Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Stochastische Fixpunktgleichungen und Implizite Erneuerungstheorie

Diplomarbeit

Thema gestellt von
Prof. Dr. G. Alsmeyer

vorgelegt von
Julia Schmitz

Münster, 9. Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die erste Bekanntschaft mit Fixpunktgleichungen schließen wir in der Regel im Mathematikunterricht unserer Schulzeit, wenn wir die Schnittpunkte einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der "Ursprungsgeraden" $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, bestimmen sollen, denn die Menge dieser Schnittpunkte ist genau die Lösungsmenge der Fixpunktgleichung $f(x) = x$ und damit die Menge der Fixpunkte der Funktion f. Ohne daß wir uns dessen bewußt sind, haben wir jedoch eine etwas andere Art von Fixpunktgleichungen bereits viel früher in unserem Leben kennengelernt, wenn auch nicht unbedingt unter angenehmeren Umständen. Jedesmal, wenn wir an der Kasse im Supermarkt, im Sommer am Eisstand oder Sonntag morgens beim Bäcker in der Schlange stehen, sind wir Teil einer speziellen Fixpunktgleichung. Allgemein gefaßt sind dies gerade die Situationen, in denen wir in der Regel nicht sofort bedient werden können, sondern erst eine Weile darauf warten müssen. Reihen wir uns als n-ter Kunde ($n = 1, 2, \ldots$) in eine beliebige solche Warteschlange ein, so setzt sich unsere Wartezeit R_n zusammen aus der Wartezeit R_{n-1} des Kunden vor uns in der Schlange und der Differenz X_n aus dessen Bedienungszeit und der Zeit, die zwischen seiner und unserer Ankunft am Ende der Schlange verstrichen ist. Die vorliegende Situation führt uns somit zu der Gleichung

$$R_n = \max(R_{n-1} + X_n, 0) = (R_{n-1} + X_n)^+, \qquad n \in \mathbb{N},$$

die in der Literatur unter dem Namen *Lindley-Gleichung* bekannt ist. $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden Folgen von Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei die X_n unabhängig und identisch verteilt sind und wir für dieses einführende Beispiel $R_0 = 0$ voraussetzen. In Kapitel 4 werden wir zeigen, daß $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter diesen Voraussetzungen eine stationäre Verteilung besitzt. Wählen wir irgendeine Zufallsgröße R mit dieser Verteilung und eine von R unabhängige Kopie X von X_1, so folgt aufgrund der Unabhängigkeit von R_{n-1} und X_n

$$R \stackrel{d}{=} (R + X)^+,$$

wobei $\stackrel{d}{=}$ Gleichheit der Verteilungen bedeutet. Unserem Warteschlangenmodell liegt somit eine sogenannte stochastische Fixpunktgleichung

$$R \stackrel{d}{=} \Psi(R)$$

mit $\Psi(R) = (R+X)^+$ zugrunde. Für beliebige $\mathbb{B} \times \mathcal{A}$-meßbare Funktionen $\Psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ und eine Zufallsgröße R auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist die obige Gleichung die allgemeine Form für stochastische Fixpunktgleichungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Es erweist sich aber selbst für spezielle Funktionen Ψ i.a. als sehr schwierig, zulässige Verteilungen für R als Lösungen solcher Gleichungen zu finden.
In der Literatur finden wir mehrere Arbeiten, deren Autoren sich dieser Aufgabe widmen und dabei die rekursiv geschriebene Form, die auch die Lindley-Gleichung besitzt, als

Ausgangsgleichung benutzen. Grincevičius, Kesten, Paulson und Uppuluri sowie Vervaat (vgl. [Gr1]-[Gr6], [K73], [PaU], [Ve2]) beispielsweise beschäftigen sich mit der Gleichung

$$R_n = Q_n + M_n R_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(M_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Folgen unabhängig identisch verteilter Zufallsgrößen bzw. Zufallsvektoren sind. In einer auf Lassner (vgl. [La1], [La2]) zurückgehenden Anwendung stellt R_n z.B. den Betrag eines Sparkontos zum Zeitpunkt n dar, Q_n den eingezahlten bzw. abgebuchten Betrag dirket vor diesem Zeitpunkt und M_n den Zinsfaktor, der aufgrund von Schwankungen im Laufe der Zeit ebenfalls als stochastische Größe angesehen werden kann. In Arbeiten von Grincevičius, Kesten, Paulson und Uppuluri und Vervaat finden sich Voraussetzungen, unter denen eine eindeutige Lösung dieser Gleichung existiert, sowie Ergebnisse über die Grenzverteilung der R_n. Beispiele stochastischer Fixpunktgleichungen, für die die Verteilungen aller betroffenen Zufallsgrößen bereits bekannt sind, finden wir bei Chamayou und Letac (vgl. [ChL]). Weitere Autoren benutzen stochastische Fixpunktgleichungen, um Vorgänge aus der Wirtschaft, Physik, Biologie oder auch Soziologie besser darstellen zu können (vgl. [Baw], [Cav], [CsF], [Cha], [ChM], [Gad], [Hel], [HeN], [Mak], [PeH], [Tak]). In allen Arbeiten stehen dabei eine oder mehrere spezielle stochastische Fixpunktgleichungen im Vordergrund. Auf der Grundlage eines Aufsatzes von Kesten (vgl. [K73]) findet Goldie (vgl. [Gol]) dagegen einen allgemeineren Weg, Lösungen stochastischer Fixpunktgleichungen näher zu bestimmen. Ausgehend von der Gleichung

$$R \stackrel{d}{=} \Psi(R)$$

zeigt er für eine spezielle Klasse stochastischer Fixpunktgleichungen, daß sich die Flanken der Verteilung von R asymptotisch immer wie eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten verhalten, bevor er Beispiele in Form konkreter Gleichungen folgen läßt.
In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit Goldies Ergebnissen, indem wir diese einerseits detailliert wiedergeben und andererseits zeigen, in welcher Weise sie für bereits bekannte Modelle an Bedeutung gewinnen. Im ersten Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die Grundlagen der Erneuerungstheorie, da diese das wichtigste von Goldie verwendete Hilfsmittel darstellt, um seine Aussagen zu beweisen. Goldies Haupttheorem mit der Kernaussage

$$P(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa} \qquad \text{und} \qquad P(R < -t) \sim C_- t^{-\kappa}$$

für $t \to \infty$ und Konstanten C_+, C_- sowie ein $\kappa > 0$ nennen wir aus diesen Gründen auch Implizites Erneuerungstheorem und stellen es mit seinem Beweis im zweiten Kapitel vor. Obige Asymptotik der Flanken können wir mit Goldies Hilfe noch genauer angeben und widmen uns daher im dritten Kapitel der Konvergenzrate der Flanken der Verteilung von R. Im vierten Kapitel veranschaulichen wir am Beispiel von vier stochastischen Fixpunktgleichungen die Theorie der beiden vorigen Kapitel. Wir ziehen außerdem die Verbindung zu bereits bekannten Modellen wie z.B. der Warteschlangentheorie und betrachten ein auf Chamayou und Letac (vgl. [ChL]) zurückgehendes Beispiel einer stochastischen Fixpunktgleichung für Beta-verteilte Zufallsgrößen. Im letzten Abschnitt des vierten Kapitels zeigen wir abschließend eine Anwendung von Goldies Resultaten in der Extremwerttheorie.

Für die Beratung und Unterstützung während der Entstehung der vorliegenden Arbeit möchte ich Prof. Dr. Gerold Alsmeyer meinen Dank aussprechen. Ich danke außerdem allen, die auf ihre Art und Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Erneuerungstheorie

In diesem Abschnitt stellen wir Grundlagen und Ergebnisse ohne Beweise aus der Erneuerungstheorie zusammen, die uns später helfen werden, einen asymptotischen Wert für die Flanken der Verteilung von Lösungen stochastischer Fixpunktgleichungen zu bestimmen. Wir legen dazu die Definition des Random Walks (RW) als Partialsummenfolge $(S_n)_{n\geq 0}$ unabhängig identisch gemäß Q verteilter Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ mit einem von diesen Zufallsgrößen unabhängigen, zufallsabhängigen Anfangspunkt S_0 sowie die Definition eines Standardmodells zu Q zugrunde. Es gilt somit

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ein Random Walk heißt ferner *Standard-Random-Walk (SRW),* falls $S_0 = 0$ fast sicher gilt, andernfalls *verschobener Random Walk (VRW).*

Definition 1.1.1. ([ASP], Definition 21.5)
Sei $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$[1]. Dann heißt jedes Modell

$$(\Omega, \mathcal{A}, (S_n)_{n\geq 0}, (P_\lambda)_{\lambda\in\mathfrak{W}(\mathbb{R})}),$$

so daß $S_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B}), n \in \mathbb{N}_0$, unter P_λ einen RW mit Zuwachsverteilung Q und Anfangsverteilung λ bildet, *Standardmodell zu* Q. Es gilt demnach $P_\lambda(S_0 \in \cdot\,) = \lambda$ und $P_\lambda(X_1 \in \cdot\,) = Q$.

P_λ ist dabei die Abkürzung für P_{δ_λ}. Da $(S_n)_{n\geq 0}$ ein additiver Prozeß ist und $\mathbb{G}_0 := \mathbb{R}$ eine additive Gruppe mit den abgeschlossenen Untergruppen $\mathbb{G}_\infty := \{0\}$ und $\mathbb{G}_d := d\mathbb{Z}$ für $d > 0$, ist es sinnvoll, die kleinste Untergruppe von $\mathbb{R}$ zu bestimmen, auf die $(S_n)_{n\geq 0}$ konzentriert ist. Diese Untergruppe muß nicht abgeschlossen sein, im folgenden spielt jedoch nur deren Abschluß und damit die kleinste abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{R}$, die sie enthält, eine Rolle. Mit Hilfe dieser Festlegungen ermöglichen uns die beiden folgenden Definitionen eine Einteilung von RWs in zwei Klassen.

Definition 1.1.2. (vgl. [ASP], Definition 21.2)
Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}$ sei

$$d(Q) := \sup\{d \in [0, \infty] : Q(\mathbb{G}_d) = 1\},$$

genannt *Spanne von* Q. Dann heißt Q

[1] Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße (Verteilungen) auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$

-*nichtarithmetisch,* falls $d(Q) = 0$;
-*d-arithmetisch,* falls $d(Q) = d > 0$.

Entsprechend heißt eine Zufallsgröße X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nichtarithmetisch bzw. d-arithmetisch, falls P^X nichtarithmetisch bzw. d-arithmetisch ist.

Definition 1.1.3. (vgl. [ASP], Definition 21.4)
Gegeben ein Standardmodell zu Q gemäß Definition 1.1.1, heißt ein RW $(S_n)_{n\geq 0}$ *nichtarithmetisch,* falls X_1 nichtarithmetisch ist, und *d-arithmetisch,* falls X_1 d-arithmetisch ist und $P_\lambda(S_0 \in \mathbb{G}_d) = 1$ gilt.

Die zusätzliche Forderung an S_0 im d-arithmetischen Fall ist notwendig, da $(S_n)_{n\geq 0}$ nur auf das zugehörige Gitter konzentriert ist, wenn auch S_0 fast sicher auf diesem liegt. Um asymptotische Aussagen zu erleichtern, setzen wir außerdem für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ sowie für beliebiges $d \geq 0$

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} f(t) := \begin{cases} \lim_{t\to\infty} f(t), & \text{falls } d = 0 \\ \lim_{n\to\infty} f(nd), & \text{falls } d > 0 \end{cases} .$$

Mit Hilfe eines RWs $(S_n)_{n\geq 0}$ und des zugeordneten Punktprozesses $\sum_{n\geq 0} \delta_{S_n}$ definieren wir das zufällige Zählmaß

$$N := \sum_{n\geq 0} \delta_{S_n}$$

auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ für alle $\omega \in \Omega$ und $B \in \mathbb{B}$ durch

$$N(\omega, B) = \sum_{n\geq 0} \delta_{S_n(\omega)}(B).$$

Wir versehen die Menge $\mathcal{M}$ aller Zählmaße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit der kleinsten σ-Algebra $\mathfrak{M}$, so daß sämtliche Projektionen

$$\pi_B : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{N}}_0, \quad \mu \mapsto \mu(B),$$

meßbar sind, d.h. $\mathfrak{M} := \sigma(\pi_B, B \in \mathbb{B})$. Dann definiert $N : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$, $\omega \mapsto N(\omega, \cdot)$, in der ersten Komponente eine meßbare Abbildung und als Abbildung bei festgehaltener zweiter Komponente $N(B) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{B})$, $\omega \mapsto N(B)(\omega) := N(\omega, B)$, für jedes $B \in \mathbb{B}$ eine Zufallsgröße, die die Anzahl der Punkte S_n in B angibt. Das sogenannte *Intensitätsmaß* von N unter P_λ erhalten wir für jedes $B \in \mathbb{B}$ durch

$$B \mapsto E_\lambda N(B) =: U_\lambda(B),$$

d.h. $U_\lambda(B)$ ist die erwartete Anzahl von Punkten in B. Dies führt uns zur Definition des Erneuerungsmaßes.

Definition 1.1.4. (vgl. [ASP], Definition 21.6)
Gegeben einen RW $(S_n)_{n\geq 0}$, heißt das Intensitätsmaß U_λ des zugeordneten Punktprozesses $\sum_{n\geq 0} \delta_{S_n}$ das *Erneuerungsmaß von $(S_n)_{n\geq 0}$* unter P_λ und dessen zugehörige "Verteilungsfunktion"

$$U_\lambda(t) := U_\lambda(-\infty, t], \qquad t \in \mathbb{R},$$

Erneuerungsfunktion.

Da die Zuwächse von $(S_n)_{n\geq 0}$ die Verteilung Q besitzen, folgt

$$U_\lambda = \sum_{n\geq 0} P_\lambda^{S_n} = \lambda * \sum_{n\geq 0} Q^{*(n)} = \lambda * U_0,$$

wobei $Q^{*(0)} := \delta_0$ gilt. Mit Hilfe der folgenden Einführung direkt Riemann-integrierbarer Funktionen sowie den bis hierhin getroffenen Vereinbarungen können wir nun das 2. Erneuerungstheorem mit seiner Verschärfung angeben, das ein zentrales Ergebnis der Erneuerungstheorie darstellt. Wir setzen dazu

$$\lambda\!\!\lambda_d := \begin{cases} \text{Lebesgue-Maß auf } (\mathbb{R}, \mathbb{B}), & \text{falls } d = 0 \\ d\text{-mal das Zählmaß auf } d\mathbb{Z}, & \text{falls } d > 0 \end{cases}.$$

Definition 1.1.5. ([ASP], Definition 26.1)
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion sowie für $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$I_n^\delta = (\delta n, \delta(n+1)],$$

$$m_n^\delta = \inf\{g(t) : t \in I_n^\delta\}, \qquad M_n^\delta = \sup\{g(t) : t \in I_n^\delta\},$$

$$\underline{\sigma}(\delta) = \delta \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n^\delta \qquad \text{und} \qquad \overline{\sigma}(\delta) = \delta \textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_n^\delta.$$

Dann heißt g *direkt Riemann-integrierbar (d.R.i.)*, falls $\underline{\sigma}(\delta)$ und $\overline{\sigma}(\delta)$ beide für alle $\delta > 0$ absolut konvergieren und

$$\lim_{\delta\downarrow 0}(\overline{\sigma}(\delta) - \underline{\sigma}(\delta)) = 0.$$

Die direkte Riemann-Integrierbarkeit einer Funktion entspricht damit der gewöhnlichen Riemann-Integrierbarkeit, sofern man den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ der Funktion durch ein kompaktes Intervall ersetzt.

Satz 1.1.6. *(vgl. [ASP], Satz 26.2)*
Jede d.R.i. Funktion g erfüllt

(a) g ist beschränkt und $\lambda\!\!\lambda_0$-f.ü. stetig.
(b) g ist $\lambda\!\!\lambda_d$-integrierbar für $d \in \{0, 1\}$, d.h. $\int_\mathbb{R} |g(x)|\lambda\!\!\lambda_d(dx) < \infty$.

Umgekehrt ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend dafür, daß eine reellwertige Funktion g auf $\mathbb{R}$ d.R.i. ist:

(c) $\underline{\sigma}(\delta)$, $\overline{\sigma}(\delta)$ konvergieren absolut für ein $\delta > 0$, und g ist $\lambda\!\!\lambda_0$-f.ü. stetig.
(d) g hat kompakten Träger $\overline{\{x : g(x) \neq 0\}}$ und ist $\lambda\!\!\lambda_0$-f.ü. stetig.

Satz 1.1.7. *([ASP], Satz 26.3. Das 2. Erneuerungstheorem)*
$(S_n)_{n\geq 0}$ sei ein RW mit Drift $\mu = EX_1 \in (0, \infty]$ und Spanne $d = d(X_1) \in \{0, 1\}$. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathfrak{W}_d(\mathbb{R})$[2] und jede d.R.i. Funktion g

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} g * U_\lambda(t) = \mu^{-1} \int_\mathbb{R} g(x)\lambda\!\!\lambda_d(dx)$$

und

$$\lim_{t\to-\infty} g * U_\lambda(t) = 0.$$

[2] Menge aller Verteilungen λ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $\lambda(\mathbb{G}_d) = 1$ für $d \geq 0$

Satz 1.1.8. *([ASP], Satz 28.4)*
Seien Q, Q_0 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit $\mu = \mu(Q) > 0$, $U_0 = \sum_{n\geq 0} Q^{*(n)}$ und $U = Q_0 * U_0$. Sei Q_0 ferner $\lambda\!\!\lambda_0$-stetig mit Dichte f_0. Dann gilt für die zugehörige Erneuerungsdichte $u = f_0 * U_0$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \mu^{-1} \quad \textit{und} \quad \lim_{t\to-\infty} u(t) = 0,$$

sofern f_0 d.R.i. ist oder Q quasi $\lambda\!\!\lambda_0$-stetig und $f_0 \in \mathfrak{L}_1{}^3 \cap \mathfrak{L}_\infty{}^4$ mit $\lim_{|t|\to\infty} f_0(t) = 0$.

Dabei heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}$ quasi $\lambda\!\!\lambda_0$-stetig, wenn $Q^{*(n)}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ eine $\lambda\!\!\lambda_0$-stetige Komponente besitzt, d.h. wenn ein $\lambda\!\!\lambda_0$-stetiges Maß $Q_1 \neq 0$ und ein weiteres Maß Q_2 existieren, so daß $Q^{*(n)} = Q_1 + Q_2$ gilt.
Das 2. Erneuerungstheorem trägt im Englischen den Namen *Key Renewal Theorem,* da es u.a. bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens oben angegebener Faltungen eine Schlüsselstellung einnimmt. Seine erste Aussage werden wir für den Fall $d = 0$ verwenden, der wegen $g * U_\lambda(t) = E_\lambda \sum_{n\geq 0} g(t - S_n)$ insbesondere

$$E_\lambda \sum_{n\geq 0} g(t - S_n) \to \frac{1}{EX_1} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du, \qquad t \to \infty,$$

besagt.

1.2 Erneuerungsgleichungen

Ein weiterer wichtiger Bestandteil der Erneuerungstheorie sind Gleichungen der Form

(1.2.1) $$Z(r) = z(r) + \int_{\mathbb{R}} Z(r-x)Q(dx), \qquad r \in \mathbb{R},$$

bzw.

(1.2.2) $$Z = z + Z * Q,$$

wobei z, $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen und Q ein Maß auf $\mathbb{R}$ seien. Sie tragen den Namen *Erneuerungsgleichungen* und speziell *Standard-Erneuerungsgleichungen,* falls Q auf $[0, \infty)$ konzentriert ist und z und Z auf $(-\infty, 0)$ verschwinden. (1.2.1) besitzt in diesem Fall die Gestalt

$$Z(r) = z(r) + \int_{[0,r]} Z(r-x)Q(dx), \qquad r \geq 0.$$

Eine Iteration von (1.2.2) liefert nach n Schritten

$$Z = z * \sum_{k=0}^{n} Q^{*(k)} + Z * Q^{*(n+1)}$$

und führt zu der Vermutung, daß

$$Z = z * U = z * \sum_{k\geq 0} Q^{*(k)}$$

[3] Vektorraum der reellen, 1-fach ν-integrierbaren Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$
[4] Vektorraum der reellen, ν-fast überall beschränkten Funktionen

eine Lösung bei gegebenem z und Q ist. Das auftretende Erneuerungsmaß schafft dabei die Verbindung zur Erneuerungstheorie. Eine ausführliche Begründung der Vermutung würde an dieser Stelle zu weit führen. Wir erwähnen daher nur kurz, daß eine Standard-Erneuerungsgleichung für lokal beschränkte[5] meßbare Funktionen z und reguläre[6] Maße Q die eindeutig bestimmte Lösung $Z = z * U$ besitzt (im allgemeinen Fall benötigt man beschränkte meßbare Funktionen z und Maße Q mit $Q(\mathbb{R}) < 1$, da der Integrationsbereich nicht mehr kompakt ist) und verweisen für weitere Details wie z.B. die Bestimmung des Grenzwertes existierender Lösungen und deren Konvergenzgeschwindigkeit gegen diesen Limes auf [ASP], Kapitel 27.
Mit Impliziter Erneuerungstheorie ist eine Variante von Erneuerungsgleichungen gemeint, in der neben Z auch z unbekannt ist und sogar ein von Z abhängiges Integral darstellt. In Anlehnung an diese Erneuerungsgleichungen sind stochastische Fixpunktgleichungen der Form $R \stackrel{d}{=} \Psi \circ R$ mit einer Funktion Ψ und einer Zufallsgrößen R zu sehen, deren Verteilung unbekannt ist. Ihre Untersuchung beginnen wir im nächsten Kapitel, indem wir festlegen, welche Voraussetzungen zum Aufstellen dieser Gleichung benötigt werden und welche Bedingungen Ψ erfüllen muß. Der Einfluß der Erneuerungstheorie kommt in Satz 2.2.1 als Haupttheorem des Kapitels zum Ausdruck. Mit Hilfe des 2. Erneuerungstheorems ermöglicht dieser Satz Aussagen über die Flanken der Verteilung von R und wird daher *Implizites Erneuerungstheorem* genannt.

[5]Eine reellwertige Funktion f heißt lokal beschränkt, falls sie auf jeder kompakten Teilmenge ihres Definitionsbereiches beschränkt ist.

[6]Ein Maß Q auf $[0, \infty)$ heißt regulär, falls es positiven Erwartungswert besitzt, $Q(0) < 1$ gilt und der Definitionsbereich der zugehörigen momenterzeugenden Funktion nicht leer ist.

2 Implizite Erneuerungstheorie

2.1 Vorbereitungen

Gleichungen der Form

$$R \stackrel{d}{=} \Psi \circ R \tag{2.1.1}$$

mit einer Zufallsgrößen R und einer Funktion Ψ heißen stochastische Fixpunktgleichungen. Um Aussagen über sie treffen zu können, muß Ψ so definiert sein, daß die Verknüpfung $\Psi \circ R$ selber eine Zufallsgröße ist. Sei daher $\Psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{B} \times \mathcal{A}$-meßbare Funktion und $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für ein festes $\omega \in \Omega$ ist Ψ dann ein Zufallselement von $\mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der Menge der Borel-meßbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$; für ein festes $t \in \mathbb{R}$ dagegen ist $\Psi(t) := \Psi(t, \cdot)$ eine Zufallsgröße. Ist R eine auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definierte von Ψ unabhängige Zufallsgröße, interpretieren wir die Verknüpfung von Ψ und R als Abbildung

$$\Psi \circ R : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \to \Psi(R(\omega), \omega).$$

Obgleich wir die Verteilung von R nicht kennen, können wir dennoch unter gewissen Voraussetzungen ihre Existenz und Eindeutigkeit nachweisen sowie Aussagen über ihre Flanken treffen. Der Fall, in dem letzteres möglich ist und der von uns untersucht werden soll, ist der, daß sich die Zufallsgröße $\Psi(t)$ für betraglich große Argumente annähernd so verhält wie die Multiplikation von t mit einer ebenfalls auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierten Zufallsgrößen M, die die Voraussetzungen des unten aufgeführten Lemma 2.1.2 erfüllt. Im Haupttheorem dieses Kapitels, Satz 2.2.1, zeigen wir, daß dann die Flanken der Verteilung von R asymptotisch einer Potenzfunktion gleichen, sofern sie gewissen die Zufallsgröße M betreffende Integrationsbedingungen genügen.
Zur Klärung der Existenz und Eindeutigkeit der Verteilung von R genügt uns ein Satz, der sich auf ein Ergebnis von Letac stützt. Unter der Annahme, daß auf dem passend erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unabhängige Kopien $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ von Ψ existieren, erhalten wir mit Hilfe der Definitionen

$$Z_n(t) := \Psi_1 \circ \Psi_2 \circ \ldots \circ \Psi_n(t), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.2}$$

$$W_n(t) := \Psi_n \circ \Psi_{n-1} \circ \ldots \circ \Psi_1(t)), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1.3}$$

die eindeutige Verteilung von R und damit von $\Psi \circ R$ durch Grenzwertbetrachtung von Z_n, W_n für $n \to \infty$.

Satz 2.1.1.*([Let], Prinzip von Letac)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{B} \times \mathcal{A}$-meßbare Funktion und R eine Zufallsgröße auf Ω, die (2.1.1) erfüllt. Hat Ψ stetige Pfade, d.h. ist

die Abbildung $t \mapsto \Psi(t,\omega)$, $t \in \mathbb{R}$, für jedes $\omega \in \Omega$ stetig, und existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} Z_n(t) =: Z$ fast sicher und ist unabhängig vom Argument t, so ist die Verteilung von Z die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung (2.1.1) und damit die eindeutige Verteilung von R. Ebenso gilt $\lim_{n\to\infty} W_n(t) = Z$, sofern Z existiert (beachte $W_n(t) \sim Z_n(t)$).

Anstelle der stochastischen Fixpunktgleichung $R \stackrel{d}{=} \Psi \circ R$ finden wir bei Letac ursprünglich die Gleichung

$$R \stackrel{d}{=} f(R,Y), \qquad Y \text{ unabhängig von } R, \tag{2.1.4}$$

wobei Y eine $\mathcal{X}$-wertige Zufallsvariable, $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ ein meßbarer Raum und $f : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine feste produktmeßbare Funktion ist. Indem wir $\mathcal{X} = \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ setzen und für alle $g \in \mathcal{X}$ und $t \in \mathbb{R}$ $f(t,g) := g(t)$ definieren, können wir das Theorem auf unseren Fall anwenden, denn (2.1.4) erhält die Form $R \stackrel{d}{=} \Psi \circ R$, wenn wir Ψ mit Y identifizieren. Zuletzt geben wir im folgenden Lemma die Bedingungen an, die von der Zufallsgröße M erfüllt werden müssen.

Lemma 2.1.2. *Sei M eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{A},P)$, für die ein $\kappa > 0$ existiere, so daß*

$$E\,|M|^\kappa = 1, \tag{2.1.5}$$

$$E\,|M|^\kappa \log^+ |M| < \infty \tag{2.1.6}$$

gelten. Sofern außerdem $P(|M| = 1) < 1$ ist, folgen

$$E \log |M| \in [-\infty, 0), \tag{2.1.7}$$

$$m := E\,|M|^\kappa \log |M| \in (0,\infty). \tag{2.1.8}$$

Beweis. Sei $Y := \log |M|$ und $\psi(\lambda) = E\mathrm{e}^{\lambda Y} = E\,|M|^\lambda$ die zugehörige momenterzeugende Funktion (vgl. [AWT], Definition 40.3). Nach Voraussetzung ist $\psi(\kappa) = \psi(0) = 1$. Wir wissen ferner, daß $\mathcal{D}(\psi) = \{\lambda : \psi(\lambda) < \infty\}$ ein Intervall ist (vgl. [AWT], Lemma 40.2) und ψ auf dessen Inneren eine konvexe, unendlich oft differenzierbare Funktion bildet mit $\psi'(\lambda) = EY\mathrm{e}^{\lambda Y}$. Da wir $|M| = 1$ f.s. ausgeschlossen haben, ist aufgrund der Konvexität von ψ in Verbindung mit $\psi(\lambda) \to \infty$ für $\lambda \to \infty$ $\lim_{\lambda\downarrow 0} \psi'(\lambda) < 0$ und $\lim_{\lambda\uparrow\kappa} \psi'(\lambda) > 0$ (allgemein folgt zunächst nur $\lim_{\lambda\downarrow 0} \psi'(\lambda) \le 0$). Wegen

$$EY^+\mathrm{e}^{\lambda Y} \downarrow EY^+ < \infty \quad \text{und} \quad EY^-\mathrm{e}^{\lambda Y} \uparrow EY^- \in [0,\infty], \quad \lambda \downarrow 0,$$

gilt nun aber

$$E \log |M| = EY = \lim_{\lambda\downarrow 0} EY\mathrm{e}^{\lambda Y} = \lim_{\lambda\downarrow 0} \psi'(\lambda) < 0.$$

Aus

$$\psi(\kappa) = \int_{Y>0} \mathrm{e}^{\kappa Y^+} dP + \int_{Y\le 0} \mathrm{e}^{-\kappa Y^-} dP,$$

der Konvexität von ψ und (2.1.6) folgt

$$0 < \lim_{\lambda\uparrow\kappa} \psi'(\lambda) = \lim_{\lambda\uparrow\kappa} (EY^+\mathrm{e}^{\lambda Y} - EY^-\mathrm{e}^{\lambda Y}) \le \lim_{\lambda\uparrow\kappa} EY^+\mathrm{e}^{\lambda Y} = EY^+\mathrm{e}^{\kappa Y} < \infty$$

und damit (2.1.8) wegen $\lim_{\lambda\uparrow\kappa} \psi'(\lambda) = EY\mathrm{e}^{\kappa Y} = m$. □

2.2 Das Implizite Erneuerungstheorem

Satz 2.2.1. *(Implizites Erneuerungstheorem)*
Sei M eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die den Bedingungen von Lemma 2.1.2 genügt, und R eine von M unabhängige Zufallsgröße. Sei ferner $P^{\log|M||M\neq 0}$ nichtarithmetisch.

(a) Falls $M \geq 0$ fast sicher ist und

$$\int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)|\, t^{\kappa-1} dt < \infty \tag{2.2.1}$$

bzw.

$$\int_0^\infty |P(R < -t) - P(MR < -t)|\, t^{\kappa-1} dt < \infty \tag{2.2.2}$$

gelten, so folgt für die Flanken der Verteilung von R

$$P(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa}, \qquad t \to \infty, \tag{2.2.3}$$

bzw.

$$P(R < -t) \sim C_- t^{-\kappa}, \qquad t \to \infty, \tag{2.2.4}$$

wobei C_+ und C_- durch die Gleichungen

$$C_+ = \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(R > t) - P(MR > t)) t^{\kappa-1} dt, \tag{2.2.5}$$

$$C_- = \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(R < -t) - P(MR < -t)) t^{\kappa-1} dt \tag{2.2.6}$$

gegeben sind.

(b) Falls $P(M < 0) > 0$ ist und sowohl (2.2.1) als auch (2.2.2) gelten, so folgen (2.2.3) und (2.2.4), wobei in diesem Fall

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2m} \int_0^\infty (P(|R| > t) - P(|MR| > t)) t^{\kappa-1} dt \tag{2.2.7}$$

gilt.

Die Summe von C_+ und C_- in (b) und auch in (a), sofern dort beide Voraussetzungen erfüllt sind, definieren wir durch

$$C := C_+ + C_- = \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(|R| > t) - P(|MR| > t)) t^{\kappa-1} dt. \tag{2.2.8}$$

Sollen die Aussagen des Satzes einen relevanten Inhalt bekommen, so dürfen wir nur die Werte von κ betrachten, für die außerdem $E\,|R|^\kappa = \infty$ gilt. Andernfalls folgt wegen der Unabhängigkeit von M und R

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(|R| > t) - P(|MR| > t)) t^{\kappa-1} dt \\ &= \frac{1}{\kappa m} (E\,|R|^\kappa - E\,|MR|^\kappa) \\ &= \frac{1}{\kappa m} E\,|R|^\kappa (1 - E\,|M|^\kappa) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und daher im Hinblick auf (2.2.3) und (2.2.4)

$$t^\kappa P(|R| > t) = t^\kappa P(R > t) + t^\kappa P(R < -t) \sim C_+ + C_- = 0$$

für $t \to \infty$ und somit $P(|R| > t) = o(t^{-\kappa})$. Aufgrund der Annahme $E\,|R|^\kappa < \infty$ erhalten wir dieses Ergebnis jedoch direkt und ohne das Implizite Erneuerungstheorem.
Die Voraussetzungen und Aussagen des Satzes ändern ihre Gestalt, falls R zusätzlich zu den dort geforderten Bedingungen eine stochastische Fixpunktgleichung gemäß (2.1.1) erfüllt. Wir fassen daher die Ergebnisse im folgenden Korollar erneut zusammen und führen dessen Beweis direkt im Anschluß. Der Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems folgt im nächsten Abschnitt.

Korollar 2.2.2. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{B} \times \mathcal{A}$-meßbare Funktion und R eine auf Ω definierte Zufallsgröße, die die Fixpunktgleichung*

$$R \stackrel{d}{=} \Psi \circ R$$

erfüllt. Sei weiter M eine Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die den Bedingungen von Lemma 2.1.2 genügt und außerdem so gewählt sei, daß R unabhängig von (Ψ, M) ist. Dann lassen sich die Bedingungen (2.2.1) und (2.2.2) im Impliziten Erneuerungstheorem durch

$$E\left|(\Psi(R)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa\right| < \infty \tag{2.2.9}$$

bzw.

$$E\left|(\Psi(R)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa\right| < \infty \tag{2.2.10}$$

ersetzen und die Formeln (2.2.5), (2.2.6) und (2.2.7) zu

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} E((\Psi(R)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa), \tag{2.2.11}$$

$$C_- = \frac{1}{\kappa m} E((\Psi(R)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa), \tag{2.2.12}$$

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\kappa m} E(|\Psi(R)|^\kappa - |MR|^\kappa) \tag{2.2.13}$$

umschreiben.

Obwohl nach Voraussetzung $R \stackrel{d}{=} \Psi(R)$ gegeben ist, können wir in keinem dieser fünf Ausdrücke $\Psi(R)$ durch R ersetzen, denn die in den Begründungen dieser Formeln benutzte Verteilung von $(\Psi(R), MR)$ ist nicht notwendigerweise auch die des Paares (R, MR).
Zum Beweis von Korollar 2.2.2 verwenden wir die Aussage des folgenden Lemmas.

