Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Institut für Mathematische Statistik

Diplomarbeit

Bisexuelle Galton-Watson Prozesse

Mathias Mazur

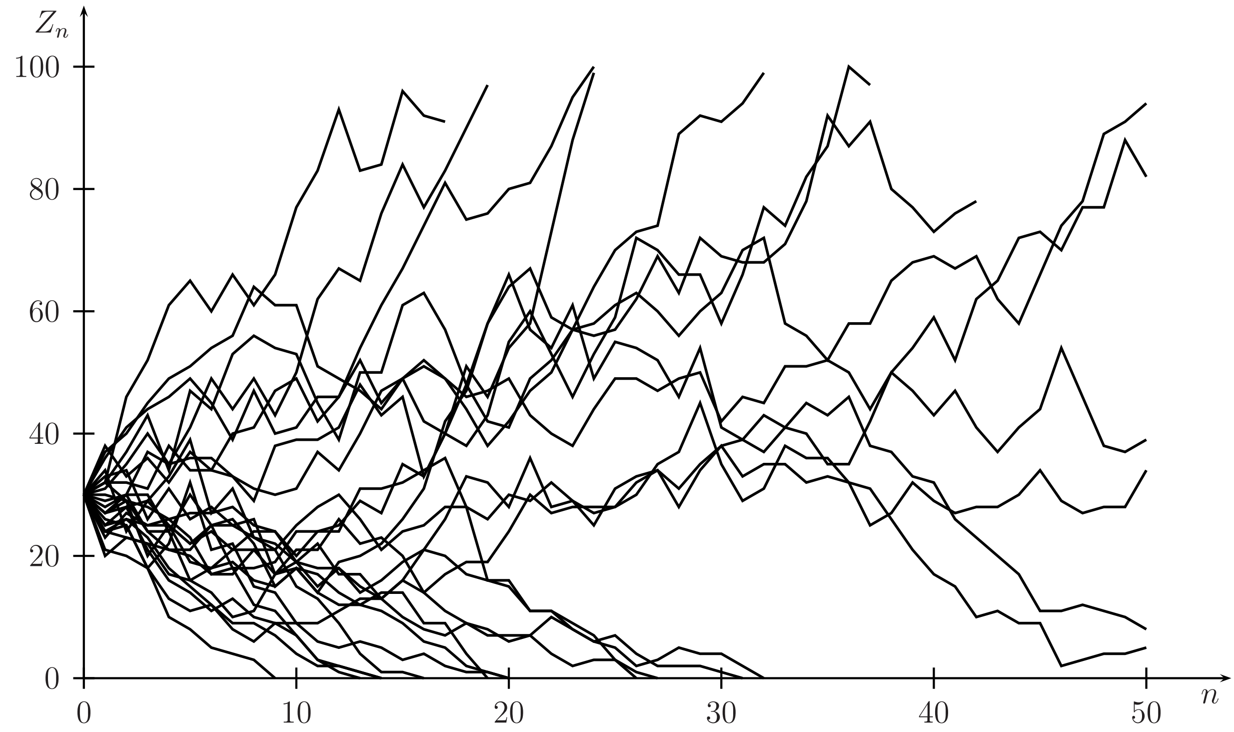

Abbildung 1: 25 Simulationspfade eines bisexuellen Galton-Watson Prozesses

30. Juli 2009

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Institut für Mathematische Statistik

Diplomarbeit

Bisexuelle Galton-Watson Prozesse

Mathias Mazur

30. Juli 2009

Szczególne podziękowania dla moich rodziców, którzy pomogli mi oraz umożliwili zdobycie wiedzy i umiejętności bez których nie było by możliwe napisanie mojej pracy dyplomowej.

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Gerold Alsmeyer für die Betreuung und Unterstützung meiner Diplomarbeit. Des Weiteren danke ich Herrn Dipl.-Math. Matthias Meiners für die Hilfe während der Abwesenheit meines Betreuers.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Bevor wir den bisexuellen Galton-Watson Prozess (mit superadditiver Paarung) vorstellen, möchten wir kurz auf den gewöhnlichen Galton-Watson Prozess (GWP) eingehen und die Motivation für die Konstruktion eines neuen Verzweigungsprozesses begründen. Es stellt sich tatsächlich die Frage, warum der einfache GWP nicht ausreicht. Die Konstruktion dieses stochastischen Prozesses gibt relativ schnell eine Antwort auf diese Frage.

