) \geq \pi_j p_{jj}(t) > 0$ (vgl. Satz 1.1.5) und (mit (2.1.3))

$$g(t) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i p_{ij}(t) = \sum_{i \in \mathcal{C}} \pi_i \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij}(t) \leq 1, \quad (2.2.2)$$

gilt $0 < g(t) \leq 1$. Es folgt $g(t) = \exp(-\zeta t)$ für ein $\zeta \geq 0$, denn g ist stetig. Schließlich gilt aber noch für mindestens ein $i \in \mathcal{C}$ $p_{i0}(t) > 0$ für alle $t > 0$, so dass $g(t) < 1$ für alle $t > 0$ (vgl. (2.2.2)), womit der Fall $\zeta = 0$ ausgeschlossen ist.

□

Nach diesem Satz ist also die Existenz einer quasi-invarianten Verteilung äquivalent zur Existenz einer ζ -invarianten Verteilung. Um diese zu zeigen, bedarf es jedoch zunächst noch einiger Vorbereitung.

2.2.2 Vorbereitung: ML-Matrizen

Seneta betrachtet in seinem Buch [19] quadratische, nicht-negative Matrizen, mit deren Hilfe er dann die sogenannten ML-Matrizen darstellt (siehe Kapitel 2, Abschnitt 3 des Buches). Diese sind ebenfalls quadratisch, jedoch können die Einträge auf der Diagonalen negativ sein — die Q-Matrix des in diesem Kapitel betrachteten Prozesses ist also auch eine ML-Matrix.

Grundlagen: Perron-Frobenius-Theorie für primitive Matrizen

Sei $T = (t_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$ eine quadratische nicht-negative Matrix, d.h. $t_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$, was symbolisch durch $T \geq 0$ ausgedrückt wird. Analoges gilt für $T > 0$ und $T \geq B$, wobei T und B quadratische Matrizen gleicher Dimension sind.

Seien $x' = (x_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ und $y = (y_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ Bezeichnungen für einen Zeilen- bzw. einen Spaltenvektor, $T^k = (t_{ij}^{(k)})_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$ für die k -te Potenz von T .

Definition 2.2.2. Eine quadratische nicht-negative Matrix T heißt *irreduzibel*, wenn für jedes Paar $i, j \in \{1, \dots, N\}$ eine positive ganze Zahl $m \equiv m(i, j)$ existiert, so dass $t_{ij}^{(m)} > 0$.
(Seneta, [19, Def. 1.6])

Definition 2.2.3. Eine quadratische nicht-negative Matrix T heißt *primitiv*, wenn eine positive ganze Zahl k existiert, so dass $T^k > 0$.
(Seneta, [19, Def. 1.1])

Theorem 2.2.4 (Perron-Frobenius-Theorem für primitive Matrizen). *T sei eine nicht-negative primitive $N \times N$ -Matrix. Dann existiert ein Eigenwert r_T (Perron-Frobenius-Eigenwert genannt), so dass*

1. r_T reell, $r_T > 0$;
2. echt positive linke und rechte Eigenvektoren zum Eigenwert r_T existieren;
3. $r_T > |b|$ für jeden Eigenwert $b \neq r_T$;

4. die Eigenvektoren zum Eigenwert r_T bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmt sind;
 5. falls $0 \leq B \leq T$ und d ein Eigenwert von B ist, $|d| \leq r_T$ gilt;
ferner impliziert $|d| = r_T$, dass $B = T$;
 6. r_T eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von T ist.
- (Seneta, [19, Thm. 1.1])

Die verschiedenen Eigenwerte einer primitiven Matrix T werden nun mit $b_1 = r_T, b_2, \dots, b_n$, $n \leq N$, bezeichnet, wobei $r_T > |b_2| \geq |b_3| \geq \dots \geq |b_n|$. Sei m_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, die Vielfachheit der Nullstelle b_i im charakteristischen Polynom.

Theorem 2.2.5. *Sei T eine primitive Matrix.*

1. Falls $b_2 \neq 0$, so gilt für $k \rightarrow \infty$

$$T^k = r_T^k w v' + O(k^{m_2-1} |b_2|^k)$$

komponentenweise.

2. Falls $b_2 = 0$, so gilt für $k \geq N - 1$

$$T^k = r_T^k w v'.$$

In beiden Fällen sind w, v' positive rechte und linke Eigenvektoren zum Eigenwert r_T , normiert, so dass $v'w = 1$.

(Seneta, [19, Thm. 1.2])

ML-Matrizen: Erweiterung der Perron-Frobenius-Struktur

Definition 2.2.6. Eine quadratische Matrix $B = (b_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$ mit reellwertigen Einträgen und $b_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$ heißt *ML-Matrix*.

(Manchmal wird hier auf die Namen von Metzler und Leontief Bezug genommen.)

Seneta verwendet nun die oben vorgestellte Perron-Frobenius-Theorie, um Aussagen über diese Klasse von Matrizen herzuleiten.

Eine ML-Matrix B kann immer durch die Beziehung

$$T = \beta I + B$$

mit einer nicht-negativen Matrix $T \equiv T(\beta)$ verknüpft werden, wobei $\beta \geq 0$ und hinreichend groß, so dass T nicht-negativ ist.

Definition 2.2.7. Eine ML-Matrix B heißt *irreduzibel*, wenn T irreduzibel ist.

Wird in obiger Darstellung β hinreichend groß gewählt, so kann die irreduzible Matrix T auch primitiv gemacht werden; z.B. mit $\beta > \max_i |b_{ii}|$.

Theorem 2.2.8. Sei B eine $(N \times N)$ irreduzible ML-Matrix. Dann existiert ein Eigenwert r_B ("maximaler" Eigenwert genannt), so dass

1. r_B reell ist;
 2. echt positive linke und rechte Eigenvektoren zum Eigenwert r_B existieren, welche bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmt sind;
 3. $r_B > \Re b$ für jeden Eigenwert b , $b \neq r_B$, von B (d.h. r_B ist größer als der Realteil jedes Eigenwertes b von B , $b \neq r_B$);
 4. r_B einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von B ist;
 5. $r_B \leq 0$ genau dann, wenn ein $y \geq 0, \neq 0$, existiert, so dass $By \leq 0$; in diesem Fall gilt $y > 0$.
- Ferner gilt $r_B < 0$ genau dann, wenn mindestens eine Komponente von By echt negativ ist.

Beweis. Sei $B = T - \beta I$ mit β hinreichend groß, so dass T primitiv ist. Genau dann ist b_i Eigenwert von B , wenn b_i Nullstelle des charakteristischen Polynoms von B ist, d.h. wenn

$$0 = \det(B - b_i I) = \det(T - \beta I - b_i I) = \det(T - (b_i + \beta)I) \quad (2.2.3)$$

gilt — also genau dann, wenn $b_i + \beta$ Eigenwert von T ist. Wird nun $r_B = r_T - \beta$ gewählt, so folgen die Punkte 1 bis 4 aus dem Perron-Frobenius-Theorem 2.2.4:

Punkt 1 ist klar mit Theorem 2.2.4, Punkt 1.

Punkt 2 folgt aus Theorem 2.2.4, Punkt 2 und 4. Ist v' ein positiver, bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmter linker Eigenvektor von T zum Eigenwert r_T , so gilt

$$v' T = r_T v' = (r_B + \beta) v',$$

was äquivalent ist zu

$$v' B = v'(T - \beta I) = r_B v'.$$

Also ist v' auch ein positiver, bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmter linker Eigenvektor von B zum Eigenwert r_B . Analog folgt der Rest von Punkt 2.

Punkt 3 gilt mit Theorem 2.2.4, Punkt 3, da aus

$$r_T = r_B + \beta > |b| \geq \Re b$$

für jeden Eigenwert $b \neq r_T$ von $T = \beta I + B$, folgt, dass

$$r_B > \Re b - \beta = \Re(b - \beta)$$

für jeden Eigenwert $b - \beta \neq r_T - \beta = r_B$ von $B = T - \beta I$.

Punkt 4 ergibt sich aus Theorem 2.2.4, Punkt 6, und obiger Gleichung (2.2.3).

Um nun die Richtung " \Rightarrow " von Punkt 5 zu zeigen, wird $r_B \leq 0$ vorausgesetzt. Dies ist äquivalent zu $r_T - \beta \leq 0$, also $r_T \leq \beta$. Somit existiert ein $y \geq 0$, $\neq 0$, so dass

$$\begin{aligned} Ty &= r_T y \leq \beta y \\ \Leftrightarrow By &= (T - \beta I)y \leq 0. \end{aligned}$$

Für die Rückrichtung wie auch für die Anmerkung wird die Bedingung $By \leq 0$ wie folgt geschrieben

$$Ty \leq \beta y, \quad \beta > 0. \quad (2.2.4)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung kann im Folgenden sowohl $y > 0$, als auch $\beta \geq r_T$, d.h. $r_B = r_T - \beta \leq 0$ gezeigt werden.

Zunächst wird angenommen, dass mindestens eine Komponente — etwa die i -te — von y Null ist. Mit $T^k y \leq \beta^k y$ folgt, dass

$$\sum_{j=1}^N t_{ij}^{(k)} y_j \leq \beta^k y_i.$$

Da T irreduzibel ist, existiert für dieses i und jedes j ein k , so dass $t_{ij}^{(k)} > 0$; und weil laut Voraussetzung $y_j > 0$ für mindestens ein j , folgt, dass

$$y_i > 0,$$

was ein Widerspruch ist. Also gilt $y > 0$.

Wird nun (2.2.4) mit v' , einem positiven linken Eigenvektor von T zum Eigenwert r_T , multipliziert, ergibt sich

$$\beta v' y \geq v' T y = r_T v' y, \quad (2.2.5)$$

d.h. $\beta \geq r_T$, also $r_B = r_T - \beta \leq 0$. Ist mindestens eine Komponente von By echt negativ, so gilt in (2.2.4) für mindestens eine Komponente echte Ungleichheit, und mit (2.2.5) folgt $\beta > r_T$, d.h. $r_B = r_T - \beta < 0$. \square

ML-Matrizen B tauchen in Anwendungen häufig in Verbindung mit der Matrix-Exponentialfunktion $\exp(tB)$ auf — so auch in unserer speziellen Situation. Da der Zustandsraum endlich ist, hat die Übergangsmatrixfunktion die Gestalt $\mathbf{P}(t) = \exp(tQ)$ (vgl. Bemerkung 1.1.19). In folgendem Theorem geht es um die weitere Darstellung dieses Ausdrucks.

Theorem 2.2.9. *Eine ML-Matrix B ist genau dann irreduzibel, wenn $\exp(tB) > 0$ für alle $t > 0$. In diesem Fall gilt*

$$\exp(tB) = \exp(r_B t) w v' + O(\exp(rt))$$

komponentenweise für $t \rightarrow \infty$, wobei w, v' die positiven rechten und linken Eigenvektoren von B zum maximalen Eigenwert r_B sind, normiert, so dass $v'w = 1$, und $r < r_B$.

Beweis. Sei $B = T - \beta I$ für hinreichend großes $\beta > 0$, so dass T nicht-negativ ist. Dann gilt (mit den Rechenregeln für die Matrix-Exponentialfunktion)

$$\exp(tB) = \exp(-\beta tI) \exp(tT) = \exp(-\beta t) \exp(tT),$$

und wegen

$$\exp(tT) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tT)^k}{k!}$$

folgt, dass $\exp(tB) > 0$ für alle $t > 0$ genau dann, wenn T irreduzibel ist.

