Über stochastische Maximin-Fixpunktgleichungen

Matthias Meiners

26. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Maximinbäume **4**

1.1 Maximinbäume 4

1.2 Analytische Hilfsresultate 6

1.2.1 Allgemeine Resultate zum Fixpunktverhalten reeller Funktionen 6

1.2.2 Kurvendiskussion der Funktionen $x \longmapsto \big(1-(1-x)^b\big)^b$ 8

1.3 Konvergenzergebnisse für den Wert eines Maximinbaums . . . 12

2 Maximin-Fixpunktgleichungen **23**

2.1 Die allgemeine Fixpunktgleichung und ihre Lösungen 23

2.1.1 Bedingungen für die Existenz von Momenten 29

2.2 Die Lösungen im Maximin-Fall 32

2.2.1 Die Lösungen der Maximin-Fixpunktgleichungen und die analytische Transformierte 36

2.2.2 Fixpunktgleichungen mit zufälliger Anzahl von Maxima und Minima 40

2.3 $\mathcal{L}_{g,\xi}$ als Teilmenge von $\mathbb{M}_p$ 44

3 Bestimmung der Verteilung von W^* **51**

3.1 Konvergenzbedingungen für $(S_g^{\circ(n)}(Q))_n$ im Maximin-Fall . . 51

3.2 Bestimmung der Verteilung von W^* 56

4 Eine weitere Klasse stochastischer Fixpunktgleichungen **60**

4.1 Einführende Überlegungen 61

4.2 Eine Charakterisierung von $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ 62

4.3 Bestimmung von $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ im Falle $t_1 = \ldots = t_b < 0$ 66

4.4 Der Nachweis von $P(W^* \in \cdot) \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ 68

Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt gewisse stochastische Maximin-Fixpunktgleichungen. Das sind Gleichungen des Typs

$$(*) \quad X \stackrel{d}{=} f(X_1, X_2, \ldots)$$

mit unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$, die allesamt dieselbe Verteilung wie die Zufallsgröße X haben, und einer Funktion $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$, die ein aus Maxima und Minima zusammengesetzter Ausdruck ist. Dabei benutzen wir für Zufallsgrößen X und Y die Schreibweise

$$X \stackrel{d}{=} Y :\Longleftrightarrow X \sim Y :\Longleftrightarrow P^X = P^Y,$$

wobei hier und überall dort in dieser Arbeit, wo Zufallsgrößen auftreten, unterstellt wird, dass diese auf einem geeigneten, nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definiert sind. Allgemeinere Varianten der Gleichung $(*)$ erhält man, indem man z.B. einen Parameter θ aus einer geeigneten Paramtermenge Θ einführt oder eine von der Folge $(X_i)_{i\geq 1}$ unabhängige Folge $(T_1, T_2, \ldots)$ von Zufallsgrößen mit vorgegebenem Abhängigkeitsverhältnis in die Gleichung einbaut. Auf eine Verallgemeinerung der letzteren Art wird in dieser Arbeit nur kurz in Abschnitt 2.2.2 eingegangen.

Ein Beispiel für eine stochastische Fixpunktgleichung ist also:

$$(**) \quad X \stackrel{d}{=} \max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq m_i} X_{i,j}$$

mit Zahlen $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$. In weiten Teilen dieser Arbeit werden wir eine ähnliche Gleichung betrachten, die aus $(**)$ hervorgeht, indem man sie mit einem Parameter $\xi \in]1, \infty[$ skaliert:

$$(***) \quad X \stackrel{d}{=} \xi \cdot \max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq m_i} X_{i,j}.$$

Gleichungen der Typen $(**)$ oder $(***)$ treten z.B. im Kontext von Spielbäumen auf, die zur Analyse von Spielen auf der Basis vollständiger Informationen benutzt werden. In einem solchen Spiel – wie z.B. Schach – spielen zwei Spieler – nennen wir sie Weiß und Schwarz – gegeneinander.

Sie starten in einer Grundstellung und ziehen abwechselnd (beginnend mit Spieler Weiß), wobei jeder Spieler in jeder Runde $b \geq 2$ Spielzüge zur Auswahl hat. Nach $2k$ Zügen ($k \geq 0$) wird eine von b^{2k} Endstellungen erreicht, die allesamt eine Bewertung in Form einer reellen Zahl tragen. Spieler Weiß möchte nach $2k$ Zügen eine Stellung mit möglichst hoher Bewertung erreichen, Spieler Schwarz eine Stellung mit möglichst niedriger Bewertung. Dabei ist das Spiel nach $2k$ Zügen nicht notwendigerweise beendet; es wird dann lediglich eine Bewertung der Spielstellung vorgenommen.

Die möglichen Züge und die sich ergebenden Spielstellungen können durch einen b-adischen Baum der Höhe $2k$ dargestellt werden. Jedes Blatt des Baums wird mit dem Wert der durch das Blatt repräsentierten Endstellung markiert. An allen inneren Knoten gerader Höhe (insbesondere an der Wurzel, die die Höhe 0 hat) befindet sich die Markierung $\vee$, an allen Knoten ungerader Höhe die Markierung $\wedge$. Der Wert des Baums an einem inneren Knoten wird durch das Maximum der Werte der ihm nachfolgenden Knoten gegeben, falls der Knoten mit $\vee$ markiert ist, und durch das Minimum der Werte der ihm nachfolgenden Knoten, falls der Knoten mit $\wedge$ markiert ist. Der Wert an der Wurzel heißt auch Wert des Spiels. Die Markierung mit $\vee$ und $\wedge$ entspricht dem Willen der Spieler, den Zug auszuführen, der den Wert des Spiels maximiert bzw. minimiert.

Als Beispiel soll ein Schachrechner angeführt werden, der eine vorliegende Stellung – nicht notwendigerweise die Ausgangsstellung im Schachspiel – analysiert. Der Rechner kann bis in eine Tiefe von $2k$, $k \geq 0$, alle möglichen Züge beider Kontrahenten durchspielen und bewertet die dann entstehenden Stellungen. Eine mögliche (wenn auch sehr einfache Bewertung) ist die folgende:
Eine Endstellung wird mit

- 1 bewertet, falls es sich um eine Stellung handelt, in der Schwarz schachmatt gesetzt ist,
- 0 bewertet, falls weder Spieler Weiß noch Spieler Schwarz schachmatt gesetzt ist,
- -1 bewertet, falls Spieler Weiß schachmatt gesetzt ist.

Feinere Bewertungen ergeben sich, wenn man in dem Falle, dass noch keiner der beiden Spieler matt gesetzt ist, eine Bewertung mit einer Zahl $\in [-1, 1]$ vornimmt, die größer ist, je besser die Stellung für Spieler Weiß ist.

Wir betrachten in dieser Arbeit Bäume mit zufälliger Bewertung der Blätter, d.h. Bäume, deren Blätter mit u.i.v. Zufallsgrößen $V_1, \ldots, V_{b^{2k}}$ markiert sind. Dann ist der Wert des Maximinbaums ebenfalls eine Zufallsgröße, die wir mit W_k für einen Baum der Höhe $2k$ bezeichnen. Für $k \to \infty$ konvergiert W_k in Verteilung. Die Grenzverteilung erfüllt dann notwendigerweise eine Fixpunkgleichung vom Typ $(**)$. Für den Fall, dass die Zufallsgrößen

$V_1, \ldots, V_{b^{2k}}$ eine Verteilungsfunktion F haben, die auf $\{0 < F < 1\}$ stetig und streng monoton wachsend ist, haben Ali Khan, Devroye und Neininger gezeigt, dass die Folge $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nach geeigneter Transformation in Verteilung gegen eine Zufallsgröße W^* mit stetiger Verteilungsfunktion konvergiert. W^* erfüllt dann eine Fixpunktgleichung vom Typ $(***)$ (siehe [AKN]).

Diese Ergebnisse werden in Kapitel 1 zusammengetragen. Dabei steht das Konvergenzergebnis von Ali Khan, Devroye und Neininger im Fokus dieser Arbeit. An dieses Ergebnis anschließend stellen sich mehrere Fragen:

1. Wie sieht die Lösungsmenge der im Satz auftretenden Fixpunktgleichung (einem Spezialfall der Gleichung $(***)$) aus?

2. Kann man die Verteilung von W^* bestimmen?

3. Ist die Verteilung von W^* $\lambda\!\!\lambda$-stetig? Wenn ja, gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Version der $\lambda\!\!\lambda$-Dichte ?

4. Welche Momente von W^* existieren?

Ziel dieser Arbeit ist es nun einerseits, diese Fragen zu beantworten. Dies soll über einen Ansatz erfolgen, der stochastische Fixpunktgleichungen in den Vordergrund stellt. Andererseits sollen einige allgemeine Feststellungen über stochastische Maximin-Fixpunktgleichungen gemacht werden.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit dieser allgemeinen Untersuchung stochastischer Maximin-Fixpunktgleichungen (und geeigneter Verallgemeinerungen). Mit Satz 2.1.2 liefert es die Antwort auf die erste Frage. Allgemeine Untersuchungen über die Existenz von Momenten von Lösungen der betrachteten Fixpunktgleichungen liefern den Satz 2.1.6, der insbesondere zeigt, dass alle Momente von W^* endlich sind. Schließlich zeigt Satz 2.2.6, dass die analytische Transformierte von W^* auf ganz $\mathbb{C}$ endlich ist.

Kapitel 3 widmet sich in erster Linie der Beantwortung der zweiten und dritten Frage. Die Sätze 3.1.4 und 3.2.1 lösen diese beiden Fragen. Dabei nimmt die stochastische Fixpunktgleichung für W^* eine Schlüsselrolle bei der Bestimmung der Verteilung von W^* ein.

In Kapitel 4 schließlich wird eine weitere Klasse stochastischer Fixpunktgleichungen betrachtet. Teile der Betrachtungen sind einer noch nicht erschienenen Arbeit von Alsmeyer und Rösler (siehe [AR]) entnommen. Die dort betrachteten Fixpunktgleichungen werden mit Gleichungen des Typs $(***)$ in Verbindung gebracht.

Für die Auswahl des Diplomarbeitsthemas und die Betreuung während der Entstehungsphase möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer danken. Des Weiteren möchte ich allen danken, die mir bei der Fertigstellung dieser Arbeit auf die eine oder andere Weise behilflich waren.

Kapitel 1

Maximinbäume

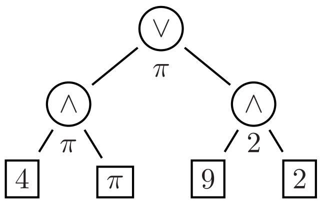
In diesem Kapitel führen wir zunächst b-adisch verzweigte Maximinbäume ein (Abschnitt 1.1) und untersuchen dann das asymptotische Verhalten des Wertes eines zufällig bewerteten b-adisch verzweigten Maximinbaumes. Dies geschieht in erster Linie in Satz 1.3.3. Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir einige analytische Hilfsmittel, die im zweiten Abschnitt des Kapitels bereitgestellt werden.

1.1 Maximinbäume

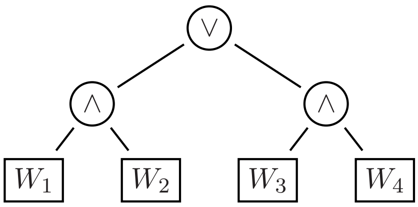
1.1.1 Definition. Gegeben sei ein vollständig b-adisch verzweigter Baum der Höhe $2k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Jeder Knoten mit gerader Höhe $< 2k$, insbesondere also die Wurzel des Baums, sei mit $\vee$ markiert, jeder Knoten mit ungerader Höhe sei mit $\wedge$ markiert. Jedes der b^{2k} Blätter des Baums sei mit einer Zahl markiert. Einen solchen Baum nennen wir *(b-adisch verzweigten) Maximinbaum (der Höhe $2k$)*.

Der Wert des Maximinbaums an einem Blatt wird durch die Zahl gegeben, die das Blatt markiert. Der Wert des Maximinbaums an einem Knoten κ der Höhe $< 2k$ sei das Maximum der Werte des Maximinbaums an den Nachfolgerknoten von κ, falls κ die Marke $\vee$ trägt, und das Minimum der entsprechenden Werte, falls κ die Marke $\wedge$ trägt. Mit dem *Wert des Maximinbaums* bezeichnen wir den Wert des Maximinbaums an der Wurzel.

Ist nun $(W_i)_{1 \leq i \leq b^{2k}}$ eine Familie u.i.v. Zufallsgrößen und wird jedes Blatt des oben beschriebenen Baums von einem der W_i markiert – und zwar verschiedene Blätter von verschiedenen W_i –, so nennen wir den entstehenden Baum einen *zufällig bewerteten (b-adisch verzweigten) Maximinbaum (der Höhe $2k$)*. Die Verteilung von W_1 heißt *Startverteilung des Maximinbaums*. Bezeichnet F die Verteilungsfunktion von W_1 und ist F auf $\{0 < F < 1\}$ stetig und streng monoton wachsend, so sprechen wir von einem *Maximinbaum im Pearlschen Modell*.



Die obige Abbildung zeigt einen binären Maximinbaum der Höhe 2. Unter jedem inneren Knoten ist jeweils der Wert des Baums an diesem Knoten dargestellt.



Diese Abbildung zeigt einen zufällig bewerteten Maximinbaum der Höhe und des Verzweigungsgrades 2.

Den Rest des Kapitels beschäftigen wir uns mit der Verteilung des Wertes eines zufällig bewerteten Maximinbaums, insbesondere in Abschnitt 1.3 mit dem asymptotischen Verhalten dieser Verteilung beim Grenzübergang $k \to \infty$. Bevor wir eine grundsätzliche Feststellung hinsichtlich der Verteilung des Wertes eines zufällig bewerteten Maximinbaums machen, führen wir eine Notation ein:

1.1.2 Notation. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $g : X \longrightarrow X$ eine Funktion. Dann setzen wir

$$g^{\circ(0)} := \mathrm{id}_X$$

und

$$g^{\circ(k+1)} := g \circ g^{\circ(k)} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Ist g eine Bijektion auf X, so bezeichnen wir mit $g^{\circ(-1)}$ die Umkehrfunktion von g auf X und setzen weiter

$$g^{\circ(-k)} := \left(g^{\circ(-1)}\right)^{\circ(k)}$$

für $k \in \mathbb{N}$.

1.1.3 Bemerkung. Sei $b \geq 2$ fest und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \left(1 - (1-x)^b\right)^b$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei W_k der Wert eines zufällig bewerteten Maximinbaums der Höhe $2k$ mit Verzweigungsgrad b. Alle W_k haben die Startverteilung $\mathcal{L}(W_0)$. Weiter sei F_k die zu W_k gehörige Verteilungsfunktion ($k \in \mathbb{N}_0$). Dann gilt für jedes $k \geq 0$:

$$F_k = g^{\circ(k)} \circ F_0,$$

was man durch Induktion nach k beweisen kann.

1.2 Analytische Hilfsresultate

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst ein allgemeines Lemma über das Fixpunktverhalten reeller Funktionen beweisen. Das Lemma ist zwar sehr einfach, wird allerdings im Verlaufe der Arbeit so häufig benötigt, dass es zumindest einmal herausgestellt werden soll. Anschließend wird die Aussage des Lemmas in einem weiteren Lemma unter der Zusatzvoraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit der betrachteten Funktionen verschärft. Danach wenden wir uns den speziellen Funktionen zu, die in Bemerkung 1.1.3 auftreten, und diskutieren ihr Verhalten im Einheitsintervall. Das Wissen über dieses Verhalten erweist sich insbesondere in Abschnitt 1.3 als nützlich.

1.2.1 Allgemeine Resultate zum Fixpunktverhalten reeller Funktionen

1.2.1 Lemma. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, monoton wachsende Funktion. Weiter seien $c_0 < c_1$ zwei aufeinander folgende Fixpunkte von g, d.h. es gelte $g(c_i) = c_i$ für $i = 0, 1$ und $g(x) \neq x$ für alle $x \in \,]c_0, c_1[$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Es gilt entweder $g(x) < x$ für alle $x \in \,]c_0, c_1[$ oder $g(x) > x$ für alle $x \in \,]c_0, c_1[$.

(b) g bildet $[c_0, c_1]$ surjektiv auf sich selbst ab; ist g zusätzlich streng monoton wachsend, so bildet g $[c_0, c_1]$ bijektiv auf sich selbst ab.

(c) Ist $g < \mathrm{id}$ auf $]c_0, c_1[$, so gilt: $g^{\circ(n)}(x) \downarrow c_0$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in x auf jedem kompakten Intervall $[c_0, c] \subseteq [c_0, c_1[$.

(d) Ist $g > \mathrm{id}$ auf $]c_0, c_1[$, so gilt: $g^{\circ(n)}(x) \uparrow c_1$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in x auf jedem kompakten Intervall $[c, c_1] \subseteq \,]c_0, c_1]$.

Beweis. (a) folgt aus dem Zwischenwertsatz. Die Surjektivität unter (b) folgt ebenfalls aus dem Zwischenwertsatz; ist g zusätzlich streng monoton wachsend, so ist g auch injektiv auf $[c_0, c_1]$, also insgesamt bijektiv. Für den Nachweis von (c) nehmen wir nun $g < \mathrm{id}$ auf $]c_0, c_1[$ an. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$g^{\circ(n)}(c) \geq g^{\circ(n+1)}(c) \geq g^{\circ(n+1)}(c_0) = c_0,$$

d.h. die Folge $(g^{\circ(n)}(c))_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend und nach unten gegen c_0 beschränkt, also konvergent. Für $q := \lim_{n\to\infty} g^{\circ(n)}(c)$ gilt dann:

$$g(q) = g\left(\lim_{n\to\infty} g^{\circ(n)}(c)\right) = \lim_{n\to\infty} g^{\circ(n+1)}(c) = q,$$

also ist q ein Fixpunkt von g. Es kommt nur c_0 in Frage. Weiter gilt für jedes $x \in [c_0, c]$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$c_0 \leq g^{\circ(n)}(x) \leq g^{\circ(n)}(c) \underset{n\to\infty}{\downarrow} c_0,$$

d.h. wir erhalten (c). Der Nachweis von (d) kann analog zum Beweis von (c) geführt werden. □

Ein weiteres Lemma, das sich auch im Hinblick auf spätere Überlegungen als nützlich erweist und deshalb als eigenständiges Ergebnis formuliert ist, beleuchtet die Konvergenzgeschwindigkeit von $(g^{\circ(n)}(c))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den entsprechenden Fixpunkt.

1.2.2 Lemma. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und monoton wachsend auf I. Weiter seien q_0, q_1 zwei aufeinander folgende Fixpunkte von g in I, d.h. $g(q_0) = q_0 < q_1 = g(q_1)$ und $g(x) \neq x$ für alle $x \in]q_0, q_1[$. Sei $c \in]q_0, q_1[$. Nach Lemma 1.2.1 ist $g > \mathrm{id}$ auf $]q_0, q_1[$ oder $g < \mathrm{id}$ auf $]q_0, q_1[$. Es gelten überdies die folgenden Aussagen:*

(a) Im Falle $g > \mathrm{id}$ auf $]q_0, q_1[$ existiert für jedes $\gamma > g'(q_1)$ eine Konstante $M_\gamma > 0$, so dass

$$\left|q_1 - g^{\circ(n)}(x)\right| \leq M_\gamma \cdot \gamma^n$$

für alle $x \in [c, q_1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ist $g'(q_1) > 0$, so existiert für jedes $0 \leq \beta < g'(q_1)$ eine Konstante $m_\beta > 0$, so dass

$$\left|q_1 - g^{\circ(n)}(x)\right| \geq m_\beta \cdot \beta^n$$

für alle $x \in [q_0, c]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

(b) Im Falle $g < \mathrm{id}$ auf $]q_0, q_1[$ existiert für jedes $\gamma > g'(q_0)$ eine Konstante $M_\gamma > 0$, so dass

$$\left|q_0 - g^{\circ(n)}(x)\right| \leq M_\gamma \cdot \gamma^n$$

für alle $x \in [q_0, c]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ist $g'(q_0) > 0$, so existiert für jedes $0 \leq \beta < g'(q_0)$ eine Konstante $m_\beta > 0$, so dass

$$\left|q_0 - g^{\circ(n)}(x)\right| \geq m_\beta \cdot \beta^n$$

für alle $x \in [c, q_1]$ und $n \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis. Es sei die Situation von (a) gegeben und $\gamma > g'(q_1)$ vorgelegt. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $g'(x) \leq \gamma$ für alle $x \in [q_1 - \delta, q_1]$ gilt. Dies ist möglich, da g stetig differenzierbar ist. Nach Lemma 1.2.1 konvergiert $g^{\circ(n)}(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[c, q_1]$ gegen q_1, d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $g^{\circ(n)}(x) \in [q_1 - \delta, q_1]$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in [c, q_1]$ gilt. Unter Benutzung der Identität

$$\left(g^{\circ(n)}\right)' = \prod_{j=0}^{n-1} g' \circ g^{\circ(j)}$$

erhält man nun für alle $n \geq n_0$ und $x \in [c, q_1]$:

$$\left(g^{\circ(n)}\right)'(x) \leq \gamma^{n-n_0} \prod_{j=0}^{n_0-1} g'\left(g^{\circ(j)}(x)\right) \leq \frac{\|g'\|_{[q_0,q_1]}^{n_0}}{\gamma^{n_0}} \cdot \gamma^n.$$

Insgesamt erhält man die Abschätzung

$$\left(g^{\circ(n)}\right)'(x) \leq M'_\gamma \cdot \gamma^n \tag{1.1}$$

für alle $x \in [c, q_1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$M'_\gamma := \begin{cases} \left(\|g'\|_{[q_0,q_1]} \vee 1\right)^{n_0} \gamma^{-n_0}, & \text{falls } \gamma < 1 \text{ ist,} \\ \left(\|g'\|_{[q_0,q_1]} \vee 1\right)^{n_0}, & \text{falls } \gamma \geq 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Setzt man $M_\gamma := (q_1 - c)M'_\gamma$, so erhält man für alle $x \in [c, q_1]$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung:

$$\left|q_1 - g^{\circ(n)}(x)\right| = (q_1 - x)\left(g^{\circ(n)}\right)'(\xi) \leq M_\gamma \cdot \gamma^n,$$

wobei ξ in diesem Kontext eine von x abhängige Zwischenstelle $\in]x, q_1[\subseteq [c, q_1]$ bezeichnet.

Sei nun $g'(q_1) > 0$ und $0 < \beta < g'(q_1)$ (im Falle $\beta = 0$ ist nichts zu zeigen). Dann wählen wir $\delta > 0$ so klein, dass $\beta \leq g'(x)$ für alle $x \in [q_1 - \delta, q_1]$ gilt. Wählt man ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $g^{\circ(n_1)}(c) \in [q_1 - \delta, q_1]$ ist, erhält man ähnlich wie oben

$$\begin{aligned} \left|q_1 - g^{\circ(n)}(x)\right| \geq \left|q_1 - g^{\circ(n)}(c)\right| &= \left|q_1 - g^{\circ(n-n_1)}(g^{\circ(n_1)}(c))\right| \\ &= \left(q_1 - g^{\circ(n_1)}(c)\right) \cdot \left(g^{\circ(n-n_1)}\right)'(\xi) \\ &\geq \left(q_1 - g^{\circ(n_1)}(c)\right) \cdot \beta^{n-n_1} = c_\beta \cdot \beta^n \end{aligned}$$

für alle $x \in [q_0, c]$ und $n \geq n_1$, wobei $c_\beta := (q_1 - g^{\circ(n_1)}(c)) \cdot \beta^{-n_1} > 0$ sei und ξ eine Zwischenstelle $\in]g^{\circ(n_1)}(c), q_1[$ ist. Geht man von c_β zu einem hinreichend kleinen $m_\beta > 0$ über, so kann man erreichen, dass die behauptete Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Der Nachweis von (b) verläuft analog zum Nachweis von (a). □

1.2.2 Kurvendiskussion der Funktionen $x \longmapsto \left(1 - (1-x)^b\right)^b$

1.2.3 Lemma. *Sei $b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 2$. Weiter sei $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $g(x) := (1 - (1-x)^b)^b$ $(x \in [0,1])$. Dann hat g genau einen Fixpunkt α in $]0,1[$.*

Beweis. g hat nach dem Zwischenwertsatz mindestens einen Fixpunkt in $]0,1[$, da $g(0)=0$, $g(1)=1$ ist und g eine verschwindende Ableitung sowohl in 0 als auch in 1 besitzt.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass g höchstens einen Fixpunkt in $]0,1[$ besitzt. Dazu betrachten wir die zweite Ableitung von g. Es gilt für alle $x \in [0,1]$:

$$g''(x) = b^2(b-1)(1-x)^{b-2}\left(1-(1-x)^b\right)^{b-2}\left((b+1)(1-x)^b - 1\right). \tag{1.2}$$

Hier ist für $x \in]0,1[$ genau dann $g''(x)=0$, wenn

$$(1-x)^b = \frac{1}{b+1}$$

gilt, d.h. nur für

$$x = 1 - \sqrt[b]{\frac{1}{b+1}} =: x_0.$$

Dabei ist, wie man der Darstellung von g'' in (1.2) ansieht, $g'' > 0$ auf $]0,x_0[$, $g'' < 0$ auf $]x_0,1[$. Also kann g höchstens einen Fixpunkt α in $]0,1[$ besitzen. □

1.2.4 Bemerkung. In der Situation von Lemma 1.2.3 gilt für $b \geq 2$ und dazugehöriges α:

$$(1-\alpha)^b = \alpha,$$

d.h. α ist der eindeutige Fixpunkt der Funktion $x \longmapsto (1-x)^b$ in $]0,1[$.