Sei $(X_{ni})_{n\geq 0, i\geq 1}$ eine Folge von nicht-negativen, unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$, die allesamt auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Dann ist der rekursiv definierte Prozess $(X_n)_{n\geq 0}$ mit

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} X_{n+1,i},$$

ein gewöhnlicher Galton-Watson Prozess, wobei $X_0 \geq 1$. Dabei ist $X_{n+1,i}$ die Anzahl der Nachkommen des i-ten Vorfahren in der n-ten Generation. Beispielsweise kann man so die Populationsentwicklung von Einzellern untersuchen, die die Fähigkeit besitzen sich selbst zu klonen, oder, wofür der GWP ursprünglich entwickelt wurde, das Problem des aussterbenden Nachnamens modellieren. Den GWP kann man daher zurecht einen *asexuellen* GWP nennen. Wir möchten jedoch einen Schritt weitergehen und einen *bisexuellen* GWP konstruieren, den wir im Folgenden mit BGWP abkürzen. Spätestens jetzt ist deutlich, was wir mit *bisexuell* meinen. An Stelle von einem Individuum, betrachtet man ein *Paar* bestehend aus einer Frau und einem Mann, das unter der sogenannten *Paarungsfunktion* Nachkommen zeugt, und zwar unabhängig von allen anderen Paaren mit gleicher *Repdroduktionsverteilung*. Wie auch im asexuellen Fall, verzichten wir dabei auf die Berücksichtigung hinsichtlich des Geburts- und Todeszeitpunktes aller Individuen und nehmen an, dass jedes Paar am Lebensende unabhängig von allen Vorfahren und Paaren derselben Generation eine zufällige Anzahl an Frauen und Männern bzgl. der gleichen Verteilung zeugt. Aufgrund der komplexeren Struktur des BGWP lassen sich die Eigenschaften des GWP nicht so ohne Weiteres auf den BGWP übertragen. Dies ist ein Grund für die weitere Untersuchung des BGWP hinsichtlich der *Aussterbewahrscheinlichkeit* und den verschiedenen Konvergenzarten wie die $\mathbb{P}$-f.s., $\mathfrak{L}^1$- und $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz. In der Tat gibt es jedoch Parallelen zum asexuellen Fall, u.a. weil der GWP ein Speziallfall des BGWP ist. Um ein Beispiel zu nennen, untersucht man beim GWP für $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ das Verhalten von $(\mu^{-n} X_n)_{n \geq 0}$, im bisexuellen Fall "ersetzt" man μ durch ein gewisses $r = r(\mathbb{E}(F_{01}), \mathbb{E}(M_{01}))$ und untersucht die Folge $(r^{-n} Z_n)_{n \geq 0}$. Es läßt sich zeigen, dass $\mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} Z_n = 0) = 1 \Longleftrightarrow r(\mathbb{E}(F_{01}), \mathbb{E}(M_{01})) \leq 1$. Man beachte die Analogie zum GWP, für den gilt: $\mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} X_n = 0) = 1 \Longleftrightarrow \mathbb{E}(X_1) \leq 1$ (falls $\mathbb{P}(X_1 = 1) < 1$). Bevor wir weiter ins Detail gehen, geben wir zunächst eine formale Definition an. Für die gesamte Arbeit benutzen wir folgende Konventionen: Eine monoton steigende (fallende) Funktion ist nicht zwingend streng monoton steigend (fallend) und eine positive reelle Zahl ist > 0.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Modellbeschreibung und grundlegende Definitionen

Zunächst benötigen wir die *Paarungsfunktion* mit folgenden Eigenschaften:

- $\zeta : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$,
- ζ ist monoton steigend in jedem Argument,
- $\zeta(x, y) \leq Cx \quad$ für $x \in \mathbb{N}_0$, und ein $C \geq 1$,
- $\zeta(x, 0) = \zeta(0, y) = 0$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Wir nennen diese Funktion *superadditiv*, falls

- $\zeta(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geq \zeta(x_1, y_1) + \zeta(x_2, y_2) \quad$ für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}_0$

Einige *superadditive* Paarungsfunktionen sind z.B.:

(M1) $\zeta(x, y) = \min(x, y) \quad$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$ (Monogamie), (M2) $\zeta(x,y) = x\min(1,y)$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$ (Polygamie),

(M3) $\zeta(x,y) = ax + by$ für $x, y, a, b \in \mathbb{N}_0$.