Sei nun B irreduzibel. Durch geeignete Wahl von β kann $T = \beta I + B$ als primitiv vorausgesetzt werden, mit Perron-Frobenius-Eigenwert $r_T = r_B + \beta$. Laut Theorem 2.2.5 gilt nun für $b_2 \neq 0$

$$T^k = r_T^k wv' + O(k^{m_2-1} |b_2|^k), \quad |b_2| < r_T,$$

für $k \rightarrow \infty$, wobei w, v' die im Theorem verlangten Eigenschaften haben, da die Perron-Frobenius-Eigenvektoren von T den Eigenvektoren von B zum Eigenwert r_B entsprechen. Für $b_2 = 0$ gilt $T^k = r_T^k wv'$. Für ein δ mit $0 < \delta < r_T$ lässt sich nun

$$T^k - r_T^k wv' = Y(k)\delta^k$$

schreiben, wobei (die Komponenten von) $Y(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Daher gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k r_T^k}{k!} wv' = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k) \frac{(t\delta)^k}{k!},$$

d.h.

$$|\exp(tT) - \exp(r_T t) wv'| \leq \exp(t\delta) Y$$

komponentenweise, wobei Y eine positive Matrix ist, derart, dass (die Komponenten von) $Y(k)$ vom Betrage her durch (die Komponenten von) Y gleichmäßig beschränkt ist (sind). Multiplikation mit $\exp(-\beta t)$ liefert nun

$$|\exp(tB) - \exp(r_B t) wv'| \leq \exp[t(\delta - \beta)] Y,$$

wobei $\delta - \beta < r_T - \beta = r_B$. Wird r so gewählt, dass $\delta - \beta < r < r_B$, folgt die Behauptung. \square

2.2.3 Ergebnis: Existenz und Eindeutigkeit

Nach all diesen Vorüberlegungen müssen nun nur noch die Fakten zusammengetragen werden, um zum gewünschten Schluss zu gelangen.

Satz 2.2.10. *Gegeben sei ein Markov-Sprung-Prozess der zu Beginn des Kapitels beschriebenen Form. Dann existiert eine eindeutig bestimmte quasi-invariante Verteilung $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{C}}$.*

Beweis. Da der Zustandsraum \mathcal{S} endlich ist, kann die Übergangsmatrixfunktion $\mathbf{P}(t)$ nach Bemerkung 1.1.19 wie folgt dargestellt werden

$$\mathbf{P}(t) = \exp(tQ).$$

Weil Q eine ML-Matrix ist, ergibt sich mit Theorem 2.2.9 weiter

$$\mathbf{P}(t) = \exp(r_Q t) w v' + O(\exp(rt)) \quad (2.2.6)$$

komponentenweise für $t \rightarrow \infty$, wobei r_Q der maximale Eigenwert von Q und w, v' die zugehörigen positiven rechten und linken Eigenvektoren sind, normiert, so dass $v'w = 1; r < r_Q$. Für die Einträge der Matrix $\mathbf{P}(t)$ gilt damit

$$p_{ij}(t) = \exp(r_Q t)(wv')_{ij} + O(\exp(rt)), \quad i, j \in \mathcal{S}, \quad (2.2.7)$$

wobei $(wv')_{ij} > 0, ((wv')_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}} = wv'$. Wird der Zustandsraum auf die transiente Kommunikationsklasse \mathcal{C} eingeschränkt, so zeigt die Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log p_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \log (\exp(r_Q t)) + \frac{1}{t} \log (wv')_{ij} \right) = r_Q,$$

dass es sich bei $-r_Q$ gerade um den in Theorem 1.1.31 beschriebenen Zerfallsparameter $\omega_{\mathcal{C}}$ von \mathcal{C} handelt, weshalb die Theorie aus Kapitel 1 anwendbar ist. Theorem 1.1.33 sichert die Existenz eines $\omega_{\mathcal{C}}$ -subinvarianten Maßes für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} . Zudem ist \mathcal{C} $\omega_{\mathcal{C}}$ -rekurrent, da mit (2.2.6) bzw. (2.2.7)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_{ii}(t) \exp(\omega_{\mathcal{C}} t) dt &= \int_0^\infty [\exp(-\omega_{\mathcal{C}} t)(wv')_{ii} + O(\exp(rt))] \exp(\omega_{\mathcal{C}} t) dt \\ &= \int_0^\infty [(wv')_{ii} + \exp(\omega_{\mathcal{C}} t)O(\exp(rt))] dt \\ &= \infty \end{aligned}$$

gilt. Laut Theorem 1.1.36 ist somit das $\omega_{\mathcal{C}}$ -subinvariante Maß bis auf skalares Vielfaches eindeutig bestimmt und tatsächlich $\omega_{\mathcal{C}}$ -invariant. Durch Normierung ergibt sich daraus die Existenz eines eindeutig bestimmten $\omega_{\mathcal{C}}$ -invarianten Maßes mit Masse 1 — was nach Theorem 2.2.1 äquivalent ist zur Existenz einer eindeutig bestimmten quasi-invarianten Verteilung. \square

2.3 Äquivalenz von Quasi-Invarianz und Quasi-Stationarität

Satz 2.3.1. Gegeben sei ein Markov-Sprung-Prozess der zu Beginn des Kapitels beschriebenen Form. Eine Verteilung $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{C}}$ ist genau dann quasi-invariant, wenn sie quasi-stationär ist.

Beweis. Zunächst sei π eine quasi-invariante Verteilung. Dann gilt mit (2.1.1)

$$P_\pi(X(t) = j | X(t) \neq 0) = \pi_j \longrightarrow \pi_j \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad j \in \mathcal{C}.$$

Falls also π die Anfangsverteilung ist, so existiert die quasi-stationäre Verteilung und ist gleich π .

Für den Umkehrschluss sei $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_j)_{j \in \mathcal{C}}$ eine quasi-stationäre Verteilung; $\varpi = (\varpi_j)_{j \in \mathcal{C}}$ sei irgendeine Anfangsverteilung. Mit der Darstellung (2.2.7) der Übergangsverteilung gilt

$$\begin{aligned} P_\varpi(X(t) \neq 0) &= P_\varpi(X(t) \in \mathcal{C}) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{C}} P_\varpi(X(t) = j) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \varpi_i p_{ij}(t) \\ &\stackrel{(2.2.7)}{=} \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \varpi_i [\exp(r_Q t)(wv')_{ij} + O(r_Q t)], \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{P_\varpi(X(t+s) \neq 0)}{P_\varpi(X(t) \neq 0)} &= \exp(r_Q s) \underbrace{\frac{\sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \varpi_i [\exp(r_Q t)(wv')_{ij} + O(r_Q t)]}{\sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \varpi_i [\exp(r_Q(t-s))(wv')_{ij} + O(r_Q(t-s))]}_{{\substack{\longrightarrow 1 \\ t \rightarrow \infty}}} \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \exp(r_Q s), \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Wird nun die quasi-stationäre Verteilung $\tilde{\pi}$ betrachtet, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{\pi}_j &= \lim_{t \rightarrow \infty} P_\varpi(X(t+s) = j | X(t+s) \neq 0) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_\varpi(X(t+s) = j)}{P_\varpi(X(t+s) \neq 0)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{C}} \frac{P_\varpi(X(t) = i) p_{ij}(s)}{P_\varpi(X(t+s) \neq 0)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathcal{C}} P_\varpi(X(t) = i | X(t) \neq 0) \cdot \frac{P_\varpi(X(t) \neq 0)}{P_\varpi(X(t+s) \neq 0)} \cdot p_{ij}(s) \\
 &= \sum_{i \in \mathcal{C}} \tilde{\pi}_i \cdot \exp(-r_Q s) \cdot p_{ij}(s), \quad j \in \mathcal{C}, \quad s \geq 0,
 \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\sum_{i \in \mathcal{C}} \tilde{\pi}_i p_{ij}(s) = \exp(r_Q s) \tilde{\pi}_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad s \geq 0.$$

Also ist $\tilde{\pi}$ ein $-r_Q$ -invariantes Maß für $p_{ij}(t)$ auf \mathcal{C} (vgl. Definition 1.1.30) und damit nach Satz 2.2.1 schon quasi-invariant. \square

Als Ergebnis dieses Kapitels kann festgehalten werden, dass für einen Markov-Sprung-Prozess der vorliegenden Form unabhängig von der Anfangsverteilung immer eine eindeutig bestimmte quasi-stationäre Verteilung existiert (welche der eindeutig bestimmten quasi-invarianten Verteilung entspricht).

Kapitel 3

Das SIS-Modell und seine Approximationen

3.1 SIS-Modell und quasi-stationäre Verteilung

Das von Nåsell [15] (siehe auch [16], [17]) untersuchte "closed endemic SIS model", auch "stochastic SIS model", "stochastic logistic epidemic" oder "SIS logistic epidemic" genannt, beschreibt die Übertragung einer Infektion innerhalb einer konstanten endlichen Population von Individuen. Ein Individuum ist immer entweder empfänglich für die Infektion oder infiziert. Ist ein Individuum genesen, so ist es sofort wieder empfänglich für die Infektion.

Als Modell für die Anzahl infizierter Individuen $I(t)$ in einer konstanten Population mit N Individuen dient ein endlicher Geburts-und-Todes-Prozess. $I(t)$ nimmt Werte aus dem Zustandsraum $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, N\}$ an. Übergänge von einem Zustand $i \in \mathcal{S}$ sind nur in die benachbarten Zustände $i + 1$ und $i - 1$ während eines hinreichend kurzen Zeitraumes möglich; falls $i = 0$ oder $i = N$, reduziert sich die Anzahl der Nachbarn auf 1. Die Geburtsraten λ_i sollen proportional zum Produkt der Anzahl infizierter und der Anzahl genesener Individuen, die Sterberaten μ_i zur Anzahl infizierter Individuen sein:

$$\begin{aligned}\lambda_i &:= i\lambda \left(1 - \frac{i}{N}\right), \quad \lambda > 0; \\ \mu_i &:= i\mu, \quad \mu > 0.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Die Festlegung $\lambda_N = \mu_0 = 0$ verhindert Übergänge aus dem Zustandsraum heraus. Dem Modell angepasst, werden die λ_i hier *Infektionsraten* und die μ_i *Genesungsrate*n genannt. Da der hier betrachtete Prozess zeitlich homogen ist, kann die Übergangsfunktion

$$p_{ij}(t) := P(I(t) = j | I(0) = i), \quad i, j \in \mathcal{S}, t \geq 0,$$

betrachtet werden.

Die Eigenschaften des Modells werden durch zwei Parameter vollständig beschrieben: durch die Populationsgröße N und durch den "transmission factor" T , auch "basic reproduction ratio" R_0 genannt, definiert durch

$$T = R_0 = \frac{\lambda}{\mu}; \quad (3.1.2)$$

letzterer ist immer positiv.

Der "transmission factor" T spielt eine wichtige Rolle in der deterministischen Version des Modells, welche $T = 1$ als Schwellenwert hat. Für $T < 1$ sagt dieses Modell die Auslöschung der Infektion voraus, während für $T > 1$ die Etablierung einer endemischen Infektion möglich ist.

Für die Formulierung der Kolmogorovschen Vorwärts-Differentialgleichungen wird die Wahrscheinlichkeit betrachtet, zum Zeitpunkt t im Zustand j zu sein und folgende Definition getroffen:

$$p_j(t) := \sum_{i \in \mathcal{S}} P(I(0) = i) p_{ij}(t), \quad j \in \mathcal{S}, \quad \text{und} \quad p(t) := (p_j(t))_{j \in \mathcal{S}}. \quad (3.1.3)$$

Die Gleichungen lassen sich dann in der Form

$$p'(t) = p(t)A$$

schreiben, wobei A eine quadratische Matrix der Ordnung $N + 1$ ist und die Gestalt der in (1.2.2) angegebenen Matrix Q hat, hier mit den in (3.1.1) definierten Infektions- und Genesungsraten. Also bezeichnet $A := (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq N}$ gerade die Q-Matrix des Markov-Sprung-Prozesses $(I(t))_{t \geq 0}$. Komponentenweise ausgedrückt gilt

$$p'_j(t) = \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j \in \mathcal{S}, \quad t \geq 0, \quad (3.1.4)$$

mit den Konventionen $\lambda_{-1} = 0 = p_{-1}(t)$ für den Fall $j = 0$ und $\mu_{N+1} = 0 = p_{N+1}(t)$ für den Fall $j = N$.

Der Zustandsraum \mathcal{S} des Prozesses lässt sich disjunkt in die transiente Kommunikationsklasse $\mathcal{C} = \{1, \dots, N\}$ und den absorbierenden Zustand 0 zerlegen, der fast sicher in endlicher Zeit erreicht wird. Befindet sich der Prozess also in \mathcal{C} , so kann er von dort aus jeden Zustand erreichen — auch 0. In 0 angekommen, kann er jedoch nicht zurück zu \mathcal{C} . Dies entspricht auch der Anschauung, dass die Infektion — einmal vollständig ausgelöscht (d.h. es existiert kein infiziertes Individuum mehr, welches andere anstecken kann) — nicht erneut ausbrechen kann.