Begründung. Für die Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (1-x)^b$, gilt offenbar $\tilde{g}(0)=1$ und $\tilde{g}(1)=0$. Darüber hinaus ist $\tilde{g}$ auf $[0,1]$ streng monoton fallend, hat also genau einen Fixpunkt ζ in $]0,1[$. Wegen $g = \tilde{g}\circ\tilde{g}$ ist ζ auch ein Fixpunkt von g in $]0,1[$. Daher impliziert die Eindeutigkeitsaussage in Lemma 1.2.3 $\alpha = \zeta$. □

Die Funktion $\tilde{g}$ steht im Zusammenhang zum Übergang $P(W \in \cdot) \longmapsto P(-\min_{1\leq j\leq b} W_j \in \cdot)$ für stochastisch unabhängige, identisch wie W verteilte Zufallsgrößen W_j. Es gilt nämlich für die Verteilungsfunktion F von W und alle $t \in \mathbb{R}$:

$$P\left(-\min_{1\leq j\leq b} W_j \leq t\right) = P(W \geq -t)^b = \tilde{g}\left(F((-t)-)\right).$$

Diese Beobachtung wird in Kapitel 4 wieder aufgegriffen.

1.2.5 Lemma. *Seien $b \in \mathbb{N} - \{1\}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := (1-(1-x)^b)^b$ ($x \in \mathbb{R}$). Des Weiteren sei α die eindeutige Zahl in $]0,1[$ mit $g(\alpha)=\alpha$ und x_0 wie in Lemma 1.2.3 die Nullstelle der zweiten Ableitung von g in $]0,1[$. Dann ist $\alpha < x_0$ und g in einer Umgebung von α (nämlich $]0,x_0[$) konvex.*

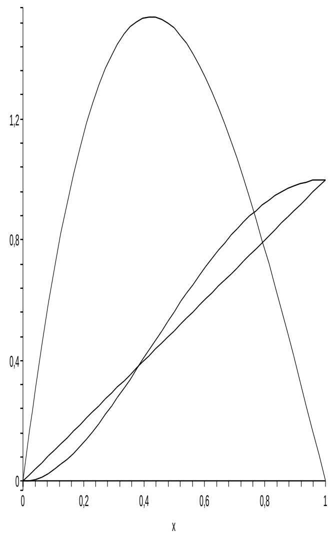


Abbildung 1.1: Die Abbildung $x \longmapsto \bigl(1-(1-x)^2\bigr)^2$ mit Ableitung

Beweis. Wir zeigen, dass $x_0 \in]\alpha, 1[$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass $g(x_0) > x_0$ ist. (Dies zeigt die Behauptung, denn es gilt $g > \mathrm{id}$ auf $]\alpha, 1[$ und $g < \mathrm{id}$ auf $]0, \alpha[$ nach den Lemmata 1.2.1 und 1.2.3.) Es gilt nun:

$$g(x_0) = \Bigl(1-(1-x_0)^b\Bigr)^b = \left(1-\frac{1}{b+1}\right)^b.$$

Es ist also zu zeigen, dass für alle $b \geq 2$

$$\left(1-\frac{1}{b+1}\right)^b > 1-\sqrt[b]{\frac{1}{b+1}}$$

gilt. Für $b=4$ gilt $1-\sqrt[b]{1/(b+1)} = 1-\sqrt[4]{1/5} < e^{-1} < (\frac{4}{5})^4 = (1-\frac{1}{b+1})^b$. Wegen $(1-\frac{1}{b+1})^b \downarrow e^{-1}$ und $1-\sqrt[b]{1/(b+1)} \downarrow 0$ für $b \to \infty$ folgt die Behauptung für alle $b \geq 4$. Für $b = 2, 3$ kann man die Behauptung nachrechnen. $\square$

Der Funktionsverlauf der Abbildung $x \longmapsto (1-(1-x)^2)^2$ im Einheitsintervall ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Abbildung 1.2 auf Seite 11 zeigt die Graphen der Funktionen $x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$ für $b = 2, 3, 5, 8, 13$. Wie man dort sieht, ähneln sich die Funktionsverläufe qualitativ. Die Funktionen können durch den mit wachsendem b fallenden Fixpunkt $\in]0, 1[$ unterschieden werden.

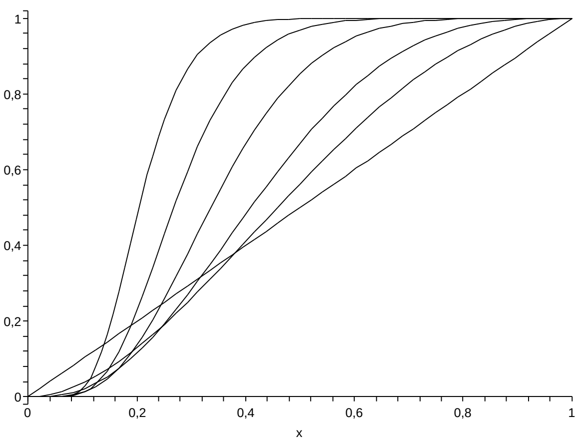


Abbildung 1.2: Die Abbildungen $x \longmapsto \left(1-(1-x)^b\right)^b$ für $b = 2, 3, 5, 8, 13$ (im Vergleich mit der Abbildung $x \longmapsto x$)

Der Beweis von Lemma 1.2.5 zeigt, dass man für jede Funktion $x \mapsto (1-(1-x)^b)^b$ den zugehörigen Fixpunkt $\alpha \in]0,1[$ nach oben durch $1 - \sqrt[b]{1/(b+1)}$ abschätzen kann. Wir interessieren uns nun auch für eine nichttriviale untere Schranke von α in $]0,1[$:

1.2.6 Lemma. *In der Situation von Lemma 1.2.5 gilt* $b^{-\frac{b}{b-1}} < \alpha$. *Insgesamt hat man damit die Abschätzungen*

$$b^{-\frac{b}{b-1}} < \alpha < 1 - \sqrt[b]{\frac{1}{b+1}}. \tag{1.3}$$

Beweis. Die zu beweisende Ungleichung kann man wie im Beweis von Lemma 1.2.5 unter Zuhilfenahme der Äquivalenz

$$x < \alpha \Leftrightarrow g(x) < x \text{ (für } x \in]0,1[)$$

prüfen. Die rechte Seite der Äquivalenz erhält man (mit $x = b^{-\frac{b}{b-1}}$) für $b = 2, \ldots, 5$ durch explizite Berechnung. Für alle $b \geq 6$ greift die folgende Abschätzung (dabei beachte man, dass g streng monoton wachsend, $(1-(1-1/b)^b)_{b\geq 2}$ fallend und $((\sqrt[b-1]{b})^{-1})_{b\geq 2}$ wachsend ist):

$$\sqrt[b]{g\left(b^{-\frac{b}{b-1}}\right)} < \sqrt[b]{g\left(\frac{1}{b}\right)} = 1-(1-1/b)^b < \frac{2}{3} < \left(\sqrt[b-1]{b}\right)^{-1}.$$

Erheben wir diese Ungleichung in die b-te Potenz, so erhalten wir die behauptete Ungleichung also auch für alle $b \geq 6$. $\square$

Nachdem wir α eingeschachtelt haben, wollen wir nun noch eine obere Schranke für $g'(\alpha)$ finden, die sich im Hinblick auf Satz 2.2.6 als wichtig erweist.

1.2.7 Folgerung. *In der Situation von Lemma 1.2.5 gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\|g'\|_{[0,1]} < b\left(1 - \frac{1}{b+1}\right)^{b-1} \sqrt[b]{b}$,

(b) $g'(\alpha) < b$.

Beweis. Es gilt $g'(x) = b^2\left(1-(1-x)^b\right)^{b-1}(1-x)^{b-1}$ für alle $x \in [0,1]$. Nach Lemma 1.2.3 nimmt die Funktion g' ihr Maximum in $1-(1/(b+1))^{1/b}$ an, d.h. es gilt

$$\|g'\|_{[0,1]} = b^2\left(1 - \frac{1}{b+1}\right)^{b-1}\left(\sqrt[b]{\frac{1}{b+1}}\right)^{b-1} < b\left(1 - \frac{1}{b+1}\right)^{b-1}\sqrt[b]{b}.$$

Des Weiteren gilt stets $g'(\alpha) < \|g'\|_{[0,1]}$, was wegen (a) und $(1-\frac{1}{b+1})^{b-1}\sqrt[b]{b} \downarrow e^{-1}$ $(b \to \infty)$ für $b \geq 3$ die Aussage (b) liefert. Für $b = 2$ gilt $g'(\alpha) = 4\alpha = 2 \cdot (3-\sqrt{5}) < 2$. □

1.3 Konvergenzergebnisse für den Wert eines Maximinbaums

1.3.1 Bemerkung. Seien W_k der Wert eines zufällig bewerteten b-adisch verzweigten Maximinbaums der Höhe $2k$ und F_k die zugehörige Verteilungsfunktion, $k \geq 0$, wobei alle betrachteten Maximinbäume dieselbe Startverteilung $\mathcal{L}(W_0)$ haben. Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$ mit der entsprechenden Funktion g aus Abschnitt 1.1 und dem dazugehörigen Fixpunkt $\alpha \in]0,1[$:

$$F_k(t) = g^{\circ(k)}(F_0(t)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{falls } F_0(t) < \alpha, \\ \alpha, & \text{falls } F_0(t) = \alpha, \\ 1, & \text{falls } F_0(t) > \alpha, \end{cases}$$

man vergleiche dazu auch Lemma 1.2.1. Setzt man also $a := \inf\{t \in \mathbb{R} : F_0(t) \geq \alpha\}$, $b := \sup\{t \in \mathbb{R} : F_0(t) \leq \alpha\}$ und

$$G(t) := \begin{cases} 0, & \text{für } t < a, \\ \alpha, & \text{für } t \in [a,b[, \\ 1, & \text{für } t \geq b, \end{cases}$$

wobei im Falle $a = b$ das Intervall $[a,b[$ definitionsgemäß als leere Menge aufzufassen ist, so konvergiert W_k für $k \to \infty$ in Verteilung gegen die zu G korrespondierende Wahrscheinlichkeitverteilung $\alpha\delta_a + (1-\alpha)\delta_b$.

Im Modell von Pearl (vgl. [P]) werden die Werte an den Knoten gemäß einer Verteilung Q generiert, deren Verteilungsfunktion F_Q im Bereich $0 < F_Q < 1$ stetig und streng monoton wachsend ist. In diesem Fall gilt stets $a = b$ und es liegt die stochastische Konvergenz der Folge $(W_k)_{k \geq 0}$ gegen a vor. Dabei ist a die eindeutige reelle Zahl mit $F_0(a) = \alpha$.

1.3.2 Beispiel. Zur Illustration soll ein ebenfalls von Pearl in der bereits zitierten Arbeit gegebenes Beispiel angeführt werden. Wir betrachten einen Stromkreis mit zwei in Reihe geschalteten Verbrauchern (etwa Glühbirnen). Mit T_1 und T_2 bezeichnen wir die Lebensdauer dieser beiden Komponenten. Der Stromkreis wird unterbrochen, falls einer der beiden Verbraucher ausfällt, d.h. zum Zeitpunkt $T_1 \wedge T_2$. Schaltet man nun zwei solcher Reihenschaltungen parallel, so hat man vier Verbraucher mit Lebensdauern $T_1, \ldots, T_4$:

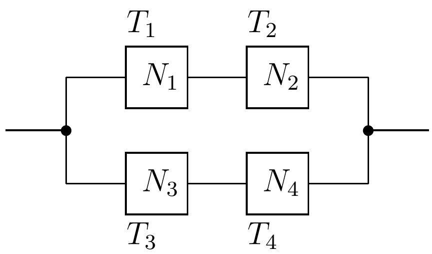


Abbildung 1.3: Netzwerkelement N

Dieser Stromkreis fällt zum Zeitpunkt $(T_1 \wedge T_2) \vee (T_3 \wedge T_4)$ aus, wenn wir unterstellen, dass die Lebensdauer der Verbraucher unabhängig von der angelegten Stromstärke ist. Nun kann man in Abbildung 1.3 N_1, N_2, N_3 und N_4 durch Netzwerkelemente wie N selbst ersetzen und diesen Einsetzungsprozess iterieren.

Allgemeiner betrachten wir eine elektrische Schaltung N, die aus $b \geq 2$ parallel geschalteten Netzwerken $N_1, \ldots, N_b$ besteht, die wiederum jeweils aus b in Reihe geschaltenen Netzwerken $N_{(i,1)}, \ldots, N_{(i,b)}$ $(1 \leq i \leq b)$ bestehen. Jede Schaltung $N_{(i,j)}$ $(1 \leq i, j \leq b)$ sei wieder von der gleichen Gestalt wie N mit Verbrauchern $N_{(i,j,l,m)}$ $(l, m \in \{1, \ldots, b\})$. Wir nehmen diese Einsetzung insgesamt $(k-1)$-mal vor $(k \geq 1)$. N besteht dann aus b^{2k} Netzwerken N_ν, $\nu \in \{1, \ldots, b\}^{2k}$. Die Lebensdauer des Netzwerkes N_ν sei mit T_ν bezeichnet. Wir nehmen an, dass die T_ν u.i.v. Zufallsgrößen mit Verteilung $\mathrm{Exp}(\vartheta)$ $(\vartheta > 0)$ sind, und dass die Lebensdauer eines Netzwerkes nicht von der Stärke des durchfließenden Stroms abhängt. Diese Situation kann man mit einem zufällig bewerteten b-adischen Maximinbaum der Höhe $2k$ modellieren. W_k bezeichne den Wert dieses Baums, dessen Blätter mit den T_ν markiert sind. Dann ist die Lebensdauer von N gleich W_k und nach

Bemerkung 1.3.1 gilt:

$$W_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} -\frac{\log(1-\alpha)}{\vartheta},$$

wobei $1-\alpha$ die eindeutige Lösung der Gleichung $x^b + x = 1$ im offenen Einheitsintervall sei.

Wir interessieren uns in dieser Arbeit allerdings nicht in erster Linie für die Konvergenz gegen (Ein- bzw. Zweipunkt-)Verteilungen, die von Pearl in der Arbeit [P] bemerkt wurde, sondern für die Frage, ob man durch geeignete Transformation der Folge $(W_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Verteilungskonvergenz gegen eine Zufallsgröße mit $\lambda\!\!\lambda$-stetiger Verteilung erreichen kann. In einem Spezialfall, wenn nämlich die Zufallsgrößen, die die Blätter des Baums markieren, rechteckverteilt sind, zeigt der folgende Satz von Ali Khan, Devroye und Neininger, der der Arbeit [AKN] entnommen ist, dass man durch Skalieren mit einem geeigneten Parameter die gewünschte Verteilungskonvergenz erreichen kann:

1.3.3 Satz. *Für $k \geq 0$ bezeichne W_k den Wert eines zufällig bewerteten b-adisch verzweigten Maximinbaums der Höhe $2k$ mit Startverteilung $\mathcal{L}(W_0) = R(-\alpha, 1-\alpha)$, wobei α der eindeutige Fixpunkt der Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0, \\ \left(1-(1-x)^b\right)^b, & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{für } x \geq 1, \end{cases}$$

in $]0,1[$ (vgl. dazu Lemma 1.2.3) sei. Des Weiteren seien F_k die Verteilungsfunktion von W_k $(k \geq 0)$ und $\xi := g'(\alpha)$. Dann gilt

$$\xi^k \cdot W_k \xrightarrow{d} W^* \text{ für } k \to \infty$$

für eine Zufallsgröße W^* mit $\lambda\!\!\lambda$-stetiger Verteilung, die die stochastische Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} \xi \cdot \max_{1\leq i\leq b} \min_{1\leq j\leq b} W_{i,j} \tag{1.4}$$

mit einer Familie $(W_{i,j})_{1\leq i,j\leq b}$ unabhängiger Zufallsgrößen mit $W \stackrel{d}{=} W_{i,j}$ für $1 \leq i,j \leq b$ erfüllt.

Bevor wir nun in den Beweis einsteigen, wollen wir zunächst auf das Pearlsche Modell eingehen. Wie in Bemerkung 1.3.1 bereits ausgeführt ist, werden die Werte an den Blättern im Pearlschen Modell gemäß einer Verteilung generiert, deren Verteilungsfunktion F im Bereich $0 < F < 1$ stetig und streng monoton wachsend ist. Jede Zufallsgröße W_0 mit einer solchen Verteilungsfunktion kann man ordnungstreu so transformieren, dass sie

$R(-\alpha, 1-\alpha)$-verteilt ist. Bezeichnet man nämlich mit F^{-1} die Umkehrfunktion von $F : \{0 < F < 1\} \longrightarrow]0,1[$, so gilt für $0 < t < 1$:

$$P\left(F(W_0) \leq t\right) = P\left(W_0 \leq F^{-1}(t)\right) = F\left(F^{-1}(t)\right) = t,$$

d.h. $F(W_0) \overset{d}{=} R(0,1)$ und damit $F(W_0) - \alpha \overset{d}{=} R(-\alpha, 1-\alpha)$. Folglich kann auf das so transformierte W_0 Satz 1.3.3 angewandt werden. Wir werden also im Folgenden in erster Linie den Fall betrachten, in dem die Werte in den Blättern gemäß der Rechteckverteilung $R(-\alpha, 1-\alpha)$ generiert sind.

Unter Zuhilfenahme der Lemmata 1.2.3, 1.2.5 und 1.2.6 wollen wir nun einen Beweis von Satz 1.3.3 liefern:

Beweis von Satz 1.3.3. Es ist für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(\xi^k \cdot W_k \leq t) &= P(W_k \leq t/\xi^k) \\ &= g^{\circ(k)}\left(P(W_0 \leq t/\xi^k)\right) \\ &= g^{\circ(k)}\left(P(W_0 + \alpha \leq \alpha + t/\xi^k)\right) \\ &= g^{\circ(k)}(\alpha + t/\xi^k). \end{aligned}$$

Wir werden für den Nachweis der Verteilungskonvergenz zeigen, dass $g_k := g^{\circ(k)}(\alpha + \cdot/\xi^k)$ für $k \to \infty$ gegen eine monoton wachsende, stetige Funktion h^* mit $\lim_{t\to\infty} h^*(t) = 1$ und $\lim_{t\to-\infty} h^*(t) = 0$ konvergiert. Dazu weisen wir zunächst die Konvergenz der g_k nach.

Sei also $t \in \mathbb{R}$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\alpha + t/\xi^k \in]0, x_0[$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Ein solches k_0 existiert, da $\alpha \in]0, x_0[$ gilt (vgl. dazu Lemma 1.2.5). Weil g konvex auf $]0, x_0[$ ist, gilt dann für alle $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned} g_{k+1}(t) &= g^{\circ(k+1)}\left(\alpha + \frac{t}{\xi^{k+1}}\right) \\ &= g^{\circ(k)}\left(g\left(\alpha + \frac{t}{\xi^{k+1}}\right)\right) \\ &\geq g^{\circ(k)}\left(g(\alpha) + g'(\alpha) \cdot \frac{t}{\xi^{k+1}}\right) \\ &= g^{\circ(k)}\left(\alpha + \frac{t}{\xi^k}\right) \\ &= g_k(t), \end{aligned}$$

wobei in der dritten Zeile die Konvexität und Monotonie von g und in der vierten Zeile die Gleichungen $g(\alpha) = \alpha$ sowie $g'(\alpha) = \xi$ benutzt wurden. Folglich ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Folge $(g_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ schließlich wachsend (und beschränkt gegen 1), also konvergent. Wir setzen $h^* := \lim_{k\to\infty} g_k$. Es gilt $0 \leq h^* \leq 1$.

Des Weiteren existiert für jedes beschränkte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left\{\alpha + t/\xi^k : t \in I\right\} \subseteq]0, x_0[$ für alle $k \geq k_0$. Damit ist $(g_k|_I)_{k \geq k_0}$ eine monoton wachsende Folge monoton wachsender Funktionen, mithin h^* auf I monoton wachsend. Da I als beliebiges beschränktes Intervall $\subseteq \mathbb{R}$ gewählt war, ist h^* damit auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend. Insbesondere existieren $q_{-\infty} := \lim_{t \downarrow -\infty} h^*(t)$ und $q_\infty := \lim_{t \uparrow \infty} h^*(t)$. Es gilt $q_{-\infty}, q_\infty \in [0, 1]$.

Als nächstes zeigen wir, dass

$$h^*(t) = g(h^*(t/\xi)) \tag{1.5}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Sei dazu $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \lim_{k \to \infty} g^{\circ(k+1)}(\alpha + t \cdot \xi^{-(k+1)}) \\ &= g\left(\lim_{k \to \infty} g^{\circ(k)}\left(\alpha + \frac{t/\xi}{\xi^k}\right)\right) = g\left(h^*(t/\xi)\right). \end{aligned}$$

Wir zeigen weiter, dass $q_{-\infty} = 0$ und $q_\infty = 1$ gilt. Dazu nutzen wir die Funktionalgleichung von h^* und die Stetigkeit von g wie folgt aus:

$$q_\infty = \lim_{t \uparrow \infty} h^*(t) = \lim_{t \uparrow \infty} g\left(h^*(t/\xi)\right) = g\left(\lim_{t \uparrow \infty} h^*(t/\xi)\right) = g(q_\infty)$$

und analog

$$q_{-\infty} = g(q_{-\infty}).$$

q_∞ und $q_{-\infty}$ sind also Fixpunkte von g, mithin gilt $q_\infty, q_{-\infty} \in \{0, \alpha, 1\}$. Für $t > 0$ ist $g^{\circ(k)}(\alpha + t/\xi^k) > \alpha$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit auch (da die Folge schließlich wächst) $h^*(t) > \alpha$. Die Monotonie von h^* liefert $q_\infty > \alpha$, also $q_\infty = 1$. Den Beweis von $q_{-\infty} = 0$ wollen wir genauso angehen; allerdings fällt der Nachweis der Existenz eines $t < 0$ mit $h^*(t) < \alpha$ deutlich schwieriger als der Nachweis der Existenz eines $t > 0$ mit $h^*(t) > \alpha$ aus, da uns die Tatsache, dass die Folgen $(g_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ schließlich wachsen, hier nicht in die Karten spielt, sondern vielmehr zusätzliche Probleme bereitet. Wir versuchen also zunächst, in einer geeigneten Umgebung $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ von α eine Majorante für g zu finden, deren Iterationen sich leicht berechnen lassen. Dazu wählen wir

$$f(x) := \alpha \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\xi \quad \text{für } x \geq 0.$$

Behauptung: $(*)$ Es gibt ein $\varepsilon \in]0, \alpha[$, so dass für alle x mit $|x - \alpha| \leq \varepsilon$ gilt:

$$g(x) \leq f(x).$$

Begründung: Zunächst einmal kann man feststellen, dass sowohl f als auch g auf $]0, 1[$ zweimal stetig differenzierbar sind, und es gelten:

(i) $g(\alpha) = \alpha = f(\alpha)$,

(ii) $g'(\alpha) = \xi = f'(\alpha)$.

Eine Anwendung der Taylorschen Formel auf f und g liefert daher:

$$g(x) = \alpha + \xi(x - \alpha) + \frac{1}{2}g''(\alpha)(x - \alpha)^2 + r_1(x)$$

sowie

$$f(x) = \alpha + \xi(x - \alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x - \alpha)^2 + r_2(x)$$

für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung U von α, wobei r_1, r_2 Funktionen mit $\lim_{x\to\alpha,\, t\neq\alpha}(x - \alpha)^{-2} r_i(x) = 0$ $(i = 1, 2)$ auf U sind. Um die Behauptung nachzuweisen, genügt es daher zu zeigen, dass $g''(\alpha) < f''(\alpha)$ ist. Dazu erinnern wir uns daran, dass für alle $x \in]0, 1[$

$$g''(x) = b^2(b - 1)(1 - x)^{b-2} \left(1 - (1 - x)^b\right)^{b-2} \left((b + 1)(1 - x)^b - 1\right)$$

ist, und notieren, dass

$$f''(x) = \frac{(\xi - 1)\xi}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\xi-2}$$

für alle $x > 0$ gilt. Wir müssen also zeigen, dass für jedes $b \geq 2$

$$(**)\quad b^2(b - 1)(1 - \alpha)^{b-2}(1 - (1 - \alpha)^b)^{b-2} \left((b + 1)(1 - \alpha)^b - 1\right) < \frac{(\xi - 1)\xi}{\alpha}$$

gilt. Wir setzen

$$\xi = g'(\alpha) = b^2(1 - (1 - \alpha)^b)^{b-1}(1 - \alpha)^{b-1} = b^2\alpha(1 - \alpha)^{b-2}$$

in die Ungleichung $(**)$ ein, und erhalten unter Benutzung der Gleichung $(1 - \alpha)^b = \alpha$:

$$\begin{aligned}
(**) \quad &\iff b^2(b - 1)(1 - \alpha)^{b-2} \left(1 - (1 - \alpha)^b\right)^{b-2} \left((b + 1)(1 - \alpha)^b - 1\right) \\
&\qquad < \left(b^2\alpha(1 - \alpha)^{b-2} - 1\right) b^2(1 - \alpha)^{b-2} \\
&\iff (b - 1)(1 - \alpha)^{b-2} \left((b + 1)\alpha - 1\right) < b^2\alpha(1 - \alpha)^{b-2} - 1 \\
&\iff 1 + (1 - \alpha)^{b-1} - b(1 - \alpha)^{b-2} < 0 \\
&\iff 1 - b(1 - \alpha)^{b-1} < 0 \\
&\iff b^{-\frac{b}{b-1}} < \alpha.
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieser Ungleichung folgt aber direkt aus (1.3). Insgesamt haben wir also die Zwischenbehauptung gezeigt.