Lemma 2.2.3. *Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dann gilt*

$$\int_0^\infty |P(X > t) - P(Y > t)|\, t^{\kappa-1} dt = \frac{1}{\kappa} E\left|(X^+)^\kappa - (Y^+)^\kappa\right|, \tag{2.2.14}$$

wobei das Integral auch den Wert ∞ annehmen kann. Ist es endlich, können die Betragsstriche in (2.2.14) weggelassen werden, d.h. es gilt

$$\int_0^\infty (P(X > t) - P(Y > t)) t^{\kappa-1} dt = \frac{1}{\kappa} E((X^+)^\kappa - (Y^+)^\kappa). \tag{2.2.15}$$

Beweis. Da aufgrund der Integrationsgrenzen nur Werte von $t > 0$ betrachtet werden und die Wahrscheinlichkeiten $P(X > t)$ und $P(X^+ > t)$ für $t > 0$ gleich sind, genügt es, (2.2.14) und (2.2.15) für nichtnegative Zufallsvariablen X, Y nachzuweisen. Seien also $X, Y \geq 0$. Lösen wir den Betrag auf, können wir das Integral in (2.2.14) als Summe zweier Integrale schreiben:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |P(X > t) - P(Y > t)|\, t^{\kappa-1} dt &= \int_0^\infty (P(Y > t, Y > X) - P(X > t, Y > X)) t^{\kappa-1} dt \\
&\quad + \int_0^\infty (P(X > t, Y < X) - P(Y > t, Y < X)) t^{\kappa-1} dt \\
&= \int_0^\infty P(X \leq t < Y) t^{\kappa-1} dt \\
&\quad + \int_0^\infty P(Y \leq t < X) t^{\kappa-1} dt.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{(0,\infty)} t^{\kappa-1} P(X \leq t < Y) \lambda\!\!\!\lambda(dt) &= \int_{(0,\infty)} t^{\kappa-1} \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \mathbf{1}_{(0,y)}(x) \mathbf{1}_{[x,y)}(t) P^{(X,Y)}(dx, dy)\ \lambda\!\!\!\lambda(dt) \\
&= \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} \mathbf{1}_{(0,y)}(x) \int_{[x,y)} t^{\kappa-1} \lambda\!\!\!\lambda(dt)\ P^{(X,Y)}(dx, dy) \\
&= E\mathbf{1}_{\{X<Y\}} \int_{[X,Y)} t^{\kappa-1} \lambda\!\!\!\lambda(dt)
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_0^\infty P(X \leq t < Y) t^{\kappa-1} dt = \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{X<Y\}}(Y^\kappa - X^\kappa)$$

sowie analog

$$\int_0^\infty P(Y \leq t < X) t^{\kappa-1} dt = \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Y<X\}}(X^\kappa - Y^\kappa).$$

Insgesamt folgt daher für das Ausgangsintegral

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |P(X > t) - P(Y > t)|\, t^{\kappa-1} dt &= \frac{1}{\kappa} E(\mathbf{1}_{\{X<Y\}}(Y^\kappa - X^\kappa) + \mathbf{1}_{\{Y<X\}}(X^\kappa - Y^\kappa)) \\
&= \frac{1}{\kappa} E\,|X^\kappa - Y^\kappa|\,.
\end{aligned}$$

(2.2.15) erhalten wir direkt, denn für jede nichtnegative Zufallsgröße X gilt

$$EX^\kappa = \int_0^\infty \kappa t^{\kappa-1} P(X > t) dt, \qquad \kappa > 0.$$

□

Beweis von Korollar 2.2.2. Da nach Voraussetzung $R \stackrel{d}{=} \Psi(R)$ gilt und wir $\Psi(R)$ als Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum von R ansehen können, folgt für das Integral in (2.2.1) durch Addieren und Subtrahieren des Terms $P(\Psi(R) > t)$ innerhalb der Betragsstriche sowie mit Hilfe von Lemma 2.2.3

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)|\, t^{\kappa-1} dt &= \int_0^\infty |P(\Psi(R) > t) - P(MR > t)|\, t^{\kappa-1} dt \\
&= \frac{1}{\kappa} E\left|(\Psi(R)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa\right|.
\end{aligned}$$

Wegen (2.2.9) ist das Integral außerdem endlich. Analog erhalten wir die Endlichkeit des Integrals in (2.2.2) und können daher das Implizite Erneuerungstheorem anwenden. Mit (2.2.15) aus Lemma 2.2.3 folgt

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{m}\int_0^\infty (P(\Psi(R) > t) - P(MR > t))t^{\kappa-1}dt \\ &= \frac{1}{\kappa m}E((\Psi(R)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa) \end{aligned}$$

und somit (2.2.11). (2.2.12) und (2.2.13) erhalten wir auf gleichem Weg. □

2.3 Der Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems

Für den Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems genügt es, (2.2.3) sowie die jeweilige Formel für C_+ nachzuweisen, da man die restlichen Ergebnisse erhält, indem man $-R$ statt R betrachtet. Im Beweis des Theorems betrachten wir die drei Fälle

$$M \geq 0 \text{ f.s.}, \; M \leq 0 \text{ f.s. und } P(M < 0) > 0, \; P(M > 0) > 0$$

getrennt und verwenden als Schlüssel zum Erfolg die Aussage von Lemma 2.3.1, das wir daher zur Vorbereitung voranstellen. Im Beweis verwenden wir außerdem Summen und Produkte sowie stetige Verarbeitungen von unabhängigen Zufallsgrößen, die alle die Verteilung der Zufallsgröße M besitzen. Um spätere Rechnungen zu erleichtern, setzen wir daher

(2.3.1) $$Y_n := \log|M_n|, \qquad S_n := \log|\Pi_n| = \sum_{i=1}^n Y_i, \qquad n \in \mathbb{N},$$

(2.3.2) $$r(t) := \mathrm{e}^{\kappa t}P(R > \mathrm{e}^t), \qquad \delta_n(t) := \mathrm{e}^{\kappa t}P(\Pi_n R > \mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

(2.3.3) $$g_1(t) := \mathrm{e}^{\kappa t}(P(R > \mathrm{e}^t) - P(MR > \mathrm{e}^t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

(2.3.4) $$g_{-1}(t) := \mathrm{e}^{\kappa t}(P(R < -\mathrm{e}^t) - P(MR < -\mathrm{e}^t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $S_0 := 0$, $\Pi_0 := 1$, $\Pi_n := \prod_{i=1}^n M_i$ und $R, M, M_1, M_2, \ldots$ unabhängige Zufallsgrößen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien und die M_n für alle $n \in \mathbb{N}$ die Verteilung von M besitzen. M' sei eine weitere Zufallsgröße, auf die diese Bedingungen ebenfalls zutreffen, d.h. insbesondere gilt $M' \sim M$. Man beachte, daß die Funktionen g_1 und g_{-1} aufgrund der Voraussetzungen (2.2.1) bzw. (2.2.2) und der Substitution $t = \log s$ betraglich uneigentlich Riemann- und daher auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind. Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei außerdem

(2.3.5) $$\bar{f}(t) := \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-(t-u)}f(u)du, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 2.3.1. *Falls* $\int_0^t u^\kappa P(R>u)du \sim C_+ t$ *für* $t\to\infty$ *gilt, folgt*

$$P(R>t)\sim C_+ t^{-\kappa}, \qquad t\to\infty.$$

Beweis. Wir wählen ein festes $b>1$. Dann ist $P(R>bt)<P(R>t)$ wegen $bt>t$, und für $t\to\infty$ gilt

$$\begin{aligned} C_+(b-1)t &\sim \int_0^{bt} u^\kappa P(R>u)du - \int_0^t u^\kappa P(R>u)du \\ &= \int_t^{bt} u^\kappa P(R>u)du \\ &\le P(R>t)\int_t^{bt} u^\kappa du \\ &= \frac{b^{\kappa+1}-1}{\kappa+1} t^{\kappa+1} P(R>t) \end{aligned}$$

und somit

$$\liminf_{t\to\infty} t^\kappa P(R>t)\ge C_+(\kappa+1)\frac{b-1}{b^{\kappa+1}-1}.$$

Da mit dem Satz von de L'Hospital

$$\lim_{b\downarrow 1}\frac{b-1}{b^{\kappa+1}-1}=\lim_{b\downarrow 1}\frac{1}{(\kappa+1)b^\kappa}=\frac{1}{\kappa+1}$$

folgt, erhalten wir durch Grenzübergang $b\downarrow 1$ schließlich $\liminf_{t\to\infty} t^\kappa P(R>t)\ge C_+$. Analog zeigt man

$$\limsup_{t\to\infty} t^\kappa P(R>t)\le C_+,$$

indem man $\int_{bt}^t u^\kappa P(R>u)du$ für $0<b<1$ nach unten durch $\frac{1-b^{\kappa+1}}{\kappa+1}t^{\kappa+1}P(R>t)$ abschätzt und dann $b\uparrow 1$ laufen läßt. Insgesamt folgt somit die Behauptung. □

2.3.1 $M\ge 0$ f.s.

Es sei also $M\ge 0$ fast sicher. Nach Lemma 2.3.1 genügt es für (2.2.3), für $t\to\infty$ $\int_0^t u^\kappa P(R>u)du\sim C_+t$ zu zeigen. Führen wir im Integral die Substitution $u=\mathrm{e}^s$ durch und benutzen die Definition des $^-$-Operators gemäß (2.3.5), erhalten wir mit Hilfe der Definition von $r(t)$

$$\int_0^t u^\kappa P(R>u)du=\int_{-\infty}^{\log t}\mathrm{e}^{(\kappa+1)s}P(R>\mathrm{e}^s)ds=t\bar r(\log t).$$

Folglich müssen wir

$$\bar r(\log t)\to C_+$$

für $t\to\infty$ zeigen. Da für $t\to\infty$ auch $\log t\to\infty$ läuft, untersuchen wir zunächst das Verhalten von $\bar r(t)$ für große Werte von t. Dazu schreiben wir $P(R>\mathrm{e}^t)$ für beliebiges $t\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ als Teleskopsumme und benutzen die Tatsache, daß die Betragsstriche in der Definition von S_n in (2.3.1) wegen $M_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ vernachlässigt werden können sowie daß $M_n \sim M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
P(R > \mathrm{e}^t) &= \sum_{k=1}^{n} (P(\Pi_{k-1} R > \mathrm{e}^t) - P(\Pi_k R > \mathrm{e}^t)) + P(\Pi_n R > \mathrm{e}^t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (P(\mathrm{e}^{S_{k-1}} R > \mathrm{e}^t) - P(\mathrm{e}^{S_{k-1}} M R > \mathrm{e}^t)) + P(\mathrm{e}^{S_n} R > \mathrm{e}^t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (P(R > \mathrm{e}^{t-S_k}) - P(MR > \mathrm{e}^{t-S_k})) + P(\mathrm{e}^{S_n} R > \mathrm{e}^t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} (P(R > \mathrm{e}^{t-u}) - P(MR > \mathrm{e}^{t-u})) P(S_k \in du) + P(\mathrm{e}^{S_n} R > \mathrm{e}^t).
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

Integriert wird hierbei nur über $\mathbb{R}$, obwohl $P(S_n = -\infty) > 0$ möglich ist, da nach Voraussetzung $M_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Setzen wir

$$
V_n(dt) := \mathrm{e}^{\kappa t} \sum_{k=0}^{n} P(S_k \in dt), \qquad n \in \mathbb{N},
$$

erhalten wir aus (2.3.6) mit Hilfe der Definitionen von g_1, r und δ_n

$$
r(t) = g_1 * V_{n-1}(t) + \delta_n(t), \qquad t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}.
$$

Eine Anwendung des $^-$-Operators gemäß (2.3.5) liefert mit Lemma 5.3.3 im Anhang

$$
\bar{r}(t) = \overline{g_1 * V_{n-1}}(t) + \bar{\delta}_n(t) = \bar{g}_1 * V_{n-1}(t) + \bar{\delta}_n(t), \qquad t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.7}
$$

Da wir $\bar{r}(t)$ für $t \to \infty$ untersuchen wollen, möchten wir auch auf der rechten Seite von (2.3.7) eine von n unabhängige Darstellung erzielen und betrachten beide Summanden für ein beliebiges, festes $t \in \mathbb{R}$. Die Y_i sind unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen mit $EY_1 = E \log |M| \in [-\infty, 0)$. Daher gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ fast sicher und

$$
\lim_{n\to\infty} P(\Pi_n R > \mathrm{e}^u) = \lim_{n\to\infty} P(R > \mathrm{e}^{u-S_n}) = 0,
$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = 0$. Aufgrund majorisierter Konvergenz folgt dasselbe für $\bar{\delta}_n(t)$.
Für den Term $\bar{g}_1 * V_{n-1}(t)$ erhalten wir

$$
\lim_{n\to\infty} \bar{g}_1 * V_{n-1}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \bar{g}_1(t-s) V_{n-1}(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \bar{g}_1(t-s) \mathrm{e}^{\kappa s} \sum_{k=0}^{n-1} P(S_k \in ds).
$$

Es ist nicht klar, ob wir Grenzwertbildung und Integral vertauschen dürfen. Wir definieren daher zunächst ein Maß η durch

$$
\eta(du) := \mathrm{e}^{\kappa u} P(Y_1 \in du).
$$

Dieses Maß gibt $-\infty$ keine Masse (beachte $E\mathrm{e}^{\kappa Y_1} = E\,|M|^{\kappa} = 1$) und ist aufgrund der Voraussetzungen eine nichtarithmetische Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ mit Erwartungswert $m \in (0, \infty)$. Mit Hilfe von Lemma 5.3.4 im Anhang und $S_0 \sim \delta_0$ erkennen wir $\mathrm{e}^{\kappa t} P(S_n \in dt)$ als Dichte der Verteilung $\eta^{*(n)}$, die aufgrund der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung der M_n und wegen (2.1.5) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ ist, denn es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \eta^{*(n)}(du) = \int_{\Omega} e^{\kappa S_n} dP = E e^{\kappa \sum_{i=1}^n Y_i} = E \prod_{i=1}^n e^{\kappa \log|M_i|} = (E|M_1|^\kappa)^n = 1.$$

Wir können daher durch die Summe über die Dichte von $\eta^{*(n)}$ das Erneuerungsmaß

$$V(dt) := \sum_{n \geq 0} \eta^{*(n)}(dt) = \sum_{n \geq 0} e^{\kappa t} P(S_n \in dt)$$

definieren. Wegen $m \neq 0$ ist $f * V(t) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und d.R.i. Funktionen f. Insbesondere gilt $\bar{g}_1 * V(t) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$, da $g_1 \in L_1 := L_1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda)$[1] und damit $\bar{g}_1$ nach Lemma 5.3.2 im Anhang d.R.i. ist. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\lim_{n \to \infty} \bar{g}_1 * V_{n-1}(t) = \int_{\mathbb{R}} \bar{g}_1(t-s) e^{\kappa s} \sum_{k \geq 0} P(S_k \in ds) = \int_{\mathbb{R}} \bar{g}_1(t-s) V(ds) = \bar{g}_1 * V(t),$$

und wir erhalten in (2.3.7) für $n \to \infty$ und ein beliebiges, festes $t \in \mathbb{R}$ insgesamt

$$\bar{r}(t) = \bar{g}_1 * V(t). \tag{2.3.8}$$

Auf diesen Ausdruck können wir das 2. Erneuerungstheorem anwenden, da $(S_n)_{n \geq 0} = (\sum_{i=1}^n Y_i)_{n \geq 0}$ ein nichtarithmetischer SRW mit

$$\int_{\mathbb{R}} u e^{\kappa u} P^{Y_1}(du) = \int_{\mathbb{R}} u \eta(du) = m \in (0, \infty)$$

und $\bar{g}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nach obigen Überlegungen d.R.i. ist, d.h. es gilt

$$\lim_{t \to \infty} \bar{r}(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}_1(u) du.$$

Da außerdem mit Hilfe des Satzes von Fubini $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}_1(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)du$ ist, folgt (2.2.3) für $t \to \infty$ mittels

$$\begin{aligned}
\bar{r}(\log t) \to \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}_1(\log u) d\log u &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\log u) d\log u \\
&= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} (P(R > u) - P(MR > u)) u^{\kappa-1} du \\
&= C_+.
\end{aligned}$$

□

2.3.2 $P(M < 0) > 0$ und $P(M > 0) > 0$

Sei $P(M < 0) > 0$ und $P(M > 0) > 0$. Wir setzen $X_n := sgn \Pi_n \in \{-1, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog zu Fall (a) möchten wir zum Beweis von (2.2.3) $\bar{r}(\log t) \to C_+$ für $t \to \infty$ zeigen

[1] Banachraum der $\mathbb{C}$-wertigen λ-integrierbaren Funktionen bei λ-f.ü. übereinstimmender Versionen

und betrachten daher wieder $P(R > \mathrm{e}^t)$. Aus (2.3.6) erhalten wir wegen $\mathrm{e}^{S_n} = |\Pi_n|$ unter der Berücksichtigung des Vorzeichens von Π_n

$$\begin{aligned} P(R > \mathrm{e}^t) &= \sum_{k=0}^{n-1}(P(X_k = 1, R > \mathrm{e}^{t-S_k}) - P(X_k = 1, MR > \mathrm{e}^{t-S_k})) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1}(P(X_k = -1, R < -\mathrm{e}^{t-S_k}) - P(X_k = -1, MR < -\mathrm{e}^{t-S_k})) \\ &\quad + P(\Pi_n R > \mathrm{e}^t) \end{aligned}$$

und daraus ähnlich zu (2.3.6)

$$\begin{aligned} r(t) &= \mathrm{e}^{\kappa t} P(R > \mathrm{e}^t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\kappa u} \mathrm{e}^{\kappa(t-u)} (P(X_k = 1, R > \mathrm{e}^{t-u}) - P(X_k = 1, MR > \mathrm{e}^{t-u})) P^{S_k}(du) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\kappa u} \mathrm{e}^{\kappa(t-u)} (P(X_k = -1, R < -\mathrm{e}^{t-u}) - P(X_k = -1, MR < -\mathrm{e}^{t-u})) P^{S_k}(du) \\ &\quad + \delta_n(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\kappa u} g_{X_k}(t-u) P^{S_k}(du) + \delta_n(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E \mathrm{e}^{\kappa S_k} g_{X_k}(t - S_k) + \delta_n(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} E \mathrm{e}^{\kappa S_k} g_{X_k}(t - S_k) + \delta_n(t), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.9}$$

Für die Zufallsgrößen M_n führen wir eine neue Verteilung ein, unter der $M, M_1, M_2, \ldots$ weiter unabhängig identisch verteilt und die Definitionen von Π_n, Y_n, S_n und X_n unverändert bleiben. Diese Verteilung ist für alle $y \in \mathbb{R}$ durch

$$P_\kappa(M \in dy) := |y|^\kappa P(M \in dy)$$

definiert und bildet wegen (2.1.5) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$. Bezeichnen wir deren Erwartungswert mit E_κ, erhält (2.3.9) mit Hilfe von Korollar 5.3.5 im Anhang die Gestalt

$$r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} E_\kappa\, g_{X_k}(t - S_k) + \delta_n(t), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.10}$$

Wir setzen

$$V_{n,x}(dt) := \sum_{k=0}^{n} P_\kappa(X_k = x, S_k \in dt), \qquad x \in \{-1, 1\},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} E_\kappa\, g_{X_k}(t - S_k) &= \int_{\mathbb{R}} g_{X_k}(t-u) \sum_{k=0}^{n-1} P_\kappa^{S_k}(du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_1(t-u) V_{n-1,1}(du) + \int_{\mathbb{R}} g_{-1}(t-u) V_{n-1,-1}(du) \\ &= g_1 * V_{n-1,1}(t) + g_{-1} * V_{n-1,-1}(t). \end{aligned}$$

Somit folgt aus (2.3.10) analog zu (2.3.7)

$$\begin{aligned} \bar{r}(t) &= \bar{g}_1 * V_{n-1,1}(t) + \bar{g}_{-1} * V_{n-1,-1}(t) + \bar{\delta}_n(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E_\kappa\, \bar{g}_{X_k}(t - S_k) + \bar{\delta}_n(t) \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, und wir untersuchen den letzten Ausdruck für $n \to \infty$ und ein beliebiges, festes $t \in \mathbb{R}$.
Das Grenzwertverhalten von $\bar{\delta}_n(t)$ ist bestimmt durch das von $\delta_n(t)$. Diesen Term können wir mittels

$$\begin{aligned} \delta_n(t) &= \mathrm{e}^{\kappa t} P(\Pi_n R > \mathrm{e}^t) \\ &\le \mathrm{e}^{\kappa t} P(X_n = 1, R > \mathrm{e}^{t-S_n}) + \mathrm{e}^{\kappa t} P(X_n = -1, R < -\mathrm{e}^{t-S_n}) \\ &\le \mathrm{e}^{\kappa t} P(|R| > \mathrm{e}^{t-S_n}) \end{aligned}$$

nach oben abschätzen, und $P(|R| > \mathrm{e}^{t-S_n})$ läuft mit der gleichen Begründung wie in Fall (a) für $n \to \infty$ gegen Null, d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} \bar{\delta}_n(t) = 0$ für ein beliebiges, festes $t \in \mathbb{R}$.
Die Grenzwertbetrachtung des Summenterms gestaltet sich etwas aufwendiger als im Fall (a), da der Erwartungswert der $\bar{g}_{X_k}$ abhängig ist vom Produkt über die M_n, dessen Vorzeichen sich mit wachsendem n aufgrund der Voraussetzungen dieses Falls beliebig ändern kann. Daher werden wir den Summenterm in zwei Terme aufteilen, die nur über die Indizes summieren, für die $X_n = 1$ bzw. $X_n = -1$ gilt. Um dies zu erreichen, benutzen wir, daß $\mathbf{X} := (X_n)_{n\ge 0}$ mit $X_0 = 1$ eine endliche Markov-Kette mit Zustandsraum {-1,1} und Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ bildet. p und q sind dabei definiert durch

$$p := P_\kappa(M > 0) = \int \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y) P_\kappa^M(dy) = \int \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\, |y|^\kappa\, P^M(dy) = E\mathbf{1}_{\{M>0\}}\, |M|^\kappa$$

und analog

$$q := P_\kappa(M < 0) = E\mathbf{1}_{\{M<0\}}\, |M|^\kappa\,,$$

d.h. es gilt $p, q > 0$ und $p + q = 1$. η_+ und η_- seien weiter die unter P_κ bedingten Verteilungen von $\log|M|$ gegeben $M > 0$ bzw. $M < 0$, d.h.

$$\eta_+(dy) := P_\kappa(\log|M| \in dy | M > 0) = P_\kappa(M > 0, \log|M| \in dy)/p, \tag{2.3.12}$$

$$\eta_-(dy) := P_\kappa(\log|M| \in dy | M < 0) = P_\kappa(M < 0, \log|M| \in dy)/q. \tag{2.3.13}$$

Mit Hilfe dieser bedingten Verteilungen können wir die bedingte Verteilung der $Y_n = \log|M_n|$ gegeben $\mathbf{X}$ angeben, unter der die Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen sind. Wir betrachten dazu den Übergang von

$$X_{n-1} = sgn\, \Pi_{n-1} = sgn \prod_{i=1}^{n-1} M_i$$

zu

$$X_n = sgn \prod_{i=1}^{n} M_i = sgn((\prod_{i=1}^{n-1} M_i) \cdot M_n).$$

Gegeben $M_n > 0$, ändert sich das Vorzeichen X_{n-1} von $\prod_{i=1}^{n-1} M_i$ nicht durch die Multiplikation mit M_n, d.h. es gilt $X_n = X_{n-1}$. Gegeben $M_n < 0$ und $X_{n-1} = -1$, folgt dagegen

$X_n = 1$ und analog $X_n = -1$ für $X_{n-1} = 1$. Im Fall $M_n < 0$ gilt daher $X_n \neq X_{n-1}$, und insgesamt folgt für die unter $\mathbf{X}$ bedingte Verteilung der Y_n bzgl. P_κ

$$P_\kappa(Y_n \in \cdot\,|\mathbf{X}) = \mathbf{1}_{\{X_n = X_{n-1}\}}\eta_+(\cdot) + \mathbf{1}_{\{X_n \neq X_{n-1}\}}\eta_-(\cdot). \tag{2.3.14}$$

Seien nun $0 = N_0^{(+)} < N_1^{(+)} < N_2^{(+)} < \ldots$ die Indizes mit $X_{N_i^{(+)}} = 1$ und $N_0^{(-)} < N_1^{(-)} < N_2^{(-)} < \ldots$ diejenigen mit $X_{N_i^{(-)}} = -1$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Setzen wir

$$I_n^{(+)} := max\{i \geq 0 : N_i^{(+)} \leq n-1\},$$

$$I_n^{(-)} := max\{i \geq 0 : N_i^{(-)} \leq n-1\}$$

und $W_n^{(\pm)} := S_{N_n^{(\pm)}}$, erhalten wir in (2.3.11) die gewünschte Aufteilung

$$\bar{r}(t) = E_\kappa \sum_{k=0}^{I_n^{(+)}} \bar{g}_1(t - W_k^{(+)}) + E_\kappa \sum_{k=0}^{I_n^{(-)}} \bar{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) + \bar{\delta}_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.15}$$

Das Grenzwertverhalten der beiden Erwartungswerte werden wir nun mit Hilfe der in (2.3.12) und (2.3.13) definierten bedingten Verteilungen η_+ und η_- bestimmen.

Wir betrachten zunächst den ersten Summanden und dazu $(W_n^{(+)})_{n\geq 0} = (\sum_{i=1}^{N_n^{(+)}} Y_i)_{n\geq 0}$ genauer. Wie in Fall (a) möchten wir für ein beliebig gewähltes festes $t \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ und damit fast sicher für $I_n^{(+)} \to \infty$

$$E_\kappa \sum_{k=0}^{I_n^{(+)}} \bar{g}_1(t - W_k^{(+)}) \to E_\kappa \sum_{k\geq 0} \bar{g}_1(t - W_k^{(+)}) \tag{2.3.16}$$

zeigen und auf den Grenzwertausdruck das 2. Erneuerungstheorem anwenden.

Die $N_n^{(+)}$ sind für alle $n \geq 0$ genau die Indizes, für die die Markov-Kette zum $(n+1)$-ten Mal den Wert Eins annimmt (das Produkt $\prod_{i=1}^{N_n^{(+)}} M_i$ ist zum n-ten Mal positiv). Wir können nun $W_n^{(+)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ in mehrere Summenterme aufteilen, deren Startindizes die Zeitpunkte markieren, an denen die Kette einen Einszustand verläßt, und die bis zu den Zeitpunkten aufsummieren, an denen die Kette danach zum ersten Mal wieder Eins wird:

$$W_n^{(+)} = \sum_{i=1}^{N_1^{(+)}} Y_i + \sum_{i=N_1^{(+)}+1}^{N_2^{(+)}} Y_i + \ldots + \sum_{i=N_{k-1}^{(+)}+1}^{N_n^{(+)}} Y_i.$$

Setzen wir η als Verteilung von $\sum_{i=1}^{N_1^{(+)}} Y_i$ unter P_κ und definieren

$$Z_j^{(+)} := \sum_{i=N_{j-1}^{(+)}+1}^{N_j^{(+)}} Y_i, \qquad j \geq 1,$$

gilt $Z_j^{(+)} \sim \eta$, und die $Z_j^{(+)}$ sind voneinander unabhängig. Wegen $W_0^{(+)} = V_{N_0^{(+)}} = S_0 = 0$ ist $(W_n^{(+)})_{n\geq 0} = (\sum_{j=1}^n Z_j^{(+)})_{n\geq 0}$ somit ein SRW mit Zuwachsverteilung η.

Als Verteilung der Summe $\sum_{i=1}^{N_1^{(+)}} Y_i$ hängt die genaue Gestalt von η von der Verteilung der einzelnen Summanden ab, die wiederum durch den Wert von $N_1^{(+)}$, d.h. die Gestalt der Kette $\mathbf{X}$ und damit durch das Vorzeichen der zu multiplizierenden Zufallsgrößen M_n, bestimmt ist. Gilt $N_1^{(+)} = n$ für ein beliebiges $n \geq 2$, wird die in 1 startende Kette zum Zeitpunkt n zum ersten Mal wieder 1 und nimmt folglich an den Stellen 1 bis $n-1$ nur die Werte -1 an. Für die in (2.3.14) bestimmte Verteilung der Y_n gegeben $\mathbf{X}$ unter P_κ bedeutet dies $Y_1 \sim \eta_-, Y_n \sim \eta_-$ und $Y_i \sim \eta_+$ für alle $2 \leq i \leq n-1$. Bezogen auf das Produkt der M_n heißt das aber gerade $M_1 < 0$, $M_n < 0$ und $M_i > 0$ für alle $2 \leq i \leq n-1$, und mit Hilfe der Definition von p und q und der Unabhängigkeit der M_n unter P_κ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\begin{aligned} P_\kappa(N_1^{(+)} = n) &= P_\kappa(M_1 < 0, M_2 > 0, \ldots, M_{n-1} > 0, M_n < 0) \\ &= q^2 p^{n-2}. \end{aligned}$$

Für den Fall $N_1^{(+)} = 1$ ergibt sich $Y_1 \sim \eta_+$ und $P_\kappa(N_1^{(+)} = 1) = p$.
Insgesamt folgt somit aufgrund der Unabhängigkeit der Y_n für die Gestalt von η

$$\begin{aligned} \eta(\cdot) &= P_\kappa\Big(\sum_{i=1}^{N_1^{(+)}} Y_i \in \cdot\ \Big) \\ &= \sum_{n\geq 1} P_\kappa\Big(N_1^{(+)} = n, \sum_{i=1}^{n} Y_i \in \cdot\ \Big) \\ &= \sum_{n\geq 1} P_\kappa\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \in \cdot\ |N_1^{(+)} = n\Big) P_\kappa(N_1^{(+)} = n) \\ &= P_\kappa(Y_1 \in \cdot\ |N_1^{(+)} = 1) P_\kappa(N_1^{(+)} = 1) \\ &\quad + \sum_{n\geq 2} P_\kappa\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \in \cdot\ |N_1^{(+)} = n\Big) P_\kappa(N_1^{(+)} = n) \\ &= p\,\eta_+(\cdot) + \sum_{n\geq 2} q^2 p^{n-2} \big(P_\kappa(Y_1 \in \cdot\ |N_1^{(+)} = n) * \ldots * P_\kappa(Y_n \in \cdot\ |N_1^{(+)} = n)\big) \\ &= p\,\eta_+(\cdot) + \sum_{n\geq 2} q^2 p^{n-2} \eta_-^{*(2)}(\cdot) * \eta_+^{*(n-2)}(\cdot), \end{aligned}$$

d.h.

$$\eta = p\,\eta_+ + \sum_{n\geq 2} q^2 p^{n-2} \eta_-^{*(2)} * \eta_+^{*(n-2)}. \tag{2.3.17}$$

In Lemma 2.3.2 begründen wir, daß η nichtarithmetisch ist und den Erwartungswert $2m$ besitzt. Wir können daher das Erneuerungsmaß $V := \sum_{n\geq 0} \eta^{*(n)}$ bilden und erhalten wie in Fall (a) mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz die Konvergenz der Erwartungswerte in (2.3.16). Da $Z_j^{(+)} \sim \eta$ für alle $j \geq 1$ und damit wegen (2.3.19) in Lemma 2.3.2

$$E_\kappa Z_1^{(+)} = 2m \in (0, \infty)$$

gilt, erhalten wir mit Hilfe des 2. Erneuerungstheorems

$$E_\kappa \sum_{k\geq 0} \bar{g}_1(t - W_k^{(+)}) \to \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)du$$

für $t \to \infty$.

Mit dem zweiten Summenterm aus (2.3.15) verfahren wir in ähnlicher Weise. Setzen wir

$$Z_j^{(-)} := \begin{cases} \sum_{i=N_{j-1}^{(-)}+1}^{N_j^{(-)}} Y_i & , j \geq 1 \\ \\ \sum_{i=1}^{N_0^{(-)}} Y_i & , j = 0 \end{cases},$$

so gilt $(W_n^{(-)})_{n\geq 0} = (\sum_{j=0}^n Z_j^{(-)})_{n\geq 0}$. Die $Z_j^{(-)}$ besitzen dabei für alle $j \geq 1$ die Verteilung η (beachte $Y_{N_{j-1}^{(-)}+1} \sim \eta_-$, $Y_{N_j^{(-)}} \sim \eta_-$ für den Fall $N_{j-1}^{(-)}+1 \neq N_j^{(-)}$ und $j \geq 1$), und für $j = 0$ gilt $N_0^{(-)} > 0$, d.h. $(W_n^{(-)})_{n\geq 0}$ ist ein VRW. $N_0^{(-)}$ ist der erste Index, für den die in Eins startende Kette $\mathbf{X}$ den Wert -1 annimmt und somit der, der die erste negative Zufallsgröße M_n kennzeichnet. Für die Verteilung der Y_n bedeutet dies gemäß (2.3.14) $Y_{N_0^{(-)}} \sim \eta_-$ und $Y_i \sim \eta_+$ für alle $1 \leq i \leq N_0^{(-)} - 1$. Infolgedessen gilt

$$\begin{aligned} P_\kappa(N_0^{(-)} = n) &= P_\kappa(M_1 > 0, \ldots, M_{n-1} > 0, M_n < 0) \\ &= qp^{n-1}, \end{aligned}$$

und analog zur Berechnung von η im Fall des ersten Summenterms erhalten wir mit $\eta_0 := P_\kappa^{Z_0^{(-)}}$

$$\begin{aligned} \eta_0(\cdot) &= P_\kappa(\sum_{i=1}^{N_0^{(-)}} Y_i \in \cdot\ ) \\ &= \sum_{n\geq 1} P_\kappa(\sum_{i=1}^{n} Y_i \in \cdot\ | N_0^{(-)} = n) P_\kappa(N_0^{(-)} = n) \\ &= \sum_{n\geq 1} qp^{n-1}(P_\kappa(Y_1 \in \cdot\ | N_0^{(-)} = n) * \ldots * P_\kappa(Y_n \in \cdot\ | N_0^{(-)} = n)) \\ &= \sum_{n\geq 1} qp^{n-1}\eta_- * \eta_+^{*(n-1)}. \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Es gilt demnach $W_n^{(-)} \sim \eta_0 * \eta^{*(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und mit Hilfe des Erneuerungsmaßes $\eta_0 * \sum_{n\geq 0} \eta^{*(n)}$ folgt analog zu (2.3.16) für beliebiges, festes $t \in \mathbb{R}$

$$E_\kappa \sum_{k=0}^{I_n^{(-)}} \bar{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \to E_\kappa \sum_{k\geq 0} \bar{g}_{-1}(t - W_k^{(-)})$$

für $n \to \infty$, da $g_{-1} \in L_1$ und damit $\bar{g}_{-1}$ wie $\bar{g}_1$ nach Lemma 5.3.2 im Anhang d.R.i. ist. Aufgrund von (2.3.19) in Lemma 2.3.2 erhalten wir außerdem

$$E_\kappa Z_1^{(-)} = 2m \in (0, \infty)$$

und daher mit Hilfe des 2. Erneuerungstheorems

$$E_\kappa \sum_{k\geq 0} \bar{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \to \frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} g_{-1}(u)du, \qquad t \to \infty.$$

(2.2.7) folgt nun mittels

$$\begin{aligned}
\bar r(\log t) &\to \frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\log u) + g_{-1}(\log u) d\log u \\
&= \frac{1}{2m}\int_0^{\infty} (P(R>u) - P(MR>u) + P(R<-u) - P(MR<-u))u^{\kappa-1}du \\
&= \frac{1}{2m}\int_0^{\infty} (P(|R|>u) - P(|MR|>u))u^{\kappa-1}du \\
&= C_+
\end{aligned}$$

für $t \to \infty$. □

Lemma 2.3.2 *Mit den Bezeichnungen aus dem ersten Teil des Beweises von Fall (b) des Impliziten Erneuerungstheorems gelten unter den dort angenommenen Voraussetzungen*

(2.3.19)
$$\int_{\mathbb{R}} y\eta(dy) = 2m,$$

(2.3.20) η *ist nichtarithmetisch.*

Beweis. Seien m_+, m_- die Erwartungswerte von η_+, η_-, dann folgt mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} y\eta(dy) &= p\int_{\mathbb{R}} y\eta_+(dy) + \sum_{n\ge 2} q^2p^{n-2}\int_{\mathbb{R}} y\eta_-^{*(2)} * \eta_+^{*(n-2)}(dy) \\
&= p\,m_+ + \sum_{n\ge 2} q^2p^{n-2}(2m_- + (n-2)m_+) \\
&= p\,m_+ + 2qm_- \sum_{n\ge 2} qp^{n-2} + p\,m_+\, q^2 \sum_{n\ge 2}(n-2)\,p^{n-3} \\
&= p\,m_+ + 2qm_- + p\,m_+\, q^2 \frac{d}{dp}(\sum_{n\ge 0} p^n) \\
&= 2(p\,m_+ + qm_-).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
E\mathbf{1}_{\{M>0\}}\,|M|^{\kappa}\log|M|\,/p &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\log|y|\,P_\kappa^M(dy) \\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}} y\,P_\kappa(M>0, \log|M| \in dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} y\,\eta_+(dy) \\
&= m_+
\end{aligned}$$

und analog

$$E\mathbf{1}_{\{M<0\}}\,|M|^{\kappa}\log|M|\,/q = m_-$$

gilt $2(p\,m_+ + q\,m_-) = 2m$ und daher (2.3.19).

Zum Nachweis von (2.3.20) betrachten wir den Träger von η, d.h. von $Z_1^{(+)} = \sum_{i=1}^{N_1^{(+)}} Y_i$ und somit von $\log|M|$. $\log|M|$ ist unter P_κ nichtarithmetisch. Es existiert daher eine Teilmenge B des Trägers dieser Verteilung, so daß die von B erzeugte additive Gruppe dicht in $\mathbb{R}$ ist. Seien B_+, B_- die Schnitte von B mit den Trägern der Verteilung von $\mathbf{1}_{\{M>0\}} \log|M|$ und $\mathbf{1}_{\{M<0\}} \log|M|$. Setzen wir

$$B^* := \{\omega : \ \omega \in B_+\} \cup \{2\omega : \ \omega \in B_-\},$$

so erzeugt B^* ebenfalls eine additive in $\mathbb{R}$ dichte Gruppe. Gilt $b \in B_+$, erhalten wir für alle $b \in B^*$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
P_\kappa(|Z_1^{(+)} - b| < \varepsilon) &= P_\kappa^{Z_1^{(+)}}((b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \\
&= \eta((b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \\
&\geq p \ \eta_+((b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \\
&= p \ \frac{1}{p} \ P_\kappa(M > 0, \log|M| \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Für $\frac{1}{2}b \in B_-$ folgt in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned}
P_\kappa(|Z_1^{(+)} - b| < \varepsilon) &\geq q^2 \eta_-^{*(2)}((b-\varepsilon, b+\varepsilon)) \\
&= q^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(b-\varepsilon, b+\varepsilon)}(x+y) \eta_-(dx) \eta_-(dy) \\
&\geq q^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(\frac{1}{2}(b-\varepsilon), \frac{1}{2}(b+\varepsilon))}(x) \mathbf{1}_{(\frac{1}{2}(b-\varepsilon), \frac{1}{2}(b+\varepsilon))}(y) \eta_-(dx) \eta_-(dy) \\
&= q^2 (\eta_-(\frac{1}{2}(b-\varepsilon), \frac{1}{2}(b+\varepsilon)))^2 \\
&= q^2 \frac{1}{q^2} \big(P_\kappa(M < 0, \log|M| \in (\frac{1}{2}(b-\varepsilon), \frac{1}{2}(b+\varepsilon)))\big)^2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

b liegt daher im Träger von $Z_1^{(+)}$ und somit im Träger von η. Da B^* dicht in $\mathbb{R}$ ist, kann η nicht gitterverteilt sein. □

2.3.3 $M \leq 0$ f.s.