Als Konsequenz ergibt sich, dass das SIS-Modell eine degenerierte stationäre Verteilung hat, die ihre gesamte Masse auf den Ursprung legt. Dies geht direkt daraus hervor, dass $pA = 0$ für $p := (1, 0, \dots, 0)$ und die Q-Matrix A ist (vgl. Satz

1.1.29). Da eine degenerierte stationäre Verteilung jedoch keine Informationen über das Verhalten des Prozesses über einen längeren Zeitraum hinweg hergibt, wird der Prozess $(I(t))_{t \geq 0}$ bedingt darunter, dass die Infektion nicht ausstirbt, betrachtet, und man gelangt so zu der in Kapitel 2 beschriebenen *quasi-stationären Verteilung*. Da die Situation aus Kapitel 2 hier vorliegt, ist die Existenz einer eindeutig bestimmten quasi-stationären Verteilung $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{C}}$ mit $\pi_j > 0$ und $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(I(t) = j | I(t) \neq 0)$, $j \in \mathcal{C}$, unabhängig von der Anfangsverteilung gesichert.

Eine wichtige Rolle spielt dann die erwartete Zeit bis zur Auslöschung der Infektion im unbedingten Prozess (siehe Kapitel 5), da die quasi-stationäre Verteilung nur innerhalb dieser Zeit Informationen zum ursprünglichen Prozess liefert.

Satz 3.1.1. *Die Verteilung π ist genau dann quasi-stationär, wenn sie dem Gleichungssystem*

$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = -\mu_1\pi_1\pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (3.1.5)$$

mit den Konventionen $\lambda_0 = 0 = \pi_0$ für den Fall $j = 1$, $\mu_{N+1} = 0 = \pi_{N+1}$ für den Fall $j = N$ genügt, und $\pi_j > 0$, $\sum_{j \in \mathcal{C}} \pi_j = 1$ gilt.

Beweis. Zunächst sei π eine quasi-stationäre Verteilung. Laut Satz 2.3.1 ist π dann auch quasi-invariant, und $\pi_j > 0$, $\sum_{j \in \mathcal{C}} \pi_j = 1$ gelten per Definition (vgl. auch Bemerkung 2.1.2). π lässt sich wie folgt schreiben

$$\pi_j = P(I(t) = j | I(t) \neq 0) = \frac{p_j(t)}{\sum_{i \in \mathcal{C}} p_i(t)} = \frac{p_j(t)}{1 - p_0(t)}, \quad j \in \mathcal{C}, t \geq 0,$$

unabhängig von der Anfangsverteilung. Mit der Definition

$$p_C(t) := (p_j(t))_{j \in \mathcal{C}}$$

ergibt sich daraus

$$\pi = \frac{p_C(t)}{1 - p_0(t)}$$

(wobei die Gleichungen jeweils komponentenweise zu verstehen sind). Differenzieren dieser Gleichung liefert nun (zusammen mit 3.1.4)

$$\begin{aligned} \pi' &= \frac{p'_C(t)(1 - p_0(t)) + p_C(t)p'_0(t)}{(1 - p_0(t))^2} \\ &= \frac{p'_C(t)}{1 - p_0(t)} + \frac{p'_0(t)}{1 - p_0(t)} \cdot \frac{p_C(t)}{1 - p_0(t)} \\ &\stackrel{p'_0(t)=\mu_1p_1(t)}{=} \frac{p'_C(t)}{1 - p_0(t)} + \mu_1\pi_1 \cdot \frac{p_C(t)}{1 - p_0(t)} \\ &= \frac{1}{1 - p_0(t)} p_C(t) A_C + \mu_1\pi_1\pi \\ &= \pi A_C + \mu_1\pi_1\pi, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

wobei

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda_N + \mu_N) \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

die $N \times N$ -Matrix ist, die aus A durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht. Also gilt das folgende Gleichungssystem

$$\pi'_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} + \mu_1\pi_1\pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (3.1.8)$$

mit den Konventionen $\lambda_0 = 0 = \pi_0$ für den Fall $j = 1$ und $\mu_{N+1} = 0 = \pi_{N+1}$ für den Fall $j = N$. Da π_j ein konstanter Wert ist, folgt $\pi'_j = 0$, und daher ist π die stationäre Lösung des Systems von Differentialgleichungen (3.1.8) und genügt somit der Relation

$$\pi A_{\mathcal{C}} = -\mu_1\pi_1\pi \quad (3.1.9)$$

oder komponentenweise ausgedrückt

$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = -\mu_1\pi_1\pi_j, \quad j \in \mathcal{C},$$

mit den Konventionen $\lambda_0 = 0 = \pi_0$ für den Fall $j = 1$ und $\mu_{N+1} = 0 = \pi_{N+1}$ für den Fall $j = N$.

Die Umkehrung wurde von van Doorn in seiner Arbeit [7] bewiesen.

Sei π Lösung von (3.1.5) mit $\pi_j > 0$ und $\sum_{j \in \mathcal{C}} \pi_j = 1$. Nun wird $p_0(t)$ so definiert, dass

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 0, \\ p'_0(t) &= \mu_1\pi_1(1 - p_0(t)), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

und

$$p_j(t) = \pi_j(1 - p_0(t)), \quad j \in \mathcal{C}, \quad t \geq 0. \quad (3.1.11)$$

Dann erfüllt $p_j(t)$ die Vorwärts-Differentialgleichungen (3.1.4), da mit (3.1.5) und (3.1.11)

$$\begin{aligned} \lambda_{j-1} \frac{p_{j-1}(t)}{1 - p_0(t)} - (\lambda_j + \mu_j) \frac{p_j(t)}{1 - p_0(t)} + \mu_{j+1} \frac{p_{j+1}(t)}{1 - p_0(t)} &= -\mu_1\pi_1\pi_j \\ \Leftrightarrow \lambda_{j-1}p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)p_j(t) + \mu_{j+1}p_{j+1}(t) &= -\mu_1\pi_1\pi_j(1 - p_0(t)), \end{aligned}$$

was wegen $p'_j(t) = -\pi_j p'_0(t) = -\pi_j \mu_1 \pi_1 (1 - p_0(t))$ (vgl. (3.1.11), (3.1.10)) äquivalent zu (3.1.4) ist. Da mit (3.1.11) $\sum_{j \in \mathcal{C}} p_j(t) = 1 - p_0(t)$ gilt, ist $p_j(t)$ gerade die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Prozess $(I(t))_{t \geq 0}$ zum Zeitpunkt t im Zustand j befindet. Anfangsverteilung ist $P(I(0) = j) = p_j(0) = \pi_j$, $j \in \mathcal{C}$, (vgl. (3.1.11))

und $P(I(0) = 0) = p_0(0) = 0$ (vgl. (3.1.10)). Da $(p_j(t))_{j \in \mathcal{C}}$ zudem noch dem Gleichungssystem

$$\frac{p_j(t)}{1 - p_0(t)} = \pi_j$$

genügt (vgl. wiederum (3.1.11)), ist π quasi-invariant und damit quasi-stationär.

□

Satz 3.1.2. *Die quasi-stationäre Verteilung des SIS-Modells ist implizit durch den Ausdruck*

$$\pi_j = \gamma(j)\alpha(j)T^{j-1}\pi_1, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (3.1.12)$$

gegeben, wobei

$$\gamma(j) := \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j \frac{1 - \sum_{l=1}^{n-1} \pi_l}{\alpha(n)T^{n-1}}, \quad (3.1.13)$$

$$\alpha(j) := \frac{N!}{(N-j)!N^j}, \quad (3.1.14)$$

und

$$\pi_1 = \frac{1}{S} \quad \text{mit} \quad S := \sum_{j=1}^N \gamma(j)\alpha(j)T^{j-1}. \quad (3.1.15)$$

Die Ausdrücke (3.1.12) bis (3.1.15) geben die quasi-stationäre Verteilung nicht in expliziter Form an, da $\gamma(j)$ in (3.1.13) immer noch von den Werten der π_l abhängt. Sie können jedoch benutzt werden, um die quasi-stationäre Verteilung numerisch per Iteration zu bestimmen (in der erweiterten Fassung der Arbeit [17] von Nåsell werden auf S.12 zwei Verfahren vorgestellt).

Insbesondere zeigt die Darstellung (3.1.9), dass die quasi-stationäre Verteilung π ein linker Eigenvektor der Matrix $A_{\mathcal{C}}$ zum Eigenwert $-\mu_1\pi_1$ ist.

Beweis. Werden in (3.1.5) die Definitionen (3.1.1) bzw. (3.1.2) von λ_i , μ_i und T eingesetzt, ergibt sich folgende Rekurrenzrelation:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_1}\pi_{j-1} - \left(\frac{\lambda_j + \mu_j}{\mu_1}\right)\pi_j + \frac{\mu_{j+1}}{\mu_1}\pi_{j+1} = -\pi_1\pi_j \\ \Leftrightarrow & \frac{(j-1)\lambda(N-j+1)}{\mu N}\pi_{j-1} - \left(\frac{j\lambda(N-j)}{\mu N} + \frac{j\mu}{\mu}\right)\pi_j + \frac{(j+1)\mu}{\mu}\pi_{j+1} = -\pi_1\pi_j \\ \Leftrightarrow & (j+1)\pi_{j+1} - j \left[T\left(1 - \frac{j}{N}\right) + 1\right]\pi_j + (j-1)T\left(1 - \frac{j-1}{N}\right)\pi_{j-1} = -\pi_1\pi_j, \\ & j \in \mathcal{C}, \quad \pi_0 = 0 = \pi_{N+1}. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Dieses Gleichungssystem kann mit Hilfe der Variablen h_j definiert durch

$$h_j := j\pi_j - (j-1)T \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) \pi_{j-1}, \quad j = 1, \dots, N+1 \quad (3.1.17)$$

ausgedrückt werden; damit gilt

$$\begin{aligned} h_1 &= \pi_1, \\ h_{j+1} - h_j &= -\pi_1\pi_j, \quad j \in \mathcal{C}, \\ h_{N+1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

(zur Überprüfung: Einsetzen von (3.1.17) in (3.1.18) ergibt (3.1.16)). Wird (3.1.18) so gelöst, dass h_j durch π_j ausgedrückt wird, ergibt sich

$$h_j = \pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \pi_i\right), \quad j = 1, \dots, N+1 \quad (3.1.19)$$

(iterativ mit (3.1.18), $h_1 = \pi_1$, $h_{j+1} = h_j - \pi_1\pi_j$, Einsetzen von h_1 in h_2 in h_3 usw.). Wird dieser Ausdruck nun in (3.1.17) eingesetzt und die Gleichung nach π_j aufgelöst, so gilt

$$\begin{aligned} \pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \pi_i\right) &= j\pi_j - (j-1)T \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) \pi_{j-1} \\ \Leftrightarrow \quad \pi_j &= \frac{1}{j} \left[\pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \pi_i\right) + (j-1)T \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) \pi_{j-1} \right]. \end{aligned}$$

Iteration liefert

$$\begin{aligned} \pi_j &= \frac{1}{j} \left[\pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \pi_i\right) + (j-1)T \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) \right. \\ &\quad \cdot \frac{1}{j-1} \left[\pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-2} \pi_i\right) + (j-2)T \left(1 - \frac{j-2}{N}\right) \cdot \pi_{j-2} \right] \left. \right] \\ &= \frac{1}{j} \left[\pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} \pi_i\right) + (j-1)T \left(1 - \frac{j-1}{N}\right) \right. \\ &\quad \cdot \frac{1}{j-1} \left[\pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-2} \pi_i\right) + (j-2)T \left(1 - \frac{j-2}{N}\right) \right. \\ &\quad \cdot \frac{1}{j-2} \left. \left[\pi_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{j-3} \pi_i\right) + (j-3)T \left(1 - \frac{j-3}{N}\right) \cdot \pi_{j-3} \right] \right] \left. \right] \\ &= \dots, \end{aligned}$$

und schließlich ist zu sehen, dass die quasi-stationäre Verteilung der Relation (3.1.12) genügt:

$$\pi_j = \frac{1}{j} \left(\sum_{n=1}^j \frac{1 - \sum_{l=1}^{n-1} \pi_l}{\frac{N!}{(N-n)!N^n} T^{n-1}} \right) \cdot \frac{N!}{(N-j)!N^j} \cdot T^{j-1} \cdot \pi_1$$

□

Die Verteilungsfunktion der quasi-stationären Verteilung π wird mit

$$F(k) := \sum_{j=1}^k \pi_j, \quad k \in \mathcal{C}, \quad (3.1.20)$$

bezeichnet und lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$F(k) = \frac{S_k}{S}, \quad \text{wobei} \quad S_k := \sum_{j=1}^k \gamma(j)\alpha(j)T^{j-1}. \quad (3.1.21)$$

3.2 Zwei Approximationen an das SIS-Modell

Im vorliegenden Abschnitt werden zwei Approximationen an das SIS-Modell vorgestellt, die schon von Kryscio und Lefèvre (1989) [13] diskutiert und von Nåsell [15], [16], [17] wieder aufgegriffen wurden.