Wir können nun den Beweis von $\lim_{t\to-\infty} h^*(t) = 0$ führen. Sei dazu $-\varepsilon \leq t \leq 0$. Dann ist $(g^{\circ(k)}(\alpha + t/\xi^k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach dem bisher Gezeigten wachsend, also gilt $g^{\circ(k)}(\alpha + t/\xi^k) \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$ für alle $k \geq 0$. Folglich ist auch $g^{\circ(j)}(\alpha + t/\xi^k) \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$ für alle $0 \leq j \leq k < \infty$. Damit können wir unsere Zwischenbehauptung wie folgt einsetzen:

$$\begin{aligned} g_k(t) &= g^{\circ(k)}\left(\alpha + \frac{t}{\xi^k}\right) \\ &\leq f^{\circ(k)}\left(\alpha + \frac{t}{\xi^k}\right) \\ &= \alpha\left(1 + \frac{t}{\alpha\xi^k}\right)^{\xi^k} \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \exp\left(\frac{t}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$h^*(t) \leq \alpha \exp\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

für alle $-\varepsilon \leq t \leq 0$. Insbesondere existiert ein $t < 0$ mit $h^*(t) < \alpha$; daher muss $q_{-\infty} = 0$ gelten.

Wir können nun noch weiteren Nutzen aus der Abschätzung $(*)$ ziehen. Für alle $t \in [0, \varepsilon]$, die so klein sind, dass $\alpha \exp(t/\alpha) \leq \alpha + \varepsilon$ gilt, gilt dann wegen $t/\alpha < 1$:

$$\alpha\left(1 + \frac{t}{\alpha\xi^k}\right)^{\xi^k} \underset{k\to\infty}{\uparrow} \alpha \exp\left(\frac{t}{\alpha}\right) \leq \alpha + \varepsilon,$$

d.h. $f^{\circ(k)}(\alpha+t/\xi^k) \leq \alpha+\varepsilon$ für alle $k \geq 0$. Durch Induktion nach k folgt dann $g^{\circ(k)}(\alpha + t/\xi^k) \leq f^{\circ(k)}(\alpha + t/\xi^k)$ für alle $k \geq 0$ und damit schließlich auch $h^*(t) \leq \alpha \exp(t/\alpha)$ in einer hinreichend kleinen rechtsseitigen Umgebung von 0. Insbesondere ist h^* rechtsseitig stetig in 0.

Um den Beweis zu vollenden, dass es sich bei h^* um eine Verteilungsfunktion handelt, fehlt nun nur noch der Nachweis der rechtsseitigen Stetigkeit von h^*. Dazu zeigen wir, dass h^* absolut stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist und beginnen mit dem Nachweis, dass h^* auf $[0, \infty[$ absolut stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\alpha+\varepsilon < 1-(b+1)^{-\frac{1}{b}}$ und $h^*(\varepsilon) < 1-(b+1)^{-\frac{1}{b}}$ gilt; es gibt ein solches $\varepsilon > 0$, da h^* rechtsseitig stetig in 0 ist. Für jedes $k \geq 0$ ist dann $g_k = g^{\circ(k)}(\alpha + \cdot/\xi^k)$ stetig differenzierbar und monoton wachsend mit monoton wachsender Ableitung auf $[0, \varepsilon]$. Dabei beachte man hinsichtlich der Monotonie von g_k' auf $[0, \varepsilon]$, dass für jedes $t \in [0, \varepsilon]$ gilt:

$$g_k'(t) = \frac{1}{\xi^k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} g'\left(g^{\circ(j)}(\alpha + t/\xi^k)\right),$$

und hier ist $g^{\circ(j)}(\alpha + \frac{t}{\xi^k}) \leq h^*(\varepsilon) < 1 - (b+1)^{-\frac{1}{b}}$, d.h. in einem Bereich, wo g' wächst. Seien $t \in [0, \varepsilon]$ und $k \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} g'_{k+1}(t) &= \frac{1}{\xi^{k+1}} \cdot g'(\alpha + t/\xi^{k+1}) \cdot \prod_{j=1}^{k} g'(g^{\circ(j)}(\alpha + t/\xi^{k+1})) \\ &\geq \frac{1}{\xi^k} \cdot \prod_{j=1}^{k} g'(g^{\circ(j-1)}(\alpha + t/\xi^k)) \\ &= g'_k(t). \end{aligned}$$

Daher ist die Folge $(g'_k(t))_{k \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend. Zum Nachweis der Konvergenz der Folge genügt also der Nachweis ihrer Beschränktheit. Unter Beachtung von $g_j(s) \leq h^*(s)$ für alle $0 \leq s \leq \varepsilon$ und $h^*(\varepsilon) < 1 - (b+1)^{-\frac{1}{b}}$ können wir nun wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} g'_k(t) &= \frac{1}{\xi^k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} g'\left(g^{\circ(j)}\left(\alpha + \frac{t}{\xi^k}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\xi^k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} g'\left(g^{\circ(j)}\left(\alpha + \frac{t/\xi^{k-j}}{\xi^j}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{\xi^k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} g'\left(h^*\left(\frac{t}{\xi^{k-j}}\right)\right) \\ &= \prod_{j=1}^{k} \frac{g'(g^{\circ(-j)}(h^*(t)))}{g'(\alpha)} \\ &\underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{g'(g^{\circ(-j)}(h^*(t)))}{g'(\alpha)}. \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch die Konvergenz des unendlichen Produkts nachweisen. Dazu verwenden wir ein bekanntes Ergebnis (siehe Kapitel VII, §2, S.174 in [Fis]) aus der Theorie unendlicher Produkte, das uns die Implikation

$$\text{(1.6)} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{g'(g^{\circ(-j)}(h^*(t)))}{g'(\alpha)} - 1 \right| < \infty \Longrightarrow \prod_{j=1}^{\infty} \frac{g'(g^{\circ(-j)}(h^*(t)))}{g'(\alpha)} < \infty$$

liefert. Die Konvergenz der unendlichen Reihe auf der linken Seite lässt sich mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Lemma 1.2.2 zeigen. Für jedes $j \geq 1$ ist nämlich für eine geeignete Zwischenstelle $\xi_j \in]\alpha, g^{\circ(-j)}(h^*(t))[$ und $C := \max_{\alpha \leq x \leq h^*(t)} g''(x)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{g'(g^{\circ(-j)}(h^*(t)))}{g'(\alpha)} - 1 \right| &= \left| \frac{g'(\alpha) + (g^{\circ(-j)}(h^*(t)) - \alpha) g''(\xi_j)}{g'(\alpha)} - 1 \right| \\ &\leq \frac{C}{g'(\alpha)} \left| g^{\circ(-j)}(h^*(t)) - \alpha \right|. \end{aligned}$$

Daher folgt die Konvergenz der unendlichen Reihe in (1.6) wie angekündigt aus Lemma 1.2.2 in Verbindung mit $(g^{\circ(-1)})'(\alpha) = \xi^{-1} < 1$.

Wir erhalten also die Existenz von $f_+^* = \lim_{k\to\infty} g_k'$ auf $[0,\varepsilon]$. Als Grenzfunktion monoton wachsender Funktionen ist auch f_+^* monoton wachsend. Wählt man nun $K > 0$ beliebig und dazu $n \in \mathbb{N}$ mit $|K/\xi^n| \leq \varepsilon$, so erhält man für alle $0 \leq a < b \leq K$ unter Benutzung von (1.5) und des Satzes von der majorisierten Konvergenz (es ist nämlich $f_+^*(t) \leq f_+^*(\varepsilon) < \infty$ für alle $0 \leq t \leq \varepsilon$ und $(g^{\circ(n)})'$ beschränkt auf kompakten Intervallen):

$$\begin{aligned}
h^*(b) - h^*(a) &= g^{\circ(n)}\left(h^*(b/\xi^n)\right) - g^{\circ(n)}\left(h^*(a/\xi^n)\right) \\
&= g^{\circ(n)}\left(\lim_{k\to\infty} g_k(b/\xi^n)\right) - g^{\circ(n)}\left(\lim_{k\to\infty} g_k(a/\xi^n)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\left(g^{\circ(n)}\left(g_k(b/\xi^n)\right) - g^{\circ(n)}\left(g_k(a/\xi^n)\right)\right) \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_a^b \left(g^{\circ(n)} \circ g_k(\cdot/\xi^n)\right)'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{\xi^n}\left(g^{\circ(n)}\right)'\left(h^*(t/\xi^n)\right) f_+^*(t/\xi^n)\,dt.
\end{aligned}$$

Wir erkennen also, dass h^* auf $[0,K]$ ein endliches Maß mit $\lambda\!\!\lambda$-Dichte induziert, insbesondere absolut stetig auf $[0,K]$ ist. Es folgt die abolute Stetigkeit von h^* auf $[0,\infty[$.

Wir wenden uns schließlich der negativen Halbachse zu und zeigen, dass die Folge $(g_k'(t))_{k\geq k_0}$ (mit einem $k_0 \geq 0$ so groß, dass die Folge wohldefiniert ist) für jedes $t \leq 0$ beschränkt ist. Dazu fixieren wir ein $t \leq 0$ und wählen $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|t/\xi^{k_0}| < \alpha$. Damit erhalten wir für alle $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}
0 &< g_k'(t) \\
&= \frac{1}{\xi^k}\prod_{j=0}^{k-1} g'\left(g^{\circ(j)}(\alpha + t/\xi^k)\right) \\
&\leq \frac{1}{\xi^k}\prod_{j=0}^{k-1} g'\left(g^{\circ(j)}(\alpha)\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

d.h., es gilt

$$(*)\quad g_k'(t) \leq 1 \text{ für alle } t \leq 0 \text{ und hinreichend großen } k \geq 0.$$

Weiterhin gilt für alle $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}
\frac{g'_{k+1}(t)}{g'_k(t)} &= \frac{1}{\xi} \cdot g'\left(\alpha + \frac{t}{\xi^{k+1}}\right) \prod_{j=0}^{k-1} \frac{g'(g^{\circ(j+1)}(\alpha + t/\xi^{k+1}))}{g'(g^{\circ(j)}(\alpha + t/\xi^{k}))} \\
&\geq \frac{1}{\xi} \cdot g'\left(\alpha + \frac{t}{\xi^{k+1}}\right) \\
&\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ (exponentiell schnell).}
\end{aligned}$$

Wir können erneut die Ergebnisse aus Kapitel VII, §2 in [Fis] anwenden und erhalten die absolute Konvergenz des unendlichen Produkts

$$\prod_{k\geq k_0} \left(\frac{g'_{k+1}(t)}{g'_k(t)} \wedge 1 \right).$$

Wegen der Beschränkheit der Folge $(g'_k(t))_{k\geq k_0}$ folgt damit die Konvergenz von

$$\prod_{k\geq k_0} \left(\frac{g'_{k+1}(t)}{g'_k(t)} \vee 1 \right)$$

und insgesamt die Existenz von $\lim_{k\to\infty} g'_k(t) \in]0,1]$. Wir setzen $f^*_-(t) := \lim_{k\to\infty} g'_k(t)$.

Wir zeigen nun, dass $f^*_- :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von W^* auf der negativen Halbachse definiert. Dazu wählen wir $a < b \leq 0$ beliebig. Es gilt $\sup_{k\geq 0} g'_k|_{[a,b]} \leq 1$, und wir erhalten unter Benutzung des Satzes von der majorisierten Konvergenz:

$$\begin{aligned}
h^*(b) - h^*(a) &= \lim_{k\to\infty} g_k(b) - g_k(a) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{]a,b]} g'_k \, d\lambda\!\!\lambda \\
&= \int_{]a,b]} f^*_- \, d\lambda\!\!\lambda\,.
\end{aligned}$$

Da $a < b \leq 0$ beliebig waren, folgt, dass f^*_- eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von W^* auf $]-\infty, 0]$ definiert.

Es liegt also die Verteilungskonvergenz der Folge $(\xi^k \cdot W_k)_{k\geq 0}$ gegen eine geeignete Zufallsgröße W^* (mit Verteilungsfunktion h^*) vor. Die Gültigkeit von (1.4) folgt direkt aus der Gültigkeit von (1.5). $\square$

Der für die Verteilungskonvergenz der Folge $(\xi^k \cdot W_k)_{k\geq 0}$ gegebene Beweis ist relativ lang. Ist man an einem effizienteren Beweis interessiert, so kann man auf den Nachweis der (Absolut-)Stetigkeit von h^* verzichten und stattdessen den Auswahlsatz von Helly-Bray ([A1], Satz 44.1 auf S. 228) bemühen, der in der gegebenen Situation die Verteilungskonvergenz gegen eine Verteilung mit nicht notwendig stetiger Verteilungsfunktion F_0 sichert. In Abschnitt 3.2 wird gezeigt, dass die Verteilungsfunktion h^* von W^* auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar ist. Dieser Beweis kann dann leicht modifiziert auch auf F_0 angewandt werden (da F_0 und h^* in den Stetigkeitspunkten von F_0 übereinstimmen) und man erhält, dass F_0 die Einschränkung einer ganzen Funktion auf $\mathbb{R}$ ist, insbesondere also wieder die $\lambda\!\!\lambda$-Stetigkeit der Grenzverteilung der Folge $(\xi^k \cdot W_k)_{k\geq 0}$.

Kapitel 2

Maximin-Fixpunktgleichungen

Angestoßen von Satz 1.3.3 interessieren wir uns nun bei festgehaltenem $\xi > 1$ für die stochastischen Fixpunktgleichungen

$$W \stackrel{d}{=} \xi \cdot \max_{1 \le i \le b} \min_{1 \le j \le b} W_{i,j} \quad (b \ge 2), \tag{2.1}$$

wobei $(W_{i,j})_{1 \le i,j \le b}$ eine Familie unabhängiger Zufallsgrößen mit $W \stackrel{d}{=} W_{i,j}$ für $1 \le i, j \le b$ sei, und deren Lösungen.

Da es die Lage im Hinblick auf viele Überlegungen nicht übermäßig komplizierter macht, betrachten wir im Verlaufe des Kapitels eine noch allgemeinere Fixpunktgleichung als in (2.1), nämlich die Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} \xi \cdot \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m_i} W_{i,j}, \tag{2.2}$$

wobei $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N} - \{1\}$ seien und wie gehabt $(W_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $W_{1,1} \sim W$. Ziel dieses Kapitels ist es, die Lösungen der angegebenen Fixpunktgleichungen (2.1) und (2.2) zu bestimmen, d.h. diejenigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen Q auf $\mathbb{R}$, so dass die entsprechende Fixpunktgleichung wahr ist, wenn $\mathcal{L}(W) = Q$ gilt. Darüber hinaus sollen einige Eigenschaften dieser Lösungen zusammengetragen werden.

2.1 Die allgemeine Fixpunktgleichung und ihre Lösungen

Um nun solche Lösungen der Fixpunktgleichungen zu finden, formulieren wir (2.1) zunächst in Termen von Verteilungsfunktionen. Mit $F := F_W$ gilt nämlich:

$$F(t) = \Big(1 - (1 - F(t/\xi))^b\Big)^b \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{2.3}$$

Allgemeiner liest sich (2.2) in Termen der Verteilungsfunktion wie folgt:

$$F(t) = \prod_{i=1}^{n}(1-(1-F(t/\xi))^{m_i}) \quad (t \in \mathbb{R}), \tag{2.4}$$

d.h. es ist

$$F = g \circ F(\cdot/\xi)$$

für $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto \prod_{i=1}^{n}(1-(1-x)^{m_i})$.

Die Fragestellung soll im Folgenden weiter verallgemeinert werden, um einen abstrakteren Zugang zu gewinnen. Dazu werde mit $\mathcal{G}$ die Menge der Funktionen $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ bezeichnet, die stetig und streng monoton wachsend sind, sowie $0, 1 \in \mathcal{F}_g := \{x \in [0,1] : g(x) = x\}$ erfüllen. Für $\xi > 1$ und $g \in \mathcal{G}$ werde dann die Gleichung

$$F(t) = g(F(t/\xi)) \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{2.5}$$

für Verteilungsfunktionen F betrachtet. Die Menge der Verteilungen, deren Verteilungsfunktionen diese Gleichung lösen, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{g,\xi}$, d.h.

$$\mathcal{L}_{g,\xi} = \{Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R}) |\ F_Q \text{ erfüllt (2.5)}\},$$

wobei hier und im Folgenden $\mathfrak{W}(\mathbb{R})$ stets die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ (wobei $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sei) und für ein $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ F_Q stets dessen Verteilungsfunktion bezeichne.

Für jedes $g \in \mathcal{G}$ gilt dann wegen $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ stets $\delta_0 \in \mathcal{L}_{g,\xi}$. Um $\mathcal{L}_{g,\xi}$ allerdings vollständig zu bestimmen, müssen zunächst einige Beobachtungen gemacht werden:

Man sieht sofort, dass für alle $g \in \mathcal{G}$, $\xi > 1$ und $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit zugehöriger Verteilungsfunktion F wegen (2.5) $F(0-) = g(F(0-))$ und $F(0) = g(F(0))$ gelten muss, d.h. $F(0-), F(0) \in \mathcal{F}_g$. Die Fixpunkte von g haben also eine große Bedeutung in Bezug auf das stochastische Fixpunktproblem.

2.1.1 Bemerkung. Seien $g \in \mathcal{G}$, $\xi > 1$, $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ und $F := F_Q$. Zunächst einmal stellen wir fest, dass aus der Stetigkeit von g die Abgeschlossenheit der Fixpunktmenge $\mathcal{F}_g$ von g folgt. Wir setzen nun

$$c_0 := \inf(\mathcal{F}_g - \{0\}) \text{ und } c_1 := \sup(\mathcal{F}_g - \{1\}).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $t < 0$ ist $F(t) \in [0, c_0]$,

(ii) für alle $t > 0$ ist $F(t) \in [c_1, 1]$.

Begründung. Angenommen, es gäbe ein $t < 0$ mit $F(t) \in \,]c_0, 1]$. Dann gäbe es einen Fixpunkt $0 < q \leq F(t)$. Damit hätte man $\lim_{s\downarrow -\infty} F(s) = \lim_{n\to\infty} F(t \cdot \xi^n) = \lim_{n\to\infty} g^{\circ(n)}(F(t)) \in [q, 1]$ (vgl. Lemma 1.2.1) im Widerspruch zur Tatsache, dass F eine Verteilungsfunktion ist. Also gilt (i). Der Nachweis von (ii) kann analog geführt werden. □

Zusammenfassend und weiter gehend kann man notieren:

1. Für $t < 0$ ist stets $F(t) \in [0, c_0]$; im Fall $c_0 > 0$ gilt $F(t) \in [0, c_0[$ für alle $t < 0$.
2. Es gilt $F(0-) \in \{0, c_0\}$ und $F(0) \in \{c_1, 1\}$.
3. Für jedes $t > 0$ ist $F(t) \in [c_1, 1]$; im Fall $c_1 < 1$ gilt $F(t) \in]c_1, 1]$ für alle $t < 0$.
4. Ist $c_0 = 0$ oder $c_0 > 0$ und $g > \mathrm{id}$ auf $]0, c_0[$, so gilt $F|_{]-\infty,0[} = 0$.
5. Ist $c_1 = 1$ oder $c_1 < 1$ und $g < \mathrm{id}$ auf $]c_1, 1[$, so gilt $F|_{[0,\infty[} = 1$.

Was die Punkte 4. und 5. angeht, so beachte man, dass in den Fällen $c_0 = 0$ bzw. $c_1 = 1$ nach (i) bzw. (ii) jeweils nichts zu zeigen ist und in den anderen Fällen Lemma 1.2.1 die Behauptung liefert.

Seien $0 < s \leq t < \xi s$. Es stellt sich die Frage, ob man irgendetwas über den Funktionswert $F(t)$ aussagen kann, wenn $F(s)$ bereits bekannt ist. Dies ist sicherlich der Fall, denn da F monoton wachsend ist und die Fixpunktgleichung (2.5) löst, muss $F(s) \leq F(t) \leq F(\xi s) = g(F(s))$ gelten. Doch kann man noch mehr über $F(t)$ aussagen? Der folgende Satz zeigt, dass dies nicht der Fall ist; er zeigt aber auch, dass man bei Kenntnis der Funktionswerte von F auf dem Intervall $[s, \xi s[$ den gesamten Funktionsverlauf von F auf $[0, \infty[$ rekonstruieren kann.

2.1.2 Satz. *Gegeben seien $\xi > 1$ und $g \in \mathcal{G}$; wie in Bemerkung 2.1.1 seien*

$$c_0 := \inf(\mathcal{F}_g - \{0\}) \text{ und } c_1 := \sup(\mathcal{F}_g - \{1\}),$$

dabei gelte $0 < c_0 \leq c_1 < 1$ und $g < \mathrm{id}$ auf $]0, c_0[$, $g > \mathrm{id}$ auf $]c_1, 1[$. Weiter seien $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$, $s_0 < 0 < t_0$ und $f_- : [\xi s_0, s_0[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f_+ : [t_0, \xi t_0[\longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $0 \leq f_-(\xi s_0) < c_0$, $c_1 < f_+(t_0) \leq 1$.

(2) f_-, f_+ *sind monoton wachsend und rechtsseitig stetig.*

(3) $f_-(s) \leq g^{\circ(-1)}(f_-(\xi s_0))$ *für alle* $s \in [\xi s_0, s_0[$ *und* $f_+(t) \leq g(f_+(t_0))$ *für alle* $t \in [t_0, \xi t_0[$.

Weiter sei die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$F(t) = \begin{cases} g^{\circ(n)}(f_+(t/\xi^n)) & \text{falls } t > 0, \\ c_1 & \text{falls } t = 0 \text{ und } f_+(t_0) < 1, \\ 1 & \text{falls } t = 0 \text{ und } f_+(t_0) = 1, \\ g^{\circ(n)}(f_-(t/\xi^n)) & \text{sonst}, \end{cases} \tag{2.6}$$

wobei im Falle $t \neq 0$ $n \in \mathbb{Z}$ *so zu wählen ist, dass* $t/\xi^n \in [t_0, \xi t_0[$ *im Falle* $t > 0$ *bzw.* $t/\xi^n \in [\xi s_0, s_0[$ *im Falle* $t < 0$ *ist. Dann gilt* $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ *für die zu* F *korrespondierende Wahrscheinlichkeitsverteilung* Q.

Beweis. Zunächst ist die Wohldefiniertheit von F zu prüfen. Diese ist gegeben, da wegen $t_0\xi^n \uparrow \infty$ $(n \to \infty)$ und $t_0\xi^n \downarrow 0$ $(n \to -\infty)$ für jedes $t > 0$ genau ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $t_0 \leq t/\xi^n < t_0\xi$. Analoges lässt sich im Falle $t < 0$ feststellen.

Weiterhin erfüllt F die Gleichung (2.5), denn es gilt $F(0) \in \mathcal{F}_g$ und für $t > 0$ ist (mit dem $n \in \mathbb{Z}$, für das $t_0\xi^n \leq t < t_0\xi^{n+1}$ gilt)

$$F(t) = g^{\circ(n)}\left(f_+\left(\frac{t}{\xi^n}\right)\right) = g\left(g^{\circ(n-1)}\left(f_+\left(\frac{t/\xi}{\xi^{n-1}}\right)\right)\right) = g(F(t/\xi));$$

analog kann man im Fall $t < 0$ schließen.

Es bleibt zu zeigen, dass F eine Verteilungsfunktion ist. Dazu zeigen wir zunächst die Isotonie von F auf $]0, \infty[$. Ist $f_+(t_0) = 1$, so ist $F|_{[0,\infty[} = 1$. Wir nehmen also $f_+(t_0) < 1$ an. Es genügt, die Aussage

$(*_n)$ F ist monoton wachsend auf $[t_0\xi^n, t_0\xi^{n+1}[$ und
$\lim_{t\uparrow t_0\xi^{n+1}} F(t) \leq g(F(t_0\xi^n))$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$ zu beweisen. Nach Voraussetzung an f_+ gilt $(*_0)$. Für $n > 0$ gelte $(*_{n-1})$ und es seien $s, t \in [t_0\xi^n, t_0\xi^{n+1}[$ beliebig mit $s \leq t$. Dann ist

$$F(s) = g(F(s/\xi)) \leq g(F(t/\xi)) = F(t),$$

wobei ausgenutzt wurde, dass F die Fixpunktgleichung (2.5) erfüllt, $(*_{n-1})$ gilt und g monoton wachsend ist. Damit ist gezeigt, dass F auch monoton auf $[t_0\xi^n, t_0\xi^{n+1}[$ ist. Wegen $F \leq 1$ existiert damit auch $\lim_{t\uparrow t_0\xi^{n+1}} F(t)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\uparrow t_0\xi^{n+1}} F(t) = \lim_{t\uparrow t_0\xi^{n+1}} g(F(t/\xi)) = g\left(\lim_{t\uparrow t_0\xi^n} F(t)\right) \\ \leq g(g(F(t_0\xi^{n-1}))) = g(F(t_0\xi^n)). \end{aligned}$$

Damit konnten wir $(*_n)$ auf $(*_{n-1})$ zurückführen.

Wir müssen nun noch für $n < 0$ $(*_n)$ auf $(*_{n+1})$ zurückführen, um die Monotonie auf ganz $]0, \infty[$ zu erhalten. Dies ist mit einer analogen Argumentation möglich, die statt der ursprünglichen Fixpunktgleichung (2.5) die äquivalente Gleichung $F(t) = g^{\circ(-1)}(F(t\xi))$ benutzt und die Tatsache, dass auch $g^{\circ(-1)}$ monoton wachsend und stetig ist. Aus der Definition $F(0) = c_1$ erhält man dann leicht die Monotonie auf $[0, \infty[$. Ein entsprechendes Vorgehen liefert die Monotonie auf $]-\infty, 0[$.