Speziell für $a = 1$ und $b = 0$ in (M3), erhält man den *gewöhnlichen Galton-Watson Prozess*.

Folgende Funktionen sind zwar Paarungsfunktionen, jedoch nicht superadditiv:

- $\zeta(x,y) = [\sqrt{x}\,]$ für $x \in \mathbb{N}_0$
- $\zeta(x,y) = [\log(x+1)]$ für $x \in \mathbb{N}_0$,

dabei ist $[\,\cdot\,]$ die Gaußklammer.

Sei nun $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Meßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ sowie Z_0 eine *konstante* Zufallsgröße mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und

$$\Big((F_{ni}, M_{ni})\Big)_{n=0,1,\ldots,\ i=1,2,\ldots} \tag{1.1}$$

eine Familie von bivariaten unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0^2$ und Verteilung $(p_j)_{j\geq 0}$. Dabei geben F_{ni} und M_{ni} die Anzahl der weiblichen respektive männlichen Nachkommen des i-ten Paares in der n-ten Generation an. Weiterhin definieren wir F_{n+1} als die Gesamtanzahl der Frauen in der n-ten Generation, d.h. $F_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni}$, analog für M_{n+1}. Die Anzahl der Paare in der $(n+1)$-ten Generation erhält man nun, indem ζ auf F_{n+1} und M_{n+1} angewendet wird.

Man definiert den Prozess $(Z_n)_{n=0,1,\ldots}$ rekursiv durch:

$$Z_0 = c \geq 1,$$

$$(F_{n+1}, M_{n+1}) = \sum_{i=1}^{Z_n} (F_{ni}, M_{ni}),$$

$$Z_{n+1} = \zeta(F_{n+1}, M_{n+1}),$$

wobei $\sum_{i=1}^{Z_n}(F_{ni}, M_{ni}) = (0,0)$ auf $\{Z_n = 0\}$ und ζ eine superadditive Paarungsfunktion ist.

Ein Prozess mit dieser Struktur heißt *bisexueller Galton-Watson Prozess mit superadditiver Paarung* (und Reproduktionsverteilung $(p_j)_{j\geq 0}$).

Um ein Gefühl für den BGWP zu bekommen, schauen wir uns eine Beispielrealisation anhand der superadditiven Paarungsfunktion (M2) an:

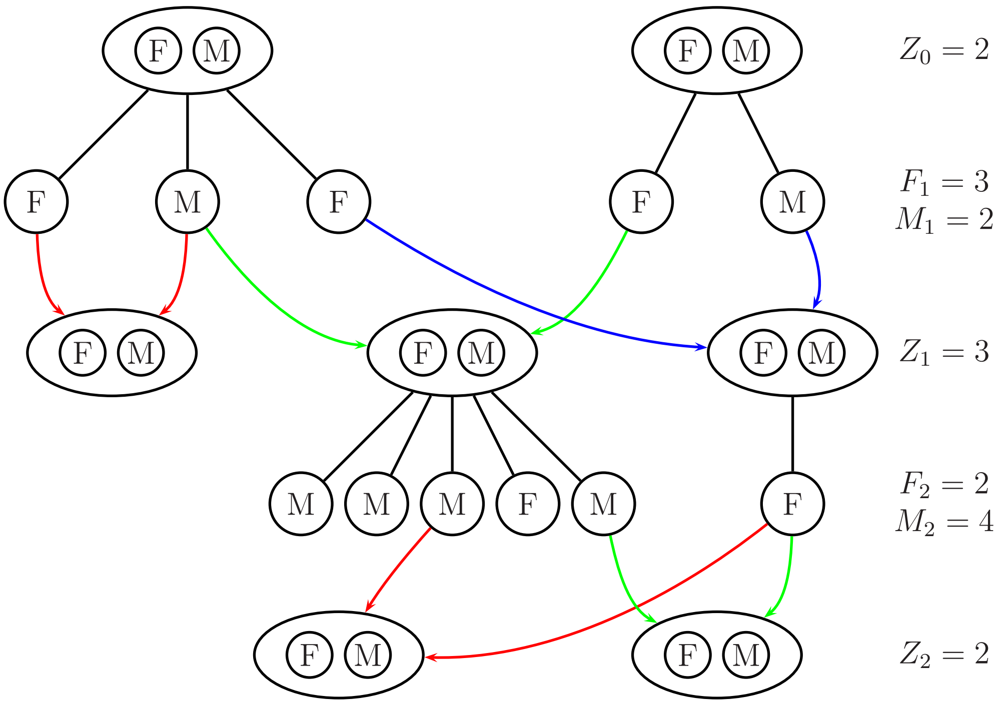

Abbildung 1.1: Beispiel einer Realisation von (M2) bis einschl. Z_2

Wir bemerken an dieser Stelle, dass es selbstverständlich unwichtig ist, welche Frau mit welchem Mann ein Paar bildet. In Abbildung 1.1 haben wir eine willkürliche Zusammensetzung der Paare gewählt.

Unmittelbar aus der Definition des BGWP erhält man:

Bemerkung 1.1. Der BGWP $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist eine diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$, Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i\geq 0, j\geq 0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left(Z_{n+1} = j \mid Z_n = i\right)$ und absorbierendem Zustand $\{0\}$.

Für die gesamte Arbeit sei

$$\mathcal{F}_n \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(Z_0, \ldots, Z_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

die kanonische Filtration. Damit lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten umschreiben:

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left(Z_{n+1} = j \mid \mathcal{F}_n\right) \text{ auf } \{Z_n = i\} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_0$$

Es stellt sich nun wie im gewöhnlichen Fall die Frage: Wann stirbt dieser Prozess fast sicher aus? Dabei sagen wir, dass $(Z_n)_{n\geq 0}$ f.s. ausstirbt (gegeben $Z_0 = j \geq 1$), falls für die *Aussterbewahrscheinlichkeit* q_j gilt:

$$q_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left(Z_n = 0 \text{ für ein } n < \infty \mid Z_0 = j\right) = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Da der Zustand $\{0\}$ absorbierend ist, kann man die Aussterbewahrscheinlichkeit umschreiben. Es gilt daher für alle $j \geq 1$:

$$\begin{aligned} q_j &= \mathbb{P}\left(Z_n = 0 \text{ für ein } n < \infty \mid Z_0 = j\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 0}\{Z_n = 0\} \;\middle|\; Z_0 = j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{Z_k = 0\} \;\middle|\; Z_0 = j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0 \mid \ Z_0 = j \ \right). \end{aligned}$$

Wir notieren an dieser Stelle, dass der BGWP ausstirbt, wenn es keine Frauen oder Männer in einer Generation gibt. Dies haben wir bereits mit der 4. Eigenschaft von ζ gefordert. Um eine Bedingung anzugeben, wann der Prozess (z.B. mit der Paarungsfunktion (M2)) ausstirbt, benötigen wir noch die folgenden Definitionen.

Wir nennen

$$r_j \stackrel{\text{def}}{=} j^{-1}\,\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j), \quad j \in \mathbb{N}$$

die mittlere Wachstumsratenfunktion, kurz *mittlere Wachstumsrate* und definieren

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{j\to\infty} r_j.$$

Die Existenz dieses Limes unter geeigneter Annahme zeigen wir im nächsten Abschnitt.

Wir nehmen für den BGWP an, dass

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) + \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = 1 \tag{1.2}$$

gilt. Unter Annahme von *Daley's Modell* (vorgestellt in [3]) ist diese Bedingung bereits erfüllt (☞ [12]) .