Ist $M \leq 0$ fast sicher, gilt auch $M' \leq 0$ und folglich $MM' \geq 0$ fast sicher. Für MM' können wir daher die in Fall (a) bereits gewonnenen Ergebnisse nutzen, sofern wir die entsprechende Voraussetzung

$$\int_0^\infty |P(R > t) - P(MM'R > t)| \, t^{\kappa-1} dt < \infty \tag{2.3.21}$$

zeigen. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |P(R > t) - P(MM'R > t)| \, t^{\kappa-1} dt &\leq \int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)| \, t^{\kappa-1} dt \\
&+ \int_0^\infty |P(MR > t) - P(MM'R > t)| \, t^{\kappa-1} dt.
\end{aligned}$$

Wegen (2.2.1) ist das erste Integral der rechten Seite endlich ist. Da $M \leq 0$ f.s. gilt, erhalten wir für das zweite Integral mit Hilfe des Satzes von Fubini und der Substitution $t = -uv$

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)} |P(MR > t) - P(MM'R > t)|\, t^{\kappa-1} \lambda\!\!\lambda(dt) \\
= &\int_{(0,\infty)} \int_{(-\infty,0)} |P(uR > t) - P(uM'R > t)|\, P^M(du) t^{\kappa-1} \lambda\!\!\lambda(dt) \\
= &\int_{(-\infty,0)} \int_{(0,\infty)} |P(uR > t) - P(uM'R > t)|\, t^{\kappa-1} \lambda\!\!\lambda(dt) P^M(du) \\
= &\int_{(-\infty,0)} (-u)^\kappa \int_{(0,\infty)} |P(R < -v) - P(M'R < -v)|\, v^{\kappa-1} \lambda\!\!\lambda(dv) P^M(du) \\
= &\int_\Omega |M|^\kappa \, dP \int_{(0,\infty)} |P(R < -v) - P(M'R < -v)|\, v^{\kappa-1} \lambda\!\!\lambda(dv) \\
= &\, E\,|M|^\kappa \int_{(0,\infty)} |P(R < -v) - P(M'R < -v)|\, v^{\kappa-1} \lambda\!\!\lambda(dv) \\
= &\int_{(0,\infty)} |P(R < -v) - P(M'R < -v)|\, v^{\kappa-1} \lambda\!\!\lambda(dv).
\end{aligned}$$

Wegen (2.2.2) ist $|P(R < -v) - P(M'R < -v)|\, v^{\kappa-1}$ uneigentlich Riemann-integriebar auf $(0, \infty)$ und daher insgesamt (2.3.21) erfüllt. Aus Fall (a) folgt dann mit $m_2 := E\,|MM'|^\kappa \log |MM'|$

$$P(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa}$$

für $t \to \infty$, wobei wir wegen $M \sim M'$ die Formel für C_+ mit m_2 anstelle von $2m$ erhalten, indem wir die Integralumformung zum Nachweis von (2.3.21) noch einmal ohne Betragsstriche durchführen. Damit C_+ vollständig mit (2.2.7) übereinstimmt, müssen wir noch $m_2 = 2m$ zeigen. Dies folgt aufgrund der Unabhängigkeit von M und M' und mit Hilfe des Satzes von Fubini mittels

$$\begin{aligned}
m_2 &= E\,|MM'|^\kappa \log |MM'| \\
&= \int_{(-\infty,0)\times(-\infty,0)} |xy|^\kappa \log |xy|\, P^{(M,M')}(dx, dy) \\
&= \int_{(-\infty,0)\times(-\infty,0)} |xy|^\kappa (\log |x| + \log |y|) d(P^M \otimes P^{M'}) \\
&= \int |y|^\kappa \int |x|^\kappa \log |x|\, P^M(dx) P^{M'}(dy) \\
&\quad + \int |x|^\kappa \int |y|^\kappa \log |y|\, P^{M'}(dy) P^M(dx) \\
&= E\,|M'|^\kappa\, E\,|M|^\kappa \log |M| + E\,|M|^\kappa\, E\,|M'|^\kappa \log |M'| \\
&= 2m.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit

$$C_+ = \frac{1}{2m} \int_0^\infty (P(|R| > t) - P(|MR| > t)) t^{\kappa-1} dt$$

und folglich (2.2.7). □

3 Die Konvergenzrate der Flanken

In Kapitel 2 haben wir für die Flanken der unbekannten Verteilung der Zufallsgröße R

$$t^{\kappa} P(R > t) \sim C_+$$

für $t \to \infty$ gezeigt. In diesem Kapitel wollen wir die Annäherung von $t^{\kappa} P(R > t)$ an C_+ genauer beschreiben. Mit Hilfe von Satz 3.2.1 und 3.3.1 werden wir zeigen, daß $t^{\kappa} P(R > t)$ unter bestimmten Voraussetzungen für ein bestimmtes $\gamma > 0$ und große Werte von t nur um $O(t^{-\gamma})$ von C_+ abweicht (analoges gilt für $t^{\kappa} P(R < -t)$).
Um dies zu erreichen, benötigen wir eine spezielle Zerlegung eines Erneuerungsmaßes nach Stone, die wir im folgenden Abschnitt vorstellen werden. Für ein Maß $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$[1] vereinbaren wir dazu

$$\Phi_\mu(\theta) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta t} \mu(dt), \qquad \theta \in \mathbb{C}.$$

Der Definitionsbereich von Φ_μ lautet damit

$$\mathcal{D}(\Phi_\mu) = \{\theta \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{i\theta t}| \mu(dt) < \infty\} = \{\theta \in \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-Im(\theta) t} \mu(dt) < \infty\}.$$

Setzen wir

$$\mu_\theta(dt) := \mathrm{e}^{-Im(\theta)t} \mu(dt), \qquad \theta \in \mathcal{D}(\Phi_\mu),$$

so ist $\mu_\theta \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ und

$$\Phi_\mu(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iRe(\theta)t} \mu_\theta(dt), \qquad \theta \in \mathcal{D}(\Phi_\mu),$$

die 1-dimensionale Fouriertransformierte ϕ_{μ_θ} von μ_θ an der Stelle $Re(\theta)$. Wir benutzen im folgenden außerdem die für alle $\theta \in \mathbb{R}$ definierte momenterzeugende Funktion

$$\psi_\mu(\theta) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\theta t} \mu(dt)$$

(vgl. [AWT], Definition 40.3).

[1] Menge der endlichen Maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$

3.1 Eine Zerlegung nach Stone

Satz 3.1.1. *Sei η ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, das $m := \int_{\mathbb{R}} u\eta(du) > 0$ sowie $\int_{\mathbb{R}} u^2\eta(du) < \infty$ erfülle, und es gebe ein $\alpha > 0$ mit $\psi_\eta(\alpha) < \infty$. Sei η außerdem quasi $\lambda\!\!\lambda$-stetig, d.h. es existieren ein $n_0 \in \mathbb{N}$, eine Konstante $\delta \in [0,1)$ sowie Wahrscheinlichkeitsmaße ξ_0, ξ_1 mit*

$$\eta^{*(n_0)} = (1-\delta)\xi_0 + \delta\xi_1, \tag{3.1.1}$$

wobei ξ_0 $\lambda\!\!\lambda$-stetig ist und $\xi_0 = f\lambda\!\!\lambda$ gelte. Dann folgt:

(a) Es existiert ein $\beta \in (0,\alpha]$ mit den Eigenschaften
   (i) $\psi_{\xi_1}(\beta) < \frac{1}{\delta}$,
   (ii) $\Phi_\eta(\theta) \neq 1$ für alle $\theta \in \mathbb{C}$ mit $Im(\theta) = -\beta$.

(b) Für das Erneuerungsmaß $V := \sum_{n\geq 0} \eta^{*(n)}$ gilt

$$V = V_0 + V_1,$$

wobei $V_1 \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ mit $\psi_{V_1}(\beta) < \infty$ ist und V_0 $\lambda\!\!\lambda$-stetig mit einer stetigen beschränkten Dichte v_0, die

$$v_0(x) = \frac{1}{m} - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{-i\theta x}\frac{d\theta}{1-\Phi_\eta(\theta)} + o(e^{-\beta x}), \qquad x \to \infty, \tag{3.1.2}$$

erfüllt.
($\mathcal{C}$ ist hier eine einfach geschlossene Kurve in $D := \{\theta \in \mathbb{C} : Im(\theta) \in (-\beta, 0)\} \subseteq \mathcal{D}(\Phi_\eta)$, die alle Nullstellen von $1-\Phi_\eta$ in D umläuft.)

Die Inklusion $D \subseteq \mathcal{D}(\Phi_\eta)$ gilt für alle $\theta \in D$ aufgrund der Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-Im(\theta)t}\eta(dt) < \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\beta t}\eta(dt) = \psi_\eta(\beta) \leq \psi_\eta(\alpha).$$

Als analytische Transformierte ist Φ_η holomorph in D und stetig in $\overline{D}$.
Aufgrund des Beweises von Satz 3.1.1 wissen wir, daß höchstens endlich viele Nullstellen von $1-\Phi_\eta$ in D liegen und wir daher einen geeigneten Weg $\mathcal{C}$ finden, der diese umläuft. Wir zeigen im folgenden Lemma, daß (3.1.2) dann aufgrund des Residuensatzes neben der Integral- auch eine Summendarstellung besitzt. Existieren keine Nullstellen von $1-\Phi_\eta$ in D, ist der Integrand in (3.1.2) holomorph und das Integral nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich Null.

Lemma 3.1.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.1 besitzt $1-\Phi_\eta$ höchstens endlich viele Nullstellen in D. Seien $\theta_1,\dots,\theta_{n_1}$ diese Nullstellen mit Vielfachheiten $k_1,\dots,k_{n_1}$, $n_1 \in \mathbb{N}$ und $k_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq n_1$, sowie*

$$a_{l,j} := res_{\theta_l}\frac{(\theta-\theta_l)^{j-1}}{1-\Phi_\eta(\theta)}, \qquad j = 1,\dots,k_l,\ l = 1,\dots,n_1.$$

Dann gilt neben (3.1.2) außerdem

$$v_0(t) = \frac{1}{m} + \sum_{l=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{k_l}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}Re\left(e^{-i\theta_l t}(-i)^j a_{l,j}\right) + o(e^{-\beta t}), \qquad t \to \infty.$$

Beweis. Aus Teil (a) des Beweises von Satz 3.1.1 folgt, daß $1 - \Phi_\eta$ höchstens endlich viele Nullstellen in D besitzt. Wir erhalten dies auch noch auf einem anderem Weg. Wir wissen (ebenfalls aufgrund des gerade genannten Beweises), daß $\Phi_\eta(\theta)$ den Wert 1 nur in einer beschränkten Teilmenge von $\overline{D}$ annimmt. Für reelles θ gilt $\Phi_\eta(\theta) = 1$ nur für $\theta = 0$, und dies ist wegen

$$\Phi_\eta(\theta) = 1 + im\theta + o(\theta), \qquad \theta \to 0,$$

eine isolierte Nullstelle von $1 - \Phi_\eta(\theta)$. Da außerdem nach Voraussetzung $\Phi_\eta(\theta) \neq 1$ für alle $\theta \in \mathbb{C}$ mit $Im(\theta) = -\beta$ gilt, folgt so noch einmal die erste Behauptung.
Sind $\theta_1, \ldots, \theta_{n_1}$ die Nullstellen von $1 - \Phi_\eta$ in D mit Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_{n_1}$, so ist nach Voraussetzung

$$\frac{1}{1 - \Phi_\eta(\theta)} = \sum_{v=1}^{k_l} \frac{a_{l,v}}{(\theta - \theta_l)^v} + h_l(\theta), \qquad \theta \in \mathbb{C},$$

die Laurent-Entwicklung der Funktion $\frac{1}{1-\Phi_\eta(\theta)}$ um θ_l mit einer in θ_l holomorphen Funktion h_l für $l = 1, \ldots, n_1$. Wir setzen

$$f_t(\theta) := \frac{\mathrm{e}^{-i\theta t}}{1 - \Phi_\eta(\theta)}, \qquad t \in \mathbb{R},\, \theta \in \mathbb{C},$$

und für $l = 1, \ldots, n_1$, $t \in \mathbb{R}$ und $\theta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} g_{l,t}(\theta) &:= (\theta - \theta_l)^{k_l} f_t(\theta) \\ &= \mathrm{e}^{-i\theta t} \sum_{v=1}^{k_l} a_{l,v} (\theta - \theta_l)^{k_l - v} + \mathrm{e}^{-i\theta t} (\theta - \theta_l)^{k_l} h_l(\theta) \\ &= \sum_{v=0}^{k_l - 1} a_{l,k_l - v}\, \mathrm{e}^{-i\theta t} (\theta - \theta_l)^v + h_{k_l,t}(\theta), \end{aligned}$$

wobei $h_{k_l,t}(\theta) := \mathrm{e}^{-i\theta t}(\theta - \theta_l)^{k_l} h_l(\theta)$ sei. Da f_t in θ_l einen Pol der Ordnung k_l hat, folgt für das Integral in (3.1.2) mit Hilfe des Residuensatzes sowie der Formel zur Berechnung von Residuen für Pole höherer Ordnung (vgl. [FiLi], S.147)

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} f_t(\theta) d\theta = -i \sum_{l=1}^{n_1} res_{\theta_l} f_t = -i \sum_{l=1}^{n_1} \frac{1}{(k_l - 1)!} {g_{l,t}}^{(k_l - 1)}(\theta_l).$$

Mit Hilfe einer Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$, die wir im Anschluß an den Beweis durchführen, erhalten wir für beliebiges $0 \leq n \leq k_l - 1$ als allgemeine n-te Ableitung von $g_{l,t}$

$$\begin{aligned} g_{l,t}^{(n)}(\theta) &= \sum_{v=0}^{k_l - 1} a_{l,k_l - v} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-it)^j \mathrm{e}^{-i\theta t} \frac{v!}{(v - (n-j))!} (\theta - \theta_l)^{v - (n-j)} \\ &\quad + h_{k_l,t}^{(n)}(\theta) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{v=0}^{k_l - 1} a_{l,k_l - v} \binom{n}{j} (-it)^j \mathrm{e}^{-i\theta t} \frac{v!}{(v - (n-j))!} (\theta - \theta_l)^{v - (n-j)} \\ &\quad + h_{k_l,t}^{(n)}(\theta), \end{aligned}$$

wobei $h^{(n)}_{k_l,t}$ insbesondere $h^{(n)}_{k_l,t}(\theta_l) = 0$ erfüllt. Für $\theta = \theta_l$ und $n = k_l - 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} g^{(k_l-1)}_{l,t}(\theta_l) &= \sum_{j=0}^{k_l-1} a_{l,k_l-(k_l-1-j)} \binom{k_l-1}{j} (-it)^j \mathrm{e}^{-i\theta_l t}(k_l-1-j)! \\ &= \sum_{j=1}^{k_l} a_{l,j} \frac{(k_l-1)!}{(j-1)!}(-it)^{j-1}\mathrm{e}^{-i\theta_l t} \end{aligned}$$

und somit

$$(-i)res_{\theta_l} f_t = \sum_{j=1}^{k_l} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-i\theta_l t}(-i)^j a_{l,j}.$$

Da v_0 reellwertig ist, folgt die Behauptung, indem wir $res_{\theta_l} f_t$ auf den Realteil einschränken. Es fehlt der Nachweis für die Formel der n-ten Ableitung von $g_{l,t}$. Der Fall $n = 0$ liefert wieder $g_{l,t}(\theta)$. Gilt die Gleichung für ein beliebiges festes $n \in \mathbb{N}_0$, folgt mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} & g^{(n+1)}_{l,t}(\theta) - h^{(n+1)}_{k_l,t}(\theta) \\ =\ & \frac{d}{d\theta}(g^{(n)}_{l,t}(\theta)) - h^{(n+1)}_{k_l,t}(\theta) \\ =\ & \frac{d}{d\theta}\left(\sum_{v=0}^{k_l-1} a_{l,k_l-v} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-it)^j \mathrm{e}^{-i\theta t}\frac{v!}{(v-(n-j))!}(\theta-\theta_l)^{v-(n-j)}\right). \end{aligned}$$

Leiten wir die innere der beiden Summen nach θ ab, so folgt

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-it)^j\mathrm{e}^{-i\theta t}\frac{v!}{(v-(n-j))!}(\theta-\theta_l)^{v-(n-j)} \\ =\ & \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-it)^{j+1}\mathrm{e}^{-i\theta t}\frac{v!}{(v-(n-j))!}(\theta-\theta_l)^{v-(n-j)} \\ & +\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-it)^{j}\mathrm{e}^{-i\theta t}\frac{v!}{(v-(n-j))!}(v-(n-j))(\theta-\theta_l)^{v-(n-j)-1} \\ =\ & \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}(-it)^{j}\mathrm{e}^{-i\theta t}\frac{v!}{(v-(n-j+1))!}(\theta-\theta_l)^{v-(n-j+1)} \\ & +\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-it)^{j}\mathrm{e}^{-i\theta t}\frac{v!}{(v-(n-j+1))!}(\theta-\theta_l)^{v-(n-j+1)} \\ =\ & \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(-it)^{j}\mathrm{e}^{-i\theta t}\frac{v!}{(v-((n+1)-j))!}(\theta-\theta_l)^{v-((n+1)-j)} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Für den Beweis von Satz 3.1.1 benötigen wir ein Lemma über die Umkehrformel von Dichten geeigneter Erneuerungsmaße, dessen Beweis wir in den Anhang gestellt haben.

Lemma 3.1.3. *Seien χ und μ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, χ $\lambda\!\!\!\lambda$-stetig mit einer zweimal stetig differenzierbaren Dichte q. Sei $m := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) > 0$, $\int_{\mathbb{R}} x^2\mu(dx) < \infty$, und existiere eine $\lambda\!\!\!\lambda$-stetige Komponente von μ. Dann ist das Maß $\sum_{n\geq 0} \chi * \mu^{*(n)}$ $\lambda\!\!\!\lambda$-stetig mit einer stetigen Dichte p, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung*

$$p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty, x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1}{-im\theta}\right)d\theta$$

erfüllt.

Beweis von Satz 3.1.1. (a) Für eine Funktion $f \in L_1$ sei

$$f_\theta(t) := \mathrm{e}^{-Im(\theta)\,t} f(t), \qquad \theta \in \mathbb{C}.$$

Ist $f_\theta \in L_1$, so ist die durch

$$\tilde{f}(\theta) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta t} f(t)\lambda\!\!\!\lambda(dt) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{iRe(\theta)\,t} f_\theta(t)\lambda\!\!\!\lambda(dt), \qquad \theta \in \mathbb{C}, \tag{3.1.3}$$

definierte Funktion die Fouriertransformierte $\hat{f}_\theta$ von f_θ an der Stelle $Re(\theta)$ (vgl. [AWT], S.219). Sei $D_\alpha := \{\theta \in \mathbb{C} : Im(\theta) \in (-\alpha, 0)\}$ und n_0 außerdem so gewählt, daß (3.1.1) erfüllt ist. Aufgrund des Multiplikationssatzes für analytische Transformierte (vgl. [AWT], Satz 40.7) gilt $\psi_{\eta^{*(n_0)}} = (\psi_\eta)^{n_0}$ und damit wegen $\psi_\eta(\alpha) < \infty$ und $(1-\delta)\psi_{\xi_0}(\alpha) > 0$, $\delta\psi_{\xi_1}(\alpha) > 0$

$$\psi_{\eta^{*(n_0)}}(\alpha) = (1-\delta)\psi_{\xi_0}(\alpha) + \delta\psi_{\xi_1}(\alpha) < \infty,$$

d.h. $\psi_{\xi_0}(\alpha) < \infty$, $\psi_{\xi_1}(\alpha) < \infty$ und $D_\alpha \subseteq \mathcal{D}(\Phi_{\xi_0})$, $D_\alpha \subseteq \mathcal{D}(\Phi_{\xi_1})$. Wir erhalten daraus insbesondere $\lim_{\beta\to 0}\psi_{\xi_1}(\beta) = \lim_{\beta\to 0}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\beta t}\xi_1(dt) = 0$ und somit die Existenz eines $\beta_1 \in (0, \alpha)$ mit $\psi_{\xi_1}(\beta) < \frac{1}{\delta}$ für alle $\beta \leq \beta_1$. Wegen $\xi_0 = f\lambda\!\!\!\lambda$ erhalten wir weiterhin $\Phi_{\xi_0}(\theta) = \tilde{f}(\theta)$ für alle $\theta \in D_{\beta_1} := \{\theta \in \mathbb{C} : Im(\theta) \in (-\beta_1, 0)\}$ mit $\tilde{f}$ gemäß (3.1.3), und nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue konvergiert $\Phi_{\xi_0}(\theta)$ für $|Re\,\theta| \to \infty$ gleichmäßig im Streifen $Im(\theta) \in [-\beta_1, 0]$ gegen Null. Da außerdem

$$|\delta\Phi_{\xi_1}(\theta)| \leq \delta\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{i\theta t}|\xi_1(dt) = \delta\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-Im(\theta)t}\xi_1(dt) < \delta\psi_{\xi_1}(\beta_1) < 1$$

für alle $\theta \in D_{\beta_1}$ gilt, nimmt $\Phi_{\eta^{*(n_0)}}(\theta)$ und damit $\Phi_\eta(\theta)$ den Wert 1 nur in einer beschränkten Teilmenge von $\overline{D}_{\beta_1} = \{\theta \in \mathbb{C} : Im(\theta) \in [-\beta_1, 0]\}$ an. Als holomorphe Funktion hat $1 - \Phi_\eta(\theta)$ in diesem beschränkten Gebiet höchstens endlich viele Nullstellen (andernfalls würden sich dort die Nullstellen häufen, und nach dem Identitätssatz für Potenzreihen würde $1 - \Phi_\eta(\theta) \equiv 0$ gelten). Daher läßt sich ein $\beta_2 \in (0, \beta_1]$ finden, so daß auf der Geraden $\{\theta \in \mathbb{C} : Im(\theta) = -\beta_2\}$ keine 1-Stellen von Φ_η liegen.

(b) In diesem Teil des Beweises werden wir das Erneuerungsmaß V in die Summe der Maße V_0 und V_1 zerlegen und diese dabei so wählen, daß $V_1 \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ sowie v_0 $\lambda\!\!\!\lambda$-stetig ist mit einer Dichte in der Gestalt von (3.1.2). Dies geschieht mit Hilfe der in (3.1.1) vorgegebenen Zerlegung von $\eta^{*(n_0)}$, die aufgefaßt werden kann als Summe eines $\lambda\!\!\!\lambda$-stetigen Maßes $(1-\delta)\xi_0$ mit Dichte f_δ und eines Maßes $\delta\xi_1$ mit $\delta\psi_{\xi_1}(\beta) < 1$. Man beachte, daß aus $\delta^n\xi_1^{*(n)}(\mathbb{R}) = \delta^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $\sum_{n\geq 0}\delta^n\xi_1^{*(n)}(\mathbb{R}) < \infty$ für alle $\delta \in [0, 1)$ folgt und damit aufgrund von monotoner Konvergenz

$$\mu * \sum_{n\geq 0}\delta^n\xi_1^{*(n)} = \sum_{n\geq 0}\delta^n(\mu * \xi_1^{*(n)})$$

für alle $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ gilt. Wir können außerdem ohne Einschränkung annehmen, daß die stetige Dichte f von ξ_0 beschränkt ist und einen kompakten Träger hat (vgl. [ASP], S.230, Beweis von Satz 26.6) und damit nach Satz 1.1.6 d.R.i. ist. Für die angestrebte Zerlegung von V definieren wir $V_2 := \sum_{n\geq 0} \eta^{*(nn_0)}$ und erhalten

$$V_2 = \delta_0 + \sum_{n\geq 1} \eta^{*(nn_0)} = \delta_0 + \eta^{*(n_0)} * \left(\sum_{n\geq 0} \eta^{*(nn_0)}\right) = \delta_0 + \eta^{*(n_0)} * V_2.$$

Ersetzen wir $\eta^{*(n_0)}$ durch die rechte Seite von (3.1.1) und beachten $V_2 = \delta_0 * V_2$, so folgt

$$\begin{aligned} \delta_0 * V_2 &= \delta_0 + (1-\delta)\xi_0 * V_2 + \delta\xi_1 * V_2 \\ \Leftrightarrow \quad (\delta_0 - \delta\xi_1) * V_2 &= \delta_0 + (1-\delta)\xi_0 * V_2 \end{aligned}$$

und daher wegen

$$(\sum_{n\geq 0} \delta^n \xi_1^{*(n)}) * (\delta_0 - \delta\xi_1) = \sum_{n\geq 0} \delta^n \xi_1^{*(n)} - \sum_{n\geq 1} \delta^n \xi_1^{*(n)} = \delta_0$$

$$V_2 = (\sum_{n\geq 0} \delta^n \xi_1^{*(n)}) * (\delta_0 + (1-\delta)\xi_0 * V_2).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} V_1 &:= (\sum_{k=0}^{n_0-1} \eta^{*(k)}) * (\sum_{n\geq 0} \delta^n \xi_1^{*(n)}), \\ V_0 &:= (1-\delta)\xi_0 * V_1 * V_2 \end{aligned}$$

und erhalten die gewünschte Zerlegung von V mit Hilfe der oben gewonnenen Gleichung für V_2 mittels

$$\begin{aligned} V &= (\sum_{k=0}^{n_0-1} \eta^{*(k)}) * (\sum_{n\geq 0} \eta^{*(nn_0)}) \\ &= (\sum_{k=0}^{n_0-1} \eta^{*(k)}) * V_2 \\ &= V_1 * (\delta_0 + (1-\delta)\xi_0 * V_2) \\ &= V_1 + (1-\delta)\xi_0 * V_1 * V_2 \\ &= V_1 + V_0. \end{aligned}$$

Für die Maße V_0 und V_1 weisen wir nun geforderten Bedingungen nach.
Wegen $\sum_{k=0}^{n_0-1} \eta^{*(k)} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ und daher

$$(\sum_{k=0}^{n_0-1} \eta^{*(k)}) * (\sum_{n\geq 0} \delta^n \xi_1^{*(n)}) \quad = \quad \sum_{n\geq 0} \delta^n \sum_{k=0}^{n_0-1} \eta^{*(k)} * \xi_1^{*(n)}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} dV_1 &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\geq 0} \delta^n d(\sum_{k=0}^{n_0-1} \eta^{*(k)} * \xi_1^{*(n)}) \\
&= \sum_{n\geq 0} \delta^n \sum_{k=0}^{n_0-1} \int_{\mathbb{R}} d(\eta^{*(k)} * \xi_1^{*(n)}) \\
&= n_0 \sum_{n\geq 0} \delta^n \\
&= \frac{n_0}{1-\delta},
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $V_1 \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$. Mit dem Multiplikationssatz für analytische Transformierte (vgl. [AWT], Satz 40.7) erhalten wir außerdem

$$\psi_{V_1}(\beta) = \sum_{k=0}^{n_0-1} (\psi_\eta(\beta))^k \sum_{n\geq 0} \delta^n (\psi_{\xi_1}(\beta))^n < \infty$$

wegen $|\delta\psi_{\xi_1}(\beta)| < 1$ und $\psi_\eta(\beta) < \infty$, und V_1 erfüllt somit die Bedingungen des Satzes.
V_0 ist aufgrund der $\lambda\!\!\lambda$-Stetigkeit von ξ_0 selber $\lambda\!\!\lambda$-stetig, und wir setzen $V_0 = v_0 \lambda\!\!\lambda$ für eine stetige Dichte v_0. Ohne Einschränkung konnten wir das Maß ξ_0 so wählen, daß dessen Dichte f und damit auch f_δ d.R.i. ist. Indem wir den Satz von der majorisierten Konvergenz auf

$$v_0(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\delta * V_2(x-u) V_1(du)$$

anwenden und $V_1 \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ beachten, erhalten wir mit Satz 1.1.8 $f_\delta * V_2(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und daher $v_0(x) \to 0$ für $x \to -\infty$.
(3.1.2) und somit das Verhalten von $v_0(x)$ für $x \to \infty$ zeigen wir mit Hilfe von Lemma 3.1.3. Da ξ_0 nach Voraussetzung ein $\lambda\!\!\lambda$-stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit beschränkter Dichte ist, gilt dasselbe für

$$\chi := \frac{(1-\delta)}{n_0} \xi_0 * V_1,$$

denn V_1 besitzt Masse $\frac{n_0}{1-\delta}$. Nach Wahl von η ist $\eta^{*(n_0)}$ ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\int_{\mathbb{R}} x d\eta^{*(n_0)} = n_0 m > 0$ und $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\eta^{*(n_0)} < \infty$, und $\sum_{n\geq 0} \chi * \eta^{*(nn_0)}$ besitzt wegen

$$\sum_{n\geq 0} \chi * \eta^{*(nn_0)} = \chi * \sum_{n\geq 0} \eta^{*(nn_0)} = \chi * V_2 = \frac{V_0}{n_0}$$

die stetige Dichte $\frac{v_0}{n_0}$. Mit Lemma 3.1.3 folgt somit

$$\frac{1}{n_0} v_0(x) - \frac{\chi(-\infty, x]}{n_0 m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\theta} \Phi_\chi(\theta) \left(\frac{1}{1-(\Phi_\eta(\theta))^{n_0}} - \frac{1}{-in_0 m\theta} \right) d\theta.$$

Wegen $\chi(-\infty,x]=1-\chi(x,\infty)$ erhalten wir außerdem mit dem Satz von der majorisiertern Konvergenz

$$\begin{aligned}\chi(x,\infty) &= \xi_0 * \frac{1-\delta}{n_0}V_1(x,\infty)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(x,\infty)}(u+s)\,\xi_0(du)\frac{1-\delta}{n_0}V_1(ds)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi_0(x-s,\infty)\frac{1-\delta}{n_0}V_1(ds)\\ &= o(\mathrm{e}^{-\beta x})\end{aligned}$$

für $x\to\infty$, da die Dichte von ξ_0 einen kompakten Träger besitzt. Für $x\to\infty$ erfüllt v_0 somit

$$v_0(x)-\frac{1}{m}=\frac{n_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-(\Phi_\eta(\theta))^{n_0}}-\frac{1}{-in_0m\theta}\right)d\theta+o(\mathrm{e}^{-\beta x}). \tag{3.1.4}$$

Wir nehmen weiter an, daß $1-\Phi_\eta(\theta)$ nur eine Nullstelle in D besitzt. Sei $\theta_0\in D$ diese Nullstelle und k ihre Ordnung (der allgemeine Fall folgt, indem analoge Terme für die anderen Nullstellen hinzugefügt werden). Die Funktion $\frac{1}{1-\Phi_\eta(\theta)}$ ist um θ_0 in eine Laurentreihe entwickelbar, die die Form

$$\frac{1}{1-\Phi_\eta(\theta)}=\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-\theta_0)^v}+h(\theta),\qquad \theta\in\mathbb{C},$$

mit einer in θ_0 holomorphen Funktion h und Residuum a_1 in θ_0 besitzt. Setzen wir $\tilde{h}(\theta):=\frac{n_0}{\sum_{i=0}^{n_0-1}(\Phi_\eta(\theta))^i}h(\theta)$, so folgt dies ebenfalls für $\frac{n_0}{1-(\Phi_\eta(\theta))^{n_0}}$ wegen

$$\frac{n_0}{1-(\Phi_\eta(\theta))^{n_0}} = \frac{n_0}{\sum_{i=0}^{n_0-1}(\Phi_\eta(\theta))^i}\left(\frac{1}{1-\Phi_\eta(\theta)}\right)$$

und $\sum_{i=0}^{n_0-1}(\Phi_\eta(\theta_0))^i=n_0$. Multiplizieren wir den geklammerten Ausdruck im Integranden von (3.1.4) mit n_0, ist dieser folglich ebenfalls in eine Laurentreihe mit den Koeffizienten $a_1,\dots,a_k$ im Hauptteil entwickelbar. Subtrahieren wir von der Laurentreihe den Hauptteil, erhalten wir die in D holomorphe und in $\overline{D}$ beschränkte und stetige Funktion

$$w(\theta):=\frac{n_0}{1-(\Phi_\eta(\theta))^{n_0}}-\frac{1}{-im\theta}-\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-\theta_0)^v},\qquad \theta\in\mathbb{C}.$$

Wir setzen $R:=\{\theta\in\mathbb{C}: Im(\theta)=-\beta\}$ und $f_\beta(\theta):=\Phi_\chi(\theta-i\beta)w(\theta-i\beta)$ für alle $\theta\in\mathbb{C}$ und bemerken, daß $f_\beta\in L_1$ wegen $\psi_\chi(\beta)=\frac{1-\delta}{n_0}\psi_{\xi_0}(\beta)\psi_{v_1}(\beta)<\infty$ und der Beschränktheit von w in D gilt. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist das Integral holomorpher Funktionen über den Rand von D gleich Null. Wegen $\lim_{n\to\infty}\int_{-n-i\beta}^{-n}\mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)w(\theta)d\theta<\infty$ und $\lim_{n\to\infty}\int_{n}^{n-i\beta}\mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)w(\theta)d\theta<\infty$ können wir daher $\mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)w(\theta)$ über $\mathbb{R}$ und R integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)w(\theta)d\theta &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix(\theta-i\beta)}\Phi_\chi(\theta-i\beta)w(\theta-i\beta)d\theta\\ &= \mathrm{e}^{-\beta x}\hat{f}_\beta(-x)\end{aligned}$$

(vgl. (3.1.3)). Nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue gilt $\lim_{x\to\infty}\hat{f}_\beta(-x)=0$, so daß wir anstelle von (3.1.4)

$$v_0(x)-\frac{1}{m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-\theta_0)^v}d\theta+o(\mathrm{e}^{-\beta x}) \tag{3.1.5}$$

für $x\to\infty$ erhalten. Wir entfernen nun $\Phi_\chi(\theta)$ mit einer analogen Überlegung aus dem Integral in (3.1.5). Wegen $|\delta\Phi_{\xi_1}(\theta)|<1$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi_\chi(\theta) &= \frac{(1-\delta)}{n_0}\Phi_{\xi_0}(\theta)\sum_{k=0}^{n_0-1}(\Phi_\eta(\theta))^k\sum_{n\geq 0}\delta^n(\Phi_{\xi_1}(\theta))^n\\ &= \frac{(1-\delta)}{n_0}\Phi_{\xi_0}(\theta)\sum_{k=0}^{n_0-1}(\Phi_\eta(\theta))^k\frac{1}{1-\delta\Phi_{\xi_1}(\theta)}\\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1}(\Phi_\eta(\theta))^k}{n_0}\left(1-\frac{1-(1-\delta)\Phi_{\xi_0}(\theta)-\delta\Phi_{\xi_1}(\theta)}{1-\delta\Phi_{\xi_1}(\theta)}\right)\\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1}(\Phi_\eta(\theta))^k}{n_0}\left(1-\frac{1-(\Phi_\eta(\theta))^{n_0}}{1-\delta\Phi_{\xi_1}(\theta)}\right).\end{aligned}$$

Es folgt $\Phi_\chi(\theta_0)=1$, und $\Phi_\chi(\theta)-1$ hat in θ_0 eine Nullstelle der Ordnung k, da dies für $1-(\Phi_\eta(\theta))^{n_0}$ zutrifft. Die durch

$$u(\theta):=(\Phi_\chi(\theta)-1)\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-\theta_0)^v}$$

für alle $\theta\in\mathbb{C}$ definierte Funktion ist somit holomorph in D sowie beschränkt und stetig in $\overline{D}$. Mit Hilfe der Definition von $g_\beta(\theta):=u(\theta-i\beta)$ für alle $\theta\in\mathbb{C}$ erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\theta}u(\theta)d\theta=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-\beta x}\hat{g}_\beta(-x)=0,$$

d.h. wir können $\Phi_\chi(\theta)$ im Integranden von (3.1.5) vernachlässigen.
Wegen $\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-i\beta-\theta_0)^v}\in L_1$ gilt weiter

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\theta}\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-i\beta-\theta_0)^v}d\theta=0$$

und daher

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix(\theta-i\beta)}\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-i\beta-\theta_0)^v}d\theta\;=\;o(\mathrm{e}^{-\beta x})$$

für $x\to\infty$. Insgesamt erhalten wir somit für $x\to\infty$

$$\begin{aligned}&v_0(x)-\frac{1}{m}\\ =\;& -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix(\theta-i\beta)}\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-i\beta-\theta_0)^v}d\theta-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ix\theta}\sum_{v=1}^{k}\frac{a_v}{(\theta-\theta_0)^v}d\theta\right)+o(\mathrm{e}^{-\beta x})\end{aligned}$$

anstelle von (3.1.5). Die in den Integranden auftauchenden Summenterme sind in D nicht holomorph. Mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes folgt nach Wahl von $\mathcal{C}$ und wegen $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-ix\theta} h(\theta) d\theta = 0$

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \frac{1}{m} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-ix\theta} \sum_{v=1}^{k} \frac{a_v}{(\theta-\theta_0)^v} d\theta + o(\mathrm{e}^{-\beta x}) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-ix\theta} \left(\sum_{v=1}^{k} \frac{a_v}{(\theta-\theta_0)^v} + h(\theta) \right) d\theta + o(\mathrm{e}^{-\beta x}) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-ix\theta} \frac{d\theta}{1-\Phi_\eta(\theta)} + o(\mathrm{e}^{-\beta x}) \end{aligned}$$

für $x \to \infty$ und somit (3.1.2). □

3.2 Die Konvergenzrate im Fall $M \geq 0$ f.s.

Mit Hilfe von Satz 3.1.1 treffen wir nun eine genauere Aussage über die Konvergenzrate der Flanken der Verteilung von R. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall $M \geq 0$ f.s.. Um die Ergebnisse später weiter benutzen zu können, setzen wir dennoch in den Voraussetzungen Betragsstriche und erinnern außerdem an die Definitionen der Funktionen r, g_1 und g_{-1} gemäß (2.3.2), (2.3.3) und (2.3.4), die wir im Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems verwendet haben.