Die rechtsseitige Stetigkeit von F in $t \neq 0$ ist klar wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Funktionen f_+, f_- sowie der Stetigkeit von g. Weiter ist klar, dass $0 \leq F \leq 1$ ist, und damit existieren rechts- und linksseitige Limiten von F in allen Punkten $t \in \mathbb{R}$ sowie $q_{-\infty} := \lim_{t \to -\infty} F(t)$ und $q_\infty := \lim_{t\to\infty} F(t)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $q_{-\infty} = 0$, $q_0 := \lim_{t \downarrow 0} F(t) = F(0)$ und $q_\infty = 1$ gilt. Dies folgt aus Lemma 1.2.1 mit

$$\begin{aligned}
q_{-\infty} &= \lim_{n\to\infty} F(s_0 \xi^n) = \lim_{n\to\infty} g^{\circ(n)}(f_-(s_0)), \\
q_0 &= \lim_{n\to\infty} F(t_0 \xi^{-n}) = \lim_{n\to\infty} g^{\circ(-n)}(f_+(t_0)), \\
q_\infty &= \lim_{n\to\infty} F(t_0 \xi^n) = \lim_{n\to\infty} g^{\circ(n)}(f_+(t_0))
\end{aligned}$$

und (1). □

2.1.3 Bemerkung. Ist in der Situation von Satz 2.1.2 $c_0 = 0$ oder $g > \mathrm{id}$ auf $]0, c_0[$, so gilt die Aussage des Satzes weiterhin, wenn man $f_-(t) = 0$ setzt für alle $t \in [s_0\xi, s_0[$; in diesen Fällen gibt es nämlich nach Bemerkung 2.1.1 nur Lösungen der Fixpunkgleichung (2.5), die auf $]-\infty, 0[$ trivial sind.

Ähnliches gilt in den Fällen $c_1 = 1$ bzw. $g < \mathrm{id}$ auf $]c_1, 1[$: Dann muss man $f_+(t) = 1$ setzen für alle $t \in [t_0, t_0\xi[$ und erhält nur Lösungen, die auf $]0, \infty[$ trivial sind.

Mit Satz 2.1.2 und der folgenden Bemerkung ist uns eine vollständige Charakterisierung von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ gelungen, da man jede Verteilungsfunktion F einer Verteilung $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ aus $f_+ := F|_{[1,\xi[}$ und $f_- := F|_{[-\xi,-1[}$ in der angegebenen Weise wiedergewinnen kann.

Wir wollen im Anschluss an dieses Ergebnis noch darauf eingehen, wie sich die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit der Funktionen f_+, f_- bei Fortsetzung wie in (2.6) unter geeigneten Voraussetzungen fortpflanzt.

2.1.4 Folgerung. *Seien $g \in \mathcal{G}$, $c_0 := \inf(\mathcal{F}_g - \{0\})$, $c_1 := \sup(\mathcal{F}_g - \{1\})$ und $f_- : [\xi s_0, s_0] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_+ : [t_0, \xi t_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige und monoton wachsende Funktionen mit $f_-(\xi s_0) = g(f_-(s_0))$ bzw. $f_+(\xi t_0) = g(f_+(t_0))$. Weiter gelte*

$$f_-(s_0) \begin{cases} \in [0, c_0[, & \textit{falls } c_0 > 0 \textit{ und } g < \mathrm{id} \textit{ auf }]0, c_0[, \\ = 0, & \textit{sonst}, \end{cases}$$

und

$$f_+(t_0) \begin{cases} \in]c_1, 1], & \textit{falls } c_1 < 1 \textit{ und } g > \mathrm{id} \textit{ auf }]c_1, 1[, \\ = 1, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Definiert man nun F mit Hilfe von f_- und f_+ wie in Satz 2.1.2, so ist $F \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ und es gilt weiterhin:

(a) *F ist stetig auf ganz $\mathbb{R} - \{0\}$. Gilt zusätzlich eine der Aussagen*

  (i) *g hat genau einen Fixpunkt in $]0,1[$ und $f_-(s_0) > 0$, $f_+(t_0) < 1$,*

  (ii) *$g > \mathrm{id}$ auf $]0,1[$ und $f_-(s_0) = 0$, $f_+(t_0) < 1$,*

  (iii) *$g < \mathrm{id}$ auf $]0,1[$ und $f_-(s_0) > 0$, $f_+(t_0) = 1$,*

  so ist F auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(b) *Sind f_-, f_+, g in ihren jeweiligen Definitionsintervallen differenzierbar (einseitig in den Randpunkten), wobei $g' > 0$ auf $]0, c_0[\cup]c_1, 1[$ sei, und gilt $f'_-(\xi s_0) = \frac{1}{\xi} g'(f_-(s_0)) f'_-(s_0)$ sowie $f'_+(\xi t_0) = \frac{1}{\xi} g'(f_+(t_0)) f'_+(t_0)$, so ist F auf ganz $\mathbb{R} - \{0\}$ differenzierbar.*

Beweis. Zu (a): Nach Voraussetzung ist F auf $[t_0, \xi t_0]$ stetig. Mittels der Gleichung (2.5) und der Tatsache, dass Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig sind, folgt die Stetigkeit von F auf $]0,\infty[$; analog schließt man für $]-\infty, 0[$. Für den Zusatz beachte man, dass nur noch die linksseitige Stetigkeit von F in 0 zu zeigen ist, die sich jeweils aus den Voraussetzungen (i), (ii) und (iii) ergibt.

Zu (b): Wir schließen die Trivialfälle $f_-(s_0) = 0$ und $f_+(t_0) = 1$ aus und nehmen direkt $f_-(s_0) > 0$ und $f_+(t_0) < 1$ an. Da Verkettungen differenzierbarer Funktionen wieder differenzierbar sind, folgt dann, dass F auf ganz $\mathbb{R} - (\{\xi^n s_0 | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\xi^n t_0 | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\})$ differenzierbar ist (dabei beachte man, dass $g^{\circ(-1)}$ wegen $g' > 0$ auf $]0, c_0[\cup]c_1, 1[$ dort ebenfalls differenzierbar ist). Beim Nachweis der Differenzierbarkeit von F in $\xi^n t_0$ und $\xi^n s_0$ für $n \in \mathbb{Z}$ beschränken wir uns auf die Punkte $\xi^n t_0$ für $n \in \mathbb{Z}$ und beginnen mit dem Fall $n = 1$. Hier liefert die Voraussetzung $f'_+(\xi t_0) = \xi^{-1} g'(f_+(t_0)) f'_+(t_0)$ die Übereinstimmung von links- und rechtsseitiger Ableitung von F in ξt_0 und damit die Differenzierbarkeit von F in ξt_0. Wir schließen nun wie unter (a) weiter, indem wir feststellen, dass $F = g^{\circ(n-1)} \circ F(\cdot/\xi^{n-1})$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ in $\xi^n t_0$ als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist. □

Über die Differenzierbarkeit von F in 0 kann ohne Weiteres keine Aussage gemacht werden und diese ist eine wichtige Eigenschaft, wie sich bei der Bestimmung von P^{W^*} für die Zufallsgröße W^* aus Satz 1.3.3 in Kapitel 3 zeigt.

Wir fahren nun fort mit einer Folgerung über die Existenz einer stetigen Lösung des Fixpunktproblems.

2.1.5 Folgerung. *Für gegebenes $\xi > 1$ und $g \in \mathcal{G}$ hat die zugehörige Fixpunktgleichung* (2.5) *genau dann eine stetige Lösung (d.h. eine Lösung Q mit $Q(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$), wenn einer der beiden folgenden Fälle gilt:*

(a) g besitzt keinen Fixpunkt in $]0,1[$.

(b) g hat genau einen Fixpunkt $\alpha \in]0,1[$ und es gilt $g < \mathrm{id}$ auf $]0,\alpha[$, $g > \mathrm{id}$ auf $]\alpha,1[$.

Beweis. Sei zunächst Q eine stetige Lösung der Fixpunktgleichung (2.5). Dann gilt insbesondere $Q(\{0\}) = 0$, d.h. für die zu Q korrespondierende Verteilungsfunktion F gilt $F(0-) = F(0)$. Dann gilt in der Notation von Bemerkung 2.1.1 $c_0 = c_1$ und daher (b) oder $F(0-) = F(0) \in \{0,1\}$, wobei $F(0) = 0$ und $F(0-) = 1$ jeweils (a) impliziert.

Die Umkehrung folgt direkt aus Folgerung 2.1.4. □

2.1.1 Bedingungen für die Existenz von Momenten

In diesem Abschnitt sollen die Lösungen der Gleichung (2.5), die in Satz 2.1.2 bestimmt wurden, auf die Existenz von Momenten untersucht werden.

Die in Zusammenhang mit (2.2) auftretenden Funktionen (vgl. (2.7) auf S. 32) mit $n, m_1, \ldots, m_n \geq 2$ besitzen (wie in Lemma 2.2.1 festgestellt wird) eine in 0 und 1 verschwindende Ableitung. Damit erfüllen sie (mit $q = \infty$) die Voraussetzungen des folgenden Satzes, der eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Momenten einer Lösung der Fixpunktgleichung (2.5) gibt. Insbesondere existieren daher für jedes $b \geq 2$ alle Momente von W^*, der in Satz 1.3.3 auftretenden Zufallsgröße.

2.1.6 Satz. *Seien $g \in \mathcal{G}$ stetig differenzierbar, $\xi > 1$, $\max\{g'(0), g'(1)\} =: m < 1$,*

$$q := \begin{cases} \frac{\log \frac{1}{m}}{\log \xi}, & \text{falls } 0 < m < 1, \\ \infty, & \text{falls } m = 0, \end{cases}$$

und $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$. Dann gilt: Für alle $0 < p < q$ ist $Q \in \mathbb{M}_p$, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p \, Q(dx) < \infty.$$

Insbesondere gilt $Q \in \mathbb{M}_p$ für alle $p > 0$ im Falle $m = 0$.

Beweis. Seien $0 < p < q$ beliebig, W eine Zufallsgröße mit Verteilung Q und

F die zu Q korrespondierende Verteilungsfunktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|^p Q(dx) &= E|W|^p \\
&= E(W^+)^p + E(W^-)^p \\
&= \int_0^\infty P((W^+)^p > t)\,dt + \int_0^\infty P((W^-)^p > t)\,dt \\
&= \int_0^\infty P(W > t^{\frac{1}{p}})\,dt + \int_0^\infty P(W < -t^{\frac{1}{p}})\,dt \\
&\leq P(W > 0) + \sum_{n=0}^\infty \left((\xi^p)^{n+1} - (\xi^p)^n\right) P(W > \xi^n) \\
&\quad + P(W < 0) + \sum_{n=0}^\infty \left((\xi^p)^{n+1} - (\xi^p)^n\right) P(W < -\xi^n) \\
&\leq 1 + (\xi^p - 1) \sum_{n=0}^\infty \xi^{pn} \left(1 - g^{\circ(n)}(F(1))\right) \\
&\quad + (\xi^p - 1) \sum_{n=0}^\infty \xi^{pn} g^{\circ(n)}(F(-1)).
\end{aligned}$$

Es genügt also, die Konvergenz der beiden unendlichen Reihen auf der rechten Seite nachzuweisen. Unter Benutzung von Lemma 1.2.2 erhält man wegen $g'(0), g'(1) < \xi^{-p}$ eine Konstante $M > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
1 - g^{\circ(n)}(F(1)) &\leq M(r\xi^{-p})^n \text{ und} \\
g^{\circ(n)}(F(-1)) &\leq M(r\xi^{-p})^n
\end{aligned}$$

für ein geeignetes $r < 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^\infty \xi^{pn} \left(1 - g^{\circ(n)}(F(1))\right) + \sum_{n=0}^\infty \xi^{pn} g^{\circ(n)}(F(-1)) \\
&\qquad\qquad \leq 2 \sum_{n=0}^\infty \xi^{pn} M(r\xi^{-p})^n \leq 2M \sum_{n=0}^\infty r^n < \infty,
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Man erkennt leicht, dass die Schranke q aus dem Satz in dem Sinne maximal ist, dass (außer in Trivialfällen) für eine Lösung Q der Fixpunktgleichung (2.5) keine Momente mehr oberhalb dieser Schranke existieren, denn das Vorgehen, das uns im Beweis von Satz 2.1.6 eine obere Schranke für $\int_{\mathbb{R}} |x|^p Q(dx)$ liefert, kann leicht modifiziert (vgl. Lemma 1.2.2) auch dafür genutzt werden, eine untere Schranke herzuleiten. Bevor wir dies machen, betrachten wir im folgenden Lemma die angesprochenen Trivialfälle.

2.1.7 Lemma. *Seien $g \in \mathcal{G}$ stetig differenzierbar, $\xi > 1$, und $\delta_0 \neq Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$. Weiter sei F die zu Q gehörende Verteilungsfunktion. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Ist $Q(]-\infty, 0[) = 0$ und $g'(1) < 1$, so gilt die Aussage von Satz 2.1.6 mit $m := g'(1)$.

(b) Ist $Q(]0, \infty[) = 0$ und $g'(0) < 1$, so gilt die Aussage von Satz 2.1.6 mit $m := g'(0)$.

(c) Ist $g'(0) > 1$, so ist $Q(]-\infty, 0[) = 0$.

(d) Ist $g'(1) > 1$, so ist $Q(]0, \infty[) = 0$.

Beweis. Zum Beweis von (a) beachte man, dass im Falle $Q(]-\infty, 0[) = 0$ für eine Zufallsgröße $W \sim Q$ wie im Beweis von Satz 2.1.6 automatisch $E(W^-)^p = 0$ für alle $p > 0$ gilt und damit die entsprechende unendliche Reihe in der Abschätzung im Beweis zu Satz 2.1.6 entfällt. Entsprechendes gilt für $E(W^+)^p$ im Fall $Q(]0, \infty[) = 0$. Damit sind die Aussagen (a) und (b) gezeigt.

Ist $g'(0) > 1$, so ist $g - \mathrm{id}$ in einer Umgebung von 0 monoton wachsend und $F(0-) = 0$ nach Bemerkung 2.1.1. Ähnliches gilt im Falle $g'(1) > 1$. Insgesamt folgt die Behauptung. □

2.1.8 Satz. *Seien $g \in \mathcal{G}$ stetig differenzierbar, $\xi > 1$ und $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit zugehöriger Verteilungsfunktion F. Wie in Lemma 2.1.7 gelte $Q \neq \delta_0$. Weiterhin sei $m \geq 0$ wie folgt definiert:*

$$m := \begin{cases} g'(0), & \text{falls } Q(]0, \infty[) = 0, \\ g'(1), & \text{falls } Q(]-\infty, 0[) = 0, \\ \max\{g'(0), g'(1)\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $m \leq 1$. Setzt man

$$q := \begin{cases} \frac{\log \frac{1}{m}}{\log \xi}, & \text{falls } 0 < m \leq 1, \\ \infty, & \text{falls } m = 0, \end{cases}$$

so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p Q(dx) = \infty,$$

(also $Q \notin \mathbb{M}_p$) für alle $p > q$.

Beweis. Es ist klar, dass $m \leq 1$ gilt (denn sonst würde eine Fallunterscheidung nach der Definition von m unter Benutzung von Lemma 2.1.7 (c) und (d) $Q = \delta_0$ im Widerspruch zur Voraussetzung liefern). Im Falle $m = 0$ ist nichts zu zeigen; sei also gleich $m > 0$.

Sei $p > q$ und W eine Zufallsgröße mit der Verteilung Q. Dann kann man analog zum Beweis von Satz 2.1.6 folgende Ungleichung herleiten:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x|^p Q(dx) \quad &\geq \quad (\xi - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{pn} \left(1 - g^{\circ(n+1)}(F(1))\right) \\ &\quad +(\xi - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{pn} g^{\circ(n+1)}(F(-1)).\end{aligned}$$

Wir müssen also nun die Divergenz einer der beiden unendlichen Reihen auf der rechten Seite der Gleichung zeigen. Dazu wählen wir im Falle $m = g'(1)$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{pn} \left(1 - g^{\circ(n+1)}(F(1))\right)$ und im Falle $m = g'(0)$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{pn} g^{\circ(n+1)}(F(-1))$. Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A. an, dass $m = g'(1)$ gilt.

Nach Lemma 1.2.2 existiert wegen $g'(1) > \xi^{-p}$ ein $m_p > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\left|1 - g^{\circ(n)}(F(1))\right| \geq m_p \cdot (\xi^{-p})^n$$

gilt. Nun kann man wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \xi^{pn} \left(1 - g^{\circ(n+1)}(F(1))\right) \quad &\geq \quad \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{pn} m_p (\xi^{-p})^{n+1} \\ &= \quad m_p \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{-p} = \infty.\end{aligned}$$

□

2.2 Die Lösungen im Maximin-Fall

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.1 auf die zu Beginn dieses Kapitels formulierten Maximin-Fixpunktgleichungen und einige weitere Verallgemeinerungen dieser Fixpunktgleichungen. Das heißt, dass wir die im Zusammenhang mit den Maximin-Fixpunktgleichungen auftretenden Funktionen $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ mit dem Ziel untersuchen, die Voraussetzungen der Sätze 2.1.2, 2.1.6 und 2.1.5 zu prüfen. Die Funktionen, die dabei im Zusammenhang mit den Maximin-Fixpunktgleichungen auftreten, haben die Gestalt

$$g(x) := \prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - x)^{m_i}) \quad (x \in [0, 1]) \tag{2.7}$$

mit $n, m_1, \ldots, m_n \geq 2$.

Wir interessieren uns zunächst für die Ableitungen dieser Funktionen in 0 und 1, um aus dem Wachstumsverhalten der Funktionen in Umgebungen von 0 bzw. 1 darauf schließen zu können, in welchen Fällen Fixpunkte in $]0,1[$ existieren und wie sich diese Funkltionen bei 0 und bei 1 verhalten, denn diesem Verhalten kann man nach Bemerkung 2.1.1 entnehmen, ob es Lösungen der Fixpunktgleichung (2.5) gibt, die Masse auf $]-\infty,0[$ bzw. $]0,\infty[$ tragen.

2.2.1 Lemma. *Seien $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ und $g \in \mathcal{G}$ von der Form* (2.7). *Dann gelten:*

$$(a) \qquad g'(0) = \begin{cases} m_1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{falls } n \geq 2, \end{cases}$$

$$(b) \qquad g'(1) = \sharp\{j : m_j = 1\}.$$

Insbesondere gilt $g'(0) = g'(1) = 0$ im Falle $n, m_1, \ldots, m_n \geq 2$.

Beweis. Es gilt $g'(x) = \sum_{j=1}^n m_j(1-x)^{m_j-1} \prod_{i \neq j}(1-(1-x)^{m_i})$ für alle $x \in [0,1]$. Daraus folgt die Behauptung. □

2.2.2 Lemma. *Seien $n, m_1, \ldots, m_n \geq 2$ und $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ wie in* (2.7). *Weiter seien $0 = c_0 < \ldots < c_m = 1$ genau die Fixpunkte von g in $[0,1]$. Dann gilt $m \geq 2$ (d.h. es gibt einen Fixpunkt $\neq 0,1$) und $g < \mathrm{id}$ auf $]0, c_1[$, $g > \mathrm{id}$ auf $]c_{m-1}, 1[$.*

Beweis. Nach Lemma 2.2.1 verschwindet die Ableitung von g in 0 und in 1. Also ist $g - \mathrm{id}$ fallend in einer Umgebung von 0 und in einer Umgebung von 1. Es folgt die Behauptung. □

Damit ist Satz 2.1.2 auf alle Funktionen g wie in (2.7) anwendbar und liefert die Existenz von Lösungen, die sowohl auf $]-\infty,0[$ als auch auf $]0,\infty[$ Masse tragen.

Es stellt sich weiterhin die Frage, wie viele Fixpunkte diese Funktionen im Einheitsintervall haben, denn die Anzahl der Fixpunkte einer Funktion g gibt nach Folgerung 2.1.5 Aufschluss darüber, ob Lösungen der zugehörigen Fixpunktgleichung existieren, die eine stetige Verteilungsfunktion besitzen.

Die Anzahl der Fixpunkte der betrachteten Funktionen wurde in einem Spezialfall bereits in Lemma 1.2.3 bestimmt. Dort wurde gezeigt, dass die Funktionen $x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$ für $b \geq 2$, die zu den Fixpunktgleichungen der b-adischen Maximinbäume gehören, genau einen Fixpunkt in $]0,1[$ haben. Dieses Ergebnis soll nun ausgedehnt werden. Der folgende Beweis benutzt dabei einen Umweg über verwandte Funktionen:

2.2.3 Lemma. *Sei $g \in \mathcal{G}$, $g(x) = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - x^{m_j})$ für $x \in [0,1]$, dabei seien $n, m_1, \ldots, m_n \geq 2$. Dann hat g genau einen Fixpunkt in $]0,1[$.*

Beweis. Wir können o.B.d.A. davon ausgehen, dass $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n$ gilt. Sei $0 \leq x < 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g(x) = x \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - x = \prod_{j=1}^{n}(1 - x^{m_j}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1 - x^{m_1}}{1 - x} = \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{1 - x^{m_j}} \\ &\Longleftrightarrow \quad h_1(x) := \sum_{k=0}^{m_1 - 1} x^k = \sum_{k_2, \ldots, k_n \geq 0} x^{\sum_{j=2}^{n} k_j m_j} =: h_2(x). \end{aligned}$$

Dabei haben h_1 bzw. h_2 die folgenden Eigenschaften:

(i) $h_1(0) = h_2(0) = 1$ und $\lim_{x \to 1} h_1(x) = m_1$, $\lim_{x \to 1} h_2(x) = \infty$;

(ii) Für $j = 1, \ldots, m_1 - 1$ ist $h_1^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{m_1 - 1} k \cdot \ldots \cdot (k - j + 1) x^{k-j}$, insbesondere gilt $h_1^{(j)}(0) = j!$ und $h_1^{(j)}$ wächst monoton auf $[0, 1[$, wobei weiter $\lim_{x \to 1} h_1^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{m_1 - 1} k \cdot \ldots \cdot (k - j + 1) < \infty$ gilt;

(iii) $h_1^{(j)}$ ist identisch 0 für $j \geq m_1$;

(iv) $h_2^{(j)}(0) = 0$ für $j = 1, \ldots, m_1 - 1$ und $h_2^{(j)}$ ist streng monoton wachsend auf $[0, 1[$ mit $\lim_{x \to 1} h_2^{(j)}(x) = \infty$ für alle $j \geq 0$.

Unter Zuhilfenahme der Punkte (i)–(iv) kann Folgendes festgestellt werden: Wegen $h_1'(0) = 1$ und $h_2'(0) = 0$ wächst h_1 zunächst schneller als h_2; wegen (i) muss aber schließlich (für $x \to 1$) $h_2 > h_1$ gelten. Also existiert ein Punkt $c > 0$ mit $h_1(c) = h_2(c)$. Sei $c^{(0)} := \inf\{c > 0 : h_1(c) = h_2(c)\}$. Dann ist wegen der Stetigkeit von h_1, h_2 auch $h_1(c^{(0)}) = h_2(c^{(0)})$ und wegen $h_1'(0) \neq h_2'(0)$ muss $c^{(0)} > 0$ gelten.

Wir zeigen nun mit Induktion nach j für $j = 0, \ldots, m_1 - 1$:

($*$) Für $0 \leq i \leq j$ existiert $c^{(i)} := \inf\{c > 0 : h_1^{(i)}(c) = h_2^{(i)}(c)\}$ und es gilt
$$0 < c^{(j)} < \ldots < c^{(0)} < 1.$$

Begründung: Für $j = 0$ wurde die Aussage schon gezeigt. Sei also $0 < j < m_1$. Wir nehmen nach Induktionsvoraussetzung an, dass $c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}$ wie in ($*$) existieren. Wegen $h_1^{(j)}(0) = j! > 0 = h_2^{(j)}(0)$ und der Tatsache, dass

$$\lim_{x \to 1} h_1^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{m_1 - 1} k \cdot \ldots \cdot (k - j + 1) < \infty = \lim_{x \to 1} h_2^{(j)}(x)$$

gilt, muss $C^{(j)} := \{c > 0 : h_1^{(j)}(c) = h_2^{(j)}(c)\} \neq \emptyset$ gelten. Daher exisitiert $c^{(j)} := \inf C^{(j)}$. Wiederum wegen $h_1^{(j)}(0) = j! > 0 = h_2^{(j)}(0)$ und wegen der

Stetigkeit von $h_1^{(j)}$ und $h_2^{(j)}$ muss $c^{(j)} > 0$ gelten. Um den Nachweis von $(*)$ abzuschließen, genügt es nun zu zeigen, dass $c^{(j)} < c^{(j-1)}$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass $c^{(j)} \geq c^{(j-1)}$ gilt. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} h_1^{(j-1)}(x) &= h_1^{(j-1)}(0) + \int_0^x h_1^{(j)}(t)dt \\ &> h_2^{(j-1)}(0) + \int_0^x h_2^{(j)}(t)dt = h_2^{(j-1)}(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in]0, c^{(j-1)}]$, insbesondere gilt also $h_1^{(j-1)}(c^{(j-1)}) > h_2^{(j-1)}(c^{(j-1)})$ im Widerspruch zur Definition von $c^{(j-1)}$ (man beachte, dass wegen der Stetigkeit von h_1 und h_2 die Menge $C^{(j)}$ abgeschlossen ist, d.h. es muss $h_1^{(j-1)}(c^{(j-1)}) = h_2^{(j-1)}(c^{(j-1)})$ gelten). Also gilt $(*)$ auch für j.