Es handelt sich um zwei Geburts-und-Todes-Prozesse $(I^{(1)}(t))_{t \geq 0}$ und $(I^{(0)}(t))_{t \geq 0}$, deren Zustandsraum gerade \mathcal{C} , die Menge transienter Zustände des ursprünglichen Prozesses, ist, und denen ein absorzierender Zustand fehlt. Ferner haben beide nicht-degenerierte stationäre Verteilungen, bezeichnet mit $p^{(1)}$ bzw. $p^{(0)}$, die explizit angegeben werden können. Kryscio und Lefèvre nehmen an und haben teilweise bewiesen, dass $p^{(0)}$ für $T > 1$ die bessere Annäherung an q liefert, $p^{(1)}$ hingegen für $T < 1$.

3.2.1 Das SIS-Modell mit einem dauerhaft infizierten Individuum

Die erste Approximation wird mit den Worten ”*SIS-Modell mit einem dauerhaft infizierten Individuum*“ beschrieben. Die Übergangsraten lauten hier

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(1)} &:= i\lambda \left(1 - \frac{i}{N} \right) = \lambda_i, \quad i \in \mathcal{C}, \quad \lambda > 0, \\ \mu_i^{(1)} &:= (i-1)\mu = \mu_{i-1}, \quad i \in \mathcal{C}, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

d.h. die Infektionsraten bleiben unverändert, während durch die neuen Genesungsrraten sichergestellt wird, dass unter allen infizierten Individuen immer eines existiert, das nicht gesund werden kann. Die stationäre Verteilung von $(I^{(1)}(t))_{t \geq 0}$ wird mit $p^{(1)} = (p_j^{(1)})_{j \in \mathcal{C}}$ bezeichnet und es gilt:

Satz 3.2.1. *Die stationäre Verteilung des SIS-Modells mit einem dauerhaft infizierten Individuum ist explizit gegeben durch*

$$p_j^{(1)} = \alpha(j)T^{j-1}p_1^{(1)}, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (3.2.2)$$

wobei $\alpha(j)$ in (3.1.14) definiert wird und

$$p_1^{(1)} = \frac{1}{S^{(1)}} \quad \text{mit} \quad S^{(1)} := \sum_{j=1}^N \alpha(j)T^{j-1} \quad (3.2.3)$$

gegeben ist.

Beweis. Laut Satz 1.1.29 ist $p^{(1)}$ genau dann stationäre Verteilung des Prozesses, wenn $p^{(1)}A^{(1)} = 0$ gilt (wobei $A^{(1)}$ die Q-Matrix des vorliegenden Prozesses bezeichnet und die gleiche Gestalt wie $A_{\mathcal{C}}$ hat (siehe (3.1.7)), abgesehen von den leicht veränderten Genesungsrraten) und zudem $\sum_{j \in \mathcal{C}} p_j^{(1)} = 1$. Also gilt das Gleichungssystem

$$\lambda_{j-1}^{(1)}p_{j-1}^{(1)} - (\lambda_j^{(1)} + \mu_j^{(1)})p_j^{(1)} + \mu_{j+1}^{(1)}p_{j+1}^{(1)} = 0, \quad j \in \mathcal{C},$$

mit den Konventionen $\lambda_0^{(1)} = 0 = p_0^{(1)}$ für den Fall $j = 1$ und $\mu_{N+1}^{(1)} = 0 = p_{N+1}^{(1)}$ für den Fall $j = N$. Rekursiv ergibt sich daraus

$$\mu_j^{(1)}p_j^{(1)} = \lambda_{j-1}^{(1)}p_{j-1}^{(1)}, \quad j \in \mathcal{C}.$$

Iteration führt nun zu

$$\begin{aligned} p_j^{(1)} &= \frac{\lambda_{j-1}^{(1)}}{\mu_j^{(1)}}p_{j-1}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda_{j-2}^{(1)}\lambda_{j-1}^{(1)}}{\mu_{j-1}^{(1)}\mu_j^{(1)}}p_{j-2}^{(1)} \\ &= \dots \\ &= \frac{\lambda_1^{(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}^{(1)}}{\mu_2^{(1)} \cdot \dots \cdot \mu_j^{(1)}}p_1^{(1)}, \quad j \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

wobei $p_1^{(1)}$ so bestimmt wird, dass $\sum_{j=1}^N p_j^{(1)} = 1$ gilt, d.h.

$$p_1^{(1)} = \left(\sum_{n=1}^N \eta_n^{(1)} \right)^{-1}$$

mit

$$\eta_1^{(1)} := 1, \quad \eta_n^{(1)} := \frac{\lambda_1^{(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}^{(1)}}{\mu_2^{(1)} \cdot \dots \cdot \mu_n^{(1)}}, \quad n = 2, \dots, N.$$

Werden die Definitionen (3.2.1) der $\lambda_i^{(1)}$ und $\mu_i^{(1)}$ eingesetzt, wird daraus

$$\begin{aligned} p_j^{(1)} &= \lambda \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \dots \cdot (j-1) \lambda \left(1 - \frac{(j-1)}{N}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \dots \cdot \frac{1}{(j-1)\mu} \\ &\quad \cdot \left[1 + \sum_{n=2}^N \lambda \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \dots \cdot (n-1) \lambda \left(1 - \frac{(n-1)}{N}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \dots \cdot \frac{1}{(n-1)\mu} \right]^{-1} \\ &= T^{j-1} \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{N-(j-1)}{N}\right) \\ &\quad \cdot \left[1 + \sum_{n=2}^N T^{n-1} \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{N-(n-1)}{N}\right) \right]^{-1} \\ &= T^{j-1} \cdot \frac{(N-1)!}{(N-j)!N^{j-1}} \cdot \frac{N}{N} \cdot \left[1 + \sum_{n=2}^N T^{n-1} \cdot \frac{(N-1)!}{(N-n)!N^{n-1}} \cdot \frac{N}{N} \right]^{-1} \\ &= \frac{N!}{(N-j)!N^j} T^{j-1} \left[\sum_{n=1}^N \frac{N!}{(N-n)!N^n} T^{n-1} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

was genau der Gleichung (3.2.2) entspricht. \square

Die Verteilungsfunktion von $p^{(1)}$ wird bezeichnet mit

$$F^{(1)}(k) := \sum_{j=1}^k p_j^{(1)}, \quad k \in \mathcal{C}, \quad (3.2.4)$$

und lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$F^{(1)}(k) = \frac{S_k^{(1)}}{S^{(1)}}, \quad \text{wobei} \quad S_k^{(1)} := \sum_{j=1}^k \alpha(j) T^{j-1}. \quad (3.2.5)$$

3.2.2 Das SIS-Modell mit versperrttem Ursprung

Bei der zweiten Approximation handelt es sich um das sogenannte "SIS-Modell mit versperrtem Ursprung". Hier sind die Übergangsraten unverändert, abgesehen davon, dass μ_1 durch 0 ersetzt wird, d.h.:

$$\begin{aligned} \lambda_i^{(0)} &:= i\lambda \left(1 - \frac{i}{N}\right) = \lambda_i, \quad i \in \mathcal{C}, \quad \lambda > 0, \\ \mu_1^{(0)} &:= 0, \\ \mu_i^{(0)} &:= i\mu = \mu_i, \quad i \in \mathcal{C} \setminus \{1\}, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Die Übertragung der Infektion verhält sich hier also wie im ursprünglichen Modell, bedingt darunter, dass mindestens zwei Individuen infiziert sind. Ist nur eines infiziert, kann dieses nicht genesen.

Dieser Prozess wird oft auch als "reflektierender Prozess" bezeichnet, da der absorbierende Zustand 0 durch einen reflektierenden Zustand 1 ersetzt wird.

Die stationäre Verteilung wird hier mit $p^{(0)} = (p_j^{(0)})_{j \in \mathcal{C}}$ bezeichnet und es gilt:

Satz 3.2.2. *Die stationäre Verteilung des SIS-Modells mit versperrtem Ursprung ist explizit gegeben durch*

$$p_j^{(0)} = \frac{1}{j} \alpha(j) T^{j-1} p_1^{(0)}, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (3.2.7)$$

wobei $\alpha(j)$ in (3.1.14) definiert wird und

$$p_1^{(0)} = \frac{1}{S^{(0)}} \quad \text{mit} \quad S^{(0)} := \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \alpha(j) T^{j-1}. \quad (3.2.8)$$

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.2.1. □

Die Verteilungsfunktion von $p^{(0)}$ wird bezeichnet mit

$$F^{(0)}(k) = \sum_{j=1}^k p_j^{(0)}, \quad k \in \mathcal{C}, \quad (3.2.9)$$

und lässt sich schreiben mit

$$F^{(0)}(k) = \frac{S_k^{(0)}}{S^{(0)}}, \quad \text{wobei} \quad S_k^{(0)} := \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \alpha(j) T^{j-1}. \quad (3.2.10)$$

Kapitel 4

Annäherung an die quasi-stationäre Verteilung

Im vorliegenden Kapitel soll gezeigt werden, dass die beiden Geburts-und-Todes-Prozesse des vorangegangenen Abschnitts eine obere bzw. eine untere Schranke der quasi-stationären Verteilung liefern.

Cavender [5] hat 1978 gezeigt, dass die stationäre Verteilung des SIS-Modells mit versperrttem Ursprung stochastisch kleiner ist als die quasi-stationäre Verteilung des SIS-Modells. Im Jahre 2003 wurde dies noch einmal von Clancy und Pollett [6] gefolgert; sie konnten zudem zeigen, dass die stationäre Verteilung des SIS-Modells mit einem dauerhaft infizierten Individuum stochastisch größer ist als die quasi-stationäre Verteilung.

4.1 Eine untere Schranke

Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin zu zeigen, dass die stationäre Verteilung des SIS-Modells mit versperrttem Ursprung stochastisch kleiner ist als die quasi-stationäre Verteilung des ursprünglichen SIS-Modells, in Zeichen $p^{(0)} \prec_{ST} \pi$, d.h., dass gilt

$$F^{(0)}(k) = \sum_{j=1}^k p_j^{(0)} \geq \sum_{j=1}^k \pi_j = F(k), \quad k \in \mathcal{C}. \quad (4.1.1)$$

Wie schon in (3.1.5) gesehen, genügt die quasi-stationäre Verteilung folgendem Gleichungssystem

$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} + \mu_1\pi_1\pi_j = 0, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (4.1.2)$$

mit den Konventionen $\lambda_0 = 0 = \pi_0$ für den Fall $j = 1$ und $\mu_{N+1} = 0 = \pi_{N+1}$ für den Fall $j = N$. Eine äquivalente Charakterisierung gibt das folgende Lemma.

Lemma 4.1.1. *Definiere eine Folge von Polynomen $(f_1(x), \dots, f_N(x))$ in der Unbestimmten x durch*

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= x, \\ f_j(x) &:= \frac{\lambda_{j-1}f_{j-1}(x) + \mu_1x \left[1 - \sum_{n=1}^{j-1} f_n(x)\right]}{\mu_j}, \quad j = 2, \dots, N, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

und setze

$$g_j(x) := \sum_{l=1}^j f_l(x).$$

Eine Folge $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{C}}$ mit mindestens einem $\pi_j \neq 0$ genügt genau dann dem Gleichungssystem (4.1.2), wenn sowohl $g_N(\pi_1) = 1$ als auch $\pi_j = f_j(\pi_1)$, $j \in \mathcal{C}$, erfüllt sind.