Satz 3.2.1. *Seien M, R Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei $M \geq 0$ f.s. und unabhängig von R sei sowie (2.1.5) erfülle. Ferner gelte*

$$E|M|^{\kappa+\beta} < \infty \tag{3.2.1}$$

für ein beliebiges $\beta > 0$, und

$$P^{\log|M| | M\neq 0} \text{ sei quasi } \lambda\text{-stetig.} \tag{3.2.2}$$

Dann ist das durch

$$\eta(dx) := e^{\kappa x} P(\log M \in dx)$$

definierte Wahrscheinlichkeitsmaß ebenfalls quasi λ-stetig und erfüllt die Bedingungen von Satz 3.1.1 Ist außerdem $\mathcal{C}$ wie in Satz 3.1.1 gewählt, so gilt mit $\tilde{g}_1$ und $\tilde{g}_{-1}$ gemäß (3.1.3):

(a) Falls

$$\int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)| \, t^{\kappa+\beta-1} dt < \infty, \tag{3.2.3}$$

folgt

$$t^\kappa P(R > t) = C_+ - \frac{1}{2\pi} Re \left(\int_{\mathcal{C}} t^{-i\theta} \frac{\tilde{g}_1(\theta)}{1-\Phi_\eta(\theta)} d\theta \right) + O(t^{-\frac{\beta}{2}}), \qquad t \to \infty. \tag{3.2.4}$$

(b) Falls

$$\int_0^\infty |P(R < -t) - P(MR < -t)| \, t^{\kappa+\beta-1} dt < \infty, \tag{3.2.5}$$

folgt

$$(3.2.6) \qquad t^\kappa P(R < -t) = C_- - \frac{1}{2\pi} Re\left(\int_{\mathcal{C}} t^{-i\theta} \frac{\tilde{g}_{-1}(\theta)}{1-\Phi_\eta(\theta)} d\theta\right) + O(t^{-\frac{\beta}{2}}), \qquad t \to \infty.$$

(c) Erfüllt R eine stochastische Fixpunktgleichung $R \stackrel{d}{=} \Psi \circ R$ gemäß (2.1.1) und ist unabhängig von (Ψ, M), lassen sich (3.2.3) und (3.2.5) ersetzen durch

$$(3.2.7) \qquad E\left|(\Psi(R)^+)^{\kappa+\beta} - ((MR)^+)^{\kappa+\beta}\right| < \infty,$$

$$(3.2.8) \qquad E\left|(\Psi(R)^-)^{\kappa+\beta} - ((MR)^-)^{\kappa+\beta}\right| < \infty.$$

Nach Voraussetzung umläuft $\mathcal{C}$ alle Nullstellen von $1 - \Phi_\eta$ in D. Es genügt jedoch, wenn $\mathcal{C}$ in D liegt und alle Nullstellen in $\{\theta \in \mathbb{C} : Im(\theta) \in [-\frac{\beta}{2}, 0)\}$ umläuft, da die Verteilungen der übrigen Nullstellen durch den Restterm $O(t^{-\frac{\beta}{2}})$ abgedeckt werden.

Bemerkung 3.2.2. (a) Erfüllt $|M|$ die an M gestellten Bedingungen des Satzes, setzen wir

$$g(t) := e^{\kappa t}(P(|R| > e^t) - P(|MR| > e^t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und gilt

$$(3.2.9) \qquad \int_0^\infty |P(|R| > t) - P(|MR| > t)|\, t^{\kappa+\beta-1} dt < \infty$$

anstelle der Bedingungen (3.2.3) und (3.2.5), so folgt

$$(3.2.10) \qquad t^\kappa P(|R| > t) = C_+ + C_- - \frac{1}{2\pi} Re\left(\int_{\mathcal{C}} t^{-i\theta} \frac{\tilde{g}(\theta)}{1-\Phi_\eta(\theta)} d\theta\right) + O(t^{-\frac{\beta}{2}})$$

für $t \to \infty$ durch eine Anwendung des Satzes auf $|M|$ und $|R|$ ($\tilde{g}$ gemäß (3.1.3)). Genügt $|R|$ außerdem einer stochastischen Fixpunktgleichung $|R| \stackrel{d}{=} \Psi \circ |R|$ gemäß (2.1.1) und ist unabhängig von $(\Psi, |M|)$, ersetzt

$$E\left||\Psi(R)|^{\kappa+\beta} - |MR|^{\kappa+\beta}\right| < \infty$$

die Voraussetzung (3.2.9).

(b) Für (3.2.4) (sowie analog für (3.2.6) und (3.2.10)) gilt nach Lemma 3.1.2 ebenfalls die Darstellung

$$(3.2.11) \qquad t^\kappa P(R > t) = C_+ + \sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{k_l} \frac{(\log t)^{j-1}}{(j-1)!} Re\left(t^{-i\theta_l}(-i)^j r_{l,j}\right) + O(t^{-\frac{\beta}{2}})$$

für $t \to \infty$. $\theta_1, \ldots, \theta_{n_1}$, $n_1 \in \mathbb{N}$, sind hier die Nullstellen von $1 - \Phi_\eta(\theta)$ in $\{\theta \in \mathbb{C} : Im(\theta) \in [-\frac{\beta}{2}, 0)\}$ mit Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_{n_1}$, $k_i \in \mathbb{N}$ für alle $1 \leq k_i \leq n_1$, und $r_{l,j}$ ist durch

$$r_{l,j} := res_{\theta_l} \frac{(\theta - \theta_l)^{j-1} \tilde{g}_1(\theta)}{1 - \Phi_\eta(\theta)}, \qquad j = 1, \ldots, k_l,\ l = 1, \ldots, n_1$$

definiert. Die Residuen $r_{l,j}$ sind zwar durch die Funktion g_1 abhängig von der unbekannten Verteilung von R, die Form der rechten Seite von (3.2.11) allerdings nicht mehr.

Es folgt der Beweis von Satz 3.2.1. Indem wir (3.2.4) umstellen und t durch e^t ersetzen, erhalten wir

$$(3.2.4') \qquad \mathrm{e}^{\kappa t} P(R > \mathrm{e}^t) - C_+ + \tfrac{1}{2\pi} Re\left(\int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-i\theta t} \tfrac{\tilde{g}_1(\theta)}{1-\Phi_\eta(\theta)} d\theta\right) = O(\mathrm{e}^{-\frac{\beta t}{2}}), \qquad t \to \infty.$$

Ohne Hilfsmittel können wir nur zeigen, daß die linke Seite von (3.2.4′) nach Glättung mit einer bestimmten Funktion k für $t \to \infty$ in $O(\mathrm{e}^{-\beta t})$ liegt. Für (3.2.4′) benötigen wir daher das folgende Taubersche Restglied-Theorem von Beurling-Ganelius und werden dann zuletzt die Resubstitution von t durch $\log t$ durchführen, um wieder die ursprüngliche Form zu erhalten. Der Term $O(t^{-\frac{\beta}{2}})$ ist dabei möglicherweise nicht scharf und sollte $O(t^{-\beta})$ lauten. Dies ist jedoch wegen der verwendeten Tauberschen Restglied-Theorie nicht möglich, da bereits der Faktor $\frac{1}{2}$ des im Beweis verwendeten Tauberschen Restglied-Theorems scharf ist (vgl. [Lyt]).

Satz 3.2.3. *(Das Taubersche Restglied-Theorem, vgl. [Gan], S.6, Theorem 1)*
Sei $k \in L_1$ so gewählt, daß $\tilde{k}(\theta) \neq 0$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{k}$ gemäß (3.1.3) gilt. Seien $p > \frac{1}{2}$, $a > 0$ und C Konstanten sowie h eine im Streifen $Im(\zeta) \in (-a, 0)$ holomorphe Funktion, die

$$|h'(\zeta)| < C(1 + |\zeta|)^{p-1}, \qquad -a < Im(\zeta) < 0,$$

und

$$\lim_{\eta \downarrow 0} h(\xi - i\eta) = 1/\tilde{k}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

erfüllt. Sei β eine weitere Konstante mit $0 < \beta < a$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die der Tauberschen Bedingung

$$(3.2.12) \qquad f(x) - f(x + y) \leq A e^{-\beta x/(p+1)}, \qquad 0 \leq y \leq e^{-\beta x/(p+1)},\ x > x_0,$$

für Konstanten A und x_0 genügt. Gilt dann

$$(3.2.13) \qquad k * f(x) = O(e^{-\beta x}), \qquad x \to \infty,$$

so folgt

$$f(x) = O(e^{-\beta x/(p+1)})$$

für $x \to \infty$.

Beweis zu Satz 3.2.1. Ausführlich führen wir nur den Beweis zu Fall (a), da sich (b) mit gleicher Rechnung und $-R$ statt R ergibt. (c) folgt wegen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)|\, t^{\kappa+\beta-1} dt &= \int_0^\infty |P(\Psi(R) > t) - P(MR > t)|\, t^{\kappa+\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\kappa+\beta} E|(\Psi(R)^+)^{\kappa+\beta} - ((MR)^+)^{\kappa+\beta}|\end{aligned}$$

(analog für (3.2.5)) mit Hilfe von Lemma 2.2.3.
Gelte also (3.2.3). Wegen $E\,|M|^\kappa \log^+ |M| < \infty$ und

$$\int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)|\, t^{\kappa-1} dt < \int_0^\infty |P(R > t) - P(MR > t)|\, t^{\kappa+\beta-1} dt < \infty$$

erhalten wir mit Fall (a) des Impliziten Erneuerungstheorems

$$P(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa}$$

für $t \to \infty$. Für die spätere asymptotische Analyse benötigen wir, daß $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\beta t} g_1(t) = 0$ gilt. Da wir jedoch nur $\mathrm{e}^{\beta t} g_1(t) \in L_1$ aufgrund von

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{e}^{\beta t} g_1(t)| dt \quad = \quad \int_0^{\infty} s^{\kappa+\beta-1} \left| P(R > s) - P(MR > s) \right| ds$$

gegeben haben, benutzen wir im folgenden eine Glättung von g_1, welche die obige Limesbedingung erfüllt. Für beliebiges $b > \beta$ setzen wir dazu

$$k(t) := b\mathrm{e}^{-bt} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Da $\tilde{k}(\theta) = b/b - i\theta \neq 0$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $k \in L_1$ wegen $\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)| dt = 1$ ist, erfüllt k für $p = 1$ und $a = \infty$ die Bedingungen des Tauberschen Restglied-Theorems. Nach Lemma 3.2.4 ist $\mathrm{e}^{\beta t} k * g_1(t)$ außerdem d.R.i., und es gilt wie gewünscht

$$\mathrm{e}^{\beta t} k * g_1(t) \in o(1).$$

Wir werden nun im folgenden zeigen, daß die linke Seite von (3.2.4′) die Bedingungen (3.2.12) und (3.2.13) des Tauberschen Restglied-Theorems erfüllt.
Mit den im Impliziten Erneuerungstheorem gewählten Bezeichnungen gilt analog zu

$$\bar{r} = \bar{g}_1 * V \tag{2.3.8}$$

der allgemeine Fall

$$k * r = k * g_1 * V$$

((2.3.8) ist der Fall $b = 1$), wobei $V := \sum_{n\geq 0} \eta^{*(n)}$ das Erneuerungsmaß von η ist, welches unter den gegebenen Voraussetzungen den Bedingungen von Satz 3.1.1 genügt. Mit Satz 3.1.1 und dessen Bezeichnungen folgt

$$k * r = (k * g_1) * V = k * g_1 * (V_1 + V_0) = k * g_1 * V_1 + k * g_1 * v_0$$

und wegen

$$k * g_1 * \frac{1}{m} = k * \left(\frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} g_1 \lambda\!\!\lambda \right) = k * C_+$$

daraus

$$k * (r(\cdot) - C_+) = k * g_1 * V_1 + k * g_1 * \left(v_0(\cdot) - \frac{1}{m} \right).$$

Wir setzen

$$c(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-i\theta t} \frac{d\theta}{1 - \Phi_\eta(\theta)}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$v_{0,c,m}(t) := v_0(t) - \frac{1}{m} + c(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und betrachten anstelle der obigen Gleichung

$$k * (r(\cdot) - C_+ + g_1 * c(\cdot)) = k * g_1 * V_1 + k * g_1 * v_{0,c,m}. \tag{3.2.14}$$

Ist $\varepsilon > 0$ konstant und so gewählt, daß alle Nullstellen von $1 - \Phi_\eta(\theta)$ aus D im Streifen $Im(\theta) \in (-\beta + \varepsilon, -\varepsilon)$ liegen, gilt

$$c(t) = \begin{cases} O(\mathrm{e}^{-\varepsilon t}), & t \to \infty \\ O(\mathrm{e}^{-(\beta-\varepsilon)t}), & t \to -\infty \end{cases} .$$

$g_1 * c$ ist wegen $\lim_{t\to-\infty} g_1(t) = 0$ und $\mathrm{e}^{\beta t} g_1(t) \in L_1$ wohldefiniert und besitzt aufgrund von

$$\begin{aligned} g_1 * c(t) &= \int_{\mathbb{R}} c(t-u) g_1(u) \lambda\!\!\lambda(du) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-i\theta(t-u)} \frac{d\theta}{1-\Phi_\eta(\theta)} g_1(u) \lambda\!\!\lambda(du) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-i\theta t} \frac{1}{1-\Phi_\eta(\theta)} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta u} g_1(u) \lambda\!\!\lambda(du)\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-i\theta t} \frac{\tilde{g}_1(\theta)}{1-\Phi_\eta(\theta)} d\theta \end{aligned}$$

dasselbe asymptotische Wachstumsverhalten wie c. Für $v_{0,c,m}$ folgt

$$\mathrm{e}^{\beta t} v_{0,c,m}(t) = \begin{cases} o(1), & t \to \infty \\ O(\mathrm{e}^{\varepsilon t}), & t \to -\infty \end{cases} ,$$

da wegen (3.1.2) $v_{0,c,m}(t) = o(\mathrm{e}^{-\beta t})$ für $t \to \infty$ und $\lim_{t\to-\infty} v_0(t) = 0$ gilt (vgl. den Beweis zu Satz 3.1.1). Wir kennen somit das asymptotische Verhalten der linken Seite von (3.2.14), denn mit $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\beta t} k * g_1(t) = 0$ und $\psi_{V_1}(\beta) < \infty$ bzw. $\mathrm{e}^{\beta t} k * g_1(t) \in L_1$ und $\mathrm{e}^{\beta t} v_{0,c,m}(t) = o(1)$ für $t \to \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\beta t}(k * g_1 * V_1(t) + k * g_1 * v_{0,c,m}(t)) \\ = \;& \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\beta(t-u)} k * g_1(t-u) \mathrm{e}^{\beta u} V_1(du) + \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\beta(t-u)} v_{0,c,m}(t-u) \mathrm{e}^{\beta u} k * g_1(u) \lambda\!\!\lambda(du) \\ = \;& 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$k * (C_+ - r - g_1 * c)(t) = o(\mathrm{e}^{-\beta t})$$

für $t \to \infty$. Der Ausdruck $C_+ - r - g_1 * c$ ist für eine Anwendung des Tauberschen Restglied-Theorems noch nicht geeignet, da $g_1 * c(t)$ komplexwertig sowie für $t < 0$ nicht beschränkt ist. $r_1(t) := C_+ - r(t) - g_1 * c(t)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$ dagegen ist auf $\mathbb{R}$ beschränkt und bleibt nach einer Faltung mit k in der Klasse $o(\mathrm{e}^{-\beta t})$ für $t \to \infty$ enthalten, da für positive Werte von t

$$\begin{aligned} k * (g_1 * c(\cdot)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(\cdot))(t) &= \int_{(-\infty,t)} b\mathrm{e}^{-b(t-u)} g_1 * c(u) \mathbf{1}_{\{u>0\}} \lambda\!\!\lambda(du) \\ &= \int_{(0,t)} b\mathrm{e}^{-b(t-u)} g_1 * c(u) \lambda\!\!\lambda(du) \\ &= k * g_1 * c(t) - b\mathrm{e}^{-bt} \int_{(-\infty,0)} \mathrm{e}^{bu} g_1 * c(u) \lambda\!\!\lambda(du) \end{aligned}$$

und $\int_{(-\infty,0)} \mathrm{e}^{bu} g_1 * c(u) \lambda\!\!\!\lambda(du) < \infty$ gilt. $b\mathrm{e}^{-bt} \int_{(-\infty,0)} \mathrm{e}^{bu} g_1 * c(u) \lambda\!\!\!\lambda(du)$ liegt daher für $t \to \infty$ in $O(\mathrm{e}^{-bt})$ und dies wegen $b > \beta$ für $t \to \infty$ in $o(\mathrm{e}^{-\beta t})$. Insgesamt gilt nach Einschränkung auf den Realteil

$$k * Re(r_1(t)) = o(\mathrm{e}^{-\beta t}), \qquad t \to \infty. \tag{3.2.15}$$

Um das Taubersche Restglied-Theorem anwenden zu können, fehlt somit nur noch der Nachweis von (3.2.12) für $Re(r_1)$. Wegen

$$\begin{aligned} r(x) - r(x+y) &= \mathrm{e}^{\kappa(x+y)} P(R > \mathrm{e}^{x+y}) - \mathrm{e}^{\kappa x} P(R > \mathrm{e}^{x}) \\ &\le (\mathrm{e}^{\kappa y} - 1)\mathrm{e}^{\kappa x} P(R > \mathrm{e}^{x}) \\ &\le 3\kappa y \cdot 2C_+ \end{aligned}$$

für alle $x \ge x_1$ (x_1 fest) und $y \le \frac{1}{\kappa} \log 4$ erfüllt $-r$ (3.2.12) mit $p = 1$, und analog folgt dies ebenfalls für die für alle $\theta_l \in D$ und $j \in \mathbb{N}$ definierte Funktion $f(t) := Re\,(c_{l,j} t^{j-1} \mathrm{e}^{-i\theta_l t})$. Wegen Lemma 3.1.2 gilt die Abschätzung daher für

$$-g_1 * c(t) = \sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{k_l} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} Re\left(\mathrm{e}^{-i\theta_l t} (-i)^j c_{l,j}\right), \qquad \theta_l \in D,\ j \in \mathbb{N},$$

und somit für $Re(r_1)$. Mit Hilfe des Tauberschen Restglied-Theorem erhalten wir

$$Re(r_1(t)) = O(\mathrm{e}^{-\beta t/2})$$

für $t \to \infty$ und daraus (3.2.4) nach Resubstitution von t durch $\log t$. □

Lemma 3.2.4. *Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 3.2.1 ist $\mathrm{e}^{\beta t} k * g_1(t)$ d.R.i. (und damit insbesondere $\lambda\!\!\!\lambda$-integrierbar).*

Beweis. Mit Hilfe der Beweismethode aus Lemma 5.3.2 im Anhang erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\beta(t+\delta)} k * g_1(t+\delta) &= \mathrm{e}^{\beta(t+\delta)} \int_{(-\infty,t+\delta]} b\mathrm{e}^{-b(t+\delta-u)} g_1(u) \lambda\!\!\!\lambda du \\ &\ge \mathrm{e}^{(\beta-b)\delta} \mathrm{e}^{\beta t} \int_{(-\infty,t]} b\mathrm{e}^{-b(t-u)} g_1(u) \lambda\!\!\!\lambda(du) \\ &= \mathrm{e}^{(\beta-b)\delta} \mathrm{e}^{\beta t} k * g_1(t). \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\delta \downarrow 0} \mathrm{e}^{(\beta-b)\delta} = 1$ folgt mit Lemma 5.3.1 im Anhang die Behauptung. □

3.3 Die Konvergenzrate im Fall $P(M < 0) > 0$

In diesem Abschnitt betrachten wir die Flanken der Verteilung von R für den Fall, daß $P(M < 0) > 0$ ist. Für unabhängige Zufallsgrößen $M_1, M_2, \dots$ mit $M_n \sim M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $N_1^{(+)} := \inf\{n \ge 1 : \Pi_n > 0\}$ definieren wir dazu ein Wahrscheinlichkeitsmaß η durch

$$\eta(B) := E\left(|\Pi_{N_1^{(+)}}|^{\kappa} \mathbf{1}_{\left\{\sum_{j=1}^{N_1^{(+)}} \log |M_j| \in B\right\}} \right), \qquad B \in \mathbb{B}, \tag{3.3.1}$$

wobei wir den Integranden als Null interpretieren, falls $\Pi_n \le 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 3.3.1. *Seien M, R auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definierte Zufallsgrößen, und es gelte $P(M < 0) > 0$. Ist M unabhängig von R, genügt (2.1.5), (3.2.1) und (3.2.2) und erfüllt für ein hinreichend kleines $\beta > 0$*

$$EM^{\kappa+\beta}\mathbf{1}_{\{M>0\}} < 1, \tag{3.3.2}$$

so ist das in (3.3.1) definierte Wahrscheinlichkeitsmaß η quasi λ-stetig und erfüllt die Bedingungen von Satz 3.1.1. Ist $\mathcal{C}$ so wie in Satz 3.1.1 gewählt, g_1, g_{-1} wie in (2.3.3) und (2.3.4) definiert und zwei Maße μ_+, μ_- auf $\mathbb{R}$ für alle $B \in \mathbb{B}$ durch

$$\mu_+(B) := EM^{\kappa}\mathbf{1}_{\{M>0\}}\mathbf{1}_{\{\log M\in B\}},$$

$$\mu_-(B) := E|M|^{\kappa}\mathbf{1}_{\{M<0\}}\mathbf{1}_{\{\log |M|\in B\}}$$

gegeben, so gilt:

(a) Sind (3.2.3) und (3.2.5) erfüllt, folgt

$$\begin{aligned} t^{\kappa}P(R>t) = C_+ - \frac{1}{2\pi}Re\Big(\int_{\mathcal{C}} t^{-i\theta}\Big(&\frac{\tilde g_1(\theta)+\tilde g_{-1}(\theta)}{2(1-\Phi_{\mu_+(\theta)}-\Phi_{\mu_-(\theta)})} \\ &+\frac{\tilde g_1(\theta)-\tilde g_{-1}(\theta)}{2(1-\Phi_{\mu_+(\theta)}+\Phi_{\mu_-(\theta)})}\Big)d\theta\Big) \\ &+O(t^{-\frac{\beta}{2}}), \qquad t\to\infty, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

mit $\tilde g_1$ und $\tilde g_{-1}$ gemäß (3.1.3), und dieselbe Formel gilt für $t^{\kappa}P(R < -t)$.

(b) Genügt R einer stochastischen Fixpunktgleichung $R \stackrel{d}{=} \Psi \circ R$ gemäß (2.1.1) und ist unabhängig von (Ψ, M), können (3.2.3) und (3.2.5) ersetzt werden durch (3.2.7) und (3.2.8).

Beweis. (a) Sei zunächst $P(M > 0) > 0$ und $P(M < 0) > 0$. Mit der gleichen Begründung wie im Beweis zu Satz 3.2.1 ist aufgrund der gegebenen Voraussetzungen das Implizite Erneuerungstheorem anwendbar, und es gelten (2.2.3) und (2.2.4). Wir verfahren nun mit den Summanden der rechten Seite von

$$k * r = k * g_1 * V + k * g_{-1} * \eta_0 * V \tag{3.3.4}$$

genauso wie im zuletzt geführten Beweis, wobei wir die Notationen aus dem ersten Teil des Beweises von Fall (b) des Impliziten Erneuerungstheorems und die Notationen aus dem Beweis von Satz 3.2.1 zu Hilfe nehmen. V sei dabei das Erneuerungsmaß von η, das aufgrund seiner Definition in (3.3.1) die Verteilung von $\sum_{i=i}^{N_1^{(+)}} Y_i$ unter P_κ ist und somit insbesondere den Erwartungswert $2m$ besitzt.
Wir betrachten zunächst $E\mathbf{1}_{\{M>0\}}M^u$ für $\kappa \le u \le \kappa+\beta$. Wegen (3.3.2) und $P(M < 0) > 0$ folgt $E\mathbf{1}_{\{M>0\}}M^u < 1$ für $u = \kappa$ und $u = \kappa+\beta$ und dies daher auch im gesamten Intervall $[\kappa, \kappa + \beta]$, da $E\mathbf{1}_{\{M>0\}}M^u$ konvex ist. Aufgrund von

$$\mu_+((-\infty, t]) = \int_{(-\infty,t]} \mathrm{e}^{\kappa y}\mathbf{1}_{\{y>-\infty\}}P^{\log M}(dy)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit

$$\psi_{\mu_+}(u) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{(u+\kappa)y}\mathbf{1}_{\{y>-\infty\}}P^{\log M}(dy) = E\mathbf{1}_{\{M>0\}}M^{u+\kappa}$$

bedeutet dies $\psi_{\mu_+}(u) < 1$ für $0 \leq u \leq \beta$ und damit $\Phi_{\mu_+}(\theta) \neq 1$ für alle $\theta \in \overline{D}$. Wegen $P_\kappa^{\log M}(dy) = \mathrm{e}^{\kappa y} P^{\log M}(dy)$ (vgl. den Beweis von Korollar 5.3.5) folgt außerdem $\mu_+ = p\eta_+$ (analog $\mu_- = q\eta_-$) und mit Hilfe der in (2.3.17) und (2.3.18) gewonnenen Gleichungen für η und η_0 insgesamt

$$\Phi_\eta = p\Phi_{\eta_+} + \sum_{n\geq 2} q^2\, \Phi_{\eta_-}^2 \cdot p^{n-2}\Phi_{\eta_+}^{n-2} = \Phi_{\mu_+} + \frac{\Phi_{\mu_-}^2}{1-\Phi_{\mu_+}},$$

$$\Phi_{\eta_0} = \sum_{n\geq 1} q\, \Phi_{\eta_-} \cdot p^{n-1}\Phi_{\eta_+}^{n-1} = \frac{\Phi_{\mu_-}}{1-\Phi_{\mu_+}}.$$

Φ_η, Φ_{η_0} sind daher holomorph in D und stetig in $\overline{D}$. Analog zum Nachweis von (2.3.15) erhalten wir (3.3.4) und wegen $V = V_1 + V_0$ und $\frac{1}{2m}\int_{\mathbb{R}} g_1 + g_{-1} * \eta_0 = C_+$ weiter

$$k * r = k * (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * V_1 + k * (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * v_0$$

$$\Leftrightarrow \qquad k * (r(\cdot) - C_+) = k * (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * V_1 + k * (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * (v_0(\cdot) - \tfrac{1}{2m}).$$

Nach Definition von η_0 in Verbindung mit (3.2.1) und (3.2.5) gilt $\mathrm{e}^{\beta t} g_{-1} * \eta_0(t) \in L_1$ und daher

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{e}^{\beta t} g_{-1} * \eta_0(t)|dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta t} \int_{\mathbb{R}} |g_{-1}(t-u)|\eta_0(du)\; dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\beta u}\eta_0(du) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\beta s}|g_{-1}(s)|ds \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$g_{-1} * \eta_0 * c$ ist wegen $\lim_{t\to-\infty} g_{-1} * \eta_0(t) = 0$ außerdem wohldefiniert und besitzt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$g_{-1} * \eta_0 * c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-i\theta t} \frac{\tilde{g}_{-1}(\theta)\Phi_{\eta_0}(\theta)}{1-\Phi_\eta(\theta)}\, d\theta.$$

Mit $v_{0,c,m}(t) := v_0(t) - \frac{1}{2m} + c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir somit anstelle der zweiten Gleichung in obiger Äquivalenz

$$\begin{aligned}
&k * (r(\cdot) - C_+ + (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * c(\cdot)) \\
=\;& k * (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * V_1 + k * (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * v_{0,c,m}
\end{aligned}$$

und analog zum Beweis von Satz 3.2.1

$$k * (C_+ - r - (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * c)(t) = o(\mathrm{e}^{-\beta t})$$

für $t \to \infty$, da $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\beta t} k * g_{-1} * \eta_0(t) = 0$ und $\mathrm{e}^{\beta t} k * g_{-1} * \eta_0(t) \in L_1$ gilt (nach Lemma 3.2.4 ist $\mathrm{e}^{\beta t} k * g_{-1} * \eta_0$ d.R.i.). Definieren wir

$$r_1(t) := C_+ - r(t) - (g_1 + g_{-1} * \eta_0) * c(t)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(t),$$

so folgt wiederum (3.2.15) und daher mit Hilfe des Tauberschen Restglied-Theorems

$$Re(r_1(t)) = O(\mathrm{e}^{-\beta t/2})$$

für $t \to \infty$. Wir erhalten dann (3.3.3), indem wir Φ_η und Φ_{η_0} durch ihre oben gewonnenen von Φ_{μ_+} und Φ_{μ_-} abhängigen Ausdrücke ersetzen und $\log t$ statt t wählen. Dasselbe Ergebnis folgt für $P(R < -t)$, indem wir $-R$ statt R betrachten und aufgrund von (2.2.7) $C_+ = C_-$ beachten.
Ist nun $M \leq 0$ fast sicher, folgt $N_1^{(+)} = 2$ und $N_0^{(-)} = 1$ fast sicher, d.h. mit μ_+ als Nullmaß und $q = 1$ ist $\eta = \eta_-^{*(2)} = \mu_-^{*(2)}$ und $\eta_0 = \eta_- = \mu_-$. Der Beweis für den ersten Fall kann daher analog übernommen werden.
(b) folgt wie in Satz 3.2.1 mit Lemma 2.2.3. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Zusammenfassung der Hauptergebnisse im folgenden Korollar.

Korollar 3.3.2. *Sei M eine von R unabhängige Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, für die $P(M < 0) > 0$ gilt und die (2.1.5), (3.2.2) sowie für ein $\beta > 0$ (3.2.1) genügt. Sind (3.2.3) und (3.2.5) erfüllt, so gilt für ein nicht näher bestimmtes $\gamma > 0$*

$$t^\kappa P(R > t) = C_+ + O(t^{-\gamma})$$

und

$$t^\kappa P(R < -t) = C_- + O(t^{-\gamma})$$

für $t \to \infty$.

4 Ausgewählte Fixpunktgleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir Beispiele von stochastischen Fixpunktgleichungen, die in vielen verschiedenen Bereichen der Wirtschaft und Wissenschaft auftauchen und auf die wir das Implizite Erneuerungstheorem anwenden wollen. Wir werden allerdings lediglich in einem Fall konkrete Formeln für C_+ und C_- angeben können, die nicht von der unbekannten Verteilung der Zufallsgröße R abhängen. Mit Hilfe des Impliziten Erneuerungstheorems ist es uns jedoch möglich, in den meisten der dargestellten Fälle Schranken für C_+ und C_- zu berechnen (vgl. Korollar 4.1.7).

4.1 $R \stackrel{d}{=} Q + MR$

Unsere erste Gleichung

$$(4.1.1) \qquad R \stackrel{d}{=} Q + MR, \qquad R \text{ unabhängig von } (M, Q),$$

mit Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ist aufgrund ihrer Struktur das vielleicht vielseitigste Beispiel einer stochastischen Fixpunktgleichung, für das unsere Methode Anwendung findet. Bezeichnen R_n, M_n und Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Kopien von R, M und Q auf dem passend erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und schreiben wir anstelle von (4.1.1)

$$(4.1.2) \qquad R_n = Q_n + M_n R_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

so können wir R_n allgemein immer als einen Vorrat bestimmter Objekte zum Zeitpunkt n, Q_n als die Menge direkt vor diesem Zeitpunkt hinzugefügter bzw. entfernter Objekte und den Faktor M_n als den Zerfall bzw. das Wachstum des Vorrats R_{n-1} im Zeitintervall von $n-1$ bis n ansehen. (4.1.2) taucht daher in vielen unterschiedlichen Lebensbereichen auf wie beispielsweise in der Wirtschaft, Physik, Atomtechnologie, Biologie, Kontrolltheorie oder Soziologie.

In einer auf Lassner (vgl. [La1], [La2]) zurückgehenden Anwendung stellt R_n z.B. den Betrag eines Sparkontos zum Zeitpunkt n dar, Q_n den eingezahlten bzw. abgebuchten Betrag direkt vor diesem Zeitpunkt und M_n den Zinsfaktor, der aufgrund von Schwankungen im Laufe der Zeit ebenfalls als stochastische Größe angesehen werden kann. Da Q_n und M_n voneinander abhängen können, deckt dieses Modell insbesondere den Fall positiver Einzahlungen ab, die gerade dann um so wahrscheinlicher sind, wenn der Zinsfaktor groß ist. Für Uppuluri, Feder und Shenton (vgl. [Ufs]) repräsentiert R_n den Bestand eines radioaktiven Materials zum Zeitpunkt n, Q_n die Menge hinzugefügten (bzw. entfernten) Materials direkt bevor n sowie M_n den natürlichen Zerfall durch die Radioaktivität. Die Autoren betrachten in diesem Artikel allerdings nur die Spezialfälle konstanter Materialzufuhr bzw. konstanten Zerfalls (es gilt entweder $Q_n = 1$ f.s. oder $M_n = \varrho$ f.s. für ein $\varrho > 0$). Sie erhalten damit unter bestimmten Voraussetzungen, insbesondere im Fall

Bernoulli-verteilter Zufallsgrößen M_n und Q_n, die Konvergenz in Verteilung der R_n gegen eine Zufallsgröße R sowie die Konvergenz der Erwartungswerte ER_n und ER_n^j gegen ER bzw. ER^j für $1 \leq j \leq m$ ($m \in \mathbb{N}$ fest und aus den Voraussetzungen; vgl. [Ufs], S.157, Theorem 1, für den Fall $Q_n = 1$ f.s. bzw. S.165-171, falls $M_n = \varrho$ f.s. ist mit einer Fallunterscheidung nach ϱ).
Weitere Beispiele liefern Chandrasekhar und Münch (vgl. [ChM]), indem sie die Helligkeit der Milchstraße untersuchen, oder Bawa (vgl. [Baw]) mittels Modellen, die ein möglichst optimales Verfahren darstellen sollen, um die Verschmutzung der Umwelt sowohl im Alltag als auch in Krisenzeiten in einem gleichzeitig vernünftigen Verhältnis mit den dabei entstehenden sozialen Kosten zu kontrollieren. R_n ist z.B. der Grad der Luftverschmutzung in einer Stadt, der im Sommer mit der Temperatur steigt, M_n der Anteil der Verschmutzung aus dem Zeitintervall von $n-2$ bis $n-1$, der am Ende des darauf folgenden Intervalls noch vorhanden ist, und Q_n der Grad der Emission im Zeitintervall von $n-1$ bis n, der außerdem noch von einer Steuerrate auf die Emission abhängen kann.
Perrakis und Henin (vgl. [PeH]) stellen anhand von (4.1.2) Berechnungsmethoden auf, um die Verteilung des NPV (net present value) eines Investments zu bewerten, während Chamayou (vgl. [Cha]) (4.1.2) zur Untersuchung atomarer Kaskaden benutzt - ein schnelles energiegeladenes Neutron stößt mit einem in ein Gitter von Atomen eingebundenes Atom zusammen und überträgt auf dieses seine Energie. Ist diese Energie groß genug, so löst das Neutron dadurch eine Kettenreaktion unter den Atomen des Gitters aus, die in diesem Fall ausgehend vom Kollisionsatom beginnen, sich sukzessive im Gitter zu ersetzen.
Solomon (vgl. [Sol]) beschreibt anhand von (4.1.2) Irrfahrten in zufälliger Umgebung und Cavalli-Sforza und Feldman (vgl. [CsF]) sowie Cavalli-Sforza (vgl. [Cav]) den Vorgang kultureller und genetischer Vererbung. Die beiden zuletzt genannten Artikel beschäftigen sich dabei mit der allgemeineren Situation $R_n, Q_n \in \mathbb{R}^d$, $M_n \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ für $d \geq 1$.
Neben den gerade genannten Autoren, die (4.1.2) vor allem aufgrund ihrer Anwendungsbezogenheit untersucht haben, haben sich schließlich Takács (vgl. [Tak], mit Partikelzählmaschinen wie dem Geiger-Müller-Zählrohr oder dem Elektronenvervielfältiger als physikalische Anwendung in § 5), Paulsen und Uppuluri (vgl. [PaU], insbesondere Theorem 3 auf S.331 - die Grenzverteilung der R_n kann nicht die Poissonverteilung sein), Maksimov (vgl. [Mak]), Vervaat (vgl. [Ve1], Abschnitt 5), Grincevičius (vgl. [Gr1]-[Gr4]), Lassner (vgl. [La1], [La2]), Chamayou und Schorr (vgl. [ChS]) und Kesten (vgl. [K73]) ebenfalls für (4.1.2) und ihre Spezialfälle und dabei insbesondere für das Verhalten der Verteilungsfunktion der R_n für $n \to \infty$ interessiert, motiviert durch die mathematische Struktur dieser Gleichung. Ähnlich wie Cavalli-Sforza und Feldman bzw. Cavalli-Sforza hat sich Kesten dabei insbesondere auf die Situation $d > 1$ konzentriert.
Wenden wir uns wieder unserer Ausgangsgleichung (4.1.1) zu, so entspricht unser Satz 4.1.1 gerade Kestens Theorem 5 für den Fall $d = 1$.

Satz 4.1.1. *(vgl. [K73], S. 246, Theorem 5)*
Seien M, Q Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, genüge M den Bedingungen von Lemma 2.1.2 und sei $P^{\log|M| | M \neq 0}$ nichtarithmetisch. Ist

$$E|Q|^\kappa < \infty, \tag{4.1.3}$$

so existiert eine Verteilung, die die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung (4.1.1) ist. Für diese Verteilung gilt sowohl (2.2.3) als auch (2.2.4). Ist $M \geq 0$ fast sicher, folgt

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{E\left(((Q+MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa\right)}{\kappa m}, \\ C_- &= \frac{E\left(((Q+MR)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa\right)}{\kappa m}, \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

und im Fall $P(M < 0) > 0$

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\kappa m} E\left(|Q + MR|^\kappa - |MR|^\kappa\right). \tag{4.1.5}$$

Es gilt außerdem

$$C_+ + C_- > 0 \;\Leftrightarrow\; P(Q = (1-M)c) < 1 \tag{4.1.6}$$

für jedes feste $c \in \mathbb{R}$.

Im Beweis des Satzes benutzen wir die in der folgenden Definition zusammengestellten Linearkombinationen von Zufallsgrößen. Wir benötigen außerdem zwei Ergebnisse von Gut und Vervaat sowie Grincevičius' Erweiterung von Lévys symmetrischer Ungleichung für den Nachweis von (4.1.6), in der *med* den Median einer Zufallsgröße bezeichnet.