Wir zeigen nun mit umgekehrter Induktion, dass $h_2^{(j)} > h_1^{(j)}$ auf $]c^{(j)}, 1[$ für jedes $j = 0, \ldots, m_1 - 1$ gilt und beginnen mit dem Fall $j = m_1 - 1$ an. Für $x \in]c^{(m_1-1)}, 1[$ kann man unter Benutzung von $h_1^{(m_1)} = 0$ und $h_2^{(m_1)} > 0$ auf $]c^{(m_1-1)}, 1[$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} h_1^{(m_1-1)}(x) &= h_1^{(m_1-1)}(c^{(m_1-1)}) \\ &< h_2^{(m_1-1)}(c^{(m_1-1)}) + \int_{c^{(m_1-1)}}^x h_2^{(m_1)}(t)dt = h_2^{(m_1-1)}(x). \end{aligned}$$

Für $j < m_1 - 1$ ist dann nach Induktionsvoraussetzung $h_2^{(j+1)} > h_1^{(j+1)}$ auf $]c^{(j+1)}, 1[$, also wegen $c^{(j+1)} < c^{(j)}$ auch auf $]c^{(j)}, 1[$, und wir können für $x \in]c^{(j)}, 1[$ wie zuvor abschätzen:

$$\begin{aligned} h_1^{(j)}(x) &= h_1^{(j)}(c^{(j)}) + \int_{c^{(j)}}^x h_1^{(j+1)}(t)dt \\ &< h_2^{(j)}(c^{(j)}) + \int_{c^{(j)}}^x h_2^{(j+1)}(t)dt = h_2^{(j)}(x). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also $h_2(x) > h_1(x)$ für alle $x \in]c^{(0)}, 1[$, und $c^{(0)}$ ist demnach das einzige $x \in]0,1[$ mit $h_1(x) = h_2(x)$, also auch der einzige Fixpunkt von g in $]0,1[$. □

2.2.4 Satz. *Sei $g \in \mathcal{G}$, $g(x) = \prod_{j=1}^n (1 - (1-x)^{m_j})$ für $x \in [0,1]$, dabei seien $n, m_1, \ldots, m_n \geq 2$. Dann hat g genau einen Fixpunkt in $]0,1[$.*

Beweis. Sei $h(x) := 1 - g(1-x)$ für $x \in [0,1]$. Dann gilt:

$$g(x) = x \iff h(1-x) = 1 - x.$$

Lemma 2.2.3 liefert nun die Behauptung. □

2.2.5 Bemerkung. Die Transformation $g \longmapsto 1 - g(1 - \cdot)$, die wir weiter oben zugunsten einfacherer Rechnungen durchgeführt haben, korrespondiert auf dem Niveau der Fixpunktgleichungen zu einem Vorzeichenwechsel bzw. zum Übergang von der Fixpunktgleichung (2.2) zur Fixpunktgleichung

$$W \overset{d}{=} \xi \cdot \min_{1 \le i \le n} \max_{1 \le j \le m_i} W_{i,j}, \tag{2.8}$$

wobei W und die $W_{i,j}$ wie im Kontext von (2.2) gewählt seien. Alle Überlegungen in diesem Abschnitt, die Maximin-Fixpunktgleichungen betreffen, können somit leicht auf Mimimax-Fixpunktgleichungen übertragen werden, insbesondere der noch folgende Satz 2.2.6.

2.2.1 Die Lösungen der Maximin-Fixpunktgleichungen und die analytische Transformierte

Da für jede Verteilung Q auf $\mathbb{R}$, die Lösung der Fixpunktgleichung (2.2) ist, nach Lemma 2.2.1 im Falle $n, m_1, \dots, m_n \ge 2$ alle Momente existieren, liegt die Frage nahe, ob die Moment erzeugende Funktion Ψ_Q von Q auf einem nichtentarteten Intervall um die Null existiert. Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht der Fall. Betrachtet man nämlich die Gleichung $F(\xi^n) = g^{\circ(n)}(F(1))$ für die zu Q korrespondierende Verteilungsfunktion F, so erkennt man, dass $F(t)$ für $t \to \infty$ umso langsamer wächst und für $t \to -\infty$ umso langsamer fällt, je größer ξ ist, d.h., dass Q bei großem ξ viel Masse außerhalb kompakter Intervalle trägt. Der folgende Satz 2.2.6 zeigt, dass dies für hinreichend großes ξ dazu führt, dass der kanonische Definitionsbereich von Ψ_Q auf den Nullpunkt zusammenschrumpft.

Im Hinblick auf Kapitel 1 liefert Satz 2.2.6 allerdings die erfreuliche Aussage, dass für jedes $b \ge 2$ die analytische Transformierte der Grenzverteilung P^{W^*} aus Satz 1.3.3 auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

2.2.6 Satz. *Seien $\xi > 1$, $n, m_1, \dots, m_n \ge 2$, $m := \min\{m_1, \dots, m_n\}$, $g \in \mathcal{G}$, $g(x) = \prod_{i=1}^n (1 - (1-x)^{m_i})$ für $x \in [0,1]$. Weiter seien $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ und $F := F_Q$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Dann gelten:*

(a) *Für $\xi < m$ existiert die Moment erzeugende Funktion Ψ_Q von Q in jedem Punkt $s > 0$. Für $\xi = m$ existiert Ψ_Q in einer Umgebung von 0.*

(b) *Existiert ein $t_0 > 0$ mit $F(t_0) < 1$ und ist $\xi > m$, so existiert die Moment erzeugende Funktion Ψ_Q von Q in keinem Punkt $s > 0$.*

(c) *Für $\xi < n$ existiert die Laplace-Transformierte φ_Q von Q in jedem Punkt $s > 0$. Für $\xi = n$ existiert φ_Q in einer einseitigen Umgebung von 0.*

(d) *Existiert ein $t_1 < 0$ mit $F(t_1) > 0$ und ist $\xi > n$, so exisiert die Laplace-Transformierte φ_Q von Q in keinem Punkt $s > 0$.*

Beweis. W sei eine Zufallsgröße mit der Verteilung Q. Wir gehen zunächst genau wie im Beweis von Satz 2.1.6 vor. Für $s > 0$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \Psi_Q(s) &= Ee^{sW} \\ &= \int_0^\infty P(e^{sW} > t)\,dt \\ &= \int_0^\infty P(W > \frac{\log t}{s})\,dt. \end{aligned}$$

Hier konvergiert das uneigentliche Integral auf der rechten Seite genau dann, wenn

$$I(s) := \int_{e^s}^\infty P(W > \frac{\log t}{s})\,dt < \infty$$

gilt. $I(s)$ kann man aber unter Beachtung von

$$\frac{\log t}{s} = \xi^k \Longleftrightarrow t = e^{s\xi^k} \quad (k \in \mathbb{N}_0,\ t \geq e^s)$$

wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} I(s) &\leq \sum_{k=0}^\infty (e^{s\xi^{k+1}} - e^{s\xi^k}) P(W > \xi^k) \\ &= \sum_{k=0}^\infty (e^{s\xi^{k+1}} - e^{s\xi^k})(1 - g^{\circ(k)}(F(1))) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I(s) &\geq \sum_{k=0}^\infty (e^{s\xi^{k+1}} - e^{s\xi^k}) P(W > \xi^{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^\infty (e^{s\xi^{k+1}} - e^{s\xi^k})(1 - g^{\circ(k+1)}(F(1))). \end{aligned}$$

Hier kann man weiterhin Folgendes feststellen:

$$e^{s\xi^{k+1}} - e^{s\xi^k} = e^{s\xi^k}\left((e^{s\xi^k})^{\xi-1} - 1\right) \geq e^{s\xi^k}\frac{1}{2}(e^{s\xi^k})^{\xi-1} = \frac{1}{2}e^{s\xi^{k+1}}$$

für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$.

Damit haben wir folgende Kriterien hergeleitet:

$$\sum_{k=0}^\infty e^{s\xi^{k+1}}(1 - g^{\circ(k)}(F(1))) < \infty \Longrightarrow \Psi_Q(s) \text{ existiert} \tag{2.9}$$

und

$$\Psi_Q(s) \text{ existiert} \Longrightarrow \sum_{k=1}^\infty e^{s\xi^k}(1 - g^{\circ(k)}(F(1))) < \infty. \tag{2.10}$$

Ebenso wie man (2.9) und (2.10) als hinreichende bzw. notwendige Bedingung für die Existenz der Moment erzeugenden Funktion in s herleiten kann, kann man auch eine hinreichende und eine notwendige Bedingung für die Existenz der Laplace-Transformierten φ_Q in s herleiten:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{s\xi^{k+1}} g^{\circ(k)}(F(-1)) < \infty \Longrightarrow \varphi_Q(s) \text{ existiert} \tag{2.11}$$

und

$$\varphi_Q(s) \text{ existiert} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} e^{s\xi^k} g^{\circ(k)}(F(-1)) < \infty. \tag{2.12}$$

Wir müssen nun untersuchen, wie schnell $(1 - g^{\circ(k)}(F(1)))_{k\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $(g^{\circ(k)}(F(-1)))_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen 0 konvergiert. Dazu betrachten wir g in der Nähe von 1 und in der Nähe von 0 und beginnen mit der Betrachtung bei 1. Es gilt für $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{j=1}^{n}(1-(1-x)^{m_j}) &= \sum_{\emptyset \neq \mathcal{J} \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|\mathcal{J}|-1}(1-x)^{\sum_{j\in\mathcal{J}} m_j} \\ &= (1-x)^m \sum_{\emptyset \neq \mathcal{J} \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|\mathcal{J}|-1}(1-x)^{\sum_{j\in\mathcal{J}} m_j - m} \\ &= (1-x)^m h_1(x) \end{aligned}$$

mit einer stetigen Funktion h_1 mit $h_1(1) = |\{j : m_j = m\}| \geq 1$. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\frac{1}{2} \cdot |\{j : m_j = m\}|(1-x)^m \leq 1 - g(x) \leq 2 \cdot |\{j : m_j = m\}|(1-x)^m \tag{2.13}$$

für alle $x \in [1-\varepsilon, 1]$. Mit α werde der (nach Satz 2.2.4) eindeutige Fixpunkt von g in $]0,1[$ bezeichnet.
Zu (a): Sei $\xi \leq m$. Zu $F(1) \in]\alpha, 1[$ (für $F(1) = 1$ ist nichts zu zeigen) wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $g^{\circ(k_0)}(F(1)) > 1 - \varepsilon$. Dabei wählen wir k_0 gleich so groß, dass weiterhin

$$1 - g^{\circ(k_0)}(F(1)) < (2 \cdot |\{j : m_j = m\}|)^{-1}$$

gilt. Dann ist

$$l := \log\left(2 \cdot |\{j : m_j = m\}| \left[1 - g^{\circ(k_0)}(F(1))\right]\right) < 0$$

und wir können für $k > k_0$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} 1-g^{\circ(k)}(F(1)) &= 1-g(g^{\circ(k-1)}(F(1))) \leq 2\cdot|\{j : m_j = m\}|(1-g^{\circ(k-1)}(F(1)))^m \\ &\leq \ldots \leq (2 \cdot |\{j : m_j = m\}|)^{\sum_{j=0}^{k-k_0-1} m^j} (1 - g^{\circ(k_0)}(F(1)))^{m^{k-k_0}} \\ &\leq \left(2 \cdot |\{j : m_j = m\}| \cdot (1 - g^{\circ(k_0)}(F(1)))\right)^{m^{k-k_0}} = \exp\left(m^{k-k_0} l\right). \end{aligned}$$

Wir können damit die Summanden in (2.9) für $k > k_0$ und beliebiges $s > 0$ abschätzen:

$$\begin{aligned} e^{s\xi^{k+1}}\left(1 - g^{\circ(k)}(F(1))\right) &\leq \exp\left(s\xi^{k+1} + m^{k-k_0}l\right) \\ &= \exp\left(m^k\left(s\xi(\xi/m)^k + l/m^{k_0}\right)\right), \end{aligned}$$

und hier liegt schließlich doppelt exponentiell schnelles Fallen gegen 0 vor, falls $\xi < m$ ist. Die Reihe in (2.9) konvergiert dann. Im Falle $\xi = m$ liegt Konvergenz sicher dann vor, wenn $s < -\frac{l}{\xi m^{k_0}}$ ist. Insgesamt folgt (a).
Zu (b): Analog zum Beweis von (d) (siehe unten).

Nun nehmen wir eine Untersuchung von g bei 0 vor, um die beiden verbleibenden Aussagen zu beweisen.

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n}(1-(1-x)^{m_j}) &= x^n \prod_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j}\binom{m_j}{k}(-1)^{k-1}x^{k-1} \\ &=: x^n h_0(x), \end{aligned}$$

wobei h_0 eine stetige Funktion ist mit $h_0(0) = \prod_{j=1}^{n} m_j$. Es existiert also ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{n} m_j\right)x^n \leq g(x) \leq 2\left(\prod_{j=1}^{n} m_j\right)x^n \tag{2.14}$$

für alle $x \in [0, \varepsilon]$ gilt.
Zu (c): Sei $\xi \leq n$. Zu gegebenem $F(-1) \in [0, \alpha[$ wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $g^{\circ(k_0)}(F(-1)) < \min\{\varepsilon, (2\prod_{j=1}^{n} m_j)^{-1}\}$. Dann ist

$$l := \log\left(2\left[\prod_{j=1}^{n} m_j\right] g^{\circ(k_0)}(F(-1))\right) < 0$$

und es gilt für alle $k > k_0$:

$$\begin{aligned} g^{\circ(k)}(F(-1)) = g(g^{\circ(k-1)}(F(-1))) &\leq \left(2\prod_{j=1}^{n} m_j\right)\left(g^{\circ(k-1)}(F(-1))\right)^n \\ \leq \ldots \leq \left(2\prod_{j=1}^{n} m_j\right)^{\sum_{j=0}^{k-k_0-1} n^j} &\left(g^{\circ(k_0)}(F(-1))\right)^{n^{k-k_0}} \\ \leq \left(2\prod_{j=1}^{n} m_j\right)^{n^{k-k_0}} &(g^{\circ(k_0)}(F(-1)))^{n^{k-k_0}} = \exp\left(n^{k-k_0}l\right). \end{aligned}$$

Wir können nun die Summanden aus (2.11) für $k > k_0$ und beliebiges $s > 0$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} e^{s\xi^{k+1}} g^{\circ(k)}(F(-1)) &\leq \exp\left(s\xi^{k+1} + n^{k-k_0} l\right) \\ &= \exp\left(n^k \left(s\xi(\xi/n)^k + l/n^{k_0}\right)\right), \end{aligned}$$

d.h. die Summanden konvergieren im Falle $\xi < n$ schließlich mit doppelt exponentieller Konvergenzgeschwindigkeit gegen 0 und die Reihe konvergiert. Ist $\xi = n$, so liegt Konvergenz der Reihe sicher dann vor, wenn $s < -\frac{l}{\xi n^{k_0}}$. Es folgt die Aussage (c).

Zu (d): Seien $\xi > n$ und $s > 0$ beliebig. Es gilt $F(-1) \in \,]0, \alpha[$. Wir bemühen diesmal (2.12) und (2.14). Zunächst liefert uns nämlich (2.14) vermöge Iteration (wobei $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß sei, dass $g^{\circ(k_0)}(F(-1)) < \varepsilon$ ist) für alle $k > k_0$ (mit $\tilde{l} := \log\left(g^{\circ(k_0)}(F(-1)) \sqrt[n]{\frac{1}{2}\prod_{j=1}^n m_j}\right)$):

$$\begin{aligned} g^{\circ(k)}(F(-1)) &= g(g^{\circ(k-1)}(F(-1))) \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\prod_{j=1}^n m_j\right)^{\sum_{j=0}^{k-k_0-1} n^j} \left(g^{\circ(k_0)}(F(-1))\right)^{n^{k-k_0}} \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\prod_{j=1}^n m_j\right)^{n^{k-k_0-1}} \left(g^{\circ(k_0)}(F(-1))\right)^{n^{k-k_0}} \\ &= \exp\left(n^{k-k_0}\tilde{l}\right). \end{aligned}$$

Wir können uns nun an die Abschätzung der Summanden in (2.12) für $k > k_0$ begeben:

$$\begin{aligned} e^{s\xi^k} g^{\circ(k)}(F(-1)) &\geq \exp\left(s\xi^k + n^{k-k_0}\tilde{l}\right) \\ &= \exp\left(\xi^k (s + \tilde{l}/n^{k_0} \cdot (n/\xi)^k)\right) \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} \infty, \end{aligned}$$

d.h. es kann keine Konvergenz der unendlichen Reihe in (2.12) vorliegen. Die Laplace-Transformierte von Q existiert also nicht in s, und da $s > 0$ beliebig war, existiert die Laplace-Transformierte also in keinem $s > 0$. □

2.2.2 Fixpunktgleichungen mit zufälliger Anzahl von Maxima und Minima

Um ein Beispiel für eine Fixpunktgleichung der Gestalt (2.5) zu geben, wo die auftretende Funktion g kein Polynom ist, kann man die Fragestellung zu Beginn dieses Kapitels verallgemeinern, indem man statt einer fixen Anzahl von Maxima und Minima in (2.2) eine zufällige Anzahl verwendet. Wir wollen diesen Gedanken wie folgt präzisieren: Vorgelegt seien $\mathbb{N}$-wertige, stochastisch unabhängige Zufallsgrößen $X, Y, Y_1, Y_2, \ldots$, wobei $Y_i \sim Y$ für alle $i \geq 1$ gelte. Für ein $\xi > 1$ betrachten wir dann die Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} \xi \cdot \max_{1 \leq i \leq X} \min_{1 \leq j \leq Y_i} W_{i,j}, \tag{2.15}$$

wobei $(W_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ eine von X und der Familie der Y_i unabhängige Familie unabhängiger Zufallsgrößen sei und wie im Kontext von (2.2) die $W_{i,j}$ Kopien von W seien. Darüber hinaus sei X unabhängig von der von den Y_i und $W_{i,j}$ erzeugten σ-Algebra.

Wir möchten als nächstes ein Analogon zu (2.4) für die Fixpunktgleichungen mit zufälliger Anzahl von Maxima und Minima herleiten. Dazu bezeichnen wir mit $F := F_W$ die Verteilungsfunktion von W, mit f_X, f_Y die erzeugenden Funktionen von X bzw. Y; d.h. für $x \in [0,1]$ gilt:

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \cdot x^k \text{ und } f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y = k) \cdot x^k.$$

Nun kann man für $t \in \mathbb{R}$ wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}
F(t) &= P(W \leq t) = P\left(\xi \cdot \max_{1 \leq i \leq X} \min_{1 \leq j \leq Y_i} W_{i,j} \leq t\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X = k, \max_{1 \leq i \leq k} \min_{1 \leq j \leq Y_i} W_{i,j} \leq t/\xi\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)\left(P(\min_{1 \leq j \leq Y} W_{1,j} \leq t/\xi)\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)\left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} P(Y = l, \min_{1 \leq j \leq l} W_{1,j} > t/\xi)\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)\left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} P(Y = l) P(W > t/\xi)^l\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)\left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} P(Y = l)(1 - F(t/\xi))^l\right)^k \\
&= f_X\big(1 - f_Y(1 - F(t/\xi))\big),
\end{aligned}$$

d.h. man hat wieder eine Gleichung vom Typ (2.5) mit einem $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ der Gestalt

$$g(x) = f_X(1 - f_Y(1 - x)) \text{ für } x \in [0,1], \tag{2.16}$$

wobei $P(X = 0) = P(Y = 0) = 0$ impliziert, dass $f_X(0) = f_Y(0) = 0$ und damit auch $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ gilt. Da f_X und f_Y auf $[0, 1]$ nach bekannten Sätzen aus der Analysis stetig und weiterhin streng monoton wachsend sind, gilt das gleiche auch für g. Also ist $g \in \mathcal{G}$ und wir können die Ergebnisse aus Abschnitt 2.1 auf diese Problemstellung anwenden.

Es folgt ein Beispiel, in dem X und Y in unserem Sinne so günstige Verteilungen besitzen, dass $f_X(1 - f_Y(1 - \cdot))$ einfach zu berechnen ist.

2.2.7 Beispiel. Seien $0 < \alpha, \beta < 1$ und

$$p_k := \begin{cases} 0, & \text{für } k = 0, \\ (-1)^{k-1}\binom{\alpha}{k}, & \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Weiter sei q_k für $k \in \mathbb{N}_0$ definiert wie p_k mit β anstelle von α. Dann definieren $(p_k)_{k\geq 0}$ und $(q_k)_{k\geq 0}$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{N}_0$ (sogar auf $\mathbb{N}$). Zum Nachweis dieser Aussage beschränken wir uns aus Symmetriegründen auf die Folge $(p_k)_{k\geq 0}$ und stellen zunächst fest, dass für alle $k \geq 1$

$$\begin{aligned} p_k = (-1)^{k-1}\binom{\alpha}{k} = (-1)^{k-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \\ = \frac{\alpha(1-\alpha)\cdot\ldots\cdot(k+1-\alpha)}{k!} \geq 0 \end{aligned}$$

gilt ($p_0 \geq 0$ ist evident); d.h. $(p_k)_{k\geq 0}$ definiert ein Maß auf $\mathbb{N}_0$.

Weiter gilt für alle $k \geq 1$:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k-\alpha}{k+1} = 1 - \frac{1+\alpha}{k+1},$$

d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} p_k$ konvergiert nach dem Raabeschen Konvergenzkriterium (siehe [Heu], Satz 33.10). Unter Benutzung des Abelschen Grenzwertsatzes erhält man:

(2.17)
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \lim_{s\uparrow 1}\sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k = 1 - \lim_{s\uparrow 1}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-s)^k = 1 - \lim_{s\uparrow 1}(1-s)^{\alpha} = 1,$$

d.h. $(p_k)_{k\geq 0}$ definiert tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}_0$, deren erzeugende Funktion $f(s) = 1 - (1-s)^{\alpha}$ $(s \in [0, 1])$ ist.

Seien nun X, Y $\mathbb{N}$-wertige Zufallsgrößen mit Verteilung $(p_k)_{k\geq 0}$ bzw. $(q_k)_{k\geq 0}$ und W eine reellwertige Zufallsgröße, die (2.15) mit dieser speziellen Wahl von X, Y erfüllt (mit einem festen $\xi > 1$). Die Verteilungsfunktion F von W erfüllt dann (2.5) mit $g(s) = 1 - (1 - s^{\beta})^{\alpha}$ $(s \in [0, 1])$. g ist in $]0, 1[$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $\lim_{s\downarrow 0} g'(s) = \lim_{s\uparrow 1} g'(s) = \infty$. Daher ist $g > \mathrm{id}$ in einer Umgebung von 0 und $g < \mathrm{id}$ in einer Umgebung von 1, also muss nach den Ergebnissen von Abschnitt 2.1 $W = 0$ f.s. gelten.

Die Tatsache, dass die Fixpunktgleichung im Falle des Beipiels 2.2.7 nur die triviale Lösung hat, kann man also daran erkennen, dass die Ableitung von g bei 0 und bei 1 sehr groß wird. Die Ursache für dieses Verhalten von g ist die Tatsache, dass für die in diesem Beispiel benutzten Verteilungen die Erwartungswerte nicht existieren und gleichzeitig $P(X = 1), P(Y = 1) > 0$ gilt. Wir wollen den Exkurs über stochastische Maximin-Fixpunktgleichungen mit zufälliger Anzahl von Maxima und Minima mit einer allgemeinen Betrachtung des oben beschriebenen Phänomens beschließen.

2.2.8 Lemma. *Seien X, Y $\mathbb{N}$-wertige Zufallsgrößen, f_X, f_Y die zugehörigen erzeugenden Funktionen und wie oben $g(x) := f_X(1-f_Y(1-x))$ für $x \in [0,1]$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- *Im Falle $EY < \infty$ gilt $g'(0) = P(X = 1) \cdot EY$.*
- *Im Falle $EX < \infty$ gilt $g'(1) = EX \cdot P(Y = 1)$.*

Beweis. Es gilt zunächst für $x \in]0,1[$:

$$g'(x) = f_X'(1 - f_Y(1 - x))f_Y'(1 - x).$$

Ist nun $EY < \infty$, so existiert $g'(0)$ und g' ist stetig in 0. Man erhält also unter Benutzung von $f_X'(0) = P(X = 1)$, $f_Y'(1) = EY$ die erste Aussage. Die zweite erhält man analog. □

2.2.9 Bemerkung. Gegeben sei die Fixpunktgleichung (2.15) mit der zugehörigen Funktion g. Im Falle des Beispiels 2.2.7 hat die zugehörige Fixpunktgleichung nur die triviale Lösung δ_0, da (mit dem entsprechenden g) $\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 1} g'(x) = \infty$ gilt. Mit Lemma 2.2.8 können wir den im Beispiel auftretenden Effekt nun allgemein beschreiben. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Frage nach der Existenz einer auf $]0,\infty[$ nichttrivialen Lösung; der andere Fall kann entsprechend behandelt werden.

Notwendig für die Existenz einer Lösung $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit $Q(]0,\infty[) \neq 0$ ist $g'(1) \leq 1$, hinreichend ist $g'(1) < 1$. Mit Blick auf Lemma 2.2.8 stehen uns damit die folgenden Kriterien zur Verfügung:

- Im Fall $EX < \infty$ ist $P(Y = 1) \leq (EX)^{-1}$ notwendig und die gleiche Ungleichung mit einem strikten $<$-Zeichen hinreichend für die Existenz einer Verteilung $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit $Q(]0,\infty[) > 0$.
- Ist $EX = \infty$, so folgt aus $P(Y = 1) > 0$, dass keine Verteilung $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit $Q(]0,\infty[) > 0$ existiert.

Offen bleiben damit die beiden folgenden Fälle:

(i) $EX = \infty$ und $P(Y = 1) = 0$;

(ii) $EX \cdot P(Y = 1) = 1$.

Wir wollen dies aber im Folgenden nicht weiter vertiefen. Es sei lediglich abschließend angemerkt, dass man z.B. unter Benutzung höherer (faktorieller) Momente von X und Y weiterschließen kann.

2.3 $\mathcal{L}_{g,\xi}$ als Teilmenge von $\mathbb{M}_p$

Das Fixpunktproblem dieses Kapitels soll nun wie folgt übersetzt werden. Für ein $g \in \mathcal{G}$ und $\xi > 1$ definieren wir die maßwertige Abbildung

$$\mathcal{S}_g : \mathfrak{W}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{W}(\mathbb{R}), \quad Q \longmapsto \mathcal{S}_g(Q),$$

wobei $\mathcal{S}_g(Q)$ diejenige Verteilung auf $\mathbb{R}$ mit der Verteilungsfunktion $F_{\mathcal{S}_g(Q)} = g(F_Q(\cdot/\xi))$ $(Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R}))$ sei. Dabei ist für jedes $g \in \mathcal{G}$ und $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ $\mathcal{S}_g(Q)$ offenbar wieder ein Element von $\mathfrak{W}(\mathbb{R})$, da $g(F_Q(\cdot/\xi))$ wegen der Stetigkeit und Monotonie von g wiederum rechtsseitig stetig und monoton wachsend ist; wegen $0, 1 \in \mathcal{F}_g$ gilt auch $\lim_{t\to-\infty} g(F_Q(t/\xi)) = 0$, $\lim_{t\to\infty} g(F_Q(t/\xi)) = 1$. Wir unterschlagen in der Notation die Abhängigkeit der Abbildung von ξ, die wir im Folgenden implizit unterstellen.