Beweis. Zunächst sei π eine Folge mit $\pi_j = f_j(\pi_1)$ für alle $j \in \mathcal{C}$, d.h.

$$\pi_j = \frac{\lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_1\pi_1 \left[1 - \sum_{n=1}^{j-1} \pi_n\right]}{\mu_j},$$

oder äquivalent dazu

$$\mu_j\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1} = \mu_1\pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^{j-1} \pi_n\right). \tag{4.1.4}$$

Hieraus folgt direkt

$$\begin{aligned} \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} &= (\mu_{j+1}\pi_{j+1} - \lambda_j\pi_j) - (\mu_j\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1}) \\ &= \mu_1\pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^j \pi_n\right) - \mu_1\pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^{j-1} \pi_n\right) \\ &= -\mu_1\pi_1\pi_j, \end{aligned}$$

d.h. (4.1.2).

Für den umgekehrten Schluss genüge nun π dem Gleichungssystem (4.1.2). Per Induktion kann (4.1.4) gezeigt werden, woraus sofort (4.1.3) folgt. Den Induktionsanfang macht $\pi_1 = f_1(\pi_1)$, und aus

$$-(\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 \stackrel{(4.1.2)}{=} -\mu_1\pi_1^2$$

folgt

$$\begin{aligned} \mu_2\pi_2 - \lambda_1\pi_1 &= \mu_1\pi_1 - \mu_1\pi_1^2 = \mu_1\pi_1(1 - \pi_1) \\ &= \mu_1\pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^1 \pi_n\right). \end{aligned}$$

Also gelte für festes aber beliebiges $j \in \mathcal{C}$

$$\mu_j \pi_j - \lambda_{j-1} \pi_{j-1} = \mu_1 \pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^{j-1} \pi_n \right).$$

Den Induktionsschluss liefert

$$\begin{aligned} \mu_{j+1} \pi_{j+1} - \lambda_j \pi_j &= \mu_{j+1} \pi_{j+1} - \lambda_j \pi_j - \mu_j \pi_j + \lambda_{j-1} \pi_{j-1} + (\mu_j \pi_j - \lambda_{j-1} \pi_{j-1}) \\ &\stackrel{I.V., (4.1.2)}{=} -\mu_1 \pi_1 \pi_j + \mu_1 \pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^{j-1} \pi_n \right) \\ &= \mu_1 \pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^j \pi_n \right). \end{aligned}$$

Somit bleibt zu zeigen, dass $g_N(\pi_1) = 1$, falls π quasi-stationäre Verteilung ist. $\pi_1 \neq 0$ folgt aus der Definition (vgl. Bemerkung 2.1.2). Es gilt (4.1.2), Summation liefert

$$\sum_{j=1}^N (\lambda_{j-1} \pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j) \pi_j + \mu_{j+1} \pi_{j+1} + \mu_1 \pi_1 \pi_j) = 0,$$

was sich vereinfachen lässt zu

$$-\mu_1 \pi_1 + \mu_1 \pi_1 \sum_{j=1}^N \pi_j = 0.$$

Durch Äquivalenzumformung erhält man damit wie gewünscht

$$g_N(\pi_1) = \sum_{j=1}^N \pi_j = 1.$$

□

Mit Hilfe des Lemmas lässt sich nun (4.1.1) beweisen; tatsächlich gilt sogar folgende schärfere Variante.

Satz 4.1.2. Für eine quasi-stationäre Verteilung $\pi = (\pi_j)_{j \in \mathcal{C}}$ gilt

$$\sum_{j=1}^k \pi_j < \sum_{j=1}^k p_j^{(0)}, \quad k \in \mathcal{C}.$$

Beweis. Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\lambda_1^{(0)} p_1^{(0)} + \mu_2^{(0)} p_2^{(0)} &= 0 \\ \lambda_{j-1}^{(0)} p_{j-1}^{(0)} - (\lambda_j^{(0)} + \mu_j^{(0)}) p_j^{(0)} + \mu_{j+1}^{(0)} p_{j+1}^{(0)} &= 0, \quad j = 2, \dots, N-1 \\ \lambda_{N-1}^{(0)} p_{N-1}^{(0)} - (\lambda_N^{(0)} + \mu_N^{(0)}) p_N^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

(vgl. Satz 1.1.29) ergibt sich rekursiv, dass die $p_j^{(0)}$ die Gleichung

$$\mu_{j+1}^{(0)} p_{j+1}^{(0)} = \lambda_j^{(0)} p_j^{(0)}$$

mit den zugehörigen Konventionen erfüllen. Diese ist äquivalent zu

$$\frac{p_j^{(0)}}{p_{j+1}^{(0)}} = \frac{\mu_{j+1}^{(0)}}{\lambda_j^{(0)}} \quad \stackrel{(3.2.6)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{p_j^{(0)}}{p_{j+1}^{(0)}} = \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_j}. \quad (4.1.5)$$

Für eine quasi-stationäre Verteilung π gilt nun

$$\lambda_j \pi_j = \mu_{j+1} \pi_{j+1} - \mu_1 \pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^j \pi_n \right)$$

(siehe (4.1.3)), was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned} \frac{\pi_j}{\pi_{j+1}} &= \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_j} - \frac{\mu_1 \pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^j \pi_n \right)}{\lambda_j \pi_{j+1}} \\ &\stackrel{(4.1.5)}{=} \frac{p_j^{(0)}}{p_{j+1}^{(0)}} - \frac{\mu_1 \pi_1 \left(1 - \sum_{n=1}^j \pi_n \right)}{\lambda_j \pi_{j+1}} \\ &< \frac{p_j^{(0)}}{p_{j+1}^{(0)}}, \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

falls $\sum_{n=1}^j \pi_n < 1$ und alle $p_j^{(0)}, \pi_j$ positiv — was ja hier der Fall ist. Falls nun

$$\sum_{j=1}^k \pi_j \geq \sum_{j=1}^k p_j^{(0)} \quad (4.1.6)$$

und somit $\pi_i \geq p_i^{(0)}$ für ein $i \leq k$, folgt (da $\pi_{i+1}/\pi_i > p_{i+1}^{(0)}/p_i^{(0)}$)

$$\pi_{i+1} > p_{i+1}^{(0)}.$$

Wiederholung des Arguments liefert $\pi_{i+2} > p_{i+2}^{(0)}$, und schließlich

$$\pi_j > p_j^{(0)}, \quad i < j \leq N.$$

Daher gilt

$$\sum_{j=k+1}^N \pi_j > \sum_{j=k+1}^N p_j^{(0)};$$

Addition dieser Ungleichung zu (4.1.6) ergibt

$$\sum_{j=1}^N \pi_j > \sum_{j=1}^N p_j^{(0)}$$

— ein Widerspruch, da $\sum_{j=1}^N p_j^{(0)} = 1$. Also gilt die Behauptung. \square

4.2 Eine obere Schranke

Um nun zu zeigen, dass die stationäre Verteilung des SIS-Modells mit einem dauerhaft infizierten Individuum stochastisch größer ist als die quasi-stationäre Verteilung des ursprünglichen SIS-Modells — $\pi \prec_{ST} p^{(1)}$ — d.h., dass

$$F(k) = \sum_{j=1}^k \pi_j \geq \sum_{j=1}^k p_j^{(1)} = F^{(1)}(k), \quad k \in \mathcal{C}, \quad (4.2.1)$$

gilt, betrachten Clancy und Pollett [6] eine von Ferrari et al. [9] wie folgt definierte Abbildung Φ .

Ist eine Verteilung $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ gegeben, so wird angenommen, dass der Prozess — sobald er im Zustand 0 ankommt — mit Wahrscheinlichkeit ν_j im Zustand $j \in \{1, \dots, N\}$ neu startet. Der auf diese Weise neu gestartete Prozess hat einen endlichen irreduziblen Zustandsraum und daher eine eindeutig bestimmte stationäre Verteilung $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)$. Die Abbildung wird dann durch $\Phi(\nu) := \rho$ definiert. Da die quasi-stationäre Verteilung π niemals im Zustand 0 ankommt, gelangt sie in jeden Zustand $j \in \mathcal{C}$ mit Wahrscheinlichkeit $\nu_j = \pi_j = \rho_j$. Es gilt also $\Phi(\pi) = \pi$; π ist der einzige Fixpunkt der Abbildung.

Ferrari et al. [9] bezeichnen den neu gestarteten Prozess als "Auferstehungs-Prozess". Er lässt sich konstruieren, indem zu einem gegebenen Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ auf \mathcal{S} mit Anfangsverteilung α eine Folge $\{X_k(t) : k = 1, 2, \dots\}$ unabhängiger Kopien von $X(t)$ mit Anfangsverteilung α und Absorptionszeiten

$t_k := \inf\{t : X_k(t) = 0\}$ betrachtet werden. Der "Auferstehungs-Prozess" wird definiert durch

$$\begin{aligned} s_0 &:= 0, \quad s_k := \sum_{i=1}^k t_i \quad \text{für } k \geq 1, \\ Y^\alpha(t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(t - s_{k-1}) \mathbf{1}_{[s_{k-1}, s_k)}(t); \end{aligned}$$

also wird jeweils eine Kopie des ursprünglichen Prozesses laufen gelassen, und jedes Mal, wenn solch eine Kopie absorbiert wird, wird sie sofort durch die nächste Kopie ersetzt.

Im vorliegenden Fall eines endlichen Geburts-und-Todes-Prozesses kann die Abbildung Φ explizit angegeben werden. Ist eine Verteilung ν gegeben, genügt $\rho = \Phi(\nu)$ dem Gleichungssystem

$$\lambda_{j-1}\rho_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\rho_j + \mu_{j+1}\rho_{j+1} = -\mu_1\rho_1\nu_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.2.2)$$

mit $\rho_0 = \rho_{N+1} = 0$. Ähnlich wie Nåsell [15], [16], [17] (vgl. 3.1.17) benutzen Clancy und Pollett [6] Variablen

$$\tilde{h}_j := \mu_j\rho_j - \lambda_{j-1}\rho_{j-1}, \quad j = 2, \dots, N. \quad (4.2.3)$$

Das Gleichungssystem (4.2.2) lässt sich dann durch

$$\begin{aligned}\tilde{h}_2 &= \mu_1 \rho_1 (1 - \nu_1), \\ \tilde{h}_{j+1} &= \tilde{h}_j - \mu_1 \rho_1 \nu_j, \quad j = 2, \dots, N-1,\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

ausdrücken (Überprüfung: Einsetzen von (4.2.3) in (4.2.4) ergibt (4.2.2)), und es ergibt sich (iterativ mit (4.2.4), Einsetzen von \tilde{h}_2 in \tilde{h}_3 in \tilde{h}_4 in ...)

$$\tilde{h}_j = \mu_1 \rho_1 a_j, \quad j = 2, \dots, N,\tag{4.2.5}$$

wobei $a_j := \sum_{i=j}^N \nu_i$. Einsetzen von (4.2.5) in (4.2.3) und Auflösen nach ρ_j liefert

$$\begin{aligned}\mu_1 \rho_1 a_j &= \mu_j \rho_j - \lambda_{j-1} \rho_{j-1} \\ \Leftrightarrow \quad \rho_j &= \frac{1}{\mu_j} (\mu_1 \rho_1 a_j + \lambda_{j-1} \rho_{j-1}).\end{aligned}$$

Iteration führt zu

$$\begin{aligned}\rho_j &= \frac{1}{\mu_j} \left(\mu_1 \rho_1 a_j + \lambda_{j-1} \cdot \frac{1}{\mu_{j-1}} (\mu_1 \rho_1 a_{j-1} + \lambda_{j-2} \cdot \rho_{j-2}) \right) \\ &= \frac{1}{\mu_j} \left(\mu_1 \rho_1 a_j + \lambda_{j-1} \cdot \frac{1}{\mu_{j-1}} \left(\mu_1 \rho_1 a_{j-1} + \lambda_{j-2} \cdot \frac{1}{\mu_{j-2}} (\mu_1 \rho_1 a_{j-2} + \lambda_{j-3} \cdot \rho_{j-3}) \right) \right) \\ &= \dots\end{aligned}$$

und schließlich zu

$$\rho_j = \rho_1 \frac{\mu_1}{\mu_j} \sum_{i=1}^j \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} a_i, \quad j = 1, \dots, N,\tag{4.2.6}$$

wobei ρ_1 so gewählt sei, dass ρ eine Verteilung ergibt. Die Komponenten von $\rho = \Phi(\nu)$ sind somit durch (4.2.6) explizit gegeben.