Daley's Modell. Sei $T_{ni} \stackrel{\text{def}}{=} F_{ni} + M_{ni}$ für $n \in \mathbb{N}_0,\ i = 1, \ldots, Z_n$ die Gesamtanzahl der Nachkommen des i-ten Paares in der n-ten Generation. Dabei nimmt man an, dass $(T_{ni})_{n\geq 0, i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ ist. Jeder Nachkomme ist dabei mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ weiblich und mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ männlich.

Wir werden Daley's Modell nur in Spezialfällen annehmen. Ansonsten nehmen wir an, dass

$$p_{jj} = \mathbb{P}\left(Z_{n+1} = j \mid Z_n = j\right) < 1 \quad \forall j \geq 1, \tag{1.3}$$

d.h. dass $\{0\}$ der einzige absorbierende Zustand ist. Diese von Daley, Hull und Taylor[5] vorgestellte Bedingung garantiert ebenfalls die Bedingung (1.2) (☞ [12]) .

Zuletzt nehmen wir an, dass F_{01} und M_{01} endlichen und positiven Erwartungswert besitzen. Somit ist Z_n integrierbar für alle n, denn mithilfe der 3. Eigenschaft von ζ folgt unter zusätzlicher Benutzung der Unabhängigkeit von (1.1)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}) &= \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni}, \sum_{i=1}^{Z_n} M_{ni}\right)\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}\left(Z_n = j\right) \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right) \,\middle|\, Z_n = j\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}\left(Z_n = j\right) \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\,\mathbb{E}\,(F_{01}) \sum_{j\geq 0} j\,\mathbb{P}\,(Z_n = j) \\
&= C\,\mathbb{E}\,(F_{01})\,\mathbb{E}(Z_n) \\
&\leq \ldots \\
&\leq (C\,\mathbb{E}\,(F_{01}))^{n+1} Z_0 < \infty \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und ein } C \geq 1
\end{aligned}$$

Alternativ erhält man die Integrierbarkeit, sofern $r < \infty$ gilt. Denn aus

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n) = Z_n\, r_{Z_n}$$

folgt mithilfe von Satz 1.3

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(Z_n\, r_{z_n}) \leq r\,\mathbb{E}(Z_n) \leq \cdots \leq r^{n+1} Z_0 < \infty$$

Die Frage, unter welchen Voraussetzungen der BGWP ausstirbt, hat sich Daley schon gestellt und hat dies in seinem Artikel [3] untersucht. Er hat für die Paarungsfunktionen (M2) sowie für (M1) bewiesen, dass der jeweilige BGWP fast sicher ausstirbt (gegeben $Z_0 = j,\ j \geq 1$), falls $r \leq 1$.
In Anlehnung an den Artikel von Daley, Hull and Taylor[5] werden wir diesen Satz verallgemeinern. Demnach gilt die Aussage für einen BGWP mit beliebiger superadditiver Paarungsfunktion. Der Beweis des Satzes ist das Ziel des nächsten Kapitels, das die Aussterbewahrscheinlichkeit behandelt. Zunächst zeigen wir, dass q_j eine monoton fallende Funktion ist. Anschließend betrachten wir zwei BGWP $(Z_n)_n$ und $(Z'_n)_n$ und geben Bedingungen an, bei dem die Aussterbewahrscheinlichkeit von $(Z_n)_n$ größer gleich der Aussterbewahrscheinlichkeit von $(Z'_n)_n$ ist.

Das Ziel des 3. Kapitels ist die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $(r^{-n}Z_n)_n$ und infolgedessen natürlich auch $(r^{-n}F_n)_n$ sowie $(r^{-n}M_n)_n$. Dabei sei $(Z_n)_n$ ein BGWP mit superadditiver Paarung. Wir werden uns auf den Fall $r > 1$ beschränken und nehmen an, dass Z_0 groß genug ist. Im Abschnitt 1 zeigen wir die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$, $(r^{-n}F_n)_n$ und $(r^{-n}M_n)_n$ und in Abschnitt 2 die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz, und untersuchen unter welchen Bedingungen $(r^{-n}Z_n)_n$ gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable konvergiert. Es läßt sich dann leicht zeigen, dass die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$ äquivalent zu der $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}F_n)_n$ bzw. $(r^{-n}M_n)_n$ ist. Schließlich erhalten wir eine $(F\log F)$ Bedingung, für die $(r^{-n}Z_n)_n$, sowie $(r^{-n}F_n)_n$ und $(r^{-n}M_n)_n$ in $\mathfrak{L}^1$ gegen eine nicht-negative Zufallsvariable konvergieren.