Die Frage nach den Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung (2.5) entspricht in diesem Kontext der Frage nach den Fixpunkten der Abbildung $\mathcal{S}_g$. Wir haben in Satz 2.1.2 gesehen, dass die Abbildungen $\mathcal{S}_g$ im Allgemeinen sehr viele Fixpunkte haben. Wir wollen nun die Struktur der Lösungsmenge $\mathcal{L}_{g,\xi}$ in einem geeigneten metrischen Raum $\subseteq \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ untersuchen. Als geeignet erweisen sich die Räume $(\mathbb{M}_p, d_p)$, wobei für $p \geq 1$

$$\mathbb{M}_p := \left\{ Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |x|^p \, Q(dx) < \infty \right\}$$

sei und d_p den minimalen $\mathcal{L}_p$-Abstand auf $\mathbb{M}_p$ bezeichne (vgl. [A2]).

Wir verstärken zunächst die Voraussetzungen an die Funktion g (allerdings nur so moderat, dass die Funktionen in (2.7) weiterhin behandelt werden), um die Abbildung $\mathcal{S}_g$ besser in den Griff zu bekommen, und definieren $\mathcal{G}^1 := \{g \in \mathcal{G} : \text{ g ist stetig differenzierbar}\}$. Jedes g in $\mathcal{G}^1$ ist damit nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $\|g'\|_{[0,1]} := \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|$, d.h. für alle $x, y \in [0, 1]$ ist $|g(x) - g(y)| \leq \|g'\|_{[0,1]} \cdot |x - y|$.

Mit dieser Beobachtung lässt sich leicht nachweisen, dass $\mathcal{S}_g$ für jedes $p \geq 1$ von $\mathbb{M}_p$ nach $\mathbb{M}_p$ abbildet:

2.3.1 Lemma. *Seien $g \in \mathcal{G}^1$, $\xi > 1$, $p \geq 1$ und $\mathcal{S}_g$ die zu g und ξ korrespondierende maßwertige Abbildung. Ist dann $Q \in \mathbb{M}_p$, so auch $\mathcal{S}_g(Q)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\int_{\mathbb{R}} |x|^p \,\mathcal{S}_g(Q)(dx) < \infty$ gilt, falls $Q \in \mathbb{M}_p$ ist. Dazu kann man wie folgt unter Ausnutzung von $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, Satz 19.13 in [A1] und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung abschätzen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|^p \,\mathcal{S}_g(Q)(dx) &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mathcal{S}_g(Q)(]-\infty,-t[\cup]t,\infty[)\,dt \\
&\leq \int_0^\infty pt^{p-1}\left(g(F(-t/\xi)) + 1 - g(F(t/\xi))\right)\,dt \\
&= \xi^p \int_0^\infty pt^{p-1}\left(g(F(-t)) + 1 - g(F(t))\right)\,dt \\
&\leq \xi^p \|g'\|_{[0,1]} \int_0^\infty pt^{p-1}\left(F(-t) + 1 - F(t)\right)\,dt < \infty,
\end{aligned}$$

wenn $Q \in \mathbb{M}_p$ ist, wobei man beachte, dass $\lambda\!\!\lambda(\{t \geq 0 | pt^{p-1}Q(\{-t\}) > 0\}) = 0$ gilt. □

2.3.2 Bemerkung. Betrachtet man speziell die Fixpunktgleichungen mit einem g wie in (2.7), so kann man für dieses g die Aussage von Lemma 2.3.1 einfacher beweisen, indem man unabhängige Zufallsgrößen $W_{i,j}$ $(1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i)$ mit Verteilung Q wählt. Dann hat nämlich

$$W := \xi \cdot \max_{1\leq i\leq n} \min_{1\leq j\leq m_i} W_{i,j}$$

die Verteilung $\mathcal{S}_g(Q)$ und es gilt:

$$|W|^p \leq \xi^p \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} |W_{i,j}|^p.$$

Die rechte Seite ist aber im Falle $Q \in \mathbb{M}_p$ als Summe integrierbarer Funktionen integrierbar.

Das folgende Lemma zeigt, dass $\mathcal{S}_g$ unter den Voraussetzungen des letzten Lemmas eine stetige Abbildung auf $(\mathbb{M}_p, d_p)$ ist.

2.3.3 Lemma. *Sei $g \in \mathcal{G}^1$, $\xi > 1$, $\mathcal{S}_g$ die zugehörige maßwertige Abbildung und $p \geq 1$. Dann gilt für alle $Q, R \in \mathbb{M}_p$:*

$$d_p(\mathcal{S}_g(Q), \mathcal{S}_g(R)) \leq \xi \|g'\|_{[0,1]}^{\frac{1}{p}} d_p(Q, R), \tag{2.18}$$

insbesondere ist $\mathcal{S}_g$ Lipschitz-stetig auf $(\mathbb{M}_p, d_p)$.

Beweis. Seien $Q, R \in \mathbb{M}_p$, $F := F_Q$ und $G := F_R$ die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Dann gilt (mit den entsprechenden Pseudo-Inversen):

$$\begin{aligned}
d_p^p(\mathcal{S}_g(Q), \mathcal{S}_g(R)) &= \int\limits_{]0,1[} \left|(g(F(\cdot/\xi)))^{-1}(y) - (g(G(\cdot/\xi)))^{-1}(y)\right|^p \lambda\!\!\lambda(dy) \\
&= \int\limits_{]0,1[} \left|\xi F^{-1}(g^{\circ(-1)}(y)) - \xi G^{-1}(g^{\circ(-1)}(y))\right|^p \lambda\!\!\lambda(dy) \\
&= \xi^p \int\limits_{]0,1[} g'(y) \left|F^{-1}(y) - G^{-1}(y)\right|^p \lambda\!\!\lambda(dy) \\
&\leq \xi^p \|g'\|_{[0,1]} d_p^p(Q, R).
\end{aligned}$$

□

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen unter geeigneten Voraussetzungen einige Struktureigenschaften der Menge $\mathcal{L}_{g,\xi}$ im metrischen Raum $(\mathbb{M}_p, d_p)$ nachgewiesen werden.

2.3.4 Satz. *Seien $\xi > 1$, $g \in \mathcal{G}^1$ mit $m := \max\{g'(0), g'(1)\} < 1$ und*

$$p < q := \begin{cases} \frac{\log \frac{1}{m}}{\log \xi}, & \textit{falls } 0 < m < 1, \\ \infty, & \textit{falls } m = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{L}_{g,\xi}$ eine unbeschränkte und perfekte Teilmenge des metrischen Raums $(\mathbb{M}_p, d_p)$.

Beweis. Nach Satz 2.1.6 gilt $\mathcal{L}_{g,\xi} \subseteq \mathbb{M}_p$. Wegen $\delta_0 \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ ist $\mathcal{L}_{g,\xi} \neq \emptyset$. Es bleibt für den Nachweis der Perfektheit zu zeigen, dass $\mathcal{L}_{g,\xi}$ gleich der Menge seiner Häufungspunkte ist.

Dazu zeigen wir zunächst die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ in $\mathbb{M}_p$: Sei also $(Q_n \in \mathcal{L}_{g,\xi})_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $(\mathbb{M}_p, d_p)$ gegen $Q \in \mathbb{M}_p$ konvergente Folge, d.h. es gelte $d_p(Q_n, Q) \to 0$ $(n \to \infty)$. Wir bezeichnen mit F_n die Verteilungsfunktion von Q_n $(n \in \mathbb{N})$ und mit F die Verteilungsfunktion von Q. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ für alle $t \in \mathcal{C}(F)$, wobei wir mit $\mathcal{C}(F)$ die Menge der Stetigkeitspunkte von F bezeichnen.

Mit F ist auch $F(\cdot/\xi)$ die Verteilungsfunktion einer Verteilung auf $\mathbb{R}$. Da monotone Funktionen auf $\mathbb{R}$ bekanntlich höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen haben, sind also $\mathcal{C}(F)^c$ und $\mathcal{C}(F(\frac{\cdot}{\xi}))^c$ abzählbar. Daher ist $\mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(F(\cdot/\xi))$ Komplement einer abzählbaren Menge und liegt dicht in $\mathbb{R}$. Wir können also jeden beliebig vorgelegten Punkt $x \in \mathbb{R}$ durch Elemente von $\mathcal{C}(F)\cap\mathcal{C}(F(\cdot/\xi))$ approximieren und unter Ausnutzung der rechtsseitigen

Stetigkeit von Verteilungsfunktionen wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{t\downarrow x:\, t\in\mathcal{C}(F)\cap\mathcal{C}(F(\cdot/\xi))} F(t) \\ &= \lim_{t\downarrow x:\, t\in\mathcal{C}(F)\cap\mathcal{C}(F(\cdot/\xi))} \lim_{n\to\infty} F_n(t) \\ &= \lim_{t\downarrow x:\, t\in\mathcal{C}(F)\cap\mathcal{C}(F(\cdot/\xi))} \lim_{n\to\infty} g(F_n(t/\xi)) \\ &= \lim_{t\downarrow x:\, t\in\mathcal{C}(F)\cap\mathcal{C}(F(\cdot/\xi))} g(F(t/\xi)) \\ &= g(F(x/\xi)); \end{aligned}$$

d.h. F erfüllt die Fixpunktgleichung (2.5) und daher gilt $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$.

Es bleibt zu zeigen, dass jedes $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ Häufungspunkt von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ ist. Sei also $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ vorgelegt und $\varepsilon > 0$, o.B.d.A. gelte $\varepsilon < 1$. Wir müssen eine Fallunterscheidung vornehmen, ob $Q = \delta_0$ gilt oder nicht.

Sei zunächst $Q \neq \delta_0$ und W eine Zufallsgröße mit $W \stackrel{d}{=} Q$. Dann gilt $\|W\|_p > 0$, und es ist auch $Q \neq R \in \mathcal{L}_{g,\xi}$, wobei R die Verteilung von $(1 + \frac{\varepsilon}{\|W\|_p+1})W$ sei. Nun können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} d_p(Q,R) &\leq \left\| W - \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|W\|_p + 1}\right) W \right\|_p \\ &= \frac{\varepsilon}{\|W\|_p + 1} \|W\|_p \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch zeigen, dass auch δ_0 Häufungspunkt von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ ist. Dies ist aber unmittelbar klar, da $\mathcal{L}_{g,\xi}$ bezüglich Skalierung mit positiven Faktoren abgeschlossen ist und wegen $m < 1$ nach Satz 2.1.2 ein $\delta_0 \neq R \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ existiert. Es folgt die Perfektheit von $\mathcal{L}_{g,\xi}$. Die Unbeschränktheit von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ folgt ebenfalls aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ bezüglich der Skalierung mit positiven Faktoren. □

Im Beweis von Satz 2.3.4 nutzen wir die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ gegenüber Streckung aus. In speziellen Fällen, insbesondere im Fall der Maximin-Fixpunktgleichungen (2.4), ist es aber nicht notwendig, eine Verteilung $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ durch eine Streckung bzw. Stauchung von Q selbst zu approximieren. Vielmehr lässt sich jedes $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ auch durch andere Lösungen der Fixpunktgleichung approximieren. Die folgende Definition und das folgende Lemma gehen näher darauf ein.

2.3.5 Definition. Seien $g \in \mathcal{G}$ und $\xi > 1$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\approx$ auf $\mathcal{L}_{g,\xi}$ wie folgt: Für $Q, R \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ sei

$$Q \approx R :\Longleftrightarrow \exists \gamma > 0 : F_R = F_Q\left(\frac{\cdot}{\gamma}\right),$$

d.h. es gilt $Q \approx R$ genau dann, wenn ein $\gamma > 0$ existiert, so dass für jede Zufallsgröße W mit der Verteilung Q die Zufallsgröße γW die Verteilung R hat. Eine Äquivalenzklasse $[Q]$ bzgl. $\approx$ nennen wir einen *Zweig von* $\mathcal{L}_{g,\xi}$.

2.3.6 Lemma. *In der Situation von Satz 2.3.4 gelte nun verschärfend $g'(0), g'(1) < \xi^{-1}$. Dann kann jedes $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ durch Elemente anderer Zweige, d.h. durch gewisse $R \notin [Q]$, beliebig genau approximiert werden.*

Beweis. Sei $\delta_0 \neq Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ (für $Q = \delta_0$ ist nach Satz 2.3.4 nichts zu zeigen). F sei die Verteilungsfunktion von Q. Wir nehmen zunächst an, dass $Q(]0,\infty[) > 0$ ist und erkiesen eine Verteilung $R \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit Verteilungsfunktion G, für die $G(t) = F(t)$ für alle $t < 0$ gilt. Seien weiter $U \sim R(0,1)$ und F^{-1}, G^{-1} die zu F, G gehörenden Pseudo-Inversen. Dann gilt $F^{-1}|_{]0,c_1[} = G^{-1}|_{]0,c_1[}$, wobei $c_1 = F(0)$ der größte Fixpunkt von g in $]0,1[$ sei (dieser existiert wegen $g'(1) < \xi^{-1} < 1$). Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned}
d_p^p(Q,R) &= E\left|F^{-1}(U) - G^{-1}(U)\right|^p \\
&= \int_{]0,1[} \left|F^{-1}(y) - G^{-1}(y)\right|^p \lambda\!\!\lambda(dy) \\
&= \int_{]c_1,1[} \left|F^{-1}(y) - G^{-1}(y)\right|^p \lambda\!\!\lambda(dy) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{g^{\circ(n)}(F(1))}^{g^{\circ(n+1)}(F(1))} \left|F^{-1}(y) - G^{-1}(y)\right|^p dy,
\end{aligned}$$

und weiter unter Ausnutzung der Gültigkeit von (2.5) für F, G und der Identität $(g^{\circ(n)}(F(\cdot/\xi^n)))^{-1} = \xi^n \cdot F^{-1} \circ g^{\circ(-n)}(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
d_p^p(Q,R) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi^n \int_{g^{\circ(n)}(F(1))}^{g^{\circ(n+1)}(F(1))} \left|F^{-1}(g^{\circ(-n)}(y)) - G^{-1}(g^{\circ(-n)}(y))\right|^p dy \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi^n \int_{F(1)}^{g(F(1))} (g^{\circ(n)})'(y) \left|F^{-1}(y) - G^{-1}(y)\right|^p dy.
\end{aligned}$$

Nach Gleichung (1.1) im Beweis von Lemma 1.2.2 (a) existiert zu einem fest vorgegebenen $\gamma \in]g'(1), \xi^{-1}[$ eine Konstante $C_\gamma > 0$ mit $(g^{\circ(n)})'(y) \leq C_\gamma \cdot \gamma^n$ für alle $y \in [F(1), 1]$ und $n \geq 0$. Diese Konstante C_γ hängt nur von g, γ und $F(1)$ ab, aber nicht von R.

Weil $g(c_1) = c_1 < 1$ ist und $g > \mathrm{id}$ auf $]c_1, 1[$ gilt, kann man $g'(c_1)$ wie folgt abschätzen:

$$g'(c_1) = \lim_{t\downarrow c_1} \frac{g(t) - g(c_1)}{t - c_1} = \lim_{t\downarrow c_1} \frac{g(t) - c_1}{t - c_1} \geq 1.$$

Also ist $(g^{\circ(-1)})'(c_1) \leq 1 < \xi$ und wir können analog zur Argumentation für g zu vorgegebenem $\beta \in](g^{\circ(-1)})'(c_1), \xi[$ die Existenz eines $C_\beta > 0$ mit $(g^{\circ(-n)})'(y) \leq C_\beta \cdot \beta^n$ für alle $y \in [c_1, g(F(1))]$ und alle $n \geq 0$ folgern.

Zur Vereinfachung setzen wir

$$c_R := \left(\int_{F(1)}^{g(F(1))} \left| F^{-1}(y) - G^{-1}(y) \right|^p \, dy \right)^{1/p},$$

und schätzen wie folgt ab:

$$\begin{aligned} d_p^p(Q,R) &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \int_{F(1)}^{g(F(1))} (g^{\circ(n)})'(y) \left| F^{-1}(y) - G^{-1}(y) \right|^p \, dy \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-n} \int_{F(1)}^{g(F(1))} (g^{\circ(-n)})'(y) \left| F^{-1}(y) - G^{-1}(y) \right|^p \, dy \\ &\leq c_R^p \left(C_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (\xi\gamma)^n + C_\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\xi} \right)^n \right) \\ &\leq c_R^p \left(\frac{C_\gamma}{1-\xi\gamma} + \frac{C_\beta}{1-\xi^{-1}\beta} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$d_p(Q,R) \leq c_R \sqrt[p]{\frac{C_\gamma}{1-\xi\gamma} + \frac{C_\beta}{1-\xi^{-1}\beta}}.$$

Da es sich bei $\frac{C_\gamma}{1-\xi\gamma} + \frac{C_\beta}{1-\xi^{-1}\beta}$ um eine Konstante in Abhängigkeit von g, F und ξ handelt (β, γ können auch in Abhängigkeit von g, ξ fest gewählt werden), genügt es also zu zeigen, dass man Verteilungen $R \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit beliebig kleinem c_R findet.

Sei also $\varepsilon > 0$; wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\varepsilon < \xi - 1$ ist, und wählen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon \cdot n > \xi - 1$. Sei $\delta := n^{-1}(\xi - 1)$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:
Fall 1: F ist stetig auf $[1, \xi]$. Wir setzen dann

$$G(t) := F(1 + \delta k)$$

für alle $t \in [1 + \delta k, 1 + \delta(k+1)[$, $0 \leq k < n$.
Fall 2: F hat eine Unstetigkeitsstelle in $[1, \xi]$, d.h. es gibt ein $t_0 \in]1, \xi]$ mit $F(t_0-) < F(t_0)$. Wir setzen dann

$$G(t) := F(1 + \delta k) + \delta^{-1}(F(1 + \delta(k+1)) - F(1 + \delta k))(t - (1 + \delta k))$$

für alle $t \in [1 + \delta k, 1 + \delta(k+1)[$, $0 \leq k < n$.

G kann in beiden Fällen wie in Satz 2.1.2 zu einer Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, die (2.5) erfüllt, wobei wir $G|_{]-\infty,0[} = F|_{]-\infty,0[}$ setzen. In beiden Fällen gelten für jedes $y \in]F(1), g(F(1))[$ wegen $\delta < \varepsilon$ die Implikationen

$$F(t) \geq y \Longrightarrow G(t + \varepsilon) \geq y$$

und

$$G(t) \geq y \Longrightarrow F(t+\varepsilon) \geq y,$$

also

$$\left|F^{-1}(y) - G^{-1}(y)\right| \leq \varepsilon,$$

für alle $y \in]F(1), g(F(1))[$. Wir bezeichnen nun mit R die zu G korrespondierende Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$c_R = \left(\int_{F(1)}^{g(F(1))} \left|F^{-1}(y) - G^{-1}(y)\right|^p \, dy \right)^{1/p} \leq \varepsilon \cdot (g(F(1)) - F(1))^{1/p} < \varepsilon.$$

Weiterhin gilt in jedem Fall $[Q] \neq [R]$, denn im ersten Fall ist F nach Folgerung 2.1.4 stetig auf $]0, \infty[$, während G Unstetigkeitsstellen in $]0, \infty[$ besitzt, und im zweiten Fall hat F eine Unstetigkeitsstelle in $[1, \xi]$, während G wiederum nach Folgerung 2.1.4 stetig auf $]0, \infty[$ ist.

Ist $Q \neq \delta_0$ eine Verteilung mit $Q(]0, \infty[) = 0$, so liefert ein analoges Vorgehen auf der negativen Halbachse eine geeignete Approximation von Q. □

Die Funktionen $x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$ für $b \geq 2$, die in Kapitel 1 auftreten, erfüllen allesamt die Voraussetzungen des Lemmas, d.h. für diese Funktionen besitzt $\mathcal{L}_{g,\xi}$ in $(\mathbb{M}_p, d_p)$ die in Satz 2.3.4 und Lemma 2.3.6 beschriebene Struktur.

Kapitel 3

Bestimmung der Verteilung von W^*

Dieses Kapitel widmet sich der Bestimmung der Verteilung von W^*, die im zweiten Abschnitt des Kapitels gelingt. Der erste Abschnitt des Kapitels liefert mit Satz 3.1.4 einen entscheidenden Beitrag dazu.

3.1 Konvergenzbedingungen für $(S_g^{\circ(n)}(Q))_n$ im Maximin-Fall

In diesem Abschnitt wollen wir Untersuchungen hinsichtlich der Konvergenz der Folge $(S_g^{\circ(n)}(Q))_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung vornehmen und uns dabei auf die Funktionen g der Form $x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$ $(b \geq 2)$ beschränken. Wir halten also bis auf Weiteres ein solches b mit zugehöriger Funktion g fest und bezeichnen mit α dabei stets den eindeutigen Fixpunkt von g in $]0,1[$. Einige Aussagen dieses Abschnitts sind nicht von der konkreten Wahl von g abhängig und können für jedes beliebige $g \in \mathcal{G}$ in angepasster Form bewiesen werden. Dies geht aus den entsprechenden Beweisen hervor und wird nicht extra bemerkt. Wir sammeln im folgenden Lemma zunächst offensichtlich notwenige Bedingungen an die Verteilung Q für die Konvergenz von $S_g^{\circ(n)}(Q)$.

3.1.1 Lemma. *Seien $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ und $F := F_Q$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Konvergiert dann $(S_g^{\circ(n)}(Q))_{n\in\mathbb{N}_0}$ in Verteilung gegen Q_0, so gelten:*

(a) $F(0-) \leq \alpha$,

(b) $F(0) \geq \alpha$.

Weiter folgt aus $F(0-) < \alpha$, dass $Q_0(]-\infty,0[) = 0$ gilt, und aus $F(0) > \alpha$, dass $Q_0(]0,\infty[) = 0$ gilt.

Beweis. Sei $F(0-) > \alpha$. Dann gilt für jedes $t < 0$ und alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$, dass

$$g^{\circ(k)}\left(F\left(\frac{t}{\xi^k}\right)\right) \geq g^{\circ(k)}(\alpha) = \alpha$$

ist. Wegen $S_g^{\circ(k)}(Q)(]-\infty,t]) = g^{\circ(k)}(F(t/\xi^k))$ kann $(S_g^{\circ(n)}(Q))_{n\in\mathbb{N}_0}$ damit nicht in Verteilung konvergieren. Aussage (a) folgt nun mit Kontraposition. Aussage (b) und die Zusätze lassen sich ähnlich beweisen. □

Es ist klar, dass für den Grenzübergang nicht das ganze Verhalten von F wichtig ist, sondern nur das Verhalten nahe bei der Null. Dieses Verhalten ist besonders bei Verteilungen mit in $\mathbb{R}$ diskretem Träger leicht zu beschreiben. Der folgende Satz befasst sich mit dem Fall einer solchen Startverteilung Q:

3.1.2 Satz. *Seien $\xi > 1$ und $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ eine Verteilung, deren Träger Ω_0 diskret in $\mathbb{R}$ sei, d.h. Ω_0 habe keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$. Sei W_0 eine reellwertige Zufallsgröße mit Verteilung Q und Verteilungsfunktion F. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Gilt $F(t) \neq \alpha$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so existiert eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $S_g^{\circ(n)}(P(W_0 + \gamma \in \cdot)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \delta_0$.

(b) Existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $F(t) = \alpha$, so existieren keine Konstanten $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $(S_g^{\circ(n)}(P(\beta W_0 + \gamma \in \cdot)))_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung konvergiert.

Beweis. Wir beweisen zunächst (a) und setzen $\gamma := -\inf\{t \in \mathbb{R} | F(t) > \alpha\}$. γ ist eine reelle Zahl. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist dann $F_\gamma(t) := P(W_0 + \gamma \leq t) = P(W_0 \leq t - \gamma) = F(t - \gamma)$. Einerseits gilt damit $F_\gamma(0) = F(-\gamma) \geq \alpha$ nach Wahl von γ; der Fall $F(-\gamma) = \alpha$ ist aber nach Voraussetzung ausgeschlossen, d.h. es gilt $F_\gamma(0) > \alpha$ und damit

$$S_g^{\circ(n)}(P(W_0 + \gamma \in \cdot))(]-\infty,t]) = g^{\circ(n)}(F_\gamma(t/\xi^n)) \geq g^{\circ(n)}(F_\gamma(0)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

für alle $t \geq 0$. Andererseits folgt aus der Diskretheit von Ω_0 in $\mathbb{R}$, dass $F_\gamma(0-) = F((-\gamma)-) < \alpha$ ist, und damit folgt

$$S_g^{\circ(n)}(P(W_0 + \gamma \in \cdot))(]-\infty,t]) = g^{\circ(n)}(F_\gamma(t/\xi^n)) \leq g^{\circ(n)}(F_\gamma(0-)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für alle $t < 0$, d.h. es gilt (a).