Um nun zwei Verteilungen miteinander vergleichen zu können, verwenden Clancy und Pollett [6] die sogenannte "likelihood ratio"-Ordnung \prec_{LR} , welche auch schon von Kijima und Seneta [12] definiert wurde.

Definition 4.2.1. Gegeben zwei Verteilungen $\nu^{(1)}$ und $\nu^{(2)}$ auf $\{1, \dots, N\}$, wird die "likelihood ratio"-Ordnung \prec_{LR} definiert durch

$$\nu^{(1)} \prec_{LR} \nu^{(2)}, \quad \text{wenn} \quad \nu_i^{(1)} \nu_j^{(2)} \geq \nu_j^{(1)} \nu_i^{(2)} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq N.$$

Unter Verwendung von (4.2.6) kann gezeigt werden, dass die Abbildung Φ die "likelihood ratio"-Ordnung zwischen zwei Verteilungen unverändert erhält.

Theorem 4.2.2. Für zwei Verteilungen $\nu^{(1)}$ und $\nu^{(2)}$ auf $\{1, \dots, N\}$ gilt:

$$\nu^{(1)} \prec_{LR} \nu^{(2)} \quad \Rightarrow \quad \Phi(\nu^{(1)}) \prec_{LR} \Phi(\nu^{(2)}).$$

Beweis. Definiere $\rho^{(1)} := \Phi(\nu^{(1)})$, $\rho^{(2)} := \Phi(\nu^{(2)})$ und für $1 \leq k \leq i \leq N$ setze $b_{ik} := \prod_{l=k}^{i-1} \lambda_l / \mu_l$. Aus (4.2.6) wird damit

$$\rho_i^{(1)} = \rho_1^{(1)} \frac{\mu_1}{\mu_i} \sum_{k=1}^i b_{ik} a_k^{(1)} \quad \text{und} \quad \rho_j^{(2)} = \rho_1^{(2)} \frac{\mu_1}{\mu_j} \sum_{l=1}^j b_{jl} a_l^{(2)},$$

wobei $a_j^{(r)} := \sum_{k=j}^N \nu_k^{(r)}$, $r = 1, 2$. Daher ergibt sich für $1 \leq i \leq j \leq N$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i^{(1)} \rho_j^{(2)} - \rho_j^{(1)} \rho_i^{(2)}}{\rho_1^{(1)} \rho_1^{(2)}} &= \frac{\mu_1^2}{\mu_j \mu_i} \left(\sum_{k=1}^i b_{ik} a_k^{(1)} \sum_{l=1}^j b_{jl} a_l^{(2)} - \sum_{k=1}^j b_{jk} a_k^{(1)} \sum_{l=1}^i b_{il} a_l^{(2)} \right) \\ &\stackrel{b_{ik} b_{jl} = b_{jk} b_{il}}{=} \frac{\mu_1^2}{\mu_j \mu_i} \sum_{k=1}^i \sum_{l=i+1}^j b_{ik} b_{jl} \left(a_k^{(1)} a_l^{(2)} - a_l^{(1)} a_k^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Für $k < l$ gilt nun

$$\begin{aligned} a_k^{(1)} a_l^{(2)} - a_l^{(1)} a_k^{(2)} &= \sum_{r=k}^N \nu_r^{(1)} \sum_{s=l}^N \nu_s^{(2)} - \sum_{r=l}^N \nu_r^{(1)} \sum_{s=k}^N \nu_s^{(2)} \\ &= \sum_{r=k}^{l-1} \sum_{s=l}^N (\nu_r^{(1)} \nu_s^{(2)} - \nu_s^{(1)} \nu_r^{(2)}) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

woraus, wie gewünscht, $\rho_i^{(1)} \rho_j^{(2)} \geq \rho_j^{(1)} \rho_i^{(2)}$ folgt. \square

Bezeichne e_j die Verteilung, die ihre gesamte Masse auf den Zustand j legt. Die quasi-stationäre Verteilung π lässt sich nun wie folgt mit zwei degenerierten Verteilungen vergleichen.

Korollar 4.2.3. Für die quasi-stationäre Verteilung π gilt:

$$\Phi(e_1) \prec_{LR} \pi \prec_{LR} \Phi(e_N).$$

Beweis. Es gilt $e_1 \prec_{LR} \pi \prec_{LR} e_N$, da

$$\begin{aligned} e_{1i} \pi_j &\geq e_{1j} \pi_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq N \text{ mit den möglichen Fällen} \\ e_{11} \pi_1 &= e_{11} \pi_1 \quad (i = 1 = j), \\ e_{1i} \pi_j &= 0 = e_{1j} \pi_i \quad (i \neq 1 \neq j), \\ e_{11} \pi_j &> e_{1j} \pi_1 = 0 \quad (i = 1, j \neq 1), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\pi_i e_{Nj} &\geq \pi_j e_{Ni} \quad \text{für } 1 \leq i \leq j \leq N \text{ mit den möglichen Fällen} \\ \pi_N e_{NN} &= \pi_N e_{NN} \quad (i = N = j), \\ \pi_i e_{Nj} &= 0 = \pi_j e_{Ni} \quad (i \neq N \neq j), \\ \pi_i e_{NN} &> \pi_N e_{Ni} = 0 \quad (i \neq N, j = N).\end{aligned}$$

Mit Theorem 4.2.2 folgt

$$\Phi(e_1) \prec_{LR} \Phi(\pi) \prec_{LR} \Phi(e_N),$$

und da π Fixpunkt der Abbildung Φ ist, gilt die Behauptung. \square

Kijima und Seneta haben schon in ihrer Arbeit von 1991 [12] gezeigt, dass die "likelihood ratio"-Ordnung die stochastische Ordnung impliziert.

Satz 4.2.4. *Für zwei Verteilungen $\nu^{(1)}$ und $\nu^{(2)}$ auf $\{1, \dots, N\}$ gilt:*

$$\nu^{(1)} \prec_{LR} \nu^{(2)} \Rightarrow \nu^{(1)} \prec_{ST} \nu^{(2)}.$$

Beweis. $\nu^{(1)} \prec_{LR} \nu^{(2)}$ wird angenommen, d.h.

$$\nu_i^{(1)} \nu_j^{(2)} \geq \nu_j^{(1)} \nu_i^{(2)}, \quad 1 \leq i \leq j \leq N.$$

Summation der Ungleichungen von 1 bis i liefert

$$\sum_{n=1}^i \nu_n^{(1)} \nu_j^{(2)} \geq \sum_{m=1}^i \nu_m^{(2)} \nu_j^{(1)}, \quad 1 \leq i \leq j \leq N,$$

Gleiches von $i+1$ bis j führt zu

$$\sum_{n=1}^i \nu_n^{(1)} \left(\nu_{i+1}^{(2)} + \dots + \nu_j^{(2)} \right) \geq \sum_{m=1}^i \nu_m^{(2)} \left(\nu_{i+1}^{(1)} + \dots + \nu_j^{(1)} \right), \quad 1 \leq i < j \leq N.$$

Durch Addition von $\sum_{n=1}^i \nu_n^{(1)} \sum_{m=1}^i \nu_m^{(2)}$ auf beiden Seiten ergibt sich daraus

$$\sum_{n=1}^i \nu_n^{(1)} \sum_{m=1}^j \nu_m^{(2)} \geq \sum_{m=1}^i \nu_m^{(2)} \sum_{n=1}^j \nu_n^{(1)}, \quad 1 \leq i < j \leq N.$$

Wird nun $j = N$ gesetzt, so folgt

$$\sum_{n=1}^i \nu_n^{(1)} \geq \sum_{m=1}^i \nu_m^{(2)}, \quad 1 \leq i < N,$$

und da $\nu^{(1)}$ und $\nu^{(2)}$ Verteilungen sind, gilt dies auch noch für $i = N$; d.h. $\nu^{(2)}$ ist stochastisch größer als $\nu^{(1)}$. \square

Mit Korollar 4.2.3 ergibt sich damit direkt die Aussage eines Theorems, das schon von Keilson und Ramaswamy [11] bewiesen wurde.

Korollar 4.2.5. *Für die quasi-stationäre Verteilung π gilt:*

$$\Phi(e_1) \prec_{ST} \pi \prec_{ST} \Phi(e_N).$$

Bemerkung 4.2.6. 1. Im SIS-Modell wird aus der Gleichung (4.2.6)

$$\begin{aligned} \rho_j &= \rho_1 \frac{\mu}{j\mu} \sum_{i=1}^j \prod_{k=i}^{j-1} k \lambda \frac{(N-k)}{N} \cdot \frac{1}{k\mu} \cdot a_i \\ &= \frac{\rho_1}{j} \sum_{i=1}^j \prod_{k=i}^{j-1} \frac{T}{N} (N-k) a_i \\ &= \frac{\rho_1}{j} \sum_{i=1}^j \left(\frac{T}{N} \right)^{j-i} \frac{(N-i)!}{(N-j)!} a_i \\ &= \frac{1}{j(N-j)!} \sum_{i=1}^j \left[\left(\frac{T}{N} \right)^{j-i} (N-i)! a_i \right] \rho_1. \end{aligned}$$

2. Die Verteilung $\Phi(e_1) = ((\Phi(e_1))_1, \dots, (\Phi(e_1))_N)$ hat eine sehr einfache Form, da in diesem Fall der einzige nicht-triviale Term in der Summe auf der rechten Seite der Gleichung (4.2.6) der ($i = 1$)–Term ist:

$$(\Phi(e_1))_j = \rho_1 \frac{\mu_1}{\mu_j} \sum_{i=1}^j \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \left(\sum_{l=i}^N e_{1l} \right) = \rho_1 \frac{\mu_1}{\mu_j} \prod_{k=1}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Wird nun der Prozess $(I^{(0)}(t))_{t \geq 0}$ mit Reflektion im Zustand 0 betrachtet, so ist dies äquivalent dazu, dass der Prozess im Zustand 1 neu startet, sobald er im Zustand 0 angekommen ist. Somit ist die stationäre Verteilung dieses Approximations-Prozesses gerade $(p^{(0)}) = \Phi(e_1)$. Laut Korollar 4.2.3 bzw. 4.2.5 gilt $\Phi(e_1) \prec_{LR} \pi$ bzw. $\Phi(e_1) \prec_{ST} \pi$, womit ein weiterer Beweis dafür erbracht wäre, dass die stationäre Verteilung des SIS-Modells mit versperrtem Ursprung stochastisch kleiner ist als die quasi-stationäre Verteilung des SIS-Modells.

3. Als obere Schranke für π könnte die Verteilung

$\Phi(e_N) = ((\Phi(e_N))_1, \dots, (\Phi(e_N))_N)$ verwendet werden. Diese hat jedoch nicht die besonders einfache Form von $\Phi(e_1)$, da hier alle Terme der Summe

auf der rechten Seite der Gleichung (4.2.6) nicht trivial sind; es gilt

$$(\Phi(e_N))_j = \rho_1 \frac{\mu_1}{\mu_j} \sum_{i=1}^j \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} \left(\sum_{l=i}^N e_{Nl} \right) = \rho_1 \frac{\mu_1}{\mu_j} \sum_{i=1}^j \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Stattdessen betrachten Clancy und Pollett [6] wie auch schon Kryscio und Lefèvre [13] sowie Nåsell [15], [16], [17], das SIS-Modell mit einem dauerhaft infizierten Individuum mit der stationären Verteilung $p^{(1)}$, deren spezielle Gestalt mit

$$p_j^{(1)} = \frac{(N-1)!}{(N-j)!} \left(\frac{T}{N} \right)^{j-1} p_1^{(1)}, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (4.2.7)$$

angegeben werden kann (vgl. (3.2.2)). Wie schon erwähnt, nahmen Kryscio und Lefèvre [13] aufgrund empirischer Beobachtungen an, dass $\pi \prec_{ST} p^{(1)}$ gilt, haben dies aber nicht konkret bewiesen. Mit Theorem 4.2.2 ist dies nun wie folgt möglich.

Satz 4.2.7. *Es gilt*

$$\pi \prec_{ST} p^{(1)},$$

d.h. (4.2.1).