Wie in Kapitel 3, nehmen wir in Kapitel 4 $r > 1$ an. Das Ziel ist die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$. Wir arbeiten uns von den notwendigen zu den hinreichenden Bedingungen vor. Dabei benötigen wir anfangs recht viele Voraussetzungen, um die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz zu garantieren. Jedoch werden die Voraussetzungen von Satz zu Satz schrumpfen, so dass wir am Ende vernünftige Bedingungen erhalten. Im letzten Abschnitt zeigen wir, dass die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$ äquivalent ist zur $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(r^{-n}F_n)_n$ bzw. $(r^{-n}M_n)_n$.

1.2 Requisiten

Satz 1.3. *Für einen BGWP mit superadditiver Paarung ist*

$$jr_j = \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) \text{ für alle } j \geq 0 \text{ superadditiv.}$$

Damit existiert der Limes

$$r = \lim_{j\to\infty} r_j = \lim_{j\to\infty} j^{-1}\,\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j).$$

Ferner gilt

$$r = \lim_{j\to\infty} j^{-1}\,\mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = j\right) = \sup_{j>0} j^{-1}\,\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j),$$

insbesondere

$$r \geq r_j \quad \forall j \geq 1.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $jr_j = \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j)$ für alle $j \geq 0$ superadditiv ist. Für

$j = k = 0$ ist dies trivial. Sei also $j, k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
(j+k)r_{j+k} &= \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j+k) \\
&= \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j+k} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j+k} M_{ni}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni} + \sum_{i=j+1}^{j+k} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni} + \sum_{i=j+1}^{j+k} M_{ni}\right)\right) \\
&\geq \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right)\right) + \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=j+1}^{j+k} F_{ni}, \sum_{i=j+1}^{j+k} M_{ni}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right)\right) + \mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{k} F_{ni}, \sum_{i=1}^{k} M_{ni}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) + \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = k) \\
&= jr_j + kr_k,
\end{aligned}$$

wobei wir die Superadditivität von ζ benutzt haben, und dass (F_{ni}, M_{ni}) für alle $n \geq 0, i \geq 1$ unabhängig und identisch verteilt sind. Die Anwendung von Satz A.4 liefert direkt die Behauptung:

$$r = \lim_{j\to\infty} r_j = \sup_{j>0} r_j \quad \text{existiert},$$

insbesondere $r = \sup_{j>0} r_j \geq r_k$ für alle $k \geq 1$. □

Als nächstes zeigen wir, dass $(Z_n)_n$ stochastisch monoton ist (☞ Definition im Anhang A).

Satz 1.4. *Ein BGWP ist eine stochastisch monotone Markovkette.*

Beweis. Für $j, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_{n+1} \leq k \mid Z_n = j\right) &= \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni}, \sum_{i=1}^{Z_n} M_{ni}\right) \leq k \;\middle|\; Z_n = j\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right) \leq k\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni} + F_{n,j+1}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni} + M_{n,j+1}\right) \leq k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j+1} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j+1} M_{ni}\right) \leq k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni}, \sum_{i=1}^{Z_n} M_{ni}\right) \leq k \;\middle|\; Z_n = j+1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z_{n+1} \leq k \mid Z_n = j+1\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir benutzt haben, dass (F_{ni}, M_{ni}) unabhängig von $(F_{n-1,i}, M_{n-1,i})$ für alle $i \geq 1$, ζ in jedem Argument monoton steigend und $F_{n,j+1}, M_{n,j+1} \geq 0$ ist.