Definition 4.1.2. *Für unabhängige identisch verteilte Zufallsvektoren* (M, R), (M_n, Q_n), $n \in \mathbb{N}$, *auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, P \otimes P)$ *sowie einer von diesen Zufallsvektoren unabhängigen Zufallsgröße* R *auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit unabhängigen Kopien* R_n *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $\Pi_0 := 1$, $m_0 := \mathit{med}\, R$, $T_0 := m_0$ *sowie*

$$\Pi_j := \prod_{k=1}^{j} M_k, \qquad \Pi_{j,n} := \prod_{k=j+1}^{n} M_k, \qquad j, n \in \mathbb{N},$$

$$R_n := \sum_{k=1}^{n} \Pi_{k-1} Q_k, \qquad R_{j,n} := \sum_{k=j+1}^{n} \Pi_{j,k-1} Q_k, \qquad j, n \in \mathbb{N},$$

$$T_n := R_n + \Pi_n m_0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$U_n := \Pi_{n-1}(Q_n - m_0(1 - M_n)), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 4.1.3. *(vgl. [Ve2], Theorem 5.1)*
Ist in der Situation von Satz 4.1.1 $E|M|^p < 1$ *und* $E|Q|^p < \infty$ *für ein beliebiges* $p \in [1, \infty)$, *so ist* R *die eindeutige Lösung von (4.1.1) mit* $E|R|^p < \infty$, *und die Reihe*

$$\sum_{k \geq 1} \Pi_{k-1} Q_k$$

konvergiert in der $||\cdot||_p$*-Norm. Die Momente* ER^j *für* $j = 1, 2, \ldots, \lfloor p \rfloor$ *sind eindeutig bestimmt durch die Gleichung*

$$ER^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} E(M^k Q^{j-k}) ER^k, \qquad j = 1, 2, \ldots, \lfloor p \rfloor. \tag{4.1.7}$$

Satz 4.1.4. *(vgl. [Gut], Theorem 2.1)*
Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ *unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit* $EY_1 \in (0, \infty)$. *Bezeichnet* S_n *deren* n*-te Partialsumme, definiert man* $\tau = \tau(c) := \inf\{n \geq 1 : S_n > c\}$ *für ein beliebiges* $c \geq 0$ *und ist* $r \geq 1$, *so gilt*

(a) $E|Y_1^-|^r < \infty \;\Leftrightarrow\; E\tau^r < \infty$,
(b) $E|Y_1^+|^r < \infty \;\Leftrightarrow\; ES_\tau^r < \infty$.

Proposition 4.1.5. *(vgl. [Gr5], Lemma 1)*
Mit den Definitionen von Π_j, $\Pi_{j,n}$, R_n und $R_{j,n}$ für alle $j, n \in \mathbb{N}$ in Definition 4.1.2 folgt für alle x, $y \in \mathbb{R}$

$$P\left(\max_{1\le j\le n} (R_j + \Pi_j\, med(R_{j,n} + \Pi_{j,n}\, y)) > x\right) \le 2P(R_n + \Pi_n\, y > x). \tag{4.1.8}$$

Die resultierende Ungleichung ist für uns im Fall $y = 0$ von Interesse. Nach Definition gilt für jedes feste $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} R_j + \Pi_j\, R_{j,n} &= \sum_{k=1}^{j} \Pi_{k-1} Q_k + \Pi_j \sum_{k=j+1}^{n} \Pi_{j,k-1}\, Q_k \\ &= \sum_{k=1}^{j} \Pi_{k-1} Q_k + \sum_{k=j+1}^{n} \Pi_{k-1} Q_k \\ &= R_n. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.1 existieren nach dem Prinzip von Letac sowohl $\lim_{n\to\infty} R_n$ als auch $\lim_{n\to\infty} R_{j,n}$ fast sicher für jedes feste $j \in \mathbb{N}$ und besitzen beide die Verteilung von R. Wählen wir $y = 0$, können wir daher in (4.1.8) $n \to \infty$ laufen lassen und erhalten

$$P\left(\sup_{j\in\mathbb{N}} (R_j + \Pi_j\, med\, R) > x\right) \le 2P(R > x), \qquad x \ge 0.$$

Für $-R$, $-R_j$ anstelle von R, R_j folgt die Ungleichung analog, und insgesamt gilt

$$P\left(\sup_{j\in\mathbb{N}} |R_j + \Pi_j\, med\, R| > x\right) \le 2P(|R| > x), \qquad x \ge 0. \tag{4.1.9}$$

Für den Nachweis von (4.1.4) und (4.1.5) und damit als letztes Hilfsmittel für den Beweis von Satz 4.1.1 benötigen wir außerdem die beiden elementaren Ungleichungen des folgenden Lemmas. Der Beweis des Lemmas befindet sich im Anhang.

Lemma 4.1.6. *Seien x, $y \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sowie $c_r = 2^{r-1} \vee 1$, dann gelten*

$$|x + y|^r \le c_r(|x|^r + |y|^r), \tag{4.1.10}$$

$$||x|^r - |y|^r| \le \begin{cases} |x - y|^r, & 0 < r \le 1 \\ r|x - y|(|x| \vee |y|)^{r-1}, & 1 < r < \infty \end{cases}. \tag{4.1.11}$$

Beweis von Satz 4.1.1. Bevor wir das Implizite Erneuerungstheorem auf (4.1.1) anwenden können, müssen wir sicherstellen, daß diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt. Setzen wir

$$\Psi(t) := Q + Mt, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$\Psi_n(t) := Q_n + M_n t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so sind die Ψ_n unabhängige Kopien von Ψ, und mit $Z_n(t)$ gemäß (2.1.2) erhalten wir

$$Z_n(t) = \Psi_1 \circ \ldots \circ \Psi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} Q_k \Pi_{k-1} + \Pi_n t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Mit einer zum Beweis von Proposition 4.2.1 analogen Rechnung ist unter den Voraussetzungen des Satzes für große $n \in \mathbb{N}$ und ein geeignetes $c > 0$

$$|Q_n||\Pi_{n-1}| \le \mathrm{e}^{c(1-\frac{n}{2})} \quad \text{sowie} \quad \lim_{n\to\infty} |\Pi_n| = 0 \qquad \text{f.s.}$$

Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(t) = \sum_{k\ge 1} Q_k \Pi_{k-1} < \infty \qquad \text{f.s.}$$

und somit nach dem Prinzip von Letac

$$R \sim \sum_{k\ge 1} Q_k \Pi_{k-1},$$

d.h. es existiert eine eindeutige Verteilung als Lösung von (4.1.1) (vgl. auch [Ve2], S.752-758, Theorem 1.6). (4.1.4) und (4.1.5) erhalten wir mit Hilfe von Korollar 2.2.2, indem wir (2.2.9) und (2.2.10) mit $\Psi(R) = Q + MR$ zeigen. Wir beschränken uns dabei auf den Nachweis von

$$E\left|((Q+MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa\right| < \infty,$$

da (2.2.10) durch eine analoge Rechnung sowie aufgrund der Tatsache folgt, daß $-R$ (4.1.1) mit $(M, -Q)$ anstelle von (M, Q) erfüllt.
Zunächst lösen wir den Betrag durch eine Fallunterscheidung nach Q und MR auf. Für $MR > 0$, $Q > 0$ ist $(Q+MR)^+ = Q + MR$ und $(MR)^+ = MR$, und für $MR < 0$, $Q < 0$ folgt $(Q+MR)^+ = (MR)^+ = 0$. Im Fall $-Q < MR \le 0$ gilt $(Q+MR)^+ = Q + MR$ und $(MR)^+ = 0$, für $0 < MR \le -Q$ erhalten wir $(Q+MR)^+ = 0$ und $(MR)^+ = MR$. Ist schließlich $0 < -Q < MR$, folgt $(Q+MR)^+ = Q+MR < MR$ und $(MR)^+ = MR$ bzw. $(Q+MR)^+ = (MR)^+ = 0$ für $MR \le -Q \le 0$ und damit

$$E\left|((Q+MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa\right| = \kappa \sum_{i=1}^{4} I_i,$$

wobei wir

$$I_1 := \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{-Q<MR\le 0\}}(Q+MR)^\kappa,$$

$$I_2 := \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<MR\le -Q\}}(MR)^\kappa,$$

$$I_3 := \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0, MR>0\}}((Q+MR)^\kappa - (MR)^\kappa),$$

$$I_4 := \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR\}}((MR)^\kappa - (Q+MR)^\kappa)$$

setzen. Für $-Q < MR \le 0$ gilt $0 < Q + MR \le Q^+$ und daher

$$I_1 \le \frac{1}{\kappa} E(Q+MR)^\kappa \le \frac{1}{\kappa} E(Q^+)^\kappa < \infty,$$

für $0 < MR \leq -Q$ ist

$$I_2 \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q<0\}}(-Q)^\kappa = \frac{1}{\kappa} E(Q^-)^\kappa < \infty.$$

Die Endlichkeit von I_3 und I_4 erhalten wir mit Hilfe von Lemma 4.1.6. Ist $\kappa \leq 1$, gilt mit (4.1.3) und (4.1.11)

$$I_3 \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0,MR>0\}}|Q|^\kappa \leq \frac{1}{\kappa} E|Q|^\kappa < \infty,$$

für $\kappa > 1$ folgt mit (4.1.11)

$$\begin{aligned} I_3 &\leq E\mathbf{1}_{\{Q>0,MR>0\}} Q(Q+MR)^{\kappa-1} \\ &\leq c_{\kappa-1} E\mathbf{1}_{\{Q>0,MR>0\}} Q(Q^{\kappa-1} + (MR)^{\kappa-1}) \\ &\leq c_{\kappa-1} E(Q^+)^\kappa + c_{\kappa-1} EQ^+|MR|^{\kappa-1} \\ &= c_{\kappa-1} E(Q^+)^\kappa + c_{\kappa-1} E(Q^+|M|^{\kappa-1}) E|R|^{\kappa-1}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt (4.1.10) angewandt und im letzten die Unabhängigkeit von R und (M,Q) ausgenutzt haben. Die Hölder-Ungleichung (vgl. [AWT], Satz 17.4) für Q^+ und $|M|^{\kappa-1}$ mit $p = \kappa$ und $q = \frac{\kappa}{\kappa-1}$ liefert $EQ^+\,|M|^{\kappa-1} < \infty$. Mit $p := \kappa - 1 \in [1,\infty)$ für $\kappa \in \mathbb{N}, \kappa \geq 2$, bzw. $p := \lfloor \kappa \rfloor \in [1,\infty)$ für $\kappa \notin \mathbb{N}, \kappa > 1$, ist $E|R|^{\kappa-1} \leq E|R|^p < \infty$ gemäß Satz 4.1.3 und damit $I_3 < \infty$ in Verbindung mit $E(Q^+)^\kappa < \infty$. Analog folgt für $\kappa \leq 1$

$$I_4 \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR\}}|-Q|^\kappa \leq \frac{1}{\kappa} E|Q|^\kappa < \infty$$

sowie für $\kappa > 1$

$$I_4 \leq E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR\}}|-Q||MR|^{\kappa-1} \leq E|Q|\,|M|^{\kappa-1}\,E|R|^{\kappa-1} < \infty$$

und damit insgesamt (2.2.9). In (4.1.6) gelte zunächst

$$C_+ + C_- > 0 \;\Leftrightarrow\; E|Q+MR|^\kappa - E|MR|^\kappa > 0.$$

Es folgt $E|Q+MR|^\kappa > E|MR|^\kappa = E|R|^\kappa$ und damit $P(Q+MR=R) < 1$, also die Behauptung. Sei nun $P(Q = (1-M)c) < 1$ für jedes feste $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$C_+ + C_- \sim |t|^\kappa P(|R| > t), \qquad t \to \infty,$$

müssen wir

$$t^\kappa P(|R| > t) > 0$$

für $t \to \infty$ zeigen. Mit Hilfe von Definition 4.1.2 erhalten wir zunächst

$$T_{n-1} + U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \Pi_{k-1} Q_k + \Pi_{n-1}(Q_n + M_n m_0) = T_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $t > |m_0|$ und existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|U_n| > 2t$, so existiert auch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|T_n| > t$, denn entweder gilt bereits $|T_{n-1}| > t$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (und damit $|T_n| > t$ für ein $n \in \mathbb{N}$, da $|T_0| = |m_0| < t$ ist), oder es gilt $|T_{n-1}| \leq t$ und damit $|T_n| \geq |U_n| - |T_{n-1}| > 2t - t = t$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$P(\exists\, n \in \mathbb{N} : |T_n| > t) \geq P(\exists\, n \in \mathbb{N} : |U_n| > 2t).$$

Mit Hilfe von (4.1.9) folgt dann

$$\begin{aligned} P(|R|>t) &\geq \frac{1}{2} P(\sup_{j\in\mathbb{N}} |T_j| > t) \\ &= \frac{1}{2} P(\exists\, n \in \mathbb{N}:\ |T_n| > t) \\ &\geq P(\exists\, n \in \mathbb{N}:\ |U_n| > 2t) \\ &\geq \frac{1}{2} P(|Q - m_0(1-M)| > \varepsilon) P(\exists\, n \in \mathbb{N}:\ |\Pi_n| > \frac{2t}{\varepsilon}), \end{aligned}$$

wobei wir nach Voraussetzung ε so wählen können, daß $P(|Q - m_0(1-M)| > \varepsilon) > 0$ ist. Wegen

$$P(\exists\, n \in \mathbb{N}:\ |\Pi_n| > \mathrm{e}^t) = P(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n > t)$$

genügt es, für ein $\delta > 0$

$$P(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n > t) \geq \delta \mathrm{e}^{-\kappa t}, \qquad t \to \infty, \tag{4.1.12}$$

zu zeigen. $(S_n)_{n\geq 0} = (\sum_{i=1}^n Y_i)_{n\geq 0}$ ist nach Voraussetzung ein SRW mit $EY_1 < 0$. Sei $({}_\kappa S_n)_{n\geq 0} = (\sum_{i=1}^n {}_\kappa Y_i)_{n\geq 0}$ der zu $(S_n)_{n\geq 0}$ assoziierte SRW mit Zuwachsverteilung

$$P({}_\kappa Y_1 \in dy) = \mathrm{e}^{\kappa y} P(Y_1 \in dy), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Gemäß [ASP], Definition 22.4, ist

$$\sigma^> = \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\} < \infty$$

(beachte $P(Y_1 > 0) > 0$) der erste streng aufsteigende Leiterindex von $(S_n)_{n\geq 0}$ sowie

$$S_1^> = S_{\sigma^>} \mathbf{1}_{\{\sigma^> < \infty\}} = S_{\sigma^>}$$

dessen erste streng aufsteigende Leiterhöhe. Setzen wir

$$\beta := \int_0^\infty t \mathrm{e}^{\kappa t} P^{S_1^>}(dt) = E\, {}_\kappa S_1^> = E\, {}_\kappa S_{\sigma^>},$$

so folgt mit (5.13) in [Fel], Kapitel $\overline{\underline{\mathrm{XII}}}$,

$$P(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n > t) \sim \frac{P^{S_1^>}(\mathbb{R}^+)}{\beta\kappa} \mathrm{e}^{-\kappa t}, \qquad t \to \infty,$$

sofern $\beta < \infty$ ist. Wegen $E\, {}_\kappa Y_1 = 1 \in (0,\infty)$ können wir jedoch Satz 4.1.4 (b) mit $c = 0$, $r = 1$ anwenden und erhalten aufgrund von

$$E\, {}_\kappa S_{\sigma^>} < \infty \ \Leftrightarrow\ E\, {}_\kappa Y_1^+ < \infty$$

und $E\, {}_\kappa Y_1^+ = EY_1^+ \mathrm{e}^{\kappa Y_1} < \infty$ nach (2.1.6) die Endlichkeit von β. (4.1.12) folgt nun in Verbindung mit $P^{S_1^>}(\mathbb{R}^+) > 0$ (da $P(Y_1 > 0) > 0$ gilt) sowie $\delta := \frac{P^{S_1^>}(\mathbb{R}^+)}{\beta\kappa}$ und damit insgesamt die Behauptung durch Substitution von t durch $\log \frac{2}{\varepsilon} t$ in (4.1.12). $\square$

Als erste Folgerung aus Satz 4.1.1 können wir endliche Schranken für $C_+ + C_-$ im Fall $M \geq 0$ f.s. bzw. C_+, C_- im Fall $P(M < 0) > 0$ angeben, die nicht von der unbekannten Verteilung der Zufallsgröße R abhängen. Ist $\kappa \in \mathbb{N}$ oder $\kappa \in 2\mathbb{N}$, existieren sogar genaue Werte für C_+ und C_-. Wir setzen dazu im folgenden für eine Zufallsgröße X

$$\|X\|_p := \begin{cases} E|X|^p, & \text{falls } p \in (0,1) \\ (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } p \geq 1 \end{cases}. \tag{4.1.13}$$

Korollar 4.1.7. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.1 sei $M \geq 0$ f.s. Dann gilt für $0 < \kappa \leq 1$*

$$C_+ + C_- \leq \frac{1}{\kappa m} E|Q|^\kappa,$$

und für $\kappa > 1$ folgt

$$\begin{aligned} C_+ + C_- &\leq \frac{2^{\kappa-1}}{m}(E|Q|^\kappa + E|Q||M|^{\kappa-1}E|R|^{\kappa-1}) \\ &\leq \frac{2^{\kappa-1}}{m}\left(E|Q|^\kappa + \frac{E|Q|\,|M|^{\kappa-1}\,E|Q|^{\kappa-1}}{(1-\|M\|_{\kappa-1})^{\kappa-1}}\right), \end{aligned}$$

wobei nach Voraussetzung beide Ausdrücke endlich sind. Im Fall $P(M < 0) > 0$ ergeben sich die Schranken für C_+, C_- wegen $C_+ = C_-$ aus der Hälfte der oben angegebenen Werte.

Beweis. Mit (4.1.11) gilt für $0 < \kappa \leq 1$

$$C_+ + C_- = \frac{1}{\kappa m} E(|Q + MR|^\kappa - |MR|^\kappa) \leq \frac{1}{\kappa m} E|Q|^\kappa$$

und für $\kappa > 1$ wegen $1 \leq c_{\kappa-1} = 2^{\kappa-2} \vee 1 < 2^{\kappa-1}$

$$\begin{aligned} C_+ + C_- &\leq \frac{1}{m} E|Q|(|Q+MR| \vee |MR|)^{\kappa-1} \\ &= \frac{1}{m} E\mathbf{1}_{\{|Q+MR|\geq|MR|\}}|Q||Q+MR|^{\kappa-1} + \frac{1}{m} E\mathbf{1}_{\{|Q+MR|<|MR|\}}|Q||MR|^{\kappa-1} \\ &\leq \frac{c_{\kappa-1}}{m} E\mathbf{1}_{\{|Q+MR|\geq|MR|\}}|Q|(|Q|^{\kappa-1} + |MR|^{\kappa-1}) \\ &\quad + \frac{1}{m} E\mathbf{1}_{\{|Q+MR|<|MR|\}}(|Q|^\kappa + |Q||MR|^{\kappa-1}) \\ &\leq \frac{c_{\kappa-1}}{m}(E|Q|^\kappa + E|Q|\,|M|^{\kappa-1}\,E|R|^{\kappa-1}) \\ &< \frac{2^{\kappa-1}}{m}(E|Q|^\kappa + E|Q|\,|M|^{\kappa-1}\,E|R|^{\kappa-1}), \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt (4.1.10) angewandt haben. Aufgrund von (4.1.1) und der Dreiecksungleichung gilt weiter

$$\begin{aligned} \|R\|_{\kappa-1} = \|Q + MR\|_{\kappa-1} &\leq \|Q\|_{\kappa-1} + \|M\|_{\kappa-1}\|R\|_{\kappa-1} \\ \Leftrightarrow \qquad \|R\|_{\kappa-1} &\leq \tfrac{\|Q\|_{\kappa-1}}{1-\|M\|_{\kappa-1}}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist wegen $\|M\|_{\kappa-1} < 1$ und $\|Q\|_{\kappa-1} \leq E|Q|^\kappa$ endlich. Es folgt

$$E|R|^{\kappa-1} \leq \frac{E|Q|^{\kappa-1}}{(1-\|M\|_{\kappa-1})^{\kappa-1}}, \qquad \kappa > 1,$$

(beachte $(1-\|M\|_{\kappa-1})^{\kappa-1} \leq 1 - \|M\|_{\kappa-1}$ für den Fall $\kappa \in (1,2)$) und mittels

$$E|Q|^\kappa + E|Q||M|^{\kappa-1}E|R|^{\kappa-1} \leq E|Q|^\kappa + \frac{E|Q|\,|M|^{\kappa-1}\,E|Q|^{\kappa-1}}{(1-\|M\|_{\kappa-1})^{\kappa-1}}$$

die Behauptung. □

Korollar 4.1.8. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.1 seien $M \geq 0$, $Q \geq 0$ f.s. sowie $\kappa \in \mathbb{N}$. Dann ist $C_- = 0$ und*

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{j} EM^j Q^{\kappa-j} ER^j \tag{4.1.14}$$

mit ER^j, $j = 1, \ldots, \kappa - 1$, aus (4.1.7). Insbesondere gilt für $\kappa = 1$

$$C_+ = \frac{EQ}{EM \log M}$$

und für $\kappa = 2$

$$C_+ = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} EQ^2 + \frac{EQ\, EQM}{1 - EM} \right). \tag{4.1.15}$$

Korollar 4.1.9. *Gelten die Voraussetzungen von Satz 4.1.1, und sei $\kappa \in 2\mathbb{N}$. Ist $M \geq 0$ f.s., so erfüllt $C_+ + C_-$ (4.1.14) anstelle von C_+, und im Fall $P(M < 0) > 0$ ist*

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\kappa m} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{j} EM^j Q^{\kappa-j} ER^j$$

mit ER^j, $j = 1, \ldots, \kappa - 1$, aus (4.1.7). Für $\kappa = 2$ folgt insbesondere (4.1.15) für $C_+ + C_-$ anstelle von C_+.

Beweis von Korollar 4.1.8 und 4.1.9. Wegen $M \geq 0$ f.s., $Q \geq 0$ f.s. und $R \sim \sum_{k \geq 1} \Pi_{k-1} Q_k$ ist $R \geq 0$ f.s. und daher $C_- = 0$. Für C_+ folgt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes wegen $MQ \geq 0$ f.s., $R \geq 0$ f.s. und der Unabhängigkeit von R und (M, Q)

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{\kappa m} E((Q + MR)^\kappa - (MR)^\kappa) \\ &= \frac{1}{\kappa m} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{j} E((MR)^j Q^{\kappa-j}) \\ &= \frac{1}{\kappa m} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{j} EM^j Q^{\kappa-j} ER^j. \end{aligned}$$

Für $\kappa = 1$ ist $EM^\kappa = EM = 1$ und $C_+ = \frac{1}{m} EQ = \frac{EQ}{EM \log M}$. Wählen wir $\kappa = 2$, gilt $EM^\kappa = EM^2 = 1$ und

$$ER = EQ + EM\, ER \quad \Leftrightarrow \quad ER = \frac{EQ}{1 - EM}$$

mit Hilfe von (4.1.7). Es folgt

$$C_+ = \frac{1}{2m} (EQ^2 + 2EQM\, ER) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} EQ^2 + \frac{EQ\, EQM}{1 - EM} \right)$$

und damit insgesamt Korollar 4.1.8. Sei nun $\kappa \in 2\mathbb{N}$. Nach Satz 4.1.1 ist $E|R|^{\kappa-1} < \infty$ sowie $E\,|M|^{\kappa-1}\,|Q| < \infty$ und $E|Q|^\kappa < \infty$, also existieren ER^j und $EM^j Q^{\kappa-j}$ für

$j = 0, \ldots, \kappa - 1$. Analog folgt für $M \geq 0$ f.s.

$$C_+ + C_- = \frac{1}{\kappa m} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{j} EM^j Q^{\kappa-j} ER^j,$$

im Fall $P(M < 0) > 0$

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\kappa m} \sum_{j=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{j} EM^j Q^{\kappa-j} ER^j$$

und somit (4.1.15) für $C_+ + C_-$. □

Eine konkrete Anwendung für das Implizite Erneuerungstheorem finden wir im Fall Beta-verteilter Zufallsgrößen. Eine Zufallsgröße X ist Beta-verteilt mit den Parametern $a, b > 0$ - $X \sim \beta(a, b)$ -, wenn X die $\lambda\!\!\!\lambda$-Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

besitzt, wobei

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

das sogenannte *vollständige Beta-Integral* bezeichnet. Um besser mit dieser Verteilung umgehen zu können, benutzen wir im folgenden die Schreibweise

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1+x)^{-a-b} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$

die mit Hilfe einer Substitution von x durch $\frac{z}{1-z}$ wegen

$$\int_0^\infty x^{a-1}(1+x)^{-a-b} dx = \int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1} dz = B(a,b)$$

gleichwertig zur erstgenannten ist.

Proposition 4.1.10. *Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $a_1, \ldots, a_n, b > 0$, $a_{n+1} := a_1$. Sind $R, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $R \sim \beta(a_1, b)$, $Y_i \sim \beta(a_{i+1}, a_i + b)$ für $i = 1, \ldots, n$, und*

$$M := \prod_{i=0}^{n-1} Y_{n-i}, \qquad Q := \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{k} Y_{n-i},$$

so gilt $R \stackrel{d}{=} Q + MR$. Wegen

$$t^b P(R > t) \sim \frac{1}{bB(a_1, b)}$$

für $t \to \infty$ folgt dann mit (4.1.4) und $\kappa = b$

$$\frac{1}{bB(a_1,b)} = \frac{1}{bm} E((Q+MR)^b - (MR)^b). \tag{4.1.16}$$

Sind $R, Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $R \sim \beta(a,b)$ und $Y_n \sim \beta(a, a+b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (der Fall $n = 1$ in Proposition 4.1.10 mit $a = a_1, M = \prod_{i=0}^{n-1} Y_1$ und $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{k} Y_1$), so geht dieses Ergebnis auf Chamayou und Letac zurück (vgl. [ChL], S.21f, Example 9). Für den allgemeinen Fall benötigen wir

Lemma 4.1.11. *Seien X, Y unabhängige Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X \sim \beta(a,b)$ und $Y \sim \beta(c, a+b)$ für $a, b, c > 0$, so gilt*

$$Y(1+X) \sim \beta(c,b).$$

Beweis. Sei $s \in (-c, b)$, dann folgt mit Hilfe des Beta-Integrals

$$\begin{aligned} EY^s &= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b)} \int_0^\infty y^{(c+s)-1}(1+y)^{-((c+s)+(a+b-s))} dy \\ &= \frac{\Gamma(c+s)\Gamma(a+b-s)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b)} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} E(1+X)^s &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{a-1}(1+x)^{-(a+b-s)} dy \\ &= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b-s)}{\Gamma(b)\Gamma(a+b-s)} \end{aligned}$$

und daher aufgrund der Unabhängigkeit von Y und $1+X$

$$E(Y(1+X))^s = EY^s E(1+X)^s = \frac{\Gamma(c+s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c)\Gamma(b)}.$$

Da dies die Mellin-Transformierte der $\beta(c,b)$-Verteilung ist und die Mellin-Transformierte einer Zufallsgrößen deren Verteilung eindeutig festlegt, folgt die Behauptung. □

Beweis von Proposition 4.1.10. Wir setzen $R_1 := R$ und $R_{k+1} := Y_k(1+R_k)$ für $k = 1, \ldots, n-1$ und zeigen

$$R_k \sim \beta(a_k, b), \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4.1.17}$$

mit Hilfe einer Induktion nach k. Für $k = 1$ gilt (4.1.17) nach Voraussetzung, gelte also die Behauptung für ein beliebiges, festes $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Wegen $R_{k+1} = Y_k(1+R_k)$, $Y_k \sim \beta(a_{k+1}, a_k + b)$ und $R_k \sim \beta(a_k, b)$ nach Induktionsvoraussetzung folgt dann $R_{k+1} \sim \beta(a_{k+1}, b)$ für $k = 1, \ldots, n-1$ mit Hilfe von Lemma 4.1.11. Durch iteriertes Anwenden der Gleichung $R_{k+1} = Y_k(1+R_k)$ für $k = 1, \ldots, n-1$ erhalten wir außerdem

$$Y_n(1+R_n) = Y_n + Y_n R_n = Q + MR$$

und $Y_n(1+R_n) \sim \beta(a_{n+1}, b) = \beta(a_1, b)$ mit (4.1.17) und Lemma 4.1.11 und somit schließlich $R \stackrel{d}{=} Q + MR$. Wir weisen weiter nach, daß M und Q die Bedingungen von Theorem 4.1.1 erfüllen. Wegen

$$\begin{aligned} EY_i^b &= \frac{1}{B(a_{i+1}, a_i + b)} \int_0^\infty x^{(a_{i+1}+b)-1}(1+x)^{-(a_{i+1}+b)-a_i}\, dx \\ &= \frac{B(a_{i+1}+b, a_i)}{B(a_{i+1}, a_i+b)} \\ &= \frac{\Gamma(a_i)\Gamma(a_{i+1}+b)}{\Gamma(a_{i+1})\Gamma(a_i+b)} \\ &= \frac{B(a_i, b)}{B(a_{i+1}, b)}, \qquad\qquad i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

folgt

$$EM^b = \prod_{i=1}^{n} EY_i^b = \prod_{i=1}^{n} \frac{B(a_i,b)}{B(a_{i+1},b)} = \frac{B(a_1,b)}{B(a_{n+1},b)} = 1,$$

und aus

$$\begin{aligned} EY_i^b \log^+ Y_i &\leq EY_i^{b+1} \\ &= \frac{1}{B(a_{i+1}, a_i+b)} \int_0^1 x^{(a_{i+1}+b+1)-1}(1-x)^{(a_i+b)-1}\, dx \\ &= \frac{B(a_{i+1}+b+1, a_i+b)}{B(a_{i+1}, a_i+b)} \end{aligned}$$

erhalten wir aufgrund der Unabhängigkeit der Y_i, $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} EM^b \log^+ M &= E \prod_{j=1}^{n} Y_j^b \sum_{i=1}^{n} \log^+ Y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\,(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} Y_j^b) Y_i^b \log^+ Y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} EY_j^b) EY_i^b \log^+ Y_i \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Da $P^{\log Y_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ nichtarithmetisch ist, gilt dasselbe für $P^{\log M|M\neq 0} = P^{\log Y_1 * \ldots * \log Y_n}$. Sei

$$\Omega_m := \{w \in \Omega : \prod_{i=0}^{m} Y_{n-i} = \max_{0\leq k\leq n-1} \prod_{i=0}^{k} Y_{n-i}\}, \qquad m \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Falls $w \in \Omega$, $r_w \in \{1, \ldots, n\}$ und $m_1, \ldots, m_{r_w} \in \{0, \ldots, n-1\}$, $m_1 < \ldots < m_{r_w}$, existieren mit

$$\prod_{i=0}^{m_1} Y_{n-i}(w) = \ldots = \prod_{i=0}^{m_{r_w}} Y_{n-i}(w) = \max_{0\leq k\leq n-1} \prod_{i=0}^{k} Y_{n-i}(w),$$

setzen wir

$$\prod_{i=0}^{m_1} Y_{n-i}(w) = \max_{0\leq k\leq n-1} \prod_{i=0}^{k} Y_{n-i}(w).$$

Damit ist $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \{0, \ldots, n-1\}, i \neq j$, und wir erhalten

$$EQ^b = \int_{\bigcup_{m=0}^{n-1} \Omega_m} Q^b\, dP \leq \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\Omega_m} n^b (\prod_{i=0}^{m} Y_{n-i})^b\, dP \leq n^b \sum_{m=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{m} EY_{n-i}^b < \infty$$

in Verbindung mit $\prod_{i=0}^{m} EY_{n-i}^b = \frac{B(a_{n-m},b)}{B(a_n,b)}$. Mit (4.1.4) und $\kappa = b$ folgt daraus insgesamt

$$t^b P(R > t) \sim \frac{1}{bm} E((Q + MR)^b - (MR)^b), \qquad t \to \infty.$$

Da wir in unserem Fall die Verteilung von R kennen, betrachten wir außerdem

$$\begin{aligned} P(R > t) &= \frac{1}{B(a_1,b)} \int_t^\infty x^{a_1-1}(1+x)^{-a_1-b} dx \\ &= \frac{1}{B(a_1,b)} \int_t^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^{a_1-1} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{b+1} dx \end{aligned}$$

für $t \to \infty$. Wählen wir t genügend groß, folgt wegen

$$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{a_1-1} \downarrow_{x\to\infty} 1, \quad a_1 \in (0,1), \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{1+x}\right)^{a_1-1} \uparrow_{x\to\infty} 1, \quad a_1 \geq 1,$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{b+1} dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{bt^b} - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{b(t+1)^b} = 0$$

$$\int_t^{\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{a_1-1} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{b+1} dx \sim \int_t^{\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{b+1} dx \sim \int_t^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{b+1} dx = \frac{1}{bt^b}$$

für $t \to \infty$ und somit insgesamt (4.1.16). □

Mit Hilfe der Ergebnisse aus dem vorigen Kapitel folgt die Konvergenzrate der Flanken der Verteilung von R.

Satz 4.1.12. *Sei R eine Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die (4.1.1) löst, wobei M für ein $\kappa > 0$ (2.1.5), für ein $\beta \in (0,1)$ (3.2.1) sowie (3.2.2) und Q $E|Q|^{\kappa+\beta} < \infty$ erfüllt. Ist $M \geq 0$ f.s., sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß η auf $\mathbb{R}$ definiert durch*

$$\eta(dx) := e^{\kappa x} P(\log M \in dx).$$

Dann folgen sowohl (3.2.4) als auch (3.2.6). Für $P(M < 0) > 0$ sei η durch (3.3.1) definiert und erfülle außerdem (3.3.2). In diesem Fall gilt (3.3.3), und $t^\kappa P(R < -t)$ erfüllt dieselbe Formel.

Beweis. Wir erhalten (3.2.4) und (3.2.6) bzw. (3.3.3) mit Hilfe von (3.2.7) und (3.2.8), wobei hier wiederum der Nachweis von

$$E|((Q + MR)^+)^{\kappa+\beta} - ((MR)^+)^{\kappa+\beta}| < \infty$$

genügt, da wir (3.2.8) mit (3.2.7) und $(-R, M, -Q)$ anstelle von (R, M, Q) erhalten. (3.2.7) können wir mit derselben Methode zeigen, die wir im Beweis von Satz 4.1.1 zum Nachweis von (2.2.9) verwendet haben, sofern $E|Q|\,|M|^{\kappa+\beta-1}$ und $E|R|^{\kappa+\beta-1}$ endlich sind. Für $E|Q|\,|M|^{\kappa+\beta-1}$ folgt dies, indem wir die Hölder-Ungleichung gemäß [AWT], Satz 17.4, auf Q und $|M|^{\kappa+\beta-1}$ mit $p = \kappa+\beta$ und $q = \frac{\kappa+\beta}{\kappa+\beta-1}$ anwenden. Für $E|R|^{\kappa+\beta-1}$ erhalten wir die Abschätzung

$$\|R\|_{\kappa+\beta-1} \leq \frac{\|Q\|_{\kappa+\beta-1}}{1 - \|M\|_{\kappa+\beta-1}}$$

(vgl. den Beweis von Korollar 4.1.7). Dieser Ausdruck ist endlich, da $\|M\|_{\kappa+\beta-1} < 1$ wegen $\kappa + \beta - 1 < \kappa$ und $E\,|M|^\kappa = 1$ gilt, und es folgt die Behauptung. □

Zum Abschluß dieses Abschnittes möchten wir noch auf

$$(4.1.1') \qquad R \stackrel{d}{=} [Q + MR], \qquad R \text{ unabhängig von } (M, Q),$$

als eine Variante von (4.1.1) hinweisen, wobei $[\cdot]$ dem ganzzahligen Anteil des geklammerten Ausdruckes entspricht. Legen wir die Voraussetzungen von Satz 4.1.1 zugrunde, erhalten wir mit Hilfe des folgenden Korollares bis auf (4.1.6) alle Aussagen dieses Satzes mit $[Q + MR]$ anstelle von $Q + MR$.