Beweis. $(I^{(1)}(t))_{t \geq 0}$ ist kein Prozess, der neu gestartet wird, sobald er im Zustand 0 ankommt. Jedoch kann die Abbildung Φ gegeben durch (4.2.6) invertiert werden; gegeben irgendeine Verteilung ρ sind die Werte ν_1, \dots, ν_N mit $\Phi(\nu) = \rho$ direkt durch (4.2.2) gegeben. Wird also die Gleichung $\Phi(\nu) = p^{(1)}$ gelöst, so kann möglicherweise eine Anfangsverteilung ν bestimmt werden, für welche der neu gestartete Prozess die stationäre Verteilung $p^{(1)}$ hat. Wird in (4.2.2) $\rho_j = p_j^{(1)}$ gesetzt, so gilt

$$\lambda_{j-1} p_{j-1}^{(1)} - (\lambda_j + \mu_j) p_j^{(1)} + \mu_{j+1} p_{j+1}^{(1)} = -\mu_1 p_1^{(1)} \nu_j,$$

und unter Verwendung der ursprünglichen Übergangsraten (3.1.1) sowie der Gleichung (4.2.7) wird daraus

$$\begin{aligned} -\mu p_1^{(1)} \nu_j &= (j-1) \lambda \frac{(N-j+1)}{N} \frac{(N-1)!}{(N-j+1)!} \left(\frac{T}{N} \right)^{j-2} p_1^{(1)} \\ &\quad - \left(j \lambda \frac{(N-j)}{N} + j \mu \right) \frac{(N-1)!}{(N-j)!} \left(\frac{T}{N} \right)^{j-1} p_1^{(1)} \\ &\quad + (j+1) \mu \frac{(N-1)!}{(N-j-1)!} \left(\frac{T}{N} \right)^j p_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich äquivalent umformen zu

$$\begin{aligned}\nu_j &= \frac{(N-1)!}{(N-j)!} \left(\frac{T}{N}\right)^{j-1} \left[(j-1)\lambda \frac{(N-j+1)}{N} \frac{1}{(N-j+1)} \frac{N}{T} \right. \\ &\quad \left. - \left(j\lambda \frac{(N-j)}{N} + j\mu\right) + (j+1)\mu(N-j) \frac{T}{N} \right] \left(-\frac{1}{\mu}\right) \\ &= \frac{(N-1)!}{(N-j)!} \left(\frac{T}{N}\right)^{j-1} \left[-(j-1) + jT \frac{N-j}{N} + j - (j+1)(N-j) \frac{T}{N} \right],\end{aligned}$$

und schließlich ergibt sich

$$\nu_j = \frac{(N-1)!}{(N-j)!} \left(\frac{T}{N}\right)^{j-1} \left(1 - T \left(1 - \frac{j}{N}\right)\right), \quad j \in \mathcal{C}. \quad (4.2.8)$$

Um $\nu_j \geq 0$, d.h. $(1 - T \left(1 - \frac{j}{N}\right)) \geq 0$, für alle $j \in \mathcal{C}$ sicherzustellen, wird $T \leq 1 + 1/(N-1)$ vorausgesetzt ($\sum_{j=1}^N \nu_j = 1$ wird durch (4.2.2) garantiert). Somit kann auf jeden Fall im subkritischen (d.h. nichtendemischen) Fall $T < 1$ die Verteilung $p^{(1)}$ als stationäre Verteilung eines neu gestarteten Prozesses gewonnen werden.

Für $1 \leq i \leq j \leq N$, mit ν gegeben durch (4.2.8) und $p^{(1)}$ gegeben durch (4.2.7), gilt

$$\begin{aligned}p_i^{(1)} \nu_j - p_j^{(1)} \nu_i &= \frac{(N-1)!}{(N-i)!} \left(\frac{T}{N}\right)^{i-1} p_1^{(1)} \cdot \frac{(N-1)!}{(N-j)!} \left(\frac{T}{N}\right)^{j-1} \left(1 - T \left(1 - \frac{j}{N}\right)\right) \\ &\quad - \frac{(N-1)!}{(N-j)!} \left(\frac{T}{N}\right)^{j-1} p_1^{(1)} \cdot \frac{(N-1)!}{(N-i)!} \left(\frac{T}{N}\right)^{i-1} \left(1 - T \left(1 - \frac{i}{N}\right)\right) \\ &= \frac{((N-1)!)^2}{(N-i)!(N-j)!} \cdot \left(\frac{T}{N}\right)^{i+j-2} \cdot p_1^{(1)} \cdot \left[\left(1 - T + \frac{T}{N}j\right) - \left(1 - T + \frac{T}{N}i\right)\right] \\ &= \frac{((N-1)!)^2}{(N-i)!(N-j)!} \cdot \left(\frac{T}{N}\right)^{i+j-1} \cdot p_1^{(1)} \cdot (j-i) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

d.h. $p^{(1)} = \Phi(\nu) \prec_{LR} \nu$. Wiederholte Anwendung von Theorem 4.2.2 liefert

$$\Phi^n(\nu) \prec_{LR} \Phi^{n-1}(\nu) \prec_{LR} \dots \prec_{LR} p^{(1)} \prec_{LR} \nu.$$

Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich — wie von Ferrari et al. [9] bewiesen (siehe Abschnitt 5 der Arbeit) — $\Phi^n(\nu) \rightarrow \pi$; dies gilt für jede endliche absorbierende Markov-Kette. Also gilt $\pi \prec_{LR} p^{(1)}$ und mit Satz 4.2.4 $\pi \prec_{ST} p^{(1)}$.

Falls nun $T > 1 + 1/(N-1)$, so hat ν gegeben durch (4.2.8) mindestens eine echt negative Komponente. Die Aussage $p_i^{(1)} \nu_j - p_j^{(1)} \nu_i \geq 0$ für $j \geq 1$ bleibt aber dennoch wahr, was hinreichend für die Gültigkeit des Beweises von Theorem 4.2.4 ist, und man kann auch hier $\pi \prec_{LR} p^{(1)}$ folgern. \square

Kapitel 5

Zeit bis zur Auslöschung

Wie schon erwähnt, spielt die Untersuchung der Zeit bis zur Auslöschung der Infektion τ eine wichtige Rolle, wenn man wissen will, für wie lange die quasi-stationäre Verteilung eine gute Annäherung an die Verteilung des ursprünglichen Prozesses $(I(t))_{t \geq 0}$ darstellt. Die Verteilung von τ hängt wesentlich von der Anfangsverteilung ab.

Nåsell betrachtet in seinen Arbeiten [15], [16], [17] zwei gesonderte Fälle: den Fall, dass die Anfangsverteilung der quasi-stationären Verteilung entspricht (siehe hier auch die erweiterte Fassung von [17]) und den Fall, dass es sich um eine degenerierte Verteilung handelt. Entsprechend wird die Zufallsvariable "Zeit bis zur Auslöschung" mit τ_π bzw. mit τ_j ($j \in \mathcal{C}$) bezeichnet.

5.1 1. Fall: Quasi-stationäre Anfangsverteilung

Dieser Fall ist von besonderem Interesse, falls zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt ist, dass eine Infektion in einer Gruppe von Individuen existiert und dass sie schon für lange Zeit existiert hat. Es kann gefolgert werden, dass die Verteilung der Anzahl infizierter Individuen gut durch die quasi-stationäre Verteilung beschrieben wird und dementsprechend kann die Zeit bis zur Auslöschung ausgehend von der quasi-stationären Verteilung untersucht werden. Das Ergebnis lässt sich in folgendem Satz zusammenfassen (Bezeichnungen vgl. (3.1.1), (3.1.12), (3.1.15)):

Satz 5.1.1. *Die Zeit bis zur Auslöschung τ_π ausgehend von der quasi-stationären Verteilung ist exponentialverteilt mit Parameter $\mu_1\pi_1$ und Erwartungswert*

$$\mathbf{E}\tau_\pi = \frac{1}{\mu_1\pi_1} = \frac{S}{\mu};$$

sie ist somit vollständig durch π_1 bestimmt.

Beweis. Um zu diesem Resultat zu gelangen, wird mit

$$\pi' = \frac{p'_C(t)}{1 - p_0(t)} + \mu_1 \pi_1 \frac{p_C(t)}{1 - p_0(t)}$$

noch einmal das Differentialgleichungssystem (3.1.6) betrachtet, welches sich äquivalent umformen lässt zu

$$\begin{aligned} p'_C(t) &= (1 - p_0(t))\pi' - \mu_1 \pi_1 p_C(t) \\ &= -\mu_1 \pi_1 p_C(t), \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

einem Differentialgleichungssystem mit Anfangswert $p_C(0) = \pi$ und der Lösung (vgl. z.B. Burg/Haf/Wille [4, S. 37])

$$\begin{aligned} p_C(t) &= \pi \exp \left(\int_0^t (-\mu_1 \pi_1) dx \right) \\ &= \pi \exp(-\mu_1 \pi_1 t). \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Als Konsequenz hiervon kann auch $p_0(t)$ wie folgt bestimmt werden. Bekannt ist (vgl. (3.1.4)), dass $p'_0(t) = \mu_1 p_1(t)$. Zusammen mit (5.1.2) ergibt sich so das Differentialgleichungssystem

$$p'_0(t) = \mu_1 \pi_1 \exp(-\mu_1 \pi_1 t)$$

mit Anfangswert $p_0(0) = 0$, da der Prozess ja laut Voraussetzung zu Beginn nicht im Zustand 0 absorbiert ist. Als Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \int_0^t \mu_1 \pi_1 \exp(-\mu_1 \pi_1 x) dx + const \\ &= -\exp(-\mu_1 \pi_1 t) - (-1) + const, \end{aligned}$$

wobei $const = 0$ wegen des Anfangswertes, also:

$$p_0(t) = 1 - \exp(-\mu_1 \pi_1 t) \tag{5.1.3}$$

(5.1.1), (5.1.2) und (5.1.3) liefern für diesen Fall die Lösung der Kolmogorovschen Vorwärts-Differentialgleichungen; der Ausdruck ist kurz und bündig, jedoch abhängig von π_1 und somit nicht explizit.

Wird nun angenommen, dass Absorption zum Zeitpunkt t eingetreten ist, gilt für die Zeit bis zur Auslöschung $\tau_\pi \leq t$, und die Anzahl infizierter Individuen $I(t)$ ist gleich 0. Somit sind die Ereignisse $\{\tau_\pi \leq t\}$ und $\{I(t) = 0\}$ identisch. Ihre Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe von (5.1.3) wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} P(\tau_\pi \leq t) &= P(I(t) = 0) = p_0(t) \\ &= 1 - \exp(-\mu_1 \pi_1 t) \end{aligned}$$

Es handelt sich hier offensichtlich um die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\mu_1 \pi_1$, womit die Behauptung gezeigt wäre. \square

5.2 2. Fall: Degenerierte Anfangsverteilung

Der Fall einer anderen Anfangsverteilung als der quasi-stationären ist deutlich komplizierter. Nåsell betrachtet in seinen Arbeiten [15], [16], [17] die erwartete Zeit bis zur Auslöschung ausgehend von einem festen Zustand $j \in \mathcal{C}$. Sie wird durch einen expliziten Ausdruck bestimmt, dessen Komponenten mit Termen der stationären Verteilungen der beiden Annäherungsprozesse beschrieben werden können. Die Herleitung wurde z.B. von Karlin und Taylor [10, S. 148 ff.] im Detail beschrieben. Zusammenfassend gesagt:

Satz 5.2.1. *Für die erwartete Zeit bis zur Auslöschung τ_j ausgehend von einem festen Zustand $j \in \mathcal{C}$ gilt:*

$$\mathbf{E}\tau_j = \frac{1}{\mu p_1^{(0)}} \sum_{r=1}^j \frac{1 - \sum_{m=1}^{r-1} p_m^{(0)}}{\alpha(r) T^{r-1}}$$

Dieser Ausdruck gibt $\mathbf{E}\tau_j$ gerade mit Hilfe einer Summe an, deren Komponenten denen von $\gamma(j)$ (siehe (3.1.13)) ähneln.