Zum Beweis von (b) nehmen wir die Existenz von $\beta > 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ an, für die $(S_g^{\circ(n)}(P(\beta W_0 + \gamma \in \cdot)))_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung konvergiert, und setzen $F_{\beta,\gamma}(t) := P(\beta W_0 + \gamma \leq t) = F((t-\gamma)/\beta)$. Notwendig für die Verteilungskonvergenz der Folge $(S_g^{\circ(n)}(P(W_0 + \gamma \in \cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Lemma 3.1.1, dass

$F_{\beta,\gamma}(0-) \leq \alpha$ und $F_{\beta,\gamma}(0) \geq \alpha$ gilt. Da der Wert α von $F_{\beta,\gamma}$ angenommen wird, kann nicht in beiden Fällen das strenge Ungleichheitszeichen stehen. Mit Ω_0 ist aber auch der Träger von $\beta W_0 + \gamma$ diskret in $\mathbb{R}$ und es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $F_{\beta,\gamma}(t) = \alpha$ für alle $t \in [-\varepsilon, 0[$ oder $F_{\beta,\gamma}(t) = \alpha$ für alle $t \in [0, \varepsilon[$ gilt. Es folgt $\lim_{n\to\infty} g^{\circ(n)}(F_{\beta,\gamma}(t/\xi^n)) = \alpha$ für alle $t < 0$ im ersten bzw. für alle $t > 0$ im zweiten Fall im Widerpruch zur angenommenen Verteilungskonvergenz der Folge $(S_g^{\circ(n)}(P(W_0 + \gamma \in \cdot)))_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

In der Situation von (a) kann man darüber hinaus keine reelle Zahl γ' finden kann, so dass die Folge $(S_g^{\circ(n)}(P(W_0 + \gamma' \in \cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen eine Verteilung $Q \neq \delta_0$ konvergiert.

Obwohl Satz 3.1.2 sehr einfach ist, stellt er doch immerhin fest, dass man eine Zufallsgröße W_0 mit Binomial- oder Poissonverteilung oder einer von vielen anderen bekannten und häufig in Beispielen auftretenden diskreten Verteilungen nicht in sinnvoller Weise so skalieren und verschieben kann, dass man im Grenzübergang bei iterierter Anwendung von S_g auf die Verteilung von W_0 Verteilungskonvergenz erhält.

Allerdings muss auch dann keine Verteilungskonvergenz vorliegen, wenn die Ausgangsverteilung Q jeder punktierten Umgebung $U - \{0\}$ von 0 positive Wahrscheinlichkeit zuordnet, wie das folgende Beispiel zeigt:

3.1.3 Beispiel. Wir definieren eine Verteilung $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ über ihre Verteilungsfunktion $F := F_Q$. Da für den Grenzübergang, wie weiter oben festgestellt wurde, nur das Verhalten von F in einer Umgebung von 0 wichtig ist, müssen wir F nur auf $]-\xi, \xi[$ festlegen. Wir werden uns sogar nur auf das Intervall $[0, \xi[$ beschränken (man kann z.B. $F|_{]-\infty,0[} = 0$ setzen); durch ein analoges Vorgehen auf $]-\xi, 0]$ kann man ein entsprechendes Ergebnis auf der negativen Halbachse erzielen.

Wir geben uns nun eine Konstante $\alpha < c < 1$ vor und setzen $F(t) := c$ für alle $t \in [1, \xi[$. Weiter wählen wir eine monoton fallende Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen > 0, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, dass $\varepsilon_1 < \min\{c - \alpha, 1 - c\}$ gilt, und setzen $k_0 := 0$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ für bereits definierte $k_0 \leq \ldots \leq k_{2n}$:

$$F(\xi^{-k}) := g^{\circ(-2(k-k_{2n}))}(F(\xi^{-k_{2n}})) \text{ für alle } k_{2n} \leq k \leq k_{2n+1},$$

wobei $k_{2n+1} := \min\left\{k > k_{2n} : g^{\circ(-(k-2k_{2n}))}(F(\xi^{-k_{2n}})) < \alpha + \varepsilon_{2n+1}\right\}$, und

$$F(\xi^{-k}) := F(\xi^{-k_{2n+1}}) \text{ für alle } k_{2n+1} \leq k \leq k_{2n+2}$$

mit $k_{2n+2} := \min\left\{k > k_{2n+1} : g^{\circ(k)}(F(\xi^{-k_{2n+1}})) > 1 - \varepsilon_{2n+2}\right\}$. Lemma 1.2.1 liefert induktiv die Existenz von k_n für alle $n \geq 0$, d.h. F ist wohldefiniert in ξ^{-k} für alle $k \geq 0$. Für $t \in]0, 1]$ setzen wir nun $F(t) := F(\xi^{-k})$ mit dem $k \in \mathbb{N}_0$, für das $\xi^{-k} \leq t < \xi^{-k+1}$ gilt, sowie $F(0) := \alpha$. Dann ist F monoton wachsend und rechtsseitig stetig in $[0, \xi]$, kann also zu einer Verteilungsfunktion fortgesetzt werden. Wir betrachten eine beliebige Fortsetzung von

F zu einer Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$, die wir wiederum mit F bezeichnen, die korrespondierende Wahrscheinlichkeitsverteilung nennen wir Q. Seien F_k die Verteilungsfunktion von $\mathcal{S}_g^{\circ(k)}(Q)$ $(k \geq 0)$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen dann zu vorgegebener Schranke $K > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\varepsilon_{2n+1} \leq \varepsilon$ und $k_{2n+1} \geq K$ sind. Dann gilt für alle $1 \leq t < \xi$:

$$\begin{aligned} F_{k_{2n+1}}(t) &= g^{\circ(k_{2n+1})}(F(\xi^{-k_{2n+1}})) \\ &= g^{\circ(k_{2n+1})} \circ g^{\circ(-2(k_{2n+1}-k_{2n}))}(F(\xi^{-k_{2n}})) \\ &= g^{\circ(-(k_{2n+1}-2k_{2n}))}(F(\xi^{-k_{2n}})) \\ &< \alpha + \varepsilon_{2n+1} \\ &\leq \alpha + \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_{k_{2n+2}}(t) &= g^{\circ(k_{2n+2})}(F(\xi^{-k_{2n+2}})) \\ &= g^{\circ(k_{2n+2})}(F(\xi^{-k_{2n+1}})) \\ &> 1 - \varepsilon_{2n+2} \\ &\geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $\alpha, 1$ sind Häufungspunkte der Folge $(F_k(t))_{k \geq 0}$. Für jedes $t > 0$ gibt es nun ein $k_t \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq \xi^{k_t} t < \xi$, und es gilt dann für alle $k \geq \max\{-k_t, 0\}$:

$$F_k(t) = g^{\circ(k)}(F(\frac{t}{\xi^k})) = g^{\circ(-k_t)} \circ g^{\circ(k+k_t)}(F(\frac{t\xi^{k_t}}{\xi^{k+k_t}})) = g^{\circ(-k_t)}(F_{k+k_t}(t\xi^{k_t})),$$

und nach dem oben Gezeigten hat die Folge $(F_{k+k_t}(t\xi^{k_t}))_{k \geq \max\{-k_t,0\}}$ die Häufungspunkte α und 1, also hat auch die Folge $(F_k(t))_{k \geq 0}$ die Häufungspunkte α und 1. Damit konvergiert $(F_k(t))_{k \geq 0}$ für kein $t > 0$, also auch $(\mathcal{S}_g^{\circ(k)}(Q))_{k \geq 0}$ nicht in Verteilung.

Mit Blick auf Satz 1.3.3 interessieren wir uns in erster Linie für den Fall, dass $(S_g^{\circ(n)}(Q))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Verteilung Q_h mit stetiger Verteilungsfunktion h konvergiert mit $h(x) \notin \{0, 1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 3.1.1 können wir uns bei der Suche nach einer hinreichenden Bedingung für die Verteilungskonvergenz von $(S_g^{\circ(n)}(Q))_{n \in \mathbb{N}}$ auf den Fall beschränken, dass für die Ausgangsverteilung Q mit Verteilungsfunktion $F := F_Q$

$$F(0-) = F(0) = \alpha \tag{3.1}$$

gilt. Der folgende Satz liefert in der obigen Situation im Falle $\xi = g'(\alpha)$ unter einer Zusatzvoraussetzung (an das Verhalten von F in 0) ein Kriterium, das sich auf viele bekannte Verteilungen anwenden lässt (z.B. auf alle Verteilungen mit einer stückweise stetigen $\lambda\!\!\lambda$-Dichte).

3.1.4 Satz. *Sei $\xi = g'(\alpha)$. Weiter sei $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ mit Verteilungsfunktion F und es gelte $F(0) = \alpha$. Weiterhin sei F in 0 linksseitig und rechtsseitig differenzierbar mit linksseitiger Ableitung $c_- \geq 0$ und rechtsseitiger Ableitung $c_+ \geq 0$, wobei nicht notwendig $c_- = c_+$ gelte. Dann konvergiert $(S_g^{\circ(n)}(Q))_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in Verteilung, wenn $c_-, c_+ > 0$ gilt, und in diesem Fall hat die Verteilungsfunktion F_0 der Grenzverteilung Q_0 die Gestalt*

$$F_0(t) = \begin{cases} h^*(c_+t), & \text{falls } t \geq 0, \\ h^*(c_-t), & \text{falls } t \leq 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

wobei h^* die in Satz 1.3.3 auftretende Verteilungsfunktion ist. Definiert man dann $\beta := c_+^{-1}$, $\gamma := c_-^{-1}$ und bezeichnet mit W^* eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion h^*, so gilt

$$S_g^{\circ(n)}(Q) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \beta \cdot (W^*)^+ - \gamma \cdot (W^*)^-.$$

Beweis. Da F_0 stetig ist, müssen wir

$$\mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q)(]-\infty, t]) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_0(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ zeigen (wollten wir die uns bereits aus Satz 1.3.3 bekannte Stetigkeit von h^* nicht verwenden, so könnten wir uns in diesem Beweis im Wesentlichen auf die Stetigkeitspunkte von F_0 beschränken). Dabei müssen wir die Fälle $t \geq 0$ und $t \leq 0$ unterscheiden. Da die Argumentationen in den beiden Fällen praktisch identisch sind, beschränken wir uns auf den Fall $t \geq 0$.

Sei also $t \geq 0$. Aus der rechtsseitigen Differenzierbarkeit von F in 0 mit Ableitung $c_+ \geq 0$ schließen wir auf die Identität

$$F(s) = \alpha + c_+s + r(s)$$

für alle $s \geq 0$, wobei $r : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist mit

$$\lim_{s\downarrow 0,\, s\neq 0} \frac{r(s)}{s} = 0. \tag{3.3}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es wegen (3.3) ein $\delta > 0$ mit $r(s) \leq \varepsilon s$ für alle $s \in [0, \delta]$. Damit gilt für alle $n \geq 0$ mit $t/\xi^n \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q)(]-\infty, t]) &= g^{\circ(n)}(F(t/\xi^n)) \\ &\leq g^{\circ(n)}(\alpha + (c_+ + \varepsilon)t/\xi^n) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} h^*((c_+ + \varepsilon)t), \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q)(]-\infty, t]) \leq h^*((c_+ + \varepsilon)t).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war und h^* stetig ist, gilt sogar

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q)(]-\infty,t]) \leq h^*(c_+t).$$

Im Falle $c_+ = 0$ folgt wegen $h^*(0) = \alpha$, dass $(\mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q))_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht in Verteilung konvergieren kann.

Sei also im Folgenden $c_+ > 0$ und $0 < \varepsilon < c_+$. Wiederum wegen (3.3) finden wir ein $\delta > 0$ mit $r(s) \geq -\varepsilon s$ für alle $s \in [0,\delta]$. Dann gilt für jedes $n \geq 0$ mit $t/\xi^n \leq \delta$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q)(]-\infty,t]) &= g^{\circ(n)}(F(t/\xi^n)) \\ &\geq g^{\circ(n)}(\alpha + (c_+ - \varepsilon)t/\xi^n) \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^*((c_+ - \varepsilon)t), \end{aligned}$$

also

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q)(]-\infty,t]) \geq h^*((c_+ - \varepsilon)t).$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ liefert die Behauptung. $\square$

Dieser Satz liefert eine Möglichkeit, die in Satz 1.3.3 auftretende Verteilung für jedes $b \geq 2$ zu bestimmen, wie sich im folgenden Abschnitt zeigt.

3.2 Bestimmung der Verteilung von W^*

In diesem Abschnitt wollen wir für alle $b \geq 2$ die Verteilung von W^* bestimmen, die als Grenzverteilung des passend normierten Wertes eines b-adisch verzweigten, zufällig bewerteten Maximinbaums der Höhe $2k$ für $k \to \infty$ auftritt (man beachte, dass W^* von b abhängt). In der zu Beginn von Abschnitt 2.3 eingeführten Sprache heißt das, dass wir $\lim_{k\to\infty} \mathcal{S}_g^{\circ(k)}(R(-\alpha, 1-\alpha))$ (bezüglich schwacher Konvergenz) für jede Funktion $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$, bestimmen wollen, wobei α jeweils der eindeutige Fixpunkt von g in $]0,1[$ und $\xi := g'(\alpha)$ sei.

Dazu nehmen wir für ein festes solches g und zugehöriges ξ zunächst an, dass ein $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ mit Verteilungsfunktion F existiert, die in 0 differenzierbar ist mit Ableitung 1. Nach Satz 3.1.4 gilt dann

$$Q = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_g^{\circ(n)}(Q) \stackrel{d}{=} W^*. \tag{3.4}$$

Wir haben das Problem also gelöst, wenn wir eine solche Lösung $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ angeben können. Dazu wagen wir einen noch viel optimistischeren Ansatz. Wir geben nämlich eine Lösung an, deren Verteilungsfunktion die Einschränkung einer ganzen Funktion auf $\mathbb{R}$ ist.

3.2.1 Satz. *Sei $b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 2$, $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$. h^* sei die Verteilungsfunktion, die als Grenzwert in Satz 1.3.3 im b-adischen Fall auftritt. Weiter seien α der eindeutige Fixpunkt von g in $]0,1[$ und $\xi = g'(\alpha)$. Dann ist h^* die Einschränkung einer ganzen Funktion auf $\mathbb{R}$. Folglich lässt sich h^* bei 0 in eine Potenzreihe entwickeln, die auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Die Koeffizienten $(a_n)_{n\geq 0}$ der Potenzreihe lassen sich wie folgt bestimmen:*

$$a_0 = \alpha,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\xi^n - \xi} \cdot \sum_{k=2}^{b^2} c_k \sum_{j_1+\ldots+j_k=n,\ j_1,\ldots,j_k\geq 1} a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_k} \quad (n \geq 2), \tag{3.5}$$

wobei $c_0, \ldots, c_{b^2}$ die Koeffizienten des in α entwickelten Polynoms g seien. Insbesondere existiert $f^* := \frac{dP(W^*\in\cdot)}{d\lambda\!\!\!\lambda}$, und es gilt $f^* \in \mathcal{C}^\infty$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass der Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n t^n$ positiv ist. Dafür setzen wir $h(z) := \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$. Für beliebiges $\gamma > 0$ setzen wir weiter $a_0^{(\gamma)} := \alpha$, $a_1^{(\gamma)} := \gamma$, und für $n \geq 2$ definieren wir $a_n^{(\gamma)}$ wie in (3.5), allerdings unter Rückgriff auf $a_1^{(\gamma)}, \ldots, a_{n-1}^{(\gamma)}$ statt auf $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Offenbar gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_n^{(\gamma)} = \gamma^n a_n. \tag{3.6}$$

Die $a_n^{(\gamma)}$ sind dann die Koeffizienten der Taylorentwicklung der Funktion $h(\gamma\ \cdot)$ in 0. Es gilt nun für alle $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{\xi^n - \xi} \cdot \sum_{k=2}^{b^2} c_k \sum_{j_1+\ldots+j_k=n} a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_k} \right| \\ &\leq \frac{1}{\xi^n - \xi} \cdot \sum_{k=2}^{b^2} |c_k| \binom{n-1}{k-1} \cdot \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}^k \\ &=: \frac{1}{\xi^n - \xi} \cdot p(n) \cdot \max\{1, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}^{b^2}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei für die Abschätzung verwendet wurde, dass es genau $\binom{n-1}{k-1}$ ungeordnete k-Partitionen von n gibt, und $p(n) := \sum_{k=2}^{b^2} |c_k| \binom{n-1}{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ sei. p ist ein Polynom in n. Folglich gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $p(n) \leq \xi^n - \xi$ für alle $n \geq n_0$. Wir wählen nun $\gamma > 0$ so klein, dass

$$\left|a_1^{(\gamma)}\right|, \ldots, \left|a_{n_0-1}^{(\gamma)}\right| \leq 1$$

gilt, was sich im Hinblick auf (3.6) leicht einrichten lässt. Indem wir nun die Abschätzung (3.7) für die $a_n^{(\gamma)}$ anstelle der a_n durchführen, erkennen wir, dass immerhin $|a_n^{(\gamma)}| \leq 1$ für alle $n \geq 0$ gilt. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n^{(\gamma)} z^n$ auf $K_1(0)$. Wegen (3.6) folgt $r \geq \gamma > 0$.

Es gilt weiter für $|z| < r$ unter Benutzung von (3.5) und $c_1 = g'(\alpha) = \xi$:

$$\begin{aligned} h(z) - \alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-n} \sum_{k=1}^{b^2} c_k \sum_{j_1+\ldots+j_k=n} a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_k} z^n \\ &= \sum_{k=1}^{b^2} c_k \sum_{j_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=1}^{\infty} a_{j_1} \left(\frac{z}{\xi}\right)^{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_k} \left(\frac{z}{\xi}\right)^{j_k} \\ &= \sum_{k=1}^{b^2} c_k (h(z/\xi) - \alpha)^k \\ &= g(h(z/\xi)) - \alpha, \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$h(z) = g(h(z/\xi)) \text{ für alle } |z| < r. \tag{3.8}$$

Sei $R > 0$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $R < \gamma\xi^n$. Für $z \in K_R(0)$ können wir nun $h_R(z) := g^{\circ(n)}(h(\frac{z}{\xi^n}))$ setzen und erhalten so eine Funktion auf $K_R(0)$, die als Verkettung holomorpher Funktionen wieder holomorph ist. Auf $K_R(0) \cap K_r(0)$ stimmt h_R wegen (3.8) mit unserer ursprünglichen Funktion h überein. Da $R > 0$ beliebig war, lässt sich h auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen, ist also eine ganze Funktion. Es folgt aus der Analytizität holomorpher Funktionen und dem Identitätssatz für Potenzreihen, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, d.h. es gilt $r = \infty$. Die Einschränkung von h auf $\mathbb{R}$ ist stetig, reellwertig – da die Potenzreihe nur reelle Koeffizienten hat – und wegen $h'(0) = 1$ wachsend in einer Umgebung von 0. Damit lassen sich $s_0 < 0 < t_0$ mit $0 < h(s_0) < \alpha < h(t_0) < 1$ finden, so dass Satz 2.1.2 auf die Funktionen $h_- := h|_{[s_0\xi, s_0[}$ und $h_+ := h|_{[t_0, t_0\xi[}$ anwendbar ist. Der Satz liefert in Verbindung mit (3.8), dass die Einschränkung von h auf $\mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion ist. Bezeichnet man mit Q die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$, so gilt wegen (3.4) schon $Q = P^{W^*}$, also auch $h = h^*$.

Da h^* als ganze Funktion insbesondere stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, definiert $f^* := (h^*)'|_{\mathbb{R}}$ eine Version von $\frac{dP(W^* \in \cdot)}{d\lambda}$ und ist als Einschränkung einer ganzen Funktion auf $\mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion. □

Abbildung 3.1 auf Seite 59 zeigt den Funktionsverlauf von h^* im Fall $b = 2$. Als Näherung von h^* ist $\sum_{k=0}^{50} \tilde{a}_k x^k$ dargestellt, wobei $\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_{50}$ Ap-

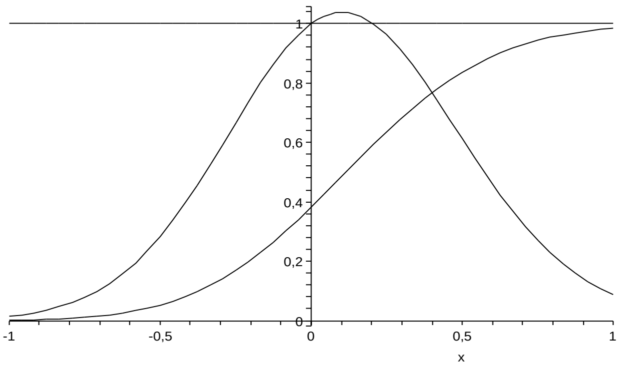


Abbildung 3.1: Die Verteilungsfunktion h^* und die Dichte f^* für $b = 2$

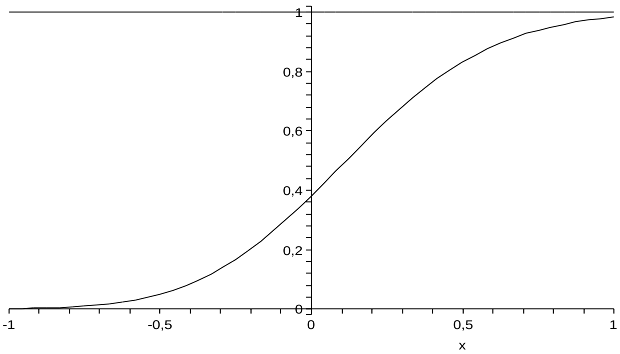


Abbildung 3.2: Die Funktion g_6 für $b = 2$

proximationen der ersten 51 Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{50}$ der Taylorentwicklung von h^* um 0 sind, die unter Zuhilfenahme der Rekursionsgleichung (3.5) angenähert sind. f^* wird durch $\sum_{k=0}^{49}(k+1)\tilde{a}_{k+1}x^k$ angenähert.

Abbildung 3.2 zeigt den Graphen von g_6 ebenfalls für $b = 2$ im gleichen Intervall (zur Erinnerung: $g_6(x) = g^{\circ(6)}(\alpha + x/\xi^6)$). Die Funktionsverläufe von g_6 und h^* ähneln sich im betrachteten Intervall so sehr, dass mit dem bloßen Auge kaum ein Unterschied feststellbar ist.

Kapitel 4

Eine weitere Klasse stochastischer Fixpunktgleichungen

In der Arbeit [AR] von Alsmeyer und Rösler werden die folgenden stochastischen Fixpunktgleichungen betrachtet:

$$W \stackrel{d}{=} \inf_{j \in J} t_j W_j \tag{4.1}$$

und

$$W \stackrel{d}{=} \sup_{j \in J} t_j W_j, \tag{4.2}$$

wobei $\{t_j : j \in J\}$ ($J \subseteq \mathbb{N}$) eine endliche oder abzählbare Menge reeller Zahlen und $W, W_1, W_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen seien.

Uns interessiert in dieser Arbeit vor allem Gleichung (4.2) im Hinblick auf bestehende Zusammenhänge mit der Fixpunktgleichung (2.1). Seien etwa W eine Lösung von (4.2) und $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sowie $(W_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ Familien unabhängiger, identisch wie W verteilter Zufallsgrößen. Dann gilt

$$\begin{aligned} W &\stackrel{d}{=} \sup_{i \in J} t_i W_i \\ &\stackrel{d}{=} \sup_{i \in J} t_i \sup_{j \in J} t_j W_{i,j}. \end{aligned}$$

Gilt nun $J = \{1, \ldots, b\}$ für ein $b \geq 2$ und sind $t_1 = \ldots = t_b = -\sqrt{\xi}$ mit einem $\xi > 1$, so liest sich die obige Gleichung wie folgt:

$$
\begin{aligned}
W &\stackrel{d}{=} \sup_{i\in J} t_i \sup_{j\in J} t_j W_{i,j} \\
&= \max_{1\le i\le b} -\sqrt{\xi} \max_{1\le j\le b} -\sqrt{\xi} W_{i,j} \\
&= \xi \cdot \max_{1\le i\le b} \min_{1\le j\le b} W_{i,j},
\end{aligned}
$$

d.h. W erfüllt Gleichung (2.1). Bezeichnen wir also für $(\mathfrak{t}) = (t_j)_{j\in J}$ mit $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$, die (4.2) lösen (und entsprechend $\mathfrak{F}^{\min}_{(\mathfrak{t})}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathbb{R}$, die (4.1) lösen), so gilt für den Vektor $(\mathfrak{t}) = (-\sqrt{\xi}, \ldots, -\sqrt{\xi})$ der Länge b und die Funktion $g : x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$:

$$
\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})} \subseteq \mathcal{L}_{g,\xi}. \tag{4.3}
$$

Aufgrund dieses Zusammenhangs möchten wir nun die Fixpunktgleichung (4.2) betrachten und ihre Lösungsmenge $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})}$ – insbesondere im Fall $(\mathfrak{t}) = (-\sqrt{\xi}, \ldots, -\sqrt{\xi})$ wie oben – charakterisieren. Wir hoffen dadurch erkennen zu können, welche Verteilungen $Q \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ sogar in $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})}$ liegen. Wir lehnen unser weiteres Vorgehen an die bereits zitierte Arbeit [AR] an.

4.1 Einführende Überlegungen

Wir begeben uns nun bis auf weiteres in die folgende allgemeine Situation: Sei $J \subseteq \mathbb{N}$; der Einfachheit halber nehmen wir gleich an, dass $J = \{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt oder $J = \mathbb{N}$ ist. Weiter sei $(\mathfrak{t}) = (t_j)_{j\in J}$ ein(e) Vektor/Folge reeller Zahlen. Zu J und $(\mathfrak{t})$ betrachten wir nun die stochastischen Fixpunktgleichungen (4.1) und (4.2) und ihre Lösungsmengen $\mathfrak{F}^{\min}_{(\mathfrak{t})} \subseteq \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})} \subseteq \mathfrak{W}(\mathbb{R})$. Es gilt dann

$$
P^W \in \mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})} \Longleftrightarrow P^{-W} \in \mathfrak{F}^{\min}_{(\mathfrak{t})}.
$$

Wir können uns also auf eine der beiden Fixpunktgleichungen beschränken. Im Hinblick auf (4.3) beschränken wir uns auf Gleichung (4.2).