Korollar 4.1.13. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1.1 existiert eine Verteilung, die die eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung (4.1.1′) ist. Für diese Verteilung gelten (2.2.3) und (2.2.4). Ist $M \geq 0$ f.s., folgt (4.1.4), andernfalls gilt (4.1.5).*

Beweis. Wir setzen

$$\hat{\Psi}(t) := [Q + Mt], \qquad t \in \mathbb{Z},$$

und

$$\hat{\Psi}_n(t) := [Q_n + M_n t], \qquad t \in \mathbb{Z},$$

mit unabhängigen identisch verteilten Zufallsgrößen M, M_n bzw. Q, Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (4.1.1′) mit Hilfe des Prinzips von Letac wegen

$$0 \leq |\lim_{n\to\infty} \hat{\Psi}_1 \circ \cdots \circ \hat{\Psi}_n(t)| \leq |\lim_{n\to\infty} \Psi_1 \circ \cdots \circ \Psi_n(t)| < \infty \qquad \text{f.s.}$$

Für den Nachweis von

$$E|([Q + MR]^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa| < \infty$$

schreiben wir mit Hilfe einer Fallunterscheidung nach Q und MR

$$E|([Q + MR]^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa| = \kappa \sum_{i=1}^{4} I_i$$

mit

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{-Q<MR\leq 0\}}[Q + MR]^\kappa, \\
I_2 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<MR\leq -Q\}}(MR)^\kappa, \\
I_3 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0, MR>0\}}|[Q + MR]^\kappa - (MR)^\kappa|, \\
I_4 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR\}}((MR)^\kappa - [Q + MR]^\kappa)
\end{aligned}$$

und schätzen I_1 und I_2 gegen $\frac{1}{\kappa}E(Q^+)^\kappa$ bzw. $\frac{1}{\kappa}E(Q^-)^\kappa$ ab. I_3 zerlegen wir in die Summe von

$$I_{31} := \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q\geq\lceil MR\rceil - MR>0, MR>0\}}([Q + MR]^\kappa - (MR)^\kappa)$$

und

$$I_{32} := \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<Q<\lceil MR\rceil - MR, MR>0\}}((MR)^\kappa - [Q + MR]^\kappa).$$

Wegen $MR \leq [Q + MR] \leq Q + MR$ erhalten wir analog zum Nachweis der Endlichkeit von I_3 in Satz 4.1.1

$$I_{31} \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q\geq\lceil MR\rceil - MR>0, MR>0\}}((Q + MR)^\kappa - (MR)^\kappa) < \infty.$$

Für $0 < \kappa \leq 1$ folgt weiter wegen $[Q + MR] = [MR] \leq MR$ und $MR - [MR] \leq 1$

$$I_{32} \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<Q<\lceil MR\rceil - MR, MR>0\}}(MR - [MR])^\kappa \leq \frac{1}{\kappa}$$

mit Hilfe von (4.1.11), für $\kappa > 1$ gilt

$$\begin{aligned} I_{32} &\leq E\mathbf{1}_{\{0<Q<\lceil MR\rceil - MR, MR>0\}}(MR - [MR])(MR)^{\kappa-1} \\ &\leq E\mathbf{1}_{\{MR>0\}}(MR)^{\kappa-1} \\ &\leq E\,|M|^{\kappa-1}\,E|R|^{\kappa-1} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ebenfalls mit (4.1.11) sowie der Hölder-Ungleichung. I_4 setzt sich aus den Summanden

$$I_{41} := \frac{1}{\kappa}E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR-[MR]<MR\}}((MR)^\kappa - [Q+MR]^\kappa)$$

und

$$I_{42} := \frac{1}{\kappa}E\mathbf{1}_{\{0\leq MR-[MR]<-Q<MR\}}((MR)^\kappa - [Q+MR]^\kappa)$$

zusammen, wobei I_{41} wegen $[Q + MR] = [MR] \leq MR$ endlich ist (vgl. I_{32}) und aus $[Q + MR] \in [0, [MR])$

$$\begin{aligned} I_{42} &\leq \frac{1}{\kappa}E\mathbf{1}_{\{0\leq MR-[MR]<-Q<MR\}}(-1)^{-\kappa}(-MR)^\kappa \\ &\leq \frac{1}{\kappa}(-1)^{-\kappa}E\mathbf{1}_{\{Q\leq 0\}}Q^\kappa \\ &< \infty \end{aligned}$$

folgt. Wir erhalten daher insgesamt (2.2.9) und analog (2.2.10) mit $(-R, M, -Q)$ anstelle von (R, M, Q). □

Bereits in Satz 4.1.1 ist es uns nicht gelungen, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, daß $C_+ > 0$ und $C_- > 0$ sind, sondern allein dafür, daß $C_+ + C_-$ echt positiv ist. Auch hier können wir lediglich feststellen, daß im Fall $M \geq 0$ f.s. und $Q \geq 1$ f.s. und somit $R \geq 1$ f.s. $C_- = 0$ und

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m}E([Q + MR]^\kappa - (MR)^\kappa)$$

folgt und damit wegen $[Q + MR] > MR$

$$C_+ + C_- = C_+ > 0$$

ist. Mit einem in den Grundzügen unveränderten Beweis gilt die in Satz 4.1.12 für die Lösung von (4.1.1) gewonnene Konvergenzrate der Flanken ebenfalls für (4.1.1′).

4.2 $R \stackrel{d}{=} \max(Q, MR)$

In diesem Abschnitt gilt unser Interesse der stochastischen Fixpunktgleichung

(4.2.1) $$R \stackrel{d}{=} \max(Q, MR), \qquad R \text{ unabhängig von } (M, Q),$$

mit Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wir setzen außerdem $M \geq 0$ f.s. voraus. Die Gleichung besitzt insofern einen besonderen Stellenwert, da sie

unter bestimmten Voraussetzungen auf das G/G/1[1]-Bedienungssystem der Warteschlangentheorie übertragen werden kann.
Im G/G/1-Bedienungssystem gehen wir davon aus, daß es nur einen Bedienungsschalter gibt und daß die Kunden der Reihe nach von diesem bedient werden. Treffen die Kunden ausgehend von einem Beobachtungsstartpunkt $T_0 = 0$ zu Ankunftszeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im System ein, so interessiert man sich für die Wartezeit W_n des n-ten Kunden, $n \in \mathbb{N}$, die sich zusammensetzt aus der Wartezeit des $n-1$-ten Kunden, dessen Bedienungszeit B_{n-1} sowie der Zeitspanne $A_n = T_n - T_{n-1}$, die zwischen dem Eintreten des $n-1$-ten und des n-ten Kunden verstrichen ist. $(A_n)_{n\geq 1}$ und $(B_n)_{n\geq 1}$ seien dabei unabhängige Folgen unabhängig identisch verteilter Zufallsgrößen und besitzen daher Verteilungen, die nicht von $n \in \mathbb{N}$ abhängen. Da T_0 nicht notwendig mit dem Zeitpunkt der Öffnung des Bedienungssystems zusammenfallen muß, sei M_0 die Anzahl der wartenden einschließlich des gerade bedienten Kunden zum Zeitpunkt T_0 sowie $B_{-M_0+1}, \ldots, B_0$ deren Bedienungszeiten. Setzen wir $X_n := B_{n-1} - A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt demnach

$$W_n = (W_{n-1} + X_n)^+, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.2.2}$$

mit voneinander unabhängigen Zufallsgrößen X_n. Bezeichnet $\mathcal{F}_n$ die σ-Algebra der bis zum Zeitpunkt n verfügbaren Informationen, so bildet $(W_n)_{n\geq 0}$ eine DMK bzgl. dieser Filtration. Setzen wir $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$ und $W_0 = 0$, so folgt

$$W_n \sim \max\{S_0, \ldots, S_n\}$$

wegen $W_n = \max\{S_n - S_j : 0 \leq j \leq n\}$. Falls $EX_1 < 0$ und daher $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ f.s. ist, gilt

$$\max\{S_0, \ldots, S_n\} \uparrow \max_{k\geq 0} S_k < \infty \qquad \text{P-f.s.}$$

und

$$W_n \xrightarrow{d} \max_{k\geq 0} S_k$$

(vgl. [AET], §11, S.230-233 und [ASP], Abschnitt 14.5). Die Kette $(W_n)_{n\geq 0}$ besitzt somit die stationäre Verteilung $P^{\max_{k\geq 0} S_k}$, und wählen wir irgendeine Zufallsgröße W mit dieser Verteilung sowie eine von X_1 unabhängige Kopie X, erhalten wir aus (4.2.2) die sogenannte *Lindley-Gleichung*

$$W \stackrel{d}{=} (W + X)^+.$$

Unsere Ausgangsgleichung erhält diese Gestalt, falls $Q = 1$ f.s. gilt und wir im Fall $R \geq 0$ und $M \geq 0$ f.s. $W = \log R$, $X = \log M$ sowie $X_k = \log M_k$ für $k \in \mathbb{N}$ setzen, da durch Logarithmieren von (4.2.1)

$$W \stackrel{d}{=} \max(0, W + X) = (W + X)^+$$

folgt. Definieren wir

$$\Psi_n(t) := \max(0, X_n + t), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

erhalten wir mit Z_n gemäß (2.1.2) und daher wegen $Z_n(t) = \max(\max_{0\leq k\leq n-1} S_k, S_n + t)$ und $P(X_n = -\infty) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(t) = \max_{k\geq 0} S_k$$

[1]Bei dieser auf *Kendall* zurückgehenden Notation ist die erste Komponente für den Verteilungstyp der Zwischenankunftszeiten, die zweite für den der Bedienungszeiten und die dritte für die Anzahl der Server reserviert. "G" steht dabei für "general".

und somit nach dem Prinzip von Letac ebenfalls

$$W \sim \max_{k \geq 0} S_k.$$

Im Modell des G/G/1-Bedienungssystems können wir uns neben der reinen Wartezeit des n-ten Kunden in der Schlange außerdem für die gesamte Zeit interessieren, die der Kunde im System verbringt, d.h. für

$$G_n = B_n + W_n = B_n + (W_{n-1} + B_{n-1} - A_n)^+ = B_n + (G_{n-1} - A_n)^+. \tag{4.2.3}$$

Bezeichnen A, B unabhängige Kopien von A_1, B_1, so folgt aufgrund der Unabhängigkeit von W_n und B_n mittels Satz 36.11 in [AWT]

$$G_n = W_n + B_n \xrightarrow{d} \max_{k \geq 0} S_k + B$$

und somit die Stationarität von $(G_n)_{n \geq 0}$. Wählen wir eine Zufallsgröße G mit $G \sim \max_{k \geq 0} S_k + B$, erhalten wir anstelle von (4.2.3)

$$G \stackrel{d}{=} B + (G - A)^+.$$

Mit (4.2.1) erreichen wir diese Form der Gleichung sowie die Verteilung von G, indem wir $M = \mathrm{e}^{B-A}$, $Q = \mathrm{e}^B$ sowie im Fall $R \geq 0$ f.s. $G = \log R$ setzen, (4.2.1) logarithmieren und das Prinzip von Letac anwenden. Wir können daher unsere folgenden Ergebnisse über die Flanken der Verteilung von R durch entsprechendes Umformen von (4.2.1) auf die stationäre Verteilung der Wartezeit und die der gesamten Aufenthaltszeit im G/G/1-Bedienungssystem übertragen. In Satz 4.2.2 bestätigen wir außerdem den in [Fel], Abschnitt $\overline{\underline{\text{XII}}}$.5, nachgewiesenen exponentiellen Abfall der rechten Flanke der Verteilung von W und G. Zunächst müssen wir allerdings sicherstellen, daß (4.2.1) eine eindeutige Lösung besitzt. Wir erinnern dazu an die Definition von $\Pi_n = \prod_{i=1}^n M_i$ für unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen $M_1, M_2, \ldots$ und alle $n \in \mathbb{N}$ $(\Pi_0 = 1)$ aus Kapitel 2 bzw. Definition 4.1.2.

Proposition 4.2.1. *Seien $(M, Q), (M_n, Q_n)$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige identisch verteilte Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega \times \Omega, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, P \otimes P)$ mit $M \geq 0$ f.s.,*

$$E \log M \in [-\infty, 0) \quad \textit{und} \quad E \log(1 \vee Q) < \infty.$$

Dann folgt

$$\max_{k \geq 1} Q_k \Pi_{k-1} < \infty \qquad \textit{f.s.},$$

und (4.2.1) besitzt $(\max_{k \geq 1} Q_k \Pi_{k-1})^+$ als eindeutige Lösung.

Beweis. Wir setzen

$$\Psi_n(t) := \max(Q_n, M_n t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und erhalten mit Z_n gemäß (2.1.2)

$$\begin{aligned} Z_n(t) &= Z_{n-1}(t) \circ \Psi_n(t) \\ &= \max(\Psi_n(t)\Pi_{n-1}, \max_{1 \leq k \leq n-1} Q_k \Pi_{k-1}) \\ &= \max(\max(Q_n, M_n t)\Pi_{n-1}, \max_{1 \leq k \leq n-1} Q_k \Pi_{k-1}) \\ &= \max(t\Pi_n, \max_{1 \leq k \leq n} Q_k \Pi_{k-1}). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung an Q ist

$$\sum_{n\geq 1} P(\log(1\vee Q_n) > \frac{cn}{2}) \leq \int_0^\infty P(\log(1\vee Q_n) > t)dt = E\log(1\vee Q_n) < \infty$$

und daher mit dem Lemma von Borel-Cantelli

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{\log(1\vee Q_n) > \frac{cn}{2}\}) = 0,$$

d.h. es gilt $Q_n \leq \mathrm{e}^{cn/2}$ f.s. für genügend große $n \in \mathbb{N}$. Sei weiter $c > 0$ so gewählt, daß

$$E\log M < -c \;\Leftrightarrow\; EM < \mathrm{e}^{-c}.$$

Da die Zufallsgrößen $(M_n)_{n\geq 0}$ unabhängig und fast sicher positiv sind, folgt in ähnlicher Weise wegen

$$P(\Pi_n > \mathrm{e}^{-cn}) \leq \sum_{k\geq 0} P(\Pi_n > \mathrm{e}^{-ck}) \leq E\Pi_n < \mathrm{e}^{-cn}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n\geq 1} P(\Pi_n > \mathrm{e}^{-cn}) < \sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-cn} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-c}} < \infty$$

und daher

$$\Pi_n \leq \mathrm{e}^{-cn} \qquad \text{f.s.},$$

falls n genügend groß ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und seien $N_0, N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\mathrm{e}^{c(\frac{1-k}{2})} < \varepsilon$ für $k \geq N_0$ sowie

$$Q_k \leq \mathrm{e}^{ck/2}, \qquad k \geq N_1, \qquad \text{und} \qquad \Pi_k \leq \mathrm{e}^{-ck}, \qquad k \geq N_2,$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt. Definieren wir $N := \max\{N_0, N_1, N_2\}$, so folgt für alle $k \geq N+1$

$$Q_k\Pi_{k-1} \leq \mathrm{e}^{c(1-\frac{k}{2})} \leq \mathrm{e}^{c(1-\frac{N+1}{2})} < \varepsilon \qquad \text{f.s.}$$

und daher

$$\max_{k\geq 1} Q_k\Pi_{k-1} = \max_{1\leq k\leq N} Q_k\Pi_{k-1} \;\vee\; \max_{k\geq N+1} Q_k\Pi_{k-1} < \infty \quad \text{f.s.}$$

In Verbindung mit

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \Pi_n \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-cn} = 0 \qquad \text{f.s.}$$

folgt daraus wegen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} Z_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \max(t\Pi_n, \max_{1\leq k\leq n} Q_k\Pi_{k-1}) \\ &= \max(\lim_{n\to\infty} t\Pi_n, \lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq n} Q_k\Pi_{k-1}) \\ &= (\max_{k\geq 1} Q_k\Pi_{k-1})^+\end{aligned}$$

die Behauptung mit dem Prinzip von Letac. □

Satz 4.2.2. *Seien M, Q Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $M \geq 0$ f.s. M erfülle die Bedingungen von Lemma 2.1.2, $P^{\log M|M\neq 0}$ sei nichtarithmetisch, und es gelte $E(Q^+)^\kappa < \infty$. Dann existiert eine eindeutige Lösung R von (4.2.1), und es gilt*

$$P(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa}, \qquad t \to \infty,$$

mit

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} E(((Q \vee (MR))^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa)$$

sowie außerdem

$$C_+ > 0 \;\Leftrightarrow\; P(Q > 0) > 0.$$

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (4.2.1) folgen mit Proposition 4.2.1. Wegen

$$E|((Q \vee MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa| = E\mathbf{1}_{\{MR<Q,Q>0\}}(Q^\kappa - ((MR)^+)^\kappa) \leq E\mathbf{1}_{\{Q>0\}}Q^\kappa < \infty$$

liefert Korollar 2.2.2 (2.2.3) und die Formel für C_+. Zum Nachweis der Äquivalenz nehmen wir zunächst $C_+ > 0$ an. Ist $Q \leq 0$ f.s., folgt mit

$$\kappa m C_+ = E((Q^+ \vee (MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa) = E(((MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa) = 0$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung. Gilt $P(Q > 0) > 0$, wählen wir ein $c > 0$ so, daß $P(Q > c) > 0$ ist. Wir setzen außerdem

$$N_t := \min\{k \in \mathbb{N} : \Pi_{k-1} > \frac{t}{c}\}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

und zeigen zunächst

$$\sum_{n \geq 1} P(N_t = n, Q_n > c) \leq P(\max_{k \in \mathbb{N}} Q_k \Pi_{k-1} > t) \tag{4.2.4}$$

und

$$\sum_{n \geq 1} P(N_t = n) = P(\max_{k \in \mathbb{N}} \Pi_{k-1} > \frac{t}{c}). \tag{4.2.5}$$

Für (4.2.4) betrachten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n \geq 1} P(N_t = n, Q_n > c) &= \sum_{n \geq 1} P(\Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n-2} \leq \frac{t}{c}, \Pi_{n-1} > \frac{t}{c}, Q_n > c) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} P(\Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n-2} \leq \frac{t}{c}, Q_n \Pi_{n-1} > t)\end{aligned}$$

und nehmen für den nichttrivialen Fall $\sum_{n \geq 1} P(N_t = n, Q_n > c) > 0$ an. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\{\Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n_0-2} \leq \frac{t}{c}, \Pi_{n_0-1} > \frac{t}{c}, Q_{n_0} > c\}$$

positive Wahrscheinlichkeit besitzt, und kein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ erfüllt diese Beziehung, da sie bereits für n_0 gilt, sowie kein $n \in \{1, \ldots, n_0 - 1\}$, da sie sonst nicht für n_0 gelten könnte. Wegen

$$Q_{n_0} \Pi_{n_0-1} \leq \max_{k \geq n_0} Q_k \Pi_{k-1} = \max_{k \geq 1} Q_k \Pi_{k-1}$$

und daher

$$\{Q_{n_0} \Pi_{n_0-1} > t\} \subset \{\max_{k \geq 1} Q_k \Pi_{k-1} > t\}$$

folgt daraus (4.2.4) mittels

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} P(N_t = n, Q_n > c) &= P(\Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n_0-2} \leq \frac{t}{c}, \Pi_{n_0-1} > \frac{t}{c}, Q_{n_0} > c) \\ &\leq P(Q_{n_0}\Pi_{n_0-1} > t) \\ &\leq P(\max_{k\in\mathbb{N}} Q_k \Pi_{k-1} > t).\end{aligned}$$

Gilt in (4.2.5) $\sum_{n\geq 1} P(N_t = n) = 0$ oder $P(\max_{k\in\mathbb{N}} \Pi_{k-1} > \frac{t}{c}) = 0$, folgt die Behauptung direkt, seien daher $\sum_{n\geq 1} P(N_t = n) > 0$ und $P(\max_{k\in\mathbb{N}} \Pi_{k-1} > \frac{t}{c}) > 0$. Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $P(\Pi_{l-1} > \frac{t}{c}) > 0$, und wegen $\sum_{n\geq 1} P(N_t = n) > 0$ existiert ein $n_0 \leq l$, so daß

$$\{\Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n_0-2} \leq \frac{t}{c}, \Pi_{n_0-1} > \frac{t}{c}\}$$

positive Wahrscheinlichkeit besitzt. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist dann

$$\{\max_{k\in\mathbb{N}} \Pi_{k-1} > \frac{t}{c}\} \subset \{\exists n_0 \leq l : \Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n_0-2} \leq \frac{t}{c}, \Pi_{n_0-1} > \frac{t}{c}\}$$

und daher

$$P(\max_{k\in\mathbb{N}} \Pi_{k-1} > \frac{t}{c}) \leq P(\Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n_0-2} \leq \frac{t}{c}, \Pi_{n_0-1} > \frac{t}{c}) = \sum_{n\geq 1} P(N_t = n).$$

Die umgekehrte Beziehung erhalten wir durch eine zum Nachweis von (4.2.4) analoge Rechnung und damit insgesamt (4.2.5). Aufgrund der Unabhängigkeit von (M_n, Q_n) und $(M_k, Q_k), 1 \leq k \leq n-1$, folgt dann

$$\begin{aligned}P(R > t) &= P(\max_{k\in\mathbb{N}} Q_k \Pi_{k-1} > t) \\ &\geq \sum_{n\geq 1} P(N_t = n, Q_n > c) \\ &= \sum_{n\geq 1} P(\Pi_0 \leq \frac{t}{c}, \ldots, \Pi_{n-2} \leq \frac{t}{c}, \Pi_{n-1} > \frac{t}{c}, Q_n > c) \\ &= P(Q_n > c) \sum_{n\geq 1} P(N_t = n) \\ &= P(Q > c) P(\max_{k\in\mathbb{N}} \Pi_{k-1} > \frac{t}{c}).\end{aligned}$$

Da $P(Q > 0) > 0$ ist, genügt es, für ein $\delta > 0$

$$P(\max_{k\in\mathbb{N}_0} \Pi_k > \mathrm{e}^t) \geq \delta \mathrm{e}^{-\kappa t} \tag{4.2.6}$$

für $t \to \infty$ zu zeigen. Wegen $\mathrm{e}^{S_n} = \Pi_n$ und daher

$$P(\max_{k\in\mathbb{N}_0} \Pi_k > \mathrm{e}^t) = P(\max_{k\in\mathbb{N}_0} S_k > t)$$

folgt dies jedoch analog zum letzten Teil des Beweises von Satz 4.1.1. Mit einer Substitution von t durch $\log \frac{t}{c}$ in (4.2.6) gilt daher wegen

$$t^\kappa P(R > t) \geq \delta c^\kappa P(Q > c) > 0, \qquad t \to \infty,$$

die Behauptung. □

Mit Hilfe von Kapitel 3 erhalten wir die Konvergenzrate der Flanken der Verteilung von R.

Satz 4.2.3. *Seien R, M, Q Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $M \geq 0$ f.s. M erfülle (2.1.5), (3.2.1) sowie (3.2.2), R löse (4.2.1), und es gelte $E(Q^+)^{\kappa+\beta} < \infty$. Ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß η auf $\mathbb{R}$ definiert durch*

$$\eta(dx) := e^{\kappa x} P(\log M \in dx),$$

so gelten (3.2.4) und (3.2.6).

Im G/G/1-Bedienungssystem bedeutet dies für die stationäre Verteilung der Wartezeit des Kunden in der Schlange

$$\mathrm{e}^{\kappa t} P(W > t) = C_+ - I(\mathrm{e}^t) + O(\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}), \qquad t \to \infty,$$

mit

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} Re \left(\int_{\mathcal{C}} t^{-i\theta} \frac{\tilde{g}_1(\theta)}{1 - \Phi_\eta(\theta)} d\theta \right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

aus (3.2.4). Wir verfeinern somit die in [Bor], Abschnitt 22.3, für ein nicht näher bestimmtes $\gamma \in \mathbb{R}$ bereits bekannte Asymptotik

$$\mathrm{e}^{\kappa t} P(W > t) = C_+ + O(\mathrm{e}^{-\gamma t}), \qquad t \to \infty,$$

der Flanken der Verteilung von W.

Beweis von Satz 4.2.3. Analog zum Beweis von Satz 4.2.2 ist (3.2.7) wegen

$$E|((Q \vee MR)^+)^{\kappa+\beta} - ((MR)^+)^{\kappa+\beta}| \leq E\mathbf{1}_{\{Q>0\}} Q^{\kappa+\beta}$$

erfüllt. (3.2.8) erhalten wir mit $(-R, M, -Q)$ anstelle von (R, M, Q) und (3.2.7). Mit Satz 3.2.1 (c) folgt dann die Behauptung. □

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß wir unser zugrundeliegendes Modell erweitern können, indem wir uns nicht allein für die Verteilung des Maximums von Q und MR interessieren, sondern bezüglich des betraglichen Maximums von Q und MR unterscheiden. Definieren wir für $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \curlyvee b := \begin{cases} a, & \text{falls } |a| > |b| \\ b, & \text{sonst} \end{cases},$$

so lautet unsere Gleichung nun

$$(4.2.1') \qquad R \overset{d}{=} Q \curlyvee MR, \qquad R \text{ unabhängig von } (M, Q).$$

Proposition 4.2.4. *Seien M, Q Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Genügt M den Bedingungen von Lemma 2.1.2, ist $P^{\log|M||M\neq 0}$ nichtarithmetisch und $E|Q|^\kappa < \infty$, so existiert eine eindeutige Lösung R von (4.2.1′), deren Verteilung sowohl (2.2.3) als auch (2.2.4) erfüllt. Ist $M \geq 0$ f.s., gilt*

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} E(((Q \curlyvee MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa),$$

$$C_- = \frac{1}{\kappa m} E(((Q \curlyvee MR)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa),$$

und im Fall $P(M < 0) > 0$

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2\kappa m} E((|Q|^\kappa - |MR|^\kappa)^+).$$

Weiter gilt

$$C_+ + C_- > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(Q \neq 0) > 0.$$

Beweis. Seien (M_n, Q_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Kopien von (M, Q), $\Psi_n(t) := Q_n \curlyvee M_n t$ und Z_n gemäß (2.1.2). Aufgrund der Voraussetzungen ist $E \log |M| \in [-\infty, 0)$ und $E \log^+ |Q| < \infty$. Indem wir daher den Beweis von Proposition 4.2.1 mit $|M|$, $|\Pi_n|$ und $|Q|$ anstelle von M, Π_n und Q wiederholen, erhalten wir

$$\curlyvee_{k\geq 1} Q_k \Pi_{k-1} < \infty$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(t) = \lim_{n\to\infty} (t\Pi_n \curlyvee \curlyvee_{1\leq k\leq n} Q_k \Pi_{k-1}) = \curlyvee_{k\geq 1} Q_k \Pi_{k-1}$$

in Verbindung mit

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\Pi_n| \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-cn} = 0.$$

$\curlyvee_{k\geq 1} Q_k \Pi_{k-1}$ ist folglich die eindeutige Lösung von (4.2.1′). Wir zeigen nun (2.2.9) und (2.2.10) mit $\Psi(R) = Q \curlyvee MR$. Im Fall $Q > |MR|$ ist $(Q \curlyvee MR)^+ = Q$, und für $Q < -|MR|$ erhalten wir $(Q \curlyvee MR)^+ = Q^+ = 0$ sowie $(MR)^+ \leq (-Q)^+$. Es folgt

$$\begin{aligned}
E|((Q \curlyvee MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa| &= E\mathbf{1}_{\{Q>|MR|\}}(Q^\kappa - ((MR)^+)^\kappa) + E\mathbf{1}_{\{Q<-|MR|\}}((MR)^+)^\kappa \\
&\leq E(Q^+)^\kappa + E\mathbf{1}_{\{-Q\geq 0\}}(-Q)^\kappa \\
&= E|Q|^\kappa.
\end{aligned}$$

Ebenfalls gilt

$$\begin{aligned}
E|((Q \curlyvee MR)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa| &= E\mathbf{1}_{\{Q>|MR|\}}((MR)^-)^\kappa + E\mathbf{1}_{\{Q<-|MR|\}}((Q^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa) \\
&\leq E\mathbf{1}_{\{Q>0\}}Q^\kappa + E\mathbf{1}_{\{-Q>0\}}(Q^-)^\kappa \\
&= E|Q|^\kappa
\end{aligned}$$

wegen $(Q \curlyvee MR)^- = Q^- = 0$ für $Q > |MR|$ und $(Q \curlyvee MR)^- = Q^-$ für $Q < -|MR|$ (beachte $E|((Q \curlyvee MR)^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa| = E|((Q \curlyvee MR)^-)^\kappa - ((MR)^-)^\kappa| = 0$ für $|Q| < |MR|$). Korollar 2.2.2 liefert die Formeln für C_+ und C_-, wobei wir im Fall $P(M < 0) > 0$

$$\begin{aligned}
C_+ = C_- &= \frac{1}{2\kappa m} E(|Q \curlyvee MR|^\kappa - |MR|^\kappa) \\
&= \frac{1}{2\kappa m} E((|Q|^\kappa - |MR|^\kappa)^+)
\end{aligned}$$

erhalten. Nehmen wir für den Nachweis der Äquivalenz zunächst $C_+ + C_- > 0$ an, so folgt aus $P(Q \neq 0) = 0$ mittels

$$\kappa m(C_+ + C_-) = E((|Q|^\kappa - |MR|^\kappa)^+) = 0$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung. Für die umgekehrte Richtung wählen wie ein $c > 0$ so, daß $P(|Q| > c) > 0$ ist, und erhalten analog zum Ende des Beweises von Satz 4.1.1 für ein hier nicht näher bestimmtes $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
P(|R| > t) &= P(\exists k \in \mathbb{N} : |Q_k \Pi_{k-1}| > t) \\
&\geq P(|Q| > c) P(\exists k \in \mathbb{N} : |\Pi_{k-1}| > \frac{t}{c}) \\
&\sim P(|Q| > c)\delta t^{-\kappa}
\end{aligned}$$

für $t \to \infty$ und somit insgesamt die Behauptung. $\square$

Proposition 4.2.5. *Seien R, M, Q Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. M erfülle (2.1.5) für ein $\kappa > 0$, (3.2.1) für ein $\beta > 0$ sowie (3.2.2), für Q gelte $E|Q|^{\kappa+\beta} < \infty$, und R löse (4.2.1′). Ist $M \geq 0$ f.s., sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß η auf $\mathbb{R}$ definiert durch*

$$\eta(dx) := e^{\kappa x} P(\log M \in dx).$$

Dann folgen sowohl (3.2.4) als auch (3.2.6). Für $P(M < 0) > 0$ sei η durch (3.3.1) definiert und erfülle außerdem (3.3.2). In diesem Fall gilt (3.3.3), und $t^\kappa P(R < -t)$ erfüllt dieselbe Formel.

Der Beweis verläuft analog zu den Beweisen von Satz 4.1.12 und Satz 4.2.3 und wird daher von uns hier nicht geführt.

4.3 $R \overset{d}{=} Q + M\max(L,R)$

Im Gegensatz zu den ersten beiden Gleichungen, die jeweils nur von zwei Zufallsgrößen abhängen, beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit

$$R \overset{d}{=} Q + M\max(L,R), \qquad R \text{ unabhängig von } (M,Q,L), \tag{4.3.1}$$

wobei $M \geq 0$ f.s. gelte. Diese stochastische Fixpunktgleichung finden wir bereits im Modell E von [Let], allerdings ohne die Einschränkung auf eine fast sicher positive Zufallsgröße M. Wir benötigen diese Einschränkung jedoch, damit (4.3.4) gültig bleibt.
Bevor wir klären, unter welchen Voraussetzungen eine eindeutige Verteilung als Lösung von (4.3.1) existiert, um dann in diesem Fall das asymptotische Verhalten sowie die Konvergenzrate ihrer Flanken anzugeben, möchten wir auf zwei Spezialfälle aufmerksam machen. Ist in (4.3.1) $Q = 0$ f.s., erhalten wir eine Verbindung zur Gleichung (4.2.1) aus dem letzten Abschnitt, denn wählen wir dort $Q = ML$, folgt

$$R \overset{d}{=} \max(ML, MR) = M\max(L,R).$$

Gilt außerdem $L > 0$ f.s. und setzen wir im Fall $R \geq 0$ f.s. $S = \log R$, $B = \log M$ und $A = \log L$, gelangen wir durch Logarithmieren von (4.3.1) zur Gleichung

$$S \overset{d}{=} B + \max(A,S). \tag{4.3.2}$$

Sind A_n, B_n, S_n (S_0 gegeben und unabhängig von $(S_n)_{n\geq 1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängige Kopien von A, B, S und setzen wir

$$\Psi_n(t) := B_n + \max(A_n, t), \qquad t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

so gilt mit Z_n gemäß (2.1.2) wegen

$$\begin{aligned}
Z_n(t) &= Z_{n-1} \circ \Psi_n(t) \\
&= \max\Big(\max_{1\leq k\leq n-1} \sum_{i=1}^{k} B_i + A_k, \sum_{i=1}^{n-1} B_i + \Psi_n(t)\Big) \\
&= \max\Big(\max_{1\leq k\leq n-1} \sum_{i=1}^{k} B_i + A_k, \sum_{i=1}^{n-1} B_i + B_n + \max(A_n, t)\Big) \\
&= \max\Big(\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{k} B_i + A_k, \sum_{i=1}^{n} B_i + t\Big)
\end{aligned}$$

und $P(B = -\infty) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(t) = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} (\sum_{i=1}^{k} B_i + A_k) = \sup_{k\in\mathbb{N}} (\sum_{i=1}^{k} B_i + A_k).$$

Die Zufallsgröße S besitzt demnach die Verteilung von $\sup_{k\in\mathbb{N}}(\sum_{i=1}^k B_i + A_k)$.
Helland und Nilsen (vgl. [HeN]) haben eine zu (4.3.2) äquivalente Gleichung untersucht, die bereits von Helland (vgl. [Hel]) und Gade (vgl. [Gad]) dazu verwendet wurde, um den Wasseraustausch zwischen Küste und Fjorden zu beschreiben. Ihre Gleichung

$$S_n = \max(S_{n-1} - D_n, U_n), \qquad n \in \mathbb{N},$$

mit unabhängigen Folgen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilter Zufallsgrößen erhalten wir aus unserem Modell wegen

$$\max(S_{n-1} - D_n, U_n) = \max(S_{n-1}, U_n + D_n) - D_n$$

mit $A_n := U_n + D_n$ und $B_n := -D_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In der Gleichung beschreibt U_n die Dichte des Küstenwassers und S_n die des Fjordwassers im Jahr n. Das frische Wasser, das in der Zeitspanne von Jahr $n-1$ zu Jahr n aus dem Meer in den Fjord geströmt ist, verringert die Dichte des ruhenden Wassers um die Größe D_n. Ist das Fjordwasser immer noch schwerer als das Küstenwasser, geschieht nichts, andernfalls wird das gesamte ruhende Wasser durch Wasser mit der Dichte U_n ausgetauscht.
Die Autoren sind sich dessen bewußt, daß ihr Modell einen idealisierten Vorgang in der Natur beschreibt, da sich beispielsweise der Wasseraustausch innerhalb von unterschiedlich langen Zeiträumen - manchmal in nur wenigen Wochen - und dann auch nicht immer nahezu vollständig vollziehen kann. Gade und Helland betrachten außerdem nur den Fall, daß D_1 f.s. konstant ist. Dennoch ist ihr allgemeines Modell immer dann von Interesse, wenn ehemals maximale Werte mit neuen Werten verglichen werden müssen. Ein Standardbeispiel hierfür ist der Nutzen industrieller Produkte, die sich gerade auf dem Markt befinden, gemessen an ihrem Preis und ihrer Haltbarkeit. Bezeichnet S_{n-1} den Nutzen eines Produktes zum Zeitpunkt $n-1$ und U_n den eines neuen Produktes, das den Markt zum Zeitpunkt n betritt, so findet immer dann ein Produktaustausch statt, wenn $U_n > S_{n-1} - D_n$ ist, wobei D_n die Abnutzung von S_{n-1} im Zeitintervall von $n-1$ bis n beschreibt.
Bereits an diesen Beispielen wird deutlich, wie eng unsere Ausgangsgleichung (4.3.1) mit vielen bereits eingehender untersuchten Modellen verbunden ist. Die dem Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (4.3.1) folgenden Ergebnisse über die Flanken der Verteilung von R können wir daher durch Umformen von (4.3.1) auf alle passenden Gleichungen übertragen und innerhalb dieser Modelle verwenden.

Proposition 4.3.1. *Seien M, Q, L Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ist $M \geq 0$ f.s. und*

$$E \log M \in [-\infty, 0), \quad E\log(1 \vee Q) < \infty, \quad E\log(1 \vee L) < \infty,$$

so ist

$$\sup(\sum_{k\ge1} Q_k \Pi_{k-1}, \sup_{m\in\mathbb{N}}(\sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m)) < \infty \quad \textit{f.s.}$$

und die eindeutige Lösung von (4.3.1).

Beweis. Wir setzen

$$\Psi(t) := Q + M\max(L,t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.3.3}$$

und $\Psi_n(t) := Q_n + M_n \max(L_n, t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei (M, Q, L) und (M_n, Q_n, L_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängig identisch verteilt seien. Mit Hilfe einer Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit Z_n gemäß (2.1.2)

$$Z_n(t) = \max(\sum_{k=1}^{n} Q_k\Pi_{k-1} + t\Pi_n, \max_{1\le m\le n} \sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m), \tag{4.3.4}$$

denn für $n = 1$ gilt wegen $\Pi_0 = 1$

$$\max(Q_1 + t\Pi_1, Q_1 + L_1\Pi_1) = Q_1 + M_1\max(L_1, t) = \Psi_1(t)$$

und daher für ein beliebiges $n \ge 2$

$$\begin{aligned}
Z_n(t) &= Z_{n-1} \circ \Psi_n(t) \\
&= \max(\sum_{k=1}^{n-1} Q_k\Pi_{k-1} + \Psi_n(t)\Pi_{n-1}, \max_{1\le m\le n-1} \sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m) \\
&= \max(\sum_{k=1}^{n} Q_k\Pi_{k-1} + \max(L_n\Pi_n, t\Pi_n), \max_{1\le m\le n-1} \sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m) \\
&= \max(\sum_{k=1}^{n} Q_k\Pi_{k-1} + t\Pi_n, \max_{1\le m\le n} \sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m).
\end{aligned}$$

Wir wählen ein $c > 0$ so, daß $E\log M < -c$ gilt, und erhalten mit derselben Rechnung wie in Proposition 4.2.1

$$M_n \le \mathrm{e}^{-cn} \quad \text{f.s.}, \quad Q_n \le \mathrm{e}^{cn/2} \quad \text{f.s.}, \quad L_n \le \mathrm{e}^{cn/2} \quad \text{f.s.}$$

für genügend große $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und seien $N_0, N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}cn} < \varepsilon$ für $n \ge N_0$ und

$$Q_n \le \mathrm{e}^{cn/2}, \quad n \ge N_1, \qquad L_n \le \mathrm{e}^{cn/2}, \quad n \ge N_2, \qquad \Pi_n \le \mathrm{e}^{-cn}, \quad n \ge N_3,$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt. Setzen wir $N := \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$ und $\varepsilon' = \mathrm{e}^c \sup_{m\ge N+1} \sum_{k=N+1}^{m} (\mathrm{e}^{-c/2})^k + \varepsilon$, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k\ge 1} Q_k\Pi_{k-1} &= \sum_{k=1}^{N} Q_k\Pi_{k-1} + \sum_{k\ge N+1} Q_k\Pi_{k-1} \\
&\le \sum_{k=1}^{N} Q_k\Pi_{k-1} + \mathrm{e}^c \sum_{k\ge N+1} (\mathrm{e}^{-\frac{c}{2}})^k \\
&< \sum_{k=1}^{N} Q_k\Pi_{k-1} + \frac{\mathrm{e}^c}{1 - \mathrm{e}^{-c/2}} \qquad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sup_{m\in\mathbb{N}}(\sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m) &= \sup(\max_{1\le m\le N} \sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m, \sup_{m\ge N+1}(\sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m)) \\
&< \sup(\max_{1\le m\le N} \sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m, \sum_{k=1}^{N} Q_k\Pi_{k-1} + \varepsilon') \quad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

In Verbindung mit $P(\lim_{n\to\infty} \Pi_n = 0) = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} Z_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \sup\Big(\sum_{k=1}^{n} Q_k\Pi_{k-1} + t\Pi_n, \max_{1\le m\le n}\Big(\sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m\Big)\Big)\\ &= \sup\Big(\sum_{k\ge 1} Q_k\Pi_{k-1}, \sup_{m\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m\Big)\Big) \quad < \infty \qquad \text{f.s.}\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Satz 4.3.2. *Seien M, Q, L Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $M \ge 0$ f.s. M genüge den Bedingungen von Lemma 2.1.2, und $P^{\log M|M\neq 0}$ sei nicht-arithmetisch. Sind*

$$E(L^+)^\kappa < \infty, \qquad E|Q|^\kappa < \infty, \qquad E(ML^+)^\kappa < \infty, \tag{4.3.5}$$

so besitzt (4.3.1) eine eindeutige Lösung R, und es gilt

$$P(R > t) \sim C_+ t^{-\kappa}, \qquad t \to \infty,$$

mit

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m} E(((Q + M\max(L,R))^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa).$$

Existiert außerdem eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$P(Q - c(1-M) \ge 0) = 1$$

und

$$P(Q - c(1-M) > 0) + P(M(L-c) > 0) > 0,$$

so ist $C_+ > 0$.