Beweis. Angenommen, der Prozess startet von einem Zustand $j \in \mathcal{C}$ aus, so sind $j+1$ und $j-1$ die möglichen Zustände nach dem ersten Übergang; die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang in diese Zustände sind

$p_{j,j+1} = q_{j,j+1} / -q_{jj} = \lambda_j / (\lambda_j + \mu_j)$ bzw. $p_{j,j-1} = q_{j,j-1} / -q_{jj} = \mu_j / (\lambda_j + \mu_j)$ (vgl. (1.1.11) und (1.2.1)). Die erwartete Verweildauer im Zustand j ist — da exponentialverteilt mit Parameter $(\lambda_j + \mu_j)$ (vgl. Satz 1.1.11 und (1.2.1)) — gleich $(\lambda_j + \mu_j)^{-1}$. Somit ergibt sich für die erwartete Zeit bis zur Auslöschung ausgehend vom Zustand j die Rekurrenz-Relation

$$\mathbf{E}\tau_j = \frac{1}{\lambda_j + \mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} \mathbf{E}\tau_{j+1} + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \mathbf{E}\tau_{j-1}, \quad j \in \mathcal{C}, \quad (5.2.1)$$

mit der Konvention $\mathbf{E}\tau_0 = 0 = \mathbf{E}\tau_{N+1}$. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\lambda_j \mathbf{E}\tau_j + \mu_j \mathbf{E}\tau_j = 1 + \lambda_j \mathbf{E}\tau_{j+1} + \mu_j \mathbf{E}\tau_{j-1},$$

was sich umstellen lässt zu

$$\mathbf{E}\tau_j - \mathbf{E}\tau_{j+1} = \frac{1}{\lambda_j} + \frac{\mu_j}{\lambda_j} (\mathbf{E}\tau_{j-1} - \mathbf{E}\tau_j).$$

Mit $z_j := \mathbf{E}\tau_j - \mathbf{E}\tau_{j+1}$ gilt

$$z_j = \frac{1}{\lambda_j} + \frac{\mu_j}{\lambda_j} z_{j-1}, \quad j \in \mathcal{C}.$$

Iteration liefert

$$\begin{aligned} z_j &= \frac{1}{\lambda_j} + \frac{\mu_j}{\lambda_j} \left(\frac{1}{\lambda_{j-1}} + \frac{\mu_{j-1}}{\lambda_{j-1}} z_{j-2} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_j} + \frac{\mu_j}{\lambda_j \lambda_{j-1}} + \frac{\mu_j \mu_{j-1}}{\lambda_j \lambda_{j-1}} z_{j-2} \end{aligned}$$

und schließlich

$$z_j = \sum_{i=1}^j \frac{1}{\lambda_i} \prod_{m=i+1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} + \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) z_0,$$

wobei $\prod_{m=j+1}^j \mu_m / \lambda_m := 1$. Ausgedrückt durch $\mathbf{E}\tau_j$ ergibt sich

$$\mathbf{E}\tau_j - \mathbf{E}\tau_{j+1} = \sum_{i=1}^j \frac{1}{\lambda_i} \prod_{m=i+1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} - \mathbf{E}\tau_1 \prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m}, \quad j \in \mathcal{C}; \quad (5.2.2)$$

und mit

$$\sum_{i=1}^j \frac{1}{\lambda_i} \prod_{m=i+1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} = \prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \sum_{i=1}^j \vartheta_i,$$

wobei

$$\vartheta_1 := \frac{1}{\mu_1}, \quad \vartheta_i := \frac{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_i} \quad (1 < i \leq N),$$

wird daraus

$$\mathbf{E}\tau_j - \mathbf{E}\tau_{j+1} = \prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \sum_{i=1}^j \vartheta_i - \mathbf{E}\tau_1 \prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m}.$$

Äquivalente Umformung führt dann zu

$$\left(\prod_{m=1}^j \frac{\lambda_m}{\mu_m} \right) (\mathbf{E}\tau_j - \mathbf{E}\tau_{j+1}) = \sum_{i=1}^j \vartheta_i - \mathbf{E}\tau_1. \quad (5.2.3)$$

Wird die Gleichung für $j = N$ betrachtet, folgt

$$\mathbf{E}\tau_1 = \sum_{i=1}^N \vartheta_i - \underbrace{\left(\prod_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{\mu_m} \right)}_{=0, \text{ da } \lambda_N=0} (\mathbf{E}\tau_N - \mathbf{E}\tau_{N+1}) = \sum_{i=1}^N \vartheta_i.$$

Somit ergibt sich aus Gleichung (5.2.3)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\tau_{j+1} &= \mathbf{E}\tau_j - \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^j \vartheta_i \right) + \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^N \vartheta_i \right) \\
&= \mathbf{E}\tau_{j-1} - \left(\prod_{m=1}^{j-1} \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^{j-1} \vartheta_i \right) + \left(\prod_{m=1}^{j-1} \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^N \vartheta_i \right) \\
&\quad - \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^j \vartheta_i \right) + \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^N \vartheta_i \right) \\
&= \dots \\
&= \mathbf{E}\tau_1 - \left(\prod_{m=1}^1 \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^1 \vartheta_i \right) + \left(\prod_{m=1}^1 \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^N \vartheta_i \right) \\
&\quad - \dots \\
&\quad - \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^j \vartheta_i \right) + \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=1}^N \vartheta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \vartheta_i + \left(\prod_{m=1}^1 \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=2}^N \vartheta_i \right) \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \left(\prod_{m=1}^j \frac{\mu_m}{\lambda_m} \right) \left(\sum_{i=j+1}^N \vartheta_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \vartheta_i + \sum_{r=1}^j \left(\prod_{k=1}^r \frac{\mu_k}{\lambda_k} \right) \left(\sum_{m=r+1}^N \vartheta_m \right).
\end{aligned}$$

Werden hier nun die für das vorliegende SIS-Modell spezifischen Definitionen eingesetzt, so ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\tau_j &= \frac{1}{\mu} + \sum_{i=2}^N \lambda \left(1 - \frac{1}{N} \right) \cdot \dots \cdot (i-1) \lambda \left(1 - \frac{(i-1)}{N} \right) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \dots \cdot \frac{1}{i\mu} \\
&\quad + \sum_{r=1}^{j-1} \left[\prod_{k=1}^r k \mu \cdot \left(k \lambda \left(1 - \frac{k}{N} \right) \right)^{-1} \right] \\
&\quad \cdot \sum_{m=r+1}^N \lambda \left(1 - \frac{1}{N} \right) \cdot \dots \cdot (m-1) \lambda \left(1 - \frac{(m-1)}{N} \right) \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \dots \cdot \frac{1}{m\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.1.2)}{=} \frac{1}{\mu} + \sum_{i=2}^N \frac{1}{i\mu} \cdot T^{i-1} \cdot \left(\frac{N-1}{N} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{N-(i-1)}{N} \right) \\
& \quad + \sum_{r=1}^{j-1} \left[\mu \cdot \frac{N}{\lambda(N-1)} \cdot \dots \cdot r\mu \cdot \frac{N}{r\lambda(N-r)} \right] \\
& \quad \cdot \sum_{m=r+1}^N \frac{1}{m\mu} \cdot T^{m-1} \cdot \left(\frac{N-1}{N} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{N-(m-1)}{N} \right) \\
& = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i\mu} \cdot T^{i-1} \cdot \frac{(N-1)!}{(N-i)!N^{i-1}} \cdot \frac{N}{N} \\
& \quad + \sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{T^r} \cdot \frac{(N-(r+1))!N^r}{(N-1)!} \cdot \frac{N}{N} \\
& \quad \cdot \sum_{m=r+1}^N \frac{1}{m\mu} \cdot T^{m-1} \cdot \frac{(N-1)!}{(N-m)!N^{m-1}} \cdot \frac{N}{N} \\
& \stackrel{(3.1.14)}{=} \frac{1}{\alpha(0+1)T^0} \sum_{i=1}^N \frac{1}{i\mu} \alpha(i) T^{i-1} + \sum_{r=1}^{j-1} \frac{1}{\alpha(r+1)T^r} \sum_{m=r+1}^N \frac{1}{m\mu} \alpha(m) T^{m-1} \\
& = \frac{1}{\mu} \sum_{r=1}^j \frac{1}{\alpha(r)T^{r-1}} \sum_{m=r}^N \frac{1}{m} \alpha(m) T^{m-1} \\
& \stackrel{(3.2.7)}{=} \frac{1}{\mu} \sum_{r=1}^j \frac{1}{\alpha(r)T^{r-1}} \sum_{m=r}^N \frac{p_j^{(0)}}{p_1^{(0)}} \\
& = \frac{1}{\mu p_1^{(0)}} \sum_{r=1}^j \frac{1 - \sum_{m=1}^{r-1} p_j^{(0)}}{\alpha(r)T^{r-1}}, \quad j \in \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

- [1] ALSMEYER, GEROLD *Stochastische Prozesse, Teil 2*, unveröffentlichtes Skript
- [2] ANDERSON, WILLIAM J.(1991) *Continuous-Time Markov Chains, An Application-Oriented Approach*, Springer-Verlag New York Inc.
- [3] BARTHOLOMEW, D. J. (1976) Continuous time diffusion models with random duration of interest. *J. Math. Sociol.* **4**, 187-199
- [4] BURG, HAF, WILLE (1993) *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band III, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*, B.G. Teubner Stuttgart
- [5] CAVENDER, JAMES A. (1978) Quasi-stationary distributions of birth-and-death processes. *Adv. Appl. Prob.* **10**, 570-586
- [6] CLANCY, DAMIAN AND POLLETT, PHILIP K. (2003) A note on quasi-stationary distributions of birth-death processes and the SIS logistic epidemic. *J. Appl. Prob.* **40**, 821-825
- [7] VAN DOORN, ERIK A. (1991) Quasi-stationary distributions and convergence to quasi-stationarity of birth-death processes. *Adv. Appl. Prob.* **23**, 683-700
- [8] FELLER, WILLIAM (1950) *An Introduction To Probability Theory And Its Applications, Volume I*, John Wiley and Sons, Inc., New York and London
- [9] FERRARI, P. A.; KESTEN, H.; MARTINEZ, S.; PICO, P. (1995) Existence of quasi-stationary distributions. A renewal dynamical approach. *Ann. Prob.* **23**, 501-521
- [10] KARLIN, SAMUEL AND TAYLOR, HOWARD M. (1975) *A First Course In Stochastic Processes, Second Edition*, Academic Press, Inc., New York and London
- [11] KEILSON, J. AND RAMASWAMY, R. (1984) Convergence of quasistationary distributions in birth-death processes. *Stoch. Process. Appl.* **18**, 301-312
- [12] KIJIMA, M. AND SENETA, E. (1991) Some results for quasistationary distributions of birth-death processes. *J. Appl. Prob.* **28**, 503-511
- [13] KRYSCIO, R. J. AND LEFEVRE, C. (1989) On the extinction of the SIS stochastic logistic epidemic. *J. App. Prob.* **26**, 685-694

- [14] NAIR, M. G. AND POLLETT, P. K. (1993) On the relationship between μ -invariant measures and quasi-stationary distributions for continuous-time Markov chains, *Adv. Appl. Prob.* **25**, 82-102
- [15] NÅSELL, INGEMAR (1996) The quasi-stationary distribution of the closed endemic SIS model. *Adv. Appl. Prob.* **28**, 895-932
- [16] NÅSELL, INGEMAR (1999) On the quasi-stationary distribution of the stochastic logistic epidemic. *Math. Biosci.* **156**, 21-40
- [17] NÅSELL, INGEMAR (2001) Extinction and quasi-stationarity in the Verhulst logistic model. *J. Theoret. Biol.* **211**, 11-27
(erweiterte Fassung mit Beweisen und Herleitungen: www.math.kth.se/~ingemar/forsk/verhulst/verhulst.html)
- [18] OPPENHEIM, I.; SHULER, K. E.; WEISS, G.H. (1977) Stochastic theory of nonlinear rate processes with multiple stationary states. *Physica* **88A**, 191.214
- [19] SENETA, E. (1981) *Non-negative Matrices and Markov Chains, Second Edition*, Springer-Verlag New York Inc.
- [20] WEISS, G. H. AND DISHON, M. (1971) On the asymptotic behavior of the stochastic and deterministic models of an epidemic. *Math. Biosci.* **11**, 261-265

Münster, den 30. November 2006

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und
keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.