Speziell für $n = 0$ erhalten wir somit:

$$
\mathbb{P}\left(Z_1 > k \mid Z_0 = j\right) \leq \mathbb{P}\left(Z_1 > k \mid Z_0 = j+1\right) \tag{1.4}
$$

Diese Ungleichung läßt sich nun zu

$$
\mathbb{P}\left(Z_n > k \mid Z_0 = j\right) \leq \mathbb{P}\left(Z_n > k \mid Z_0 = j+1\right) \tag{1.5}
$$

verallgemeinern. Wegen (1.4) und der Monotonie von ζ gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_2 > k \mid Z_0 = j\right) &= \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{Z_1} F_{1i}, \sum_{i=1}^{Z_1} M_{1i}\right) > k \;\middle|\; Z_0 = j\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(Z_2 > k \mid Z_0 = j+1\right)
\end{aligned}
$$

Dieses Argument benutzt man nun induktiv weiter und erhält (1.5) für alle n, also die Behauptung. □

Die Aussage des nächsten Satzes hilft uns, r auf schnelle und einfache Art und Weise zu berechnen.

Lemma 1.5. *Für eine superadditive Paarungsfunktion ζ gilt:*

$$
\lim_{j\to\infty} j^{-1}\,\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right) = \lim_{j\to\infty} j^{-1}\zeta(j\,\mathbb{E}(F_{01}), j\,\mathbb{E}(M_{01})) = r(\mathbb{E}(F_{01}), \mathbb{E}(M_{01})) \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.
$$

Beweis. Zunächst existiert der rechte Limes wegen der Superadditivität von ζ. Seien $F \overset{\text{def}}{=} F_{01}$ und $M \overset{\text{def}}{=} M_{01}$. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen konvergiert $\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=1}^{N}(F_{ni}, M_{ni})$ mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen $(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M))$. D.h. mit Wahrscheinlichkeit 1 gilt (für festes ω)

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall N \geq N_0 :$$

$$\Big(N(\mathbb{E}(F) - \varepsilon),\ N(\mathbb{E}(M) - \varepsilon)\Big) \leq \sum_{i=1}^{N}(F_{ni}, M_{ni}) \leq \Big(N(\mathbb{E}(F) + \varepsilon),\ N(\mathbb{E}(M) + \varepsilon)\Big)$$

Da ζ in jedem Argument monoton steigend ist, folgt

$$\zeta\Big(N(\mathbb{E}(F){-}\varepsilon),\ N(\mathbb{E}(M){-}\varepsilon)\Big) \leq \zeta\left(\sum_{i=1}^{N} F_{ni}, \sum_{i=1}^{N} M_{ni}\right) \leq \zeta\Big(N(\mathbb{E}(F){+}\varepsilon),\ N(\mathbb{E}(M){+}\varepsilon)\Big) \tag{1.6}$$

Teilt man die Ungleichung (1.6) durch N, so erhält man die Existenz von dem Limes und es ist $\lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\zeta\left(\sum_{i=1}^{N} F_{ni}, \sum_{i=1}^{N} M_{ni}\right) = \lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\zeta(N\mathbb{E}(F), N\mathbb{E}(M))$. Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

Wir zeigen nun die Stetigkeit von $r(x,y) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{N\to\infty} N^{-1}\zeta(Nx, Ny)$ in $(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M))$. Dabei nehmen wir o.B.d.A an, dass $r(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M)) < \infty$ (der Fall der Unendlichkeit ist klar).

Sei $\delta = \varepsilon/\min(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M)) > 0$ (o.B.d.A. sei $\min(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M)) = \mathbb{E}(F)$). Wegen der Monotonie und Superadditivität von ζ gilt dann

$$\begin{aligned}
(1+\delta)r(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M)) &= (1+\delta)\lim_{N\to\infty} N^{-1}\zeta(N\mathbb{E}(F), N\mathbb{E}(M)) \\
&\geq \lim_{N\to\infty} \frac{1+\delta}{N(1+\delta)}\zeta(N(1+\delta)\mathbb{E}(F), N(1+\delta)\mathbb{E}(M)) \\
&= \lim_{N\to\infty} N^{-1}\zeta(N(1+\delta)\mathbb{E}(F), N(1+\delta)\mathbb{E}(M)) \\
&= \lim_{N\to\infty} N^{-1}\zeta\left(N\,\mathbb{E}(F)\left(1+\frac{\varepsilon