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (4.3.1) folgen mit Proposition 4.3.1. (2.2.3) und die Formel für C_+ erhalten wir mit Korollar 2.2.2, indem wir mit derselben Methode wie im Beweis von Satz 4.1.1

$$E|((Q + M\max(L,R))^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa| < \infty$$

zeigen. Wir betrachten dazu zunächst $E(R^+)^p$ für ein beliebiges $p \in (0, \kappa)$. Aufgrund der Subadditivität des $^+$-Operators folgt mit Hilfe der $\|\cdot\|_p$-Norm gemäß (4.1.13)

$$\begin{aligned}\|R^+\|_p &= \|(Q + M\max(L,R))^+\|_p\\ &\le \|Q^+\|_p + \|ML^+\|_p + \|M\|_p\|R^+\|_p\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \|R^+\|_p \le \tfrac{\|Q^+\|_p + \|ML^+\|_p}{1 - \|M\|_p}.$$

Nach Voraussetzung und Wahl von p ist dieser letzte Ausdruck endlich, und wir erhalten für alle $0 < p < \kappa$

$$E(R^+)^p < \infty. \tag{4.3.6}$$

Um den Betrag der linken Seite von (2.2.9) mit $\Psi(R) = Q + M\max(L,R)$ aufzulösen, führen wir wieder eine Fallunterscheidung nach Q und $M(R \vee L)$ durch.
Für $-Q < M(R \vee L) \leq 0$ gilt $(Q + M(R \vee L))^+ = Q + M(R \vee L)$ und $(MR)^+ = 0$, für $0 < M(R \vee L) \leq -Q$ erhalten wir $(Q + M(R \vee L))^+ = 0$ und $(MR)^+ = (MR)^+$. Aus $Q > 0$ und $M(R \vee L) > 0$ folgt $(Q + M(R \vee L))^+ = Q + M(R \vee L)$ sowie $(MR)^+ = (MR)^+ \leq Q + M(R \vee L)$, während im Fall $Q < 0$ und $M(R \vee L) < 0$ $(Q + M(R \vee L))^+ = (MR)^+ = 0$ gilt. Für $0 < -Q < M(R \vee L)$ erhalten wir sowohl $(MR)^+ = (MR)^+$ als auch $(Q + M(R \vee L))^+ = Q + M(R \vee L)$, für $M(R \vee L) < -Q \leq 0$ dagegen $(Q + M(R \vee L))^+ = (MR)^+ = 0$ und damit insgesamt

$$E|((Q + M\max(L,R))^+)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa| = \kappa \sum_{i=1}^{4} I_i,$$

wobei wir

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{-Q<M(R\vee L)\leq 0\}}(Q + M(R \vee L))^\kappa,\\
I_2 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<M(R\vee L)\leq -Q\}}((MR)^+)^\kappa,\\
I_3 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0,M(R\vee L)>0\}}((Q + M(R \vee L))^\kappa - ((MR)^+)^\kappa),\\
I_4 &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<M(R\vee L)\}}|(Q + M(R \vee L))^\kappa - ((MR)^+)^\kappa|
\end{aligned}$$

setzen. I_1 und I_2 sind beide nach Voraussetzung an Q endlich, denn wir erhalten $I_1 \leq \frac{1}{\kappa}E(Q^+)^\kappa$ für $0 < Q + M(R \vee L) \leq Q^+$, und wegen $(MR)^+ \leq M(R \vee L) \leq -Q$ gilt $I_2 \leq \frac{1}{\kappa}E\mathbf{1}_{\{0<-Q\}}(-Q)^\kappa = \frac{1}{\kappa}E(Q^-)^\kappa$. Um die Endlichkeit von I_3 und I_4 nachzuweisen, sind weitere Fallunterscheidungen nach $R \vee L$ und κ notwendig. Für $R > L$ und $R > 0$ gilt

$$(MR)^+ = MR \leq Q + MR = Q + M(R \vee L),$$

für $L > R$ und $L > 0$

$$(MR)^+ \leq Q + ML = Q + M(R \vee L),$$

und wir schreiben I_3 als Summe von

$$I_{31} := \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0,R>0,R>L\}}((Q + MR)^\kappa - (MR)^\kappa)$$

und

$$I_{32} := \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0,L>0,R\leq L\}}((Q + ML)^\kappa - ((MR)^+)^\kappa).$$

I_{31} behandeln wir analog zu I_3 im Beweis von Satz 4.1.1. Für $0 < \kappa \leq 1$ folgt mit (4.1.11)

$$I_{31} \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0,R>0,R>L\}}Q^\kappa \leq \frac{1}{\kappa}E(Q^+)^\kappa < \infty,$$

und für $\kappa > 1$ erhalten wir mit (4.1.10), (4.1.11), (4.3.6) und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
I_{31} &\leq E\mathbf{1}_{\{Q>0,R>0,R>L\}}Q(Q + MR)^{\kappa-1}\\
&\leq c_{\kappa-1}E\mathbf{1}_{\{Q>0,R>0,R>L\}}Q(Q^{\kappa-1} + (MR)^{\kappa-1})\\
&\leq c_{\kappa-1}E(Q^+)^\kappa + c_{\kappa-1}E(Q^+M^{\kappa-1})E(R^+)^{\kappa-1}\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Wegen $0 \leq (MR)^+ \leq Q + ML$ gilt außerdem in Verbindung mit (4.1.10)

$$I_{32} \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{Q>0,L>0\}}(Q+ML)^\kappa \leq \frac{1}{\kappa} c_\kappa (E(Q^+)^\kappa + E(ML^+)^\kappa) < \infty$$

und damit $I_3 < \infty$. Etwas aufwendiger ist die Abschätzung von I_4. Ist $0 < -Q < MR$ und $R \geq L$, gilt

$$Q + M(R \vee L) = Q + MR \leq MR = (MR)^+.$$

Für $0 < -Q < ML$ und $R \leq 0$ folgt

$$0 = (MR)^+ < Q + ML = Q + M(R \vee L),$$

für $0 < -Q < ML$, $0 < R < L$ und $MR < Q + ML$ dagegen

$$(MR)^+ = MR < Q + ML = Q + M(R \vee L)$$

und schließlich für $0 < -Q < ML$, $0 < R < L$ und $MR > Q + ML$

$$Q + M(R \vee L) = Q + ML < MR = (MR)^+.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}
I_{41} &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR, R\geq L\}}((MR)^\kappa - (Q+MR)^\kappa),\\
I_{42} &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<ML, R\leq 0\}}(Q+ML)^\kappa,\\
I_{43} &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<ML, 0<R<L, MR<Q+ML\}}((Q+ML)^\kappa - (MR)^\kappa),\\
I_{44} &:= \tfrac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{0<-Q<ML, 0<R<L, MR>Q+ML\}}((MR)^\kappa - (Q+ML)^\kappa),
\end{aligned}$$

gilt somit $I_4 = \sum_{i=1}^4 I_{4i}$. Wir erhalten mit derselben Methode, mit der wir in Satz 4.1.1 $I_4 < \infty$ gezeigt haben, die Endlichkeit von I_{41}, denn für $0 < \kappa \leq 1$ folgt mit (4.1.11)

$$I_{41} \leq E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR, R\geq L\}} |-Q|^\kappa \leq E|Q|^\kappa,$$

für $\kappa > 1$ mit (4.1.11) und (4.3.6)

$$I_{41} \leq E\mathbf{1}_{\{0<-Q<MR, R\geq L\}}(-Q)(MR)^{\kappa-1} \leq E(Q^- M^{\kappa-1})E(R^+)^{\kappa-1}.$$

Wegen $Q + ML < ML$ gilt

$$I_{42} \leq \frac{1}{\kappa} E\mathbf{1}_{\{L>0\}}(ML)^\kappa = \frac{1}{\kappa} E(ML^+)^\kappa$$

und somit ebenfalls

$$I_{43} \leq \frac{1}{\kappa} E(ML^+)^\kappa \qquad \text{sowie} \qquad I_{44} \leq \frac{1}{\kappa} E(ML^+)^\kappa$$

wegen $0 \leq MR < Q + ML < ML$ und $0 < Q + ML < MR < ML$. Nach Voraussetzung folgt daraus $I_4 < \infty$, und wir erhalten insgesamt (2.2.9). Korollar 2.2.2 liefert (2.2.3) sowie die Formel für C_+. Wir nehmen weiter an, daß eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, die die geforderten Bedingungen erfüllt, und setzen $Q(c) := Q - c(1-M)$. Wegen

$$Q(c) + M\max(R-c, L-c) = Q + M\max(R,L) - c$$

folgt

$$R - c \stackrel{d}{=} Q(c) + M\max(R-c, L-c)$$

und daraus mit Proposition 4.3.1

$$R - c \sim \sup\left(R^*(c), \sup_{m\in\mathbb{N}}(\sum_{k=1}^{m} Q_k(c)\Pi_{k-1} + (L_m - c)\Pi_m)\right),$$

wobei wir $R^*(c) := \sum_{k\geq 1} Q_k(c)\Pi_{k-1}$ setzen. Ist $P(Q(c) > 0) > 0$, so gilt wegen $\Pi_{k-1} \geq 0$ f.s. für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $P(R^*(c) > 0) > 0$ (beachte $\Pi_0 = 1$). Mit Hilfe von Satz 4.1.1 erhalten wir

$$R^*(c) \stackrel{d}{=} Q(c) + MR^*(c), \qquad R^*(c) \text{ unabhängig von } (M, Q(c)),$$

und

$$P(R^*(c) > t) \sim C_+(c)t^{-\kappa}$$

für $t \to \infty$ mit

$$C_+(c) = \frac{1}{\kappa m}E((Q(c) + MR^*(c))^\kappa - (MR^*(c))^\kappa) > 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
R^*(c) + c &= \sum_{k\geq 1} Q_k(c)\Pi_{k-1} + c \\
&= \sum_{k\geq 1}(Q_k - c(1 - M_k))\Pi_{k-1} + c \\
&= \sum_{k\geq 1} Q_k\Pi_{k-1} - c\sum_{k\geq 1}\Pi_{k-1} + c\sum_{k\geq 1}\Pi_k + c \\
&= \sum_{k\geq 1} Q_k\Pi_{k-1}
\end{aligned}$$

und

$$R \sim \sup(\sum_{k\geq 1} Q_k\Pi_{k-1}, \sup_{m\in\mathbb{N}}(\sum_{k=1}^{m} Q_k\Pi_{k-1} + L_m\Pi_m))$$

folgt $\{R^*(c) > t - c\} \subset \{R > t\}$ und damit $C_+ > 0$ wegen

$$\begin{aligned}
P(R > t) &\geq P(R^*(c) > t - c) \\
&\sim C_+(c)(t - c)^{-\kappa} \\
&\geq C_+(c)(1 + o(1))t^{-\kappa}, \qquad t \to \infty.
\end{aligned}$$

Ist $Q(c) = 0$ f.s., so ist $P(M(L - c) > 0) > 0$ sowie $R^*(c) = 0$ f.s. und daher

$$R - c \sim \sup_{m\in\mathbb{N}}(L_m - c)\Pi_m = \sup_{m\in\mathbb{N}}((L_m - c)M_m)\Pi_{m-1}.$$

Mit $Q = M(L - c)$ sind wir somit in der Situation des letzten Abschnittes und erhalten mit Hilfe von Satz 4.2.2 $C_+ > 0$. $\square$

Satz 4.3.3. *Seien M, Q, L Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei $M \geq 0$ f.s. gelte und M für ein $\kappa > 0$ (2.1.5), für ein $\beta \in (0,1)$ (3.2.1) sowie (3.2.2) genüge und $E|Q|^{\kappa+\beta}$, $E|ML^+|^{\kappa+\beta}$ endlich seien. Ist R eine von M, Q, L unabhängige Zufallsgröße, die (4.3.1) löst, und definiert*

$$\eta(dx) := e^{\kappa x} P(\log M \in dx)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, so folgen sowohl (3.2.4) als auch (3.2.6).

Beweis. Aufgrund von (4.3.6) und $\kappa + \beta - 1 < \kappa$ ist $E(R^+)^{\kappa+\beta-1} < \infty$. Indem wir den mittleren Teil des Beweises von Satz 4.3.2 mit $\kappa + \beta$ anstelle von κ wiederholen, erhalten wir (3.2.7) sowie (3.2.8) mit einer analogen Rechnung und $(-R, M, -Q)$ statt (R, M, Q). Satz 3.2.1 (c) liefert die Behauptung. $\square$

4.4 $R \stackrel{d}{=} \sqrt{MR^2 + NR + Q}$

Unser letztes Beispiel einer stochastischen Fixpunktgleichung, auf die sich unsere Ergebnisse übertragen lassen, demonstriert die Bandbreite unserer Methode und behandelt die polynomiale Gleichung

$$R \stackrel{d}{=} \sqrt{MR^2 + NR + Q}, \qquad R \text{ unabhängig von } (M, N, Q), \tag{4.4.1}$$

mit f.s. nichtnegativen Zufallsgrößen M, N, Q und R auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Wir setzen $S = R^2$ und betrachten im folgenden

$$S \stackrel{d}{=} MS + N\sqrt{S} + Q, \qquad S \text{ unabhängig von } (M, N, Q), \tag{4.4.1$'$}$$

als äquivalente Form von (4.4.1) und erhalten die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (4.4.1$'$) unter Anwendung des Prinzips von Letac auf

$$\Xi(t) := Mt + N\sqrt{t} + Q, \qquad t \geq 0,$$

bzw.

$$\Xi_n(t) := M_n t + N_n\sqrt{t} + Q_n, \qquad t \geq 0,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von

Proposition 4.4.1. *Seien M, N, Q, M', N', Q' sowie $M_n, N_n, Q_n, n \in \mathbb{N}$, Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, für die $M \geq 0$ f.s., $N \geq 0$ f.s. und $Q > 0$ f.s. gelte. $(M, N, Q), (M', N', Q')$ und $(M_n, N_n, Q_n), n \in \mathbb{N}$, seien unabhängig und identisch verteilt. Ist*

$$E \log^+ N < \infty, \qquad E \log(1 \vee Q) < \infty \tag{4.4.2}$$

und

$$E \log \left(M + \frac{N}{2\sqrt{Q'}} \right) \in [-\infty, 0), \tag{4.4.3}$$

so existiert $Z := \lim_{n\to\infty} \Xi_1 \circ \cdots \circ \Xi_n(t)$ f.s. und ist unabhängig von t, und die Verteilung von Z ist die eindeutige Lösung von (4.4.1$'$) auf $(0, \infty)$.

Beweis. Aufgrund von (4.4.3) gilt $E \log M \in [-\infty, 0)$, und wegen (4.4.2) finden wir daher ein genügend großes $c > 0$, so daß $E \log \left(M + \frac{N}{\sqrt{c}} \right) < 0$ ist. Wir definieren

$$\Psi(t) := Q + \left(M + \frac{N}{\sqrt{c}} \right) \max(t, c), \qquad t \in \mathbb{R},$$

und

$$\Psi_n(t) := Q_n + \left(M_n + \frac{N_n}{\sqrt{c}} \right) \max(t, c), \qquad t \in \mathbb{R},$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und erhalten somit einen Spezialfall von (4.3.3), der die Bedingungen von Proposition 4.3.1 erfüllt. Mit Z_n gemäß (2.1.2) folgt wegen

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= Mc\frac{t}{c} + N\sqrt{c}\sqrt{\frac{t}{c}} + Q \\ &\leq (Mc + N\sqrt{c}) \max(t, c) + Q \\ &= \Psi(t) \end{aligned}$$

und

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} Z_n(t) \leq \lim_{n\to\infty} \Psi_1 \circ \cdots \circ \Psi_n(t) < \infty \qquad \text{f.s.}$$

die fast sichere Beschränktheit von $Z_n(t)$. Ist $t = 0$, erhalten wir $Z_1(0) = \Xi_1(0) = Q_1$ und für beliebiges $n \geq 2$

$$Z_n(0) = \Xi_1 \circ \cdots \circ \Xi_{n-1}(Q_n) = Z_{n-1}(Q_n)$$

sowie

$$Z_{n+1}(0) = Z_{n-1} \circ \Xi_n(Q_{n+1}) = Z_{n-1}(M_n Q_{n+1} + N_n\sqrt{Q_{n+1}} + Q_n).$$

Da $Z_{n-1}(t)$ eine Verknüpfung von in t wachsenden Funktionen ist, ist $Z_{n-1}(t)$ ebenfalls wachsend in t. Es gilt daher $Z_n(0) \leq Z_{n+1}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(Z_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine wachsende Folge. Zusammen mit $0 \leq \lim_{n\to\infty} Z_n(0) < \infty$ liefert dies die fast sichere Konvergenz von $Z_n(0)$ gegen eine endliche Zufallsgröße Z (vgl.[Loy], S. 500, Beweis von Lemma 1). Wir möchten dasselbe für $Z_n(t)$ zeigen und setzen für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\Xi_{nn}(t) := t \qquad \text{sowie} \qquad \Xi_{mn}(t) := \Xi_{m+1} \circ \cdots \circ \Xi_n(t), \qquad m \in \mathbb{N}, m < n.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \Xi(t') - \Xi(t) &= Mt' + N\sqrt{t'} + Q - Mt - N\sqrt{t} - Q \\ &= M(t' - t) + N(\sqrt{t'} - \sqrt{t}) \\ &= \left(M + \frac{N}{\sqrt{t'} + \sqrt{t}} \right) (t' - t) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$Z_n(t') - Z_n(t) = (t' - t) \prod_{m=1}^{n} \left(M_m + \frac{N_m}{\sqrt{\Xi_{mn}(t')} + \sqrt{\Xi_{mn}(t)}} \right)$$

mit Hilfe einer Induktion nach n, denn für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned} Z_1(t') - Z_1(t) &= \Xi_1(t') - \Xi_1(t) \\ &= \left(M_1 + \frac{N_1}{\sqrt{t'} + \sqrt{t}} \right) (t' - t) \\ &= (t' - t) \prod_{m=1}^{1} \left(M_m + \frac{N_m}{\sqrt{\Xi_{m1}(t')} + \sqrt{\Xi_{m1}(t)}} \right), \end{aligned}$$

und für beliebiges $n \geq 2$ folgt

$$\begin{aligned}
Z_n(t') - Z_n(t) &= Z_{n-1}(\Xi_n(t')) - Z_{n-1}(\Xi_n(t)) \\
&= (\Xi_n(t') - \Xi_n(t)) \prod_{m=1}^{n-1} \left(M_m + \frac{N_m}{\sqrt{\Xi_{m(n-1)}(\Xi_n(t'))} + \sqrt{\Xi_{m(n-1)}(\Xi_n(t))}} \right) \\
&= (t' - t) \left(M_n + \frac{N_n}{\sqrt{t'} + \sqrt{t}} \right) \prod_{m=1}^{n-1} \left(M_m + \frac{N_m}{\sqrt{\Xi_{mn}(t')} + \sqrt{\Xi_{mn}(t)}} \right) \\
&= (t' - t) \prod_{m=1}^{n} \left(M_m + \frac{N_m}{\sqrt{\Xi_{mn}(t')} + \sqrt{\Xi_{mn}(t)}} \right).
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
\sqrt{\Xi_{mn}(t)} + \sqrt{\Xi_{mn}(0)} &\geq 2\sqrt{\Xi_{m+1} \circ \cdots \circ \Xi_n(0)} \\
&= 2\sqrt{\Xi_{m+1}(\Xi_{m+2} \circ \cdots \circ \Xi_n(0))} \\
&\geq 2\sqrt{\Xi_{m+1}(0)} \\
&= 2\sqrt{Q_{m+1}}
\end{aligned}$$

und $Z_n(0) \leq Z_n(t)$ für $t \geq 0$ ist, gilt wegen

$$Z_n(t) - Z_n(0) = t \left(M_n + \frac{N_n}{\sqrt{t}} \right) \prod_{m=1}^{n-1} \left(M_m + \frac{N_m}{\sqrt{\Xi_{mn}(t)} + \sqrt{\Xi_{mn}(0)}} \right)$$

$$0 \leq Z_n(t) - Z_n(0) \leq t \left(M_n + \frac{N_n}{\sqrt{t}} \right) \prod_{m=1}^{n-1} \left(M_m + \frac{N_m}{2\sqrt{Q_{m+1}}} \right). \tag{4.4.4}$$

Wir teilen das Produkt in dieser Formel in die Produkte

$$\prod_{m=1}^{k_1} \left(M_{2m} + \frac{N_{2m}}{2\sqrt{Q_{2m+1}}} \right) \qquad \text{und} \qquad \prod_{m=1}^{k_2} \left(M_{2m-1} + \frac{N_{2m-1}}{2\sqrt{Q_{2m}}} \right)$$

auf. Beide Produkte besitzen voneinander unabhängigen Faktoren, und es gilt $k_1 = k_2 = \frac{n-1}{2}$, falls $n-1$ gerade, und $k_2 = k_1 + 1 = \frac{n}{2}$, falls $n-1$ ungerade ist. Wegen (4.4.3) finden wir ein $c' > 0$ so, daß $E \log \left(M + \frac{N}{2\sqrt{Q'}} \right) < -c' < 0$ ist, und erhalten wie im Beweis von Proposition 4.2.1

$$0 \leq \lim_{k_1 \to \infty} \prod_{m=1}^{k_1} \left(M_{2m} + \frac{N_{2m}}{2\sqrt{Q_{2m+1}}} \right) \leq \lim_{k_1 \to \infty} \mathrm{e}^{-c' k_1} = 0 \qquad \text{f.s.}$$

und

$$0 \leq \lim_{k_2 \to \infty} \prod_{m=1}^{k_2} \left(M_{2m-1} + \frac{N_{2m-1}}{2\sqrt{Q_{2m}}} \right) \leq \lim_{k_2 \to \infty} \mathrm{e}^{-c' k_2} = 0 \qquad \text{f.s.}$$

Desweiteren ist für festes $t \in \mathbb{R}$ und beliebige ε, $\delta > 0$

$$\sum_{n \geq 1} P((M_n + \frac{N_n}{\sqrt{t}})\mathrm{e}^{-\varepsilon n} > \delta) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\delta} E((M_n + \frac{N_n}{\sqrt{t}})\mathrm{e}^{-\varepsilon n}) < \frac{1}{\delta}\mathrm{e}^{-c'} \sum_{n \geq 1} \mathrm{e}^{-\varepsilon n} < \infty.$$

Mit dem Lemma von Borell-Cantelli folgt

$$P(\limsup_{n\to\infty}((M_n + \frac{N_n}{\sqrt{t}})\mathrm{e}^{-\varepsilon n} < \delta)) = 1$$

und somit $\lim_{n\to\infty}\left(M_n + \frac{N_n}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon n} = 0$ f.s. Insgesamt erhalten wir in (4.4.4) für festes $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(t) = \lim_{n\to\infty} Z_n(0) = Z \qquad \text{f.s.}$$

und daher mit dem Prinzip von Letac die Behauptung. □

Unter geeigneten Voraussetzungen verhalten sich dann die Flanken der Verteilung von S wie $C_+t^{-\kappa}$ und besitzen außerdem die uns bereits bekannte Konvergenzrate.

Satz 4.4.2. *Seien M, N, Q Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei M den Bedingungen von Lemma 2.1.2 genüge. Sei $P^{\log|M||M\neq 0}$ nicht-arithmetisch, $EQ^\kappa < \infty$ und gelten die Bedingungen von Proposition 4.4.1 mit $EN^\kappa < \infty$ anstelle von (4.4.2), so folgt*

$$P(S > t) \sim C_+t^{-\kappa}, \qquad t \to \infty,$$

mit

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m}E((MS + N\sqrt{S} + Q)^\kappa - (MS)^\kappa). \tag{4.4.5}$$

Weiter gilt

$$C_+ > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(Q > 0) + P(N > 0) > 0.$$

Beweis. Da $(MS + N\sqrt{S} + Q)^\kappa \geq (MS)^\kappa$ ist, müssen wir für (2.2.9) die Endlichkeit des Erwartungswertes in (4.4.5) und dazu zunächst $\|S\|_p < \infty$ für alle $p \in (0, \kappa)$ mit $\|\cdot\|_p$ gemäß (4.1.13) zeigen. Wegen $EM^\kappa < \infty$ finden wir ein genügend großes $c > 0$, so daß $E\left(M + \frac{N}{\sqrt{c}}\right)^\kappa < \infty$ gilt und damit $c_0 := \|M + \frac{N}{\sqrt{c}}\|_p$ beliebig nahe bei $\|M\|_p$ ist, d.h. es gilt $c_0 < 1$. Mit $\Psi(t) = Q + (M + \frac{N}{\sqrt{c}})\max(t, c)$ aus dem Beweis von Proposition 4.4.1 folgt

$$\begin{aligned}
\|S\|_p &= \|\Xi(S)\|_p \\
&\leq \|\Psi(S)\|_p \\
&\leq c_0\|S \vee c\|_p + \|Q\|_p \\
&\leq c_0\|S\|_p + c_0\|c\|_p + \|Q\|_p \\
\Leftrightarrow \quad \|S\|_p &\leq (c_0\|c\|_p + \|Q\|_p)/(1 - c_0),
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist für alle $p \in (0, \kappa)$ endlich. Für den Erwartungswert in (4.4.5) erhalten wir dann für $0 < \kappa \leq 1$ mit Hilfe von (4.1.10) und (4.1.11)

$$\begin{aligned}
E((MS + N\sqrt{S} + Q)^\kappa - (MS)^\kappa) &\leq E(N\sqrt{S} + Q)^\kappa \\
&\leq E(N\sqrt{S})^\kappa + EQ^\kappa \\
&= EN^\kappa ES^{\frac{\kappa}{2}} + EQ^\kappa \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Für $\kappa > 1$ folgt

$$\begin{aligned}
E((MS+N\sqrt{S}+Q)^\kappa-(MS)^\kappa) &\leq \kappa E(N\sqrt{S}+Q)(MS+N\sqrt{S}+Q)^{\kappa-1} \\
&\leq \kappa c_{\kappa-1}E(N\sqrt{S}+Q)((MS)^{\kappa-1}+(N\sqrt{S}+Q)^{\kappa-1}) \\
&= \kappa c_{\kappa-1}E(N\sqrt{S}+Q)(MS)^{\kappa-1}+\kappa c_{\kappa-1}E(N\sqrt{S}+Q)^\kappa \\
&\leq \kappa c_{\kappa-1}(ENM^{\kappa-1}ES^{(\kappa-1)/2}+EQM^{\kappa-1}ES^{\kappa-1}) \\
&\quad +\kappa c_{\kappa-1}(c_\kappa EN^\kappa ES^{\kappa/2}+c_\kappa EQ^\kappa) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ebenfalls mit Hilfe der genannten Formeln, der Hölder-Ungleichung und wegen $\|S\|_p < \infty$ für alle $p \in (0,\kappa)$. (2.2.9) ist damit erfüllt und liefert die Asymptotik der Flanken von S und die Formel für C_+. Gilt weiter $P(Q>0)+P(N>0)=0$, so ist sowohl $P(Q>0)=0$ als auch $P(N>0)=0$ und folglich

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m}E((MS+N\sqrt{S}+Q)^\kappa-(MS)^\kappa) = 0.$$

□

Satz 4.4.3. *Seien M, N, Q Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, für die $M \geq 0$ f.s., $N \geq 0$ f.s. und $Q > 0$ f.s. sowie (4.4.3) gelte. Genüge M (2.1.5) für ein $\kappa > 0$, (3.2.1) für ein $\beta > 0$ mit $\beta < \min(1,\kappa)$ sowie (3.2.2) und seien $EN^{\kappa+\beta}$ und $EQ^{\kappa+\beta}$ endlich. Ist durch*

$$\eta(dx) := e^{\kappa x}P(\log M \in dx)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ definiert, so folgt (3.2.4) mit S anstelle von R in (2.3.3) und (3.2.4).

Beweis. Wegen $\kappa+\beta-1<\kappa$ und $(\kappa+\beta)/2<\kappa$ sind $ES^{\kappa+\beta-1}$ und $ES^{(\kappa+\beta)/2}$ endlich. Wie im Beweis von Satz 4.4.2 folgt dann für $\kappa+\beta \leq 1$

$$E|(MS+N\sqrt{S}+Q)^{\kappa+\beta}-(MS)^{\kappa+\beta}| \leq E|N|^{\kappa+\beta}E|S|^{(\kappa+\beta)/2}+E|Q|^{\kappa+\beta},$$

für $\kappa+\beta > 1$

$$\begin{aligned}
&E|(MS+N\sqrt{S}+Q)^{\kappa+\beta}-(MS)^{\kappa+\beta}| \\
\leq\ &(\kappa+\beta)c_{\kappa+\beta-1}(E|N||M|^{\kappa+\beta-1}E|S|^{(\kappa+\beta-1)/2}+E|Q||M|^{\kappa+\beta-1}E|S|^{\kappa+\beta-1}) \\
&+(\kappa+\beta)c_{\kappa+\beta-1}c_{\kappa+\beta}(E|N|^{\kappa+\beta}E|S|^{(\kappa+\beta)/2}+E|Q|^{\kappa+\beta})
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung mit Hilfe von Satz 3.2.1. □

4.5 Eine Anwendung in der Extremwerttheorie

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F. Die klassische Extremwerttheorie interessiert sich für die Grenzverteilung der Maxima $\max_{1\leq i\leq n} X_i$, genauer also für

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq x) = \lim_{n\to\infty} F^n(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die Grundlage hierfür bildet das folgende Fisher-Tippett Theorem. Wir bemerken dazu, daß zwei Verteilungsfunktionen F und G *vom selben Typ* sind, falls ein $a > 0$ und ein $b \in \mathbb{R}$ existieren, so daß $G(x) = F(ax+b)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Satz 4.5.1. *(Fisher-Tippett Theorem, vgl. [BGT], Theorem 8.13.1)*
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F. Existieren Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie eine nicht degenerierte Verteilungsfunktion G, so daß

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\max_{1\le i\le n} X_i - b_n}{a_n} \le x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \tag{4.5.1}$$

für alle $x \in \mathcal{C}(G)$[2] gilt, dann ist G vom Typ einer der drei folgenden sogenannten Extremwertverteilungen:
(a) Fréchet-Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$\Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \qquad \alpha > 0,$$

(b) Weibull-Verteilung $W(\alpha,\beta)$ für $\beta = 1$ mit der Verteilungsfunktion

$$\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha} \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \qquad \alpha > 0,$$

(c) Gumbel-Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Man sagt auch, daß F unter diesen Voraussetzungen *im Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung* liegt. Die Verteilungsfunktionen G, die als Grenzverteilung von $\max_{1\le i\le n} X_i$ im Sinn von (4.5.1) in Frage kommen, sind außerdem genau diejenigen, die zur Klasse der *maximal stabilen Verteilungen* gehören (vgl. [LLR], S.10, Theorem 1.4.1). Dabei heißt eine nicht degenerierte Verteilungsfunktion G maximal stabil genau dann, wenn eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen und Konstanten $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, existieren, so daß für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} F_n((a_{nk})^{-1}x + b_{nk}) = G^{\frac{1}{k}}(x)$$

für alle $x \in \mathcal{C}(G)$ gilt (vgl. [LLR], S.8, Theorem 1.3.1).
Im Fisher-Tippett Theorem wird der Grenzwert von

$$P\left(\frac{\max_{1\le i\le n} X_i - b_n}{a_n} \le x\right) = P\left(\max_{1\le i\le n} X_i \le a_n^{-1}x + b_n\right)$$

für $n \to \infty$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Eine allgemeinere Form erhalten wir, indem wie anstelle von $(a_n^{-1}x + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verwenden, die nicht mehr notwendig von x abhängen müssen bzw. von komplexerer als linearer Art sein können. Eine nützliche Aussage erhalten wir dann mit folgendem Satz, mit dessen Hilfe wir ein Beispiel für den Fall (a) des Fisher-Tippett Theorems angeben.

Satz 4.5.2. *(vgl. [LLR], Theorem 1.5.1)*
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige identisch verteilte Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und existiere ein $0 \le \tau \le \infty$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau \tag{4.5.2}$$

gilt. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{1\le i\le n} X_i \le u_n) = e^{-\tau}. \tag{4.5.3}$$

Ist umgekehrt (4.5.3) für ein $\tau \in [0, \infty]$ und eine reelle Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt, so folgt (4.5.2).

[2] Menge der Stetigkeitspunkte der Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beispiel 4.5.3. *(vgl. [LLR], Example 1.7.6)*
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige identisch Pareto-verteilte Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion

$$F(x) = (1 - \lambda x^{-\alpha})\mathbf{1}_{[\lambda^{1/\alpha},\infty)}(x), \qquad \alpha > 0,\ \lambda > 0.$$

Setzen wir $u_n := (\frac{\lambda n}{\tau})^{1/\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein beliebiges, festes $\tau \in [0, \infty]$, erhalten wir $1 - F(u_n) = \frac{\tau}{n}$ und daher mit Satz 4.5.2

$$\lim_{n\to\infty} P(\max_{1\le i\le n} X_i \le ((\lambda n)/\tau)^{1/\alpha}) = \mathrm{e}^{-\tau}.$$

Mit $\tau := x^{-\alpha}$ für ein beliebiges $x \ge 0$ folgt daraus

$$\lim_{n\to\infty} P((\lambda n)^{-1/\alpha} \max_{1\le i\le n} X_i \le x) = \mathrm{e}^{-x^{-\alpha}}, \qquad x \ge 0,$$

und damit der Fall (a) des Fisher-Tippett Theorems mit $a_n = (\lambda n)^{-1/\alpha}$ und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine Reihe weiterer Beispiele für die drei Extremwertverteilungen als Grenzverteilungen im Fisher-Tippett Theorem findet sich bei Leadbetter, Lindgren und Rootzén, S.19-24. Die Autoren zeigen außerdem, daß für Poisson- sowie geometrisch verteilte Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine nicht degenerierte Verteilungsfunktion G im Sinn von (4.5.1) existiert, da unter diesen Verteilungsannahmen insbesondere (4.5.2) verletzt ist (vgl. [LLR], S.26f, Example 1.7.14 und 1.7.15).
Die Verbindung zu unseren Ergebnissen schaffen nun Bingham, Goldie und Teugels sowie Leadbetter, Lindgren und Rootzén, indem sie zeigen, daß das Fisher-Tippett Theorem u.a. für die Verteilung einer Zufallsgröße gilt, deren rechte Flanke asymptotisch einer Potenzfunktion mit negativem Exponenten gleicht.

Satz 4.5.4. *(vgl. [BGT], Theorem 8.13.2 oder [LLR], Theorem 1.6.2)*
Für eine Verteilungsfunktion F auf $\mathbb{R}$ sei

$$x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

Unter den Voraussetzungen des Fisher-Tippett Theorems liegt die Verteilungsfunktion F von $\max_{1\le i\le n} X_i$ genau dann im Anziehungsbereich einer Fréchetverteilung, wenn $x_F = \infty$ ist und ein $\alpha > 0$ existiert, so daß

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}$$

für alle $x > 0$ gilt. In diesem Fall sind $a_n = \inf\{x \in \mathbb{R} : 1 - F(x) \le \frac{1}{n}\}$ und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählbar.