Weiterhin kann man sich auf den Fall beschränken, in dem $t_j \neq 0$ für alle $j \in J$ gilt. Behandelt man nämlich diese eingeschränkte Klasse von Fixpunktgleichungen, so kann man zurück auf die allgemeine schließen, indem man von (4.2) zur Fixpunktgleichung

$$
W \stackrel{d}{=} 0 \vee \sup_{j\in J} t_j W_j \tag{4.4}
$$

übergeht. Für jede Lösung P^W von (4.4) gilt offenbar $P(W \geq 0) = 1$. Weiterhin löst W auch die Fixpunktgleichung (4.2). Ist umgekehrt P^W eine

Lösung von (4.2) mit $P(W \geq 0) = 1$, so löst P^W auch die Fixpunktgleichung (4.4).
Man kann sich also auf die folgenden Fälle beschränken:

(F1) $t_j > 0$ für alle $j \in J$;

(F2) $t_j < 0$ für alle $j \in J$;

(F3) es gibt $i, j \in J$ mit $t_i < 0 < t_j$.

Darüber hinaus ist der Fall $J = \{1\}$ trivial, denn für $t_1 = 0$ liefert er direkt $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max} = \{\delta_0\}$, für $t_1 > 0$ liefert er die folgende Funktionalgleichung für die Verteilungsfunktion F einer Lösung $W \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$:

$$F(t) = F(t/t_1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

die für $t_1 \neq 1$ $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max} = \{\delta_0\}$ impliziert und für $t_1 = 1$ $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max} = \mathfrak{W}(\mathbb{R})$. Für $t_1 = -1$ lösen alle symmetrischen Verteilungen auf $\mathbb{R}$ die Fixpunktgleichung, für $t_1 < 0$, $t_1 \neq -1$ muss wieder $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max} = \{\delta_0\}$ gelten, denn für $P^W \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ gilt $W \sim t_1 W \sim t_1^2 W$, und hier ist $1 \neq t_1^2 > 0$. Wir nehmen daher im Folgenden stets $|J| \geq 2$ an.

Wir wollen uns – wieder im Hinblick auf (4.3) – auf die Bearbeitung des Falls (F2) beschränken. Der Fall (F1) wird in der bereits zitierten Arbeit [AR] von Alsmeyer und Rösler ausführlich diskutiert.

4.2 Eine Charakterisierung von $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$

Wir wollen nun eine Charakterisierung von $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ angeben, die wir leicht modifiziert aus [AR] (Satz 5.1) übernehmen. Für den Rest des Kapitels sei stets $J = \{1, \ldots, b\}$ für ein $b \in \mathbb{N} - \{1\}$ oder $J = \mathbb{N}$. Wir beginnen die Charakterisierung von $\mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ mit einer Definition:

4.2.1 Definition. Sei J endlich und $(\mathfrak{t}) = (t_j)_{j \in J}$ ein Vektor reeller Zahlen mit $t_j < 0$ für alle $j \in J$. Dann definieren wir den Operator $\mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} : \mathfrak{W}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ wie folgt: Für ein $Q \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ sei $\mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q$ die Verteilung auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion $F_{\mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q}(t) = \prod_{j \in J} (1 - F_Q(t/t_j-))$.

In Termen von Zufallsgrößen entspricht die Anwendung des Operators $\mathbb{U}_{(\mathfrak{t})}$ dem Übergang $W \longmapsto \sup_{j \in J} t_j W_j$ für u.i.v. $W, W_1, W_2, \ldots$ mit Verteilung Q, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$F_{\mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q}(t) = \prod_{j \in J} (1 - F_Q(t/t_j-)) = \prod_{j \in J} P(W \geq t/t_j) = P\left(\sup_{j \in J} t_j W_j \leq t\right).$$

4.2.2 Satz. *Sei $(\mathfrak{t}) = (t_j)_{j \in J}$ ein(e) Vektor/Folge reeller Zahlen mit $t_j < 0$ für alle $j \in J$.*

(a) *Ist* $J = \{1, \ldots, b\}$ *für ein* $b \in \mathbb{N}$ *und* β *die eindeutige Lösung der Gleichung* $x^b + x = 1$ *im Einheitsintervall, so besteht* $\mathfrak{F}_{(\mathrm{t})}^{\max} - \{\delta_0\}$ *genau aus allen Verteilungen der Gestalt* $\beta Q_> + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathrm{t})} Q_>$*, wobei* $Q_> \in \mathfrak{W}(\mathbb{R})$ *eine beliebige Verteilung auf* $]0, \infty[$ *mit*

$$(4.5) \qquad 1 - \beta Q_>(]t, \infty[) = \prod_{i=1}^{b} \left(1 - \prod_{j=1}^{b} \beta Q_> \left(]\frac{t}{t_i t_j}, \infty[\right)\right) \qquad (t \geq 0)$$

ist.

(b) *Im Fall* $J = \mathbb{N}$ *gilt* $\mathfrak{F}_{(\mathrm{t})}^{\max} = \{\delta_0\}$.

Beweis. Sei $Q \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{t})}^{\max} - \{\delta_0\}$, F die zu Q korrespondierende Verteilungsfunktion und W, W_j, $j \in J$, Zufallsgrößen mit Verteilung Q, wobei die W_j $(j \in J)$ unabhängig seien. Dann gilt folgende Gleichung für F:

$$(4.6) \qquad F(t) = \prod_{j \in J} (1 - F(t/t_j -))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Analog gilt:

$$(4.7) \qquad F(t-) = \prod_{j \in J} (1 - F(t/t_j))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Zu (a): Seien nun $J = \{1, \ldots, b\}$ für ein $b \geq 2$ und Q, F wie oben. Weiter seien $u := Q(]-\infty, 0[)$, $v := Q(\{0\})$ und $w := Q(]0, \infty[)$. Dann gilt $u + v + w = 1$ und nach (4.7) $u = w^b$. (4.6) liefert $u + v = (w + v)^b$, zusammen folgt $w^b + v = (w + v)^b$. In dieser Gleichung können wir v als $v = 1 - u - w = 1 - w^b - w$ schreiben und erhalten die Gleichung

$$(4.8) \qquad 1 - w = (1 - w^b)^b$$

für w. Nach Voraussetzung ($Q \neq \delta_0$) ist $0 < w < 1$, und im offenen Einheitsintervall hat die Gleichung (4.8) nach Lemma 1.2.3 genau eine Lösung, die wir mit β bezeichnen. Nach Bemerkung 1.2.4 löst β die Gleichung $\beta + \beta^b = 1$. Damit ist $w = Q(]0, \infty[) = \beta$, $w + u = w + w^b = 1$ und $v = 0$.

Nun folgt für beliebiges $t \leq 0$ unter Benutzung von (4.6):

$$\begin{aligned} P(W \leq t | W < 0) &= \frac{P(W \leq t)}{u} \\ &= \prod_{j=1}^{b} \frac{1 - F(t/t_j -)}{w} \\ &= \prod_{j=1}^{b} P(W \geq t/t_j | W > 0). \end{aligned}$$

Setzt man nun $Q_> := P(W \in \cdot | W > 0)$, so gilt $P(W \in \cdot | W < 0) = \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>$, also

$$Q = \beta P(W \in \cdot | W > 0) + \beta^b P(W \in \cdot | W < 0) = \beta Q_> + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>.$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass $Q_>$ die Gleichung (4.5) erfüllt. Sei dazu $t > 0$. Dann erhält man unter Verwendung von (4.6)

$$\begin{aligned}
1 - \beta Q_>(]t, \infty[) &= 1 - P(W > t) = F(t) \\
&= \prod_{i=1}^{b} \left(1 - F\left(\frac{t}{t_i} -\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{b} \left(\beta + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_> \left(\left[\frac{t}{t_i}, \infty\right[\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{b} \left(\beta + \beta^b \left(1 - F_{\mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>} \left(\frac{t}{t_i} -\right)\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{b} \left(\beta + \beta^b \left(1 - \prod_{j=1}^{b} Q_> \left(\left]\frac{t}{t_i t_j}, \infty\right[\right)\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{b} \left(1 - \beta^b \prod_{j=1}^{b} Q_> \left(\left]\frac{t}{t_i t_j}, \infty\right[\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{b} \left(1 - \prod_{j=1}^{b} \beta Q_> \left(\left]\frac{t}{t_i t_j}, \infty\right[\right)\right)
\end{aligned}$$

und dieses Ergebnis auch für $t = 0$ durch Grenzübergang $t \downarrow 0$.

Umgekehrt ist nun zu zeigen, dass jedes Q der angegebenen Gestalt eine Lösung der Fixpunktgleichung (4.2) ist. Sei also $Q = \beta Q_> + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_>$ wie unter (a). $F, F_>$ seien die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Wir weisen nun die Gültigkeit von (4.6) für F nach. Sei dazu zunächst $t \leq 0$ beliebig. Dann erhält man unter Beachtung von

$F_>|_{]-\infty,0]} = 0$:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \beta F_>(t) + \beta^b \prod_{j=1}^{b}(1 - F_>(t/t_j-)) \\
&= \prod_{j=1}^{b} \beta - \beta F_>(t/t_j-)) \\
&= \prod_{j=1}^{b} 1 - (\beta F_>(t/t_j-) + \beta^b) \\
&= \prod_{j=1}^{b} 1 - F(t/t_j-).
\end{aligned}$$

Weiter gilt für $t > 0$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \beta F_>(t) + \beta^b \prod_{j=1}^{b}(1 - F_>(t/t_j-)) \\
&= 1 - \beta + \beta F_>(t) \\
&= 1 - \beta Q_>(]t, \infty[) \\
&= \prod_{i=1}^{b}\left(1 - \prod_{j=1}^{b} \beta Q_>\left(\left]\frac{t}{t_i t_j}, \infty\right[\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{b}\left(1 - \beta^b \prod_{j=1}^{b} Q_>\left(\left]\frac{t}{t_i t_j}, \infty\right[\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{b} 1 - F(t/t_i-),
\end{aligned}$$

wobei man für die letzte Gleichheit beachte, dass für $i = 1, \ldots, b$

$$\begin{aligned}
F(t/t_i-) &= \beta Q_>(]-\infty, t/t_i[) + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathsf{t})} Q_>(]-\infty, t/t_i[) \\
&= \beta^b \mathbb{U}_{(\mathsf{t})} Q_>(]-\infty, t/t_i[) \\
&= \beta^b \prod_{j=1}^{b} Q_>\left(\left]\frac{t}{t_i t_j}, \infty\right[\right)
\end{aligned}$$

gilt.

Zu (b): Nach (4.6) ist im Falle $J = \mathbb{N}$ insbesondere also $F(0-) = 0$, denn wäre $F(0-) \in]0, 1]$, so lieferte (4.6) $F(0) = 0$ und damit einen Widerspruch zur Isotonie von F. Es folgt dann wiederum aus (4.6) $F(0) = 1$, also ist $Q = \delta_0$ und daher $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathsf{t})} \subseteq \{\delta_0\}$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. $\square$

Ebenso wie der Operator $\mathbb{U}_{(\mathrm{t})}$ eine Entsprechung auf dem Niveau der Zufallsgrößen hat, hat auch die Gleichung (4.5) eine solche. Wählen wir nämlich in der Situation des Satzes für $b := |J| < \infty$ u.i.v. Zufallsgrößen $W, W_{i,j}$ $(1 \le i, j \le b)$ mit Verteilung $\beta^b\delta_0 + \beta Q_>$ (dabei sei $Q_>$ eine Verteilung auf $]0, \infty[$), so gilt für alle $t \ge 0$:

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1\le i\le b}\min_{1\le j\le b} t_i t_j W_{i,j} \le t\right) &= \prod_{i=1}^{b} P\left(\min_{1\le j\le b} t_i t_j W_{i,j} \le t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{b} 1 - P\left(\min_{1\le j\le b} t_i t_j W_{i,j} > t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{b}\left(1 - \prod_{j=1}^{b} \beta Q_>\left(\left]\frac{t}{t_i t_j}, \infty\right[\right)\right), \end{aligned}$$

d.h. die Verteilungen $Q_>$ auf $]0, \infty[$, die (4.5) erfüllen, sind genau die Verteilungen $Q_>$ auf $]0, \infty[$, für die $\beta^b\delta_0 + \beta Q_>$ die Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} \max_{1\le i\le b}\min_{1\le j\le b} t_i t_j W_{i,j}$$

erfüllt, wobei wie üblich $W, W_{i,j}$ u.i.v. mit Verteilung $\beta^b\delta_0 + \beta Q_>$ seien.

4.3 Bestimmung von $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathrm{t})}$ im Falle $t_1 = \ldots = t_b < 0$

Die Bestimmung von $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathrm{t})}$ im Falle $t_1 = \ldots = t_b < 0$ für $2 \le b < \infty$ ist nun nicht mehr schwierig, denn die Sätze 2.1.2 und 4.2.2 liefern im schwierigeren Fall $t_1 < -1$ fast unmittelbar den folgenden Satz:

4.3.1 Satz. *Seien $J = \{1, \ldots, b\}$, $b \ge 2$ und $t_1 = \ldots = t_b < 0$, und β bezeichne wie in Satz 4.2.2 die eindeutige Lösung der Gleichung $x^b + x = 1$ im offenen Einheitsintervall. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Ist $|t_1| < 1$, so gilt $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathrm{t})} = \{\delta_0\}$.

(a) Ist $t_1 = -1$, so gilt $\mathfrak{F}^{\max}_{(\mathrm{t})} = \{(1-\beta)\delta_{-a} + \beta\delta_a | a \ge 0\}$.

(c) Ist $\sqrt{\xi} := |t_1| > 1$, so definiert für jede Funktion $f_+ : [1, \xi[\longrightarrow \mathbb{R}$, die rechtsseitig stetig und monoton wachsend mit $\lim_{t\to\xi} f_+(t) \le g(f_+(1))$ und $\beta^b < f_+(1) \le 1$ ist, die Verteilungsfunktion F, die durch

$$(4.9) \qquad F(t) = \begin{cases} g^{\circ(n)}\left(f_+\left(\frac{t}{\xi^n}\right)\right), & \text{falls } t > 0, \\ \beta^b, & \text{falls } t = 0 \text{ und } f_+(1) < 1, \\ 1, & \text{falls } t = 0 \text{ und } f_+(1) = 1, \\ (1 - F((-t/\sqrt{\xi})-))^b, & \text{sonst}, \end{cases}$$

gegeben wird (wobei in der vierten Zeile der Definition auf die erste Zeile der Definition zurückgegriffen wird und dort wie in Satz 2.1.2 $n \in \mathbb{Z}$ so zu wählen ist, dass $1 \leq t/\xi^n < \xi$ ist), eine Verteilung $Q \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$.

Umgekehrt hat jede Verteilung $Q \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ eine Verteilungsfunktion der angegebenen Gestalt.

Beweis. Zu (a) und (b): Sei $Q \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$. Setzen wir $\xi := t_1^2$ und $g(x) := (1-(1-x)^b)^b$ für $0 \leq x \leq 1$, so gilt $F(t) = g(F(t/\xi))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (vgl. (4.3)).

Im Falle $\xi < 1$ gilt für jedes $t > 0$:

$$F(t) = g^{\circ(n)}(F(t/\xi^n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Die rechtsseitige Stetigkeit von F liefert auch $F(0) = 1$. Analog zum Fall $t > 0$ sieht man auch $F(t) = 0$ für alle $t < 0$ ein, also insgesamt $F = \mathbf{1}_{[0,\infty[}$ und damit $Q = \delta_0$.

Im Falle $\xi = 1$ ist jeder Wert $F(t)$ Fixpunkt von g, d.h. $F(t) \in \{0, 1-\beta, 1\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. W sei eine Zufallsgröße mit Verteilung Q. Ist W fast sicher konstant, so muss W fast sicher $= 0$ sein. Ist W nicht fast sicher konstant, so existieren immerhin reelle Zahlen $a' < a$ mit $P(W \in \{a', a\}) = 1$. Sind $W_1, \ldots, W_b \sim W$ u.i.v., so gilt $P(W \in \{-a', -a\}) = P(\max_{1\leq j\leq b} -W_j \in \{-a', -a\}) = 1$, d.h. $\{-a', -a\} = \{a', a\}$. Es folgt $a' = -a$ und $W \sim (1-\beta)\delta_{-a} + \beta\delta_a$. Umgekehrt kann man leicht nachrechnen, dass $(1-\beta)\delta_{-a} + \beta\delta_a \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ für alle $a \geq 0$ gilt.

Zu (c): Sei $f_+ : [1, \xi[\longrightarrow \mathbb{R}$ rechtsseitig stetig und monoton wachsend mit $\lim_{t\to\xi} f_+(t) \leq g(f_+(1))$ und $\beta^b < f_+(1) \leq 1$. Dann wird nach Satz 2.1.2 durch die Funktion

$$\tag{4.10} \tilde{F}(t) = \begin{cases} g^{\circ(n)}\left(f_+\left(\frac{t}{\xi^n}\right)\right), & \text{falls } t > 0, \\ \beta^b, & \text{falls } t = 0 \text{ und } f_+(t_0) < 1, \\ 1, & \text{falls } t = 0 \text{ und } f_+(t_0) = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Verteilungsfunktion definiert, für deren korrespondierendes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{Q}$ gilt: $\tilde{Q} \in \mathcal{L}_{g,\xi}$. Wir bezeichnen mit $Q_>$ das Wahrscheinlichkeitsmaß mit Verteilungsfunktion $\beta^{-1}(\tilde{F} - \beta^b \mathbf{1}_{[0,\infty[})$. Dann ist $\tilde{Q} = \beta^b\delta_0 + \beta Q_>$. Also erfüllt $Q_>$ die Gleichung (4.5). Nach Satz 4.2.2 ist dann $\beta Q_> + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_> \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$. $\beta Q_> + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>$ hat aber gerade die in (4.9) angegebene Verteilungsfunktion.

Umgekehrt ist nach Satz 4.2.2 jedes $Q \in \mathfrak{F}_{(\mathfrak{t})}^{\max}$ darstellbar als $\beta Q_> + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>$ mit einem $Q_> \in \mathfrak{W}(]0,\infty[)$, für das $\beta^b\delta_0 + \beta Q_> \in \mathcal{L}_{g,\xi}$ gilt. Dann existiert eine Funktion f_+ mit den im Satz geforderten Eigenschaften, so dass die Verteilungsfunktion von $\beta^b\delta_0 + \beta Q_>$ auf $]0,\infty[$ von der in (4.9) angegebenen Gestalt ist (vgl. dazu Abschnitt 2.1). Diese Verteilungsfunktion stimmt aber auf $[0,\infty[$ mit der Verteilungsfunktion von $Q = \beta Q_> + \beta^b \mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>$ überein, da $\mathbb{U}_{(\mathfrak{t})} Q_>(]-\infty,0[) = 1$ gilt. Die Behauptung für $F|_{]-\infty,0[}$ folgt aus (4.6). Damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Teil (b) des Satzes sagt also aus, dass man die Verteilungsfunktionen der Lösungen der Fixpunktgleichung (4.2) mit $t_1 = \ldots = t_b < -1$ wie folgt zusammensetzen kann: Man nimmt sich eine Funktion f_+ mit den im Satz beschriebenen Eigenschaften und setzt diese wie im Satz 2.1.2 zur Verteilungsfunktion einer Lösung F der Fixpunktgleichung (2.1) fort, allerdings nur auf $[0,\infty[$. Im Gegensatz zur Fixpunktgleichung (2.1) kann man nun nicht in der in Satz 2.1.2 angegebenen Weise unter Zuhilfenahme einer beliebigen Funktion f_- wie in letzterem Satz $F|_{]-\infty,0[}$ konstruieren und F einfach aus $F|_{]-\infty,0[}$ und $F|_{[0,\infty[}$ zusammensetzen, sondern muss einen Zusammenhang zwischen $F|_{[0,\infty[}$ und $F|_{]-\infty,0[}$ respektieren, der die Wahl von f_- (bei gegebenem f_+) eindeutig macht.

Die letzte Frage, die wir uns in dieser Arbeit stellen, ist, ob die Lösungen P^{W^*} aus Satz 1.3.3 diesen Zusammenhang respektieren, also auch die restriktivere Fixpunktgleichung (4.2) mit $t_1 = \ldots = t_b = -\sqrt{\xi}$ erfüllen. Dieser Frage gehen wir im letzten Abschnitt dieser Arbeit nach.

4.4 Der Nachweis von $P(W^* \in \cdot) \in \mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})}$

Für den Rest dieses Abschnitts seien $b \geq 2$ fest, β die eindeutige Lösung der Gleichung $x^b + x = 1$ in $]0,1[$ und $\alpha := 1-\beta$. Dann hat die zugehörige Verteilung P^{W^*} eine holomorphe Verteilungsfunktion h^*. Mit dem Verhalten der Verteilungsfunktion h^* auf der positiven Halbachse ist also auch schon das Verhalten von h^* auf der negativen Halbachse bestimmt. Die Holomorphie der Verteilungsfunktion lässt uns weiterhin annehmen, dass sie sich dort in unserem Sinne gutartig verhält, d.h. auch eine Lösung der Gleichung (4.6) ist.

Um zu beweisen, dass tatsächlich $P^{W^*} \in \mathfrak{F}^{\max}_{(\mathfrak{t})}$ gilt, müssen wir nach Satz 4.3.1

$$h^*(t) = \left(1 - h^*\left(-\frac{t}{\sqrt{\xi}}\right)\right)^b \tag{4.11}$$

für alle $t < 0$ zeigen.

Wie im Beweis von Satz 3.2.1 machen wir einen Potenzreihenansatz und nehmen an, dass eine in einer kreisförmigen Umgebung U von 0 holomorphe Lösung h von (4.11) existiert, für die überdies $h(0) = 1 - \beta = \beta^b$ und $h'(0) = 1$ gilt. Wir schreiben $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in U)$ und setzen $\tilde{g}(z) :=$

$(1-z)^b$ $(z \in \mathbb{C})$. Wir können $\tilde{g}$ in α entwickeln und erhalten die Darstellung $\tilde{g}(z) = \sum_{k=0}^b c_k(z-\alpha)^k$ $(z \in \mathbb{C})$. Eine Anwendung von (4.11) liefert:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty a_n z^n &= h(z) - \alpha \\
&= \tilde{g}(h(-z/\sqrt{\xi})) - \alpha \\
&= \sum_{k=1}^b c_k (h(-z/\sqrt{\xi}) - \alpha)^k \\
&= \sum_{k=1}^b c_k (\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \xi^{-n/2} a_n z^n)^k \\
&= \sum_{k=1}^b c_k \sum_{n_1,\ldots,n_k \geq 1} (-1)^{\sum_{j=1}^k n_j} \xi^{-\sum_{j=1}^k n_j/2} a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} z^{\sum_{j=1}^k n_j} \\
&= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \xi^{-n/2} \left(\sum_{k=1}^b c_k \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} \right) z^n
\end{aligned}$$

für $z \in U$. Vermöge eines Koeffizientenvergleichs erhalten wir

$$a_n(1 + (-1)^{n-1}\xi^{-n/2} c_1) = (-1)^n \xi^{-n/2} \left(\sum_{k=2}^b c_k \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} \right)$$

für alle $n \geq 1$. Beachtet man nun, dass $\tilde{g}$ streng monoton fallend auf $]0,1[$ ist, also $\tilde{g}'(\alpha) < 0$, und $\tilde{g}'(\alpha)^2 = (\tilde{g} \circ \tilde{g})'(\alpha) = \xi$, so erhält man $c_1 = -\sqrt{\xi}$. Damit liefert der Koeffizientenvergleich im Falle $n = 1$ die leere Bedingung $0 = 0$ und im Falle $n \geq 2$ die Rekursionsformel

$$a_n = \frac{(-1)^n \xi^{-n/2}}{1 + (-1)^n \xi^{-(n-1)/2}} \left(\sum_{k=2}^b c_k \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} a_{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{n_k} \right).$$

An dieser Darstellung erkennt man ebenso wie im Beweis von Satz 3.2.1, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. h ist also eine ganze Funktion; zweimalige Anwendung der Identität (4.11) liefert, dass h auch die Gleichung (2.3) erfüllt. Nun kann man weiterschließen wie im Beweis von Satz 3.2.1 und erhält den folgenden Satz:

4.4.1 Satz. *Seien $b \geq 2$, $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $x \longmapsto (1-(1-x)^b)^b$, $\xi := g'(\alpha)$ für den eindeutigen Fixpunkt α von g in $]0,1[$ und W^* zu b wie im Satz 1.3.3 gewählt. Dann gilt $P^{W^*} \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{t})}^{\max}$, d.h. W^* erfüllt die Fixpunktgleichung*

$$W \stackrel{d}{=} \max_{1 \leq i \leq b} -\sqrt{\xi} W_i = -\sqrt{\xi} \min_{1 \leq i \leq b} W_i,$$

wobei $W_1, \ldots, W_b$ unabhängige, wie W verteilte Zufallsgrößen seien.

Literaturverzeichnis

[A1] Alsmeyer, G., *Wahrscheinlichkeitstheorie (2. Auflage)*. Skripten zur mathematischen Statistik Nr. 30, Universität Münster (2000)

[A2] Alsmeyer, G., *Vorlesungsmanuskript zur Vorlesung* Verzweigungsprozesse. Universität Münster (2005)

[AKN] Ali Khan, T., Devroye, L., und Neininger, R., A Limit Law for the Root Value of Minimax Trees. *Electronic Communications in Probability 10* (2005), 273-281

[AR] Alsmeyer, G., Rösler, U., *A Stochastic Fixed-Point Equation Related to Weighted Minima and Maxima*. Bericht 01/05-S (Angewandte Mathematik, FB10, Univ. Münster) (2005)

[Fis] Fischer, W. und Lieb, I., *Funktionentheorie (7. Auflage)*. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden (1994)

[Heu] Heuser, H., *Lehrbuch der Analysis – Teil 1 (13. Auflage)*. B.G. Teubner GmbH, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden (2000)

[P] Pearl, J., Asymptotic Properties of Minimax Trees in Game-Searching Procedures. *Artificial Intelligence 14* (1980), 113-138

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine weiteren Hilfsmittel als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen verwendet habe.

Münster, 26. Januar 2006