Ähnliche Aussagen für die anderen beiden Extremwertverteilungen finden sich bei [BGT], Theoreme 8.13.3 und 8.13.4 bzw. [LLR], Theorem 1.6.2.
Da aufgrund des Impliziten Erneuerungstheorems

$$\frac{P(R > tx)}{P(R > t)} \sim \frac{C_+(tx)^{-\kappa}}{C_+ t^{-\kappa}} = x^{-\kappa}$$

für $t \to \infty$ und alle $x > 0$ gilt, trifft die Aussage dieses Satzes gerade für die Verteilung unserer Zufallsgröße R als Lösung einer stochastischen Fixpunktgleichung $R \stackrel{d}{=} \Psi(R)$

gemäß (2.1.1) zu. Die Verteilung von R ist nach dem Prinzip von Letac die Grenzverteilung für die Verteilung der Folge $(W_n(t))_{n\in\mathbb{N}} = (\Psi_n \circ \ldots \circ \Psi_1(t))_{n\in\mathbb{N}}$ (vgl. (2.1.3)). Wir können daher weiterhin schließen, daß $(W_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ (geeignet normiert) ebenfalls in Verteilung gegen eine maximal stabile Fisher-Tippett Grenzverteilung konvergiert. Ein Beispiel hierfür bildet unsere stochastische Fixpunktgleichung

$$R \stackrel{d}{=} Q + MR, \qquad R \text{ unabhängig von } (M,Q), \tag{4.1.1}$$

aus Abschnitt 4.1. Anstelle von $W_n(t)$ schreiben wir

$$R_n = Q_n + M_n R_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.5.4}$$

wobei R_0 eine beliebige Verteilung unabhängig von der des Paares $(M_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitze und $(M_n, Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt seien. Für nichtnegative Zufallsgrößen M_1 und Q_1 zeigen de Haan, Resnick, Rootzén und de Vries (vgl. [HRV], S.216, Theorem 2.1), daß dann unter den Bedingungen von Satz 4.1.1

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-1/\kappa} \max_{1\le i\le n} R_i \le x) = \mathrm{e}^{-C_+\theta x^{-\kappa}}$$

für alle $x > 0$ mit

$$\theta := \int_1^\infty P(\sup_{n\ge 1} \prod_{i=1}^n M_i \le y^{-1})\kappa y^{-\kappa-1} dy$$

gilt. Unsere Korollare 4.1.7, 4.1.8 und 4.1.9 liefern hier Schranken bzw. für $\kappa \in \mathbb{N}$ spezielle Werte für C_+. Die zuletzt genannten Autoren wenden ihre Ergebnisse auf die ARCH[3]-Folge von Engle (vgl. [Eng]) an, die durch die Gleichung

$$\xi_n = Z_n \sqrt{\alpha + \lambda \xi_{n-1}^2}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

erzeugt wird, wobei Z_n für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen bilden, $\xi_0 \ge 0$ ist und $\alpha > 0, \lambda \in (0,1)$ Konstanten sind.
Setzen wir $(M_n, Q_n) := (\lambda Z_n^2, \alpha Z_n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so genügt ξ_n^2 wegen

$$\xi_n^2 = \alpha Z_n^2 + \lambda Z_n^2 \xi_{n-1}^2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

(4.5.4). Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} P(n^{-1/(2\kappa)} \max_{1\le i\le n} \xi_i \le x) = \mathrm{e}^{-C_+\theta x^{-2\kappa}}, \qquad x > 0,$$

wobei C_+ durch $\frac{1}{\kappa m} E((Q+MR)^\kappa - (MR)^\kappa)$ gegeben ist und R die stochastische Fixpunktgleichung $R \stackrel{d}{=} Q + MR$ mit $(M,Q) := (\lambda Z^2, \alpha Z^2)$ und $Z \sim N(0,1)$ erfüllt. Wir können κ und m hierbei noch genauer angeben. Gemäß Lemma 2.1.2 ist κ die eindeutige Lösung von $EM^\kappa = 1$ in $(0,\infty)$. Da nach Voraussetzung $Z \sim N(0,1)$ gilt, ist $Z^2 \sim \chi_1^2$ und besitzt daher die $\lambda\!\!\lambda-$Dichte

$$f(x) = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

[3] ARCH=autoregressive conditional heteroscedastic

Mit Hilfe der Substitution von y durch $\frac{x}{2}$ erhalten wir daher wegen

$$\begin{aligned}\frac{2^\kappa}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\kappa+\frac{1}{2}) &= \frac{2^\kappa}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty y^{\kappa-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y}dy \\ &= \frac{2^\kappa}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{\kappa+\frac{1}{2}} x^{\kappa-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}dx \\ &= E(Z^2)^\kappa\end{aligned}$$

$$EM^\kappa = \lambda^\kappa E(Z^2)^\kappa = \frac{(2\lambda)^\kappa}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\kappa+\frac{1}{2}).$$

Für jedes feste $\lambda \in (0,1)$ ist $EM = \lambda$ sowie außerdem $\lim_{\kappa\to\infty} EM^\kappa = \infty$. Es existiert daher ein $\kappa \in (1,\infty)$, so daß $EM^\kappa = 1$ gilt, und das von uns gesuchte κ ist damit die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\Gamma(\kappa+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{(2\lambda)^\kappa}, \qquad \kappa > 1. \tag{4.5.5}$$

Für m erhalten wir

$$m = E\left((\lambda Z^2)^\kappa \log(\lambda Z^2)\right) = \log\lambda + \lambda^\kappa E\left((Z^2)^\kappa \log Z^2\right).$$

Zur Berechnung von $E\left((Z^2)^\kappa \log Z^2\right)$ benutzen wir für $n \in \mathbb{N}_0$ die allgemeine $n-$te Ableitung

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty x^{z-1}(\log x)^n \mathrm{e}^{-x}dx, \qquad z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0,$$

der Gamma-Funktion (vgl. [FrB], S.191, Satz 1.1). Mit $\Upsilon := \frac{\Gamma^{(1)}}{\Gamma}$ sowie der Substitution von x durch $2y$ erhalten wir

$$\begin{aligned}E\left((Z^2)^\kappa \log Z^2\right) &= \int_0^\infty x^{\kappa-\frac{1}{2}}\log x \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\ &= \frac{2^{\kappa+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^{\kappa+\frac{1}{2}-1}\log(2y)\mathrm{e}^{-y}\,dy \\ &= \frac{2^\kappa}{\sqrt{\pi}}\left(\Gamma^{(1)}(\kappa+\frac{1}{2}) + \log 2\ \Gamma(\kappa+\frac{1}{2})\right) \\ &= \frac{2^\kappa}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\kappa+\frac{1}{2})\left(\log 2 + \Upsilon(\kappa+\frac{1}{2})\right)\end{aligned}$$

und daher mit Hilfe von (4.5.5)

$$m = \log(2\lambda) + \Upsilon(\kappa+\frac{1}{2}).$$

Die Formel für C_+ lautet schließlich

$$C_+ = \frac{1}{\kappa m}E\left((\alpha+\lambda R)^\kappa - (\lambda R)^\kappa\right)E(Z^2)^\kappa,$$

wobei $E(Z^2)^\kappa = \frac{2^\kappa}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\kappa+\frac{1}{2})$ gilt. Für jedes feste $\lambda \in (0,1)$ sind alle Werte von κ gemäß (4.5.5) wegen $\Gamma(\kappa+\frac{1}{2}) > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ erreichbar. Ist $\kappa \in \mathbb{N}$ und $\kappa > 1$, folgt aus der Funktionalgleichung der Gammafunktion

$$\Gamma(\kappa+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\kappa}(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\kappa-1))$$

und daher

$$\lambda = \frac{1}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\kappa - 1))^{\frac{1}{\kappa}}} .$$

Die ersten Wertepaare für (κ, λ) berechnen sich dann wie folgt:

κ	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	0.577	0.406	0.312	0.254	0.214	0.185	0.163	0.145	0.105

Wir bemerken abschließend, daß unser Beispiel allen Bedingungen von Satz 4.1.12 für den Fall $M \geq 0$ f.s. genügt und wir daher das Ergebnis (3.2.4) von der Konvergenzrate der Flanken auf die der Verteilung von ξ_n^2 übertragen können.

5 Anhang

5.1 Beweis von Lemma 3.1.3

Lemma 3.1.3. *Seien χ und μ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, χ $\lambda\!\!\!\lambda$-stetig mit einer zweimal stetig differenzierbaren Dichte q. Sei $m := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) > 0$, $\int_{\mathbb{R}} x^2\mu(dx) < \infty$, und existiere eine $\lambda\!\!\!\lambda$-stetige Komponente von μ. Dann ist das Maß $\sum_{n\geq 0} \chi * \mu^{*(n)}$ $\lambda\!\!\!\lambda$-stetig mit einer stetigen Dichte p, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung*

$$p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty, x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1}{-im\theta}\right)d\theta$$

erfüllt.

Beweis. Wegen

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi_\chi(\theta)|\,\lambda\!\!\!\lambda(d\theta) \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi(dt)\lambda\!\!\!\lambda(d\theta) = 1$$

ist $\Phi_\chi \in L_1$, und daher gilt mit der Umkehrformel für Fouriertransformierte von P. Lévy (vgl. [AWT], Satz 41.7) in Verbindung mit $\chi = q\lambda\!\!\!\lambda$

$$q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)d\theta, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung für p ist demnach äquivalent zu

(5.1.1)
$$p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty, x] - q(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1-im\theta}{-im\theta}\right)d\theta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten zunächst das Integral

(5.1.2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-r\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1-im\theta}{1-r-im\theta}\right)d\theta, \qquad x \in \mathbb{R},$$

und weisen nach, daß der Betrag des geklammerten Ausdruckes endlich ist, da dieses Integral dann für $r \uparrow 1$ gegen das Integral in (5.1.1) konvergiert. Wir werden dann die Behauptung aufgrund der Eindeutigkeit des Limes erhalten, indem wir für eine noch genauer zu bestimmende stetige Funktion p_r

(5.1.3)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-r\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1-im\theta}{1-r-im\theta}\right)d\theta = 2\pi p_r(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

und

$$\lim_{r\uparrow 1} p_r(x) = p(x) - \frac{1}{m}\chi(-\infty, x] - q(x) \tag{5.1.4}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ zeigen.

Für reelle Argumente ist Φ_μ die Fouriertransformierte von μ und besitzt daher wegen $\int_{\mathbb{R}} x\mu(dx) = m$ und $\int_{\mathbb{R}} x^2\mu(dx) < \infty$ die abbrechende Reihenentwicklung

$$\Phi_\mu(\theta) = 1 + im\theta - A(\theta)\theta^2, \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

wobei $\lim_{\theta\to\infty} A(\theta) = 0$ und $\lim_{\theta\to 0} A(\theta) = O(1)$ gilt. Wir wählen θ_0 so klein, daß $|\theta Im(A(\theta))| \leq \frac{1}{2}m$ im Streifen $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ ist, und erhalten dort für $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1 - r\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1 - im\theta}{1 - r - im\theta}\right| &= \frac{r\theta^2\,|m^2 - (1 - im\theta)A(\theta)|}{|1 - r - rim\theta + rA(\theta)\theta^2|\,|1 - r - im\theta|} \\
&\leq \frac{\theta^2\,|m^2 - (1 - im\theta)A(\theta)|}{|-i(rm\theta - r\theta^2 Im(A(\theta)))|\,|m\theta|} \\
&\leq \frac{\theta^2\,|m^2 - (1 - im\theta)A(\theta)|}{(|rm\theta| - |r\theta|\,|\theta Im(A(\theta))|)\,|m\theta|} \\
&\leq \frac{4\,|m^2 - (1 - im\theta)A(\theta)|}{m^2}.
\end{aligned}$$

Durch die Vorgaben an θ ist dieser Ausdruck beschränkt. Für $|\theta| > \theta_0$ und wie zuvor $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ ist

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{1 - r\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1 - im\theta}{1 - r - im\theta}\right| &= \left|\frac{1}{1 - r\Phi_\mu(\theta)} - 1 - \frac{r}{1 - r - im\theta}\right| \\
&\leq \frac{1}{|1 - r\Phi_\mu(\theta)|} + 1 + \frac{1}{|1 - r - im\theta|} \\
&\leq \frac{1}{1 - \sup_{|\theta|\geq\theta_0}|\Phi_\mu(\theta)|} + 1 + \frac{1}{m\theta_0}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist endlich, da μ nach Voraussetzung eine $\lambda\!\!\lambda$-stetige Komponente besitzt, denn dann existiert eine Zerlegung

$$\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$$

mit $\lambda \in (0, 1)$, einem $\lambda\!\!\lambda$-stetigen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_1 \neq 0$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ_2, und wegen

$$|\Phi_\mu(\theta)| \leq \lambda|\Phi_{\mu_1}(\theta)| + (1 - \lambda)|\Phi_{\mu_2}(\theta)|$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sup_{|\theta|\geq\theta_0} |\Phi_\mu(\theta)| &\leq \lambda \sup_{|\theta|\geq\theta_0} |\Phi_{\mu_1}(\theta)| + (1 - \lambda) \sup_{|\theta|\geq\theta_0} |\Phi_{\mu_2}(\theta)| \\
&< \lambda + (1 - \lambda) = 1.
\end{aligned}$$

Dabei gilt $\sup_{|\theta|\geq\theta_0} |\Phi_{\mu_2}(\theta)| \leq 1$ aufgrund der Eigenschaft von Fouriertransformierten. $\sup_{|\theta|\geq\theta_0} |\Phi_{\mu_1}(\theta)| < 1$ folgt aus der $\lambda\!\!\lambda$-Stetigkeit von μ_1, denn wegen $|\Phi_{\mu_1}(\theta)| < 1$ für alle $\theta \neq 0$ (andernfalls wäre μ_1 d-arithmetisch, vgl. [AWT], Satz 41.15 und Korollar

41.16) und $\lim_{|\theta|\to\infty}\Phi_{\mu_1}(\theta) = 0$ (vgl. [AWT], Lemma 41.18) existiert ein $\theta_1 > \theta_0$ mit $\sup_{|\theta|\geq\theta_1}|\Phi_{\mu_1}(\theta)| < 1$. Auf $[\theta_0,\theta_1]$ ist Φ_{μ_1} gleichmäßig stetig und daher beschränkt; mit $|\Phi_{\mu_1}(\theta)| < 1$ für alle $\theta \in [\theta_0,\theta_1]$ folgt $\sup_{\theta\in[\theta_0,\theta_1]}|\Phi_{\mu_1}(\theta)| < 1$, analog $\sup_{\theta\in[-\theta_1,-\theta_0]}|\Phi_{\mu_1}(\theta)| < 1$ und damit die Behauptung. Insgesamt erhalten wir daraus mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz für $r \uparrow 1$ in Verbindung mit $\Phi_\chi \in L_1$ die Konvergenz von (5.1.2) gegen das Integral in (5.1.1).
Zum Nachweis von (5.1.3) definieren wir ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ durch

$$E_m(dy) := \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\frac{y}{m}}\lambda\!\!\!\lambda(dy).$$

Für $0 < r < 1$ sind dann

$$\mu_r := \sum_{n\geq 0} r^n\mu^{*(n)} \quad \text{und} \quad E_{m,r} := \sum_{n\geq 0} r^n E_m^{*(n)}$$

endliche Maße auf $\mathbb{R}$, und

$$\begin{aligned} p_r(x) &:= q*\mu_r(x) - q*E_{m,r}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} q(x-y)\sum_{n\geq 0} r^n(\mu^{*(n)}(dy) - E_m^{*(n)}(dy)), \qquad x\in\mathbb{R}, \end{aligned}$$

ist aufgrund der Stetigkeit von q ebenfalls stetig sowie eine $\lambda\!\!\!\lambda$-Dichte. Wegen $|r\Phi_\mu(\theta)| < 1$ und $|r\Phi_{E_m}(\theta)| < 1$ für $0 < r < 1$ und alle $\theta \in \mathbb{R}$ erhalten wir mit Hilfe des Satzes von Fubini und der Translationsinvarianz des $\lambda\!\!\!\lambda$-Maßes

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta x} q*\mu_r(x)\lambda\!\!\!\lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta y}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta(x-y)}q(x-y)\lambda\!\!\!\lambda(dx)\mu_r(dy) \\ &= \Phi_\chi(\theta)\Phi_{\mu_r}(\theta) \\ &= \Phi_\chi(\theta)\sum_{n\geq 0} r^n\Phi_\mu^n(\theta) \\ &= \frac{\Phi_\chi(\theta)}{1 - r\Phi_\mu(\theta)} \end{aligned}$$

und analog

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta x} q*E_{m,r}(x) = \frac{\Phi_\chi(\theta)}{1 - r\Phi_{E_m}(\theta)} = \Phi_\chi(\theta)\frac{1 - i\theta m}{1 - r - i\theta m}$$

in Verbindung mit

$$r\Phi_{E_m}(\theta) = r\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta y}E_m(dy) = \frac{r}{m}\int_0^\infty \mathrm{e}^{(i\theta - \frac{1}{m})y}dy = \frac{r}{i\theta m - 1}.$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\theta x}p_r(x)\lambda\!\!\!\lambda(dx) = \Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1 - r\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1 - im\theta}{1 - r - im\theta}\right) \tag{5.1.5}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und daraus (5.1.3) in Verbindung mit der Umkehrformel für Fouriertransformierte von P. Lévy, denn mit $v_{p_r} := p_r\lambda\!\!\!\lambda$ und wegen $\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-r\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1-im\theta}{1-r-im\theta}\right) \in L_1$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_\chi(\theta)\left(\frac{1}{1-r\Phi_\mu(\theta)} - \frac{1-im\theta}{1-r-im\theta}\right)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\theta}\Phi_{v_{pr}}(\theta)d\theta = 2\pi p_r(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $\mu_r,\ E_{m,r} \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ gilt weiter

$$\lim_{r\uparrow 1} q * \mu_r = \lim_{r\uparrow 1} \sum_{n\geq 0} r^n(q * \mu^{*(n)}) = \sum_{n\geq 0} q * \mu^{*(n)} = p$$

und

$$\lim_{r\uparrow 1} q * E_{m,r} = \sum_{n\geq 0} q * E_m^{*(n)}.$$

Mit Hilfe der Faltungsformel für Dichten erhalten wir

$$E_m^{*(n)}(dy) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\frac{1}{m^n(n-1)!}\mathrm{e}^{-\frac{y}{m}}y^{n-1}\lambda\!\!\lambda(dy)$$

und somit

$$\sum_{n\geq 1} E_m^{*(n)}(dy) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\frac{y}{m}}\sum_{n\geq 1}\frac{(\frac{y}{m})^{n-1}}{(n-1)!}\lambda\!\!\lambda(dy) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)\frac{1}{m}\lambda\!\!\lambda(dy).$$

Für den Grenzwert von $q * E_{m,r}$ folgt daraus

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{R}} q(x-y)E_m^{*(n)}(dy) &= \int_{\mathbb{R}} q(x-y)\delta_0(dy) + \sum_{n\geq 1}\int_{\mathbb{R}} q(x-y)E_m^{*(n)}(dy) \\
&= q(x) + \frac{1}{m}\int_0^{\infty} q(x-y)\lambda\!\!\lambda(dy) \\
&= q(x) + \frac{1}{m}\left(-\int_x^{-\infty} q(z)\lambda\!\!\lambda(dz)\right) \\
&= q(x) + \frac{1}{m}\chi(-\infty, x],
\end{aligned}$$

und wir erhalten (5.1.4) und damit insgesamt (5.1.1). □

5.2 Beweis von Lemma 4.1.6

Lemma 4.1.6. *Seien $x,\ y \in \mathbb{R}$, $r > 0$ sowie $c_r = 2^{r-1} \vee 1$, dann gelten*

$$|x+y|^r \leq c_r(|x|^r + |y|^r), \qquad (4.1.10)$$

$$||x|^r - |y|^r| \leq \begin{cases} |x-y|^r, & 0 < r \leq 1 \\ r|x-y|(|x| \vee |y|)^{r-1}, & 1 < r < \infty \end{cases}. \qquad (4.1.11)$$

Beweis. Wir beginnen mit der ersten Behauptung und zeigen wegen

$$c_r = \begin{cases} 1, & 0 < r < 1 \\ 2^{r-1}, & 1 \leq r < \infty \end{cases}$$

$$|x+y|^r \leq \begin{cases} |x|^r + |y|^r, & 0 < r < 1 \\ 2^{r-1}(|x|^r + |y|^r), & 1 \leq r < \infty \end{cases} .$$

Da für $x = 0$ die Behauptung klar ist, setzen wir $x \neq 0$ voraus, und wegen $|y| \geq 0$ existiert ein $a \geq 0$ mit $|y| = a|x|$. Für $r \in (0,1)$ gilt $|x+y|^r \leq (|x| + |y|)^r$ und damit

$$\frac{|x|^r + |y|^r}{(|x| + |y|)^r} = \frac{1 + a^r}{(1+a)^r} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + a^r \geq (1+a)^r.$$

Zum Nachweis der äquivalenten Ungleichung setzen wir $f_r(a) := 1 + a^r - (1+a)^r$ für alle $a \geq 0$ und erhalten $f_r(0) = 0$ und $f_r'(a) = r(a^{r-1} - (1+a)^{r-1}) > 0$, da $r - 1 \in (-1, 0)$ und $a < a+1$ ist. f_r ist daher für alle $a > 0$ streng monoton wachsend, und (4.1.10) folgt für alle $r \in (0,1)$. Für $r \geq 1$ gilt

$$\frac{(2|x|)^r + (2|y|)^r}{(|x| + |y|)^r} = \frac{2^r(1 + a^r)}{(1+a)^r} \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^r(1 + a^r) \geq 2(1+a)^r,$$

und wir definieren in diesem Fall $f_r(a) := 2^r(1+a^r) - 2(1+a)^r$ für alle $a \geq 0$. Da $f_r(1) = 0$ ist und f_r wegen $f_r'(a) = 2r((2a)^{r-1} - (1+a)^{r-1})$ und $r - 1 \geq 0$ ein globales Minimum in $(1, 0)$ besitzt, erhalten wir obige äquivalente Ungleichung für alle $r \geq 1$ und somit insgesamt (4.1.10).
Zum Nachweis von (4.1.11) setzen wir ebenfalls $x \neq 0$ voraus, und es existiert ein $a \geq 0$ mit $|y| = a|x|$. Es gilt somit $y = ax$ oder $y = -ax$ für $x > 0$, $y \geq 0$ oder $x, y < 0$. Für $r \in (0,1]$ und $y = ax$ zeigen wir

$$|1 - a^r| \leq |1 - a|^r, \qquad a \geq 0,\ 0 < r \leq 1, \tag{5.2.1}$$

mit Hilfe einer Fallunterscheidung nach a. Ist $a \in [0,1]$, gilt dasselbe auch für a^r, und wir betrachten $f_r(a) := (1-a)^r + a^r - 1$ für alle $a \in [0,1]$. Es gilt $f_r(0) = f_r(1) = 0$, und f_r hat wegen $f_r'(a) = r(a^{r-1} - (1-a)^{r-1})$ und $r - 1 \in (-1, 0]$ ein globales Maximum in $\frac{2}{2^r} - 1 \geq 0$, d.h. (5.2.1) folgt für alle $a \in [0,1]$. Für $a > 1$ setzen wir $f_r(a) := (a-1)^r - a^r + 1$. Wegen $r - 1 \in (-1, 0]$ und $a - 1 < a$ ist $f_r'(a) = r((a-1)^{r-1} - a^{r-1}) > 0$ für alle $a > 1$ und f_r daher streng monoton wachsend. In Verbindung mit $\lim_{a \to 1} f_r(a) = 0$ folgt somit (5.2.1) für alle $a \geq 0$.
Ist $y = -ax$, zeigen wir

$$|1 - a^r| \leq (1+a)^r, \qquad a \geq 0,\ 0 < r \leq 1, \tag{5.2.2}$$

mit derselben Fallunterscheidung nach a. Für beliebiges $a \in [0,1]$ folgt die Ungleichung sofort aus (5.2.1); für beliebiges $a > 1$ setzen wir $f_r(a) := (1+a)^r - a^r + 1$ und $g_r(a) := f_r(a) - 1$. Wegen $r \in (0,1]$ ist $g_r \geq 0$, und es folgt (5.2.2) für alle $a \geq 0$ und damit (4.1.11) für alle $r \in (0,1]$.
Sei nun $r > 1$ und $a \in [0,1]$ beliebig, d.h. es gilt $|x| \vee |y| = |x|$. Wir betrachten zuerst den Fall $y = ax$ und zeigen

$$1 - a^r \leq r(1-a) \qquad 0 \leq a \leq 1,\ r > 1. \tag{5.2.3}$$

Ist $f_r(a) := r(1-a) + a^r - 1$ für alle $a \in [0,1]$, so gilt $f_r(0) = r - 1 > 0$, $f_r(1) = 0$ und $f_r'(a) = r(a^{r-1} - 1) < 0$ für alle $a \in [0,1)$. f_r ist demnach streng monoton fallend auf $[0,1)$, und es folgt (5.2.3). Für $y = -ax$ ist (4.1.11) äquivalent zu

$$1 - a^r \leq r(1+a), \qquad 0 \leq a \leq 1,\ r > 1,$$

und diese Ungleichung folgt sofort aus (5.2.3).
Gilt $a > 1$ und damit $|x| \vee |y| = |y|$, betrachten wir wieder zunächst den Fall $y = ax$. (4.1.11) ist dann äquivalent zu

$$a^r - 1 \leq r(a-1)a^{r-1}, \qquad a > 1,\ r > 1, \tag{5.2.4}$$

und wir setzen $f_r(a) := r(a-1)a^{r-1} - a^r + 1$ für alle $a > 1$. Wegen $r > 1$ ist $f_r'(a) = ra^{r-1}((r-1) - \frac{r-1}{a}) > 0$ und f_r daher streng monoton wachsend. In Verbindung mit $\lim_{a\to 1} f_r(a) = 0$ liefert dies (5.2.4). Für $y = -ax$ folgt schließlich

$$a^r - 1 \leq r(1+a)a^{r-1}, \qquad a > 1,\ r > 1,$$

direkt aus (5.2.4), und wir erhalten insgesamt (4.1.11). □

5.3 Allgemeingültige Aussagen

Lemma 5.3.1. *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f \geq 0,\ f \in L_1$ und $f(t+\varepsilon) \geq \theta(\varepsilon)f(t)$ für alle $\varepsilon > 0$ und $t \in \mathbb{R}$, wobei $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\theta(\varepsilon) = 1$ sei. Dann ist f d.R.i.*

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $\theta(\varepsilon) \uparrow 1$ für $\varepsilon \downarrow 0$. Mit Hilfe der gegebenen Ungleichung und der strengen Monotonie von θ können wir für das Integral über f folgende Abschätzungen nach oben und unten vornehmen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \inf_{[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f &= \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \inf_{0\leq x\leq\varepsilon} f(n\varepsilon + x) \\
&\geq \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \inf_{0\leq x\leq\varepsilon} \theta(x)f(n\varepsilon) \\
&= \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(\varepsilon)f(n\varepsilon) \\
&= \varepsilon\theta(\varepsilon)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} \frac{1}{\theta(x)} f(n\varepsilon) \\
&\geq \varepsilon\theta(\varepsilon)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{0\leq x\leq\varepsilon} f(n\varepsilon - x) \\
&= \varepsilon\theta(\varepsilon)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[(n-1)\varepsilon,n\varepsilon]} f \\
&\geq \theta(\varepsilon)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} f \\
&= \theta(\varepsilon)^2 \int f
\end{aligned}$$

und analog

$$\varepsilon \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f \leq \frac{1}{\theta(\varepsilon)^2} \int f.$$

Insgesamt gilt somit

$$\varepsilon\theta(\varepsilon)^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f \leq \int f \leq \varepsilon \frac{1}{\theta(\varepsilon)^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \inf_{[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon]} f,$$

und für $\varepsilon \downarrow 0$ konvergieren obere und untere Summe gegen $\int f$. □

Lemma 5.3.2. *Ist eine Funktion $f \in L_1$, so ist $\bar{f}$ d.R.i.*

Beweis. Da Positiv-und Negativteil von f getrennt betrachtet werden können, nehmen wir ohne Einschränkung $f \geq 0$ an. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\bar{f}(t+\varepsilon) &= \int_{-\infty}^{t+\varepsilon} \mathrm{e}^{-(t+\varepsilon-u)} f(u)du \\
&\geq e^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-u)} f(u)du \\
&= e^{-\varepsilon} \bar{f}(t).
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-\varepsilon} = 1$ folgt mit Lemma 5.3.1 die Behauptung. □

Lemma 5.3.3. *Sei v ein endliches Maß und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine d.R.i. Funktion. Dann gilt mit Hilfe der Definition des Glättungsoperators gemäß (2.3.5)*

$$\bar{f} * v(t) = \overline{f * v}(t).$$

Beweis. Die Behauptung folgt, indem wir im inneren Integral von $\bar{f} * v(t)$ die Substitution $x = u - s$ durchführen und den Satz von Fubini anwenden:

$$\begin{aligned}
\bar{f} * v(t) &= \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(t-s)v(ds) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t-s} \mathrm{e}^{-(t-s-x)} f(x)dx\ v(ds) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-u)} f(u-s)du\ v(ds) \\
&= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-u)} f * v(u)du \\
&= \overline{f * v}(t).
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.3.4. *Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $V_n := \sum_{i=1}^n Y_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist ein Maß η durch*

$$\eta(dx) := e^{\kappa x} P(Y_1 \in dx), \qquad \kappa > 0,$$

definiert, so gilt

$$\eta^{*(n)}(dx) = e^{\kappa x} P(V_n \in dx).$$

Beweis. Sei $S_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es genügt, die Behauptung für halboffene Intervalle als Erzeuger von $\mathbb{B}$ nachzurechnen. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ folgt dann mittels

$$\begin{aligned}
\eta^{*(n)}((-\infty, t]) &= \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x_1 + \ldots + x_n)\eta(dx_1) \ldots \eta(dx_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x_1 + \ldots + x_n)\mathrm{e}^{\kappa(x_1+\ldots+x_n)} P^{Y_1}(dx_1) \ldots P^{Y_n}(dx_n) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x)\mathrm{e}^{\kappa x}(P^{Y_1} \otimes \ldots \otimes P^{Y_n})^{S_n}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x)\mathrm{e}^{\kappa x} P^{Y_1} * \ldots * P^{Y_n}(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,t]}(x)\mathrm{e}^{\kappa x} P(V_n \in dx)
\end{aligned}$$

die Behauptung. □

Korollar 5.3.5. *Seien X, $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte sowie echt positive Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $V_n := \sum_{i=1}^n \log X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist*

$$P_\kappa(X \in dx) := |x|^\kappa P(X \in dx)$$

für alle $\kappa > 0$, so folgt

$$P_\kappa^{V_n}(dx) = e^{\kappa x} P^{V_n}(dx).$$

Beweis. Wegen $P_\kappa^{V_n} = (P_\kappa^{\log X})^{*(n)}$ und

$$\begin{aligned}
P_\kappa(\log X \leq t) &= P_\kappa(X \leq \mathrm{e}^t) \\
&= \int_{(0,\mathrm{e}^t]} |x|^\kappa P(X \in dx) \\
&= E\mathbf{1}_{\{0<X\leq \mathrm{e}^t\}} X^\kappa \\
&= E\mathbf{1}_{\{-\infty<\log X\leq t\}} \mathrm{e}^{\kappa \log X} \\
&= \int_{(-\infty,t]} \mathrm{e}^{\kappa x} P(\log X \in dx)
\end{aligned}$$

gilt $P_\kappa^{\log X}(dx) = \mathrm{e}^{\kappa x} P^{\log X}(dx)$. Mit Lemma 5.3.4 folgt somit die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[AET] Alsmeyer, G. (1991). Erneuerungstheorie. B.G. Teubner, Stuttgart.

[ASP] Alsmeyer, G. (2000). Stochastische Prozesse Teil 1. *Skripten zur Mathematischen Statistik* **33**.

[AWT] Alsmeyer, G. (2000). Wahrscheinlichkeitstheorie. *Skripten zur Mathematischen Statistik* **30**, 2. Auflage.

[Baw] Bawa, V.S. (1975). On optimal pollution control policies. *Management Science, Application Series* **21**, 1397-1404.

[BGT] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987). Regular Variation. *Encyclopedia of Mathematics* **27**, Camebridge University Press.

[Bor] Borokov, A.A. (1976). Stochastic Processes in Queueing Theory. Springer, New York.

[Cav] Cavalli-Sforza, L. (1975). Cultural and biological evolution: a theoretical inquiry. In *Proceedings of the Conference on Directions for Mathematical Statistics,* ed. S.G. Ghurye. *Advances in Applied Probability - Special Supplement* **7**, 90-99.

[CsF] Cavalli-Sforza, L., Feldman, M.W. (1973). Models for cultural inheritance I. Group mean and within group variation. *Theoretical Population Biology* **4**, 42-55.

[Cha] Chamayou, J.-F. (1973). Volterra's functional integral equations of the statistical theory of damage. *Journal of Computational Physics* **13**, 70-93.

[ChL] Chamayou, J.-F., Letac, G. (1991). Explicit stationary distributions for compositions of random functions and products of random matrices. *Journal of Theoretical Probability* **4**, 3-36.

[ChS] Chamayou, J.-F., Schorr, B. (1975). On a class of random variables arising in atomic cascade models. Report, European Organization for Nuclear Research, Geneva.

[ChM] Chandrasekhar, S., Münch, G. (1950). The theory of the fluctuations in brightness of the Milky Way, I. and II. *Astrophysical Journal* **112**, 380-398.

[HRV] de Haan, L., Resnick, S.I., Rootzén, H. und de Vries, C.G. (1989). Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation, with applications to ARCH processes. *Stochastic Processes and their Applications* **32**, 213-224.

[Eng] Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedastic models with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* **50**, 987-1007.

[Fel] Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and its Applications 2. 2nd ed. Wiley, New York.

[FiLi] Fischer, W., Lieb, I. (1994). Funktionentheorie. Vieweg Braunschweig, 7. Auflage.

[FrB] Freitag, E., Busam, R. (2000). Funktionentheorie 1. Springer, 3. Auflage.

[Gad] Gade, H.G. (1973). Deep water exchanges in a sill fjord: a stochastic process. *Journal of Physical Oceanography* **3**, 213-219.

[Gan] Ganelius, T. H. (1962). The Remainder in Wiener's Tauberian theorem. *Acta Universitatis Gothoburgensis. Mathematica Gothoburgensia* **1**.

[Gol] Goldie, C.M. (1991). Implicit Renewal Theory and Tails of Solutions of Random Equations. *The Annals of Applied Probability* **1**, 126-166.

[Gr1] Grincevičius, A.K. (1974). On the continuity of the distribution of a sum of dependent variables connected with independent walks on lines. *Theory of Probability and its Applications* **19**, 163-168.

[Gr2] Grincevičius, A.K. (1974). A central limit theorem for the group of linear transformations of the real axis. *Soviet Mathematics Doklady* **15**, 1512-1515.

[Gr3] Grincevičius, A.K. (1975). Limit theorems for products of random linear transformations on the line. *Lithuanian Mathematical Journal* **15**, 568-579.

[Gr4] Grincevičius, A.K. (1975). One limit distribution for a random walk on the line. *Lithuanian Mathematical Journal* **15**, 580-589.

[Gr5] Grincevičius, A.K. (1980). Products of random affine transformations. *Lithuanian Mathematical Journal* **20**, 279-282.

[Gr6] Grincevičius, A.K. (1981). A random difference equation. *Lithuanian Mathematical Journal* **21**, 302-306.

[Gut] Gut, A. (1974). On the moments and limit distributions of some first passage times. *The Annals of Probability* **2**, 277-308.

[Hel] Helland, I.S. (1974). A random exchange model with constant decrements. Report No. 52, Mat. inst., adv. B. Universtity of Bergen.

[HeN] Helland, I.S., Nilsen, T.S. (1976). On a general random exchange model. *Journal of Applied Probability* **13**, 781-790.

[K73] Kesten, H. (1973). Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Mathematica* **131**, 207-248.

[La1] Lassner, F. (1974). Sommes de produits de variables aléatoires indépendantes. Thesis, Université de Paris VI.

[La2] Lassner, F. (1974). Sur certains types de mécanismes additifs en economie stochastique. C.R. Acad. Sci. Paris **A279**, 33-36.

[LLR] Leadbetter, M.R., Lindgren, G., Rootzén, H. (1983). Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. Springer, New York.

[LeR] Leadbetter, M.R., Rootzén, H. (1988). Extremal theory for stochastic processes. *The Annals of Probability* **16**, 431-478.

[Let] Letac, G. (1986). A contraction principle for certain Markov chains and its applications. *Random Matrices and their Applications. Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conf. 1984* (J. E. Cohen, H. Kesten and C. M. Newman, eds.). *Contemp. Math.* **50**, 263-273. Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[Loy] Loynes, R.M. (1962). The stability of a queue with non-independent interarrival and service times. *Proceedings of the Camebridge Philosophical Society* **58**, 497-520.

[Lyt] Lyttkens, S. (1956). The remainder in Tauberian theorems, II. *Arkiv för Matematik* **3**, 315-349.

[Mak] Maksimov, V.M. (1973). A generalized Bernoulli scheme and its limit distributions. *Theory of Probability and its Applications* **18**, 521-530.

[PaU] Paulson, A.S., Uppuluri, V.R.R. (1972). Limit laws of a sequence determined by a random difference equation governing a one-compartment system. *Mathematical Biosciences* **13**, 325-333.

[PeH] Perrakis, S., Henin, C. (1974). Evaluation of risky investments with random timing of cash returns. *Management Sciences, Theory Series* **21**, 79-86.

[Sol] Solomon, F. (1975). Random walks in a random environment. *The Annals of Probability* **3**, 1-31.

[Sto] Stone, C. (1966). On absolutely continuous components and renewal theory. *The Annals of Mathematical Statistics* **37**, 271-275.

[Tak] Takács, L. (1955). On stochastic processes connected with certain physical recording apparatuses. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6**, 363-379.

[Ufs] Uppuluri, V.R.R., Feder, P.I., Shenton, L.R. (1967). Random difference equations occurring in one-compartment models. *Mathematical Biosciences* **1**, 143-171.

[Ve1] Vervaat, W. (1974). On records, maxima and a stochastic difference equation. Report 73-11, Department of Mathematics, University of Amsterdam.

[Ve2] Vervaat, W. (1979). On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. *Advances in Applied Probability* **11**, 750-783.

Ich versichere hiermit, diese Arbeit selbständig verfaßt und dabei keine anderen Hilfsmittel als die in der Literaturliste angegebenen verwendet zu haben. Alle Stellen, die den Ausführungen anderer Autoren wörtlich oder sinngemäß entnommen worden sind, habe ich durch Angabe der Quellen als solche kenntlich gemacht.

Münster, den 9. Oktober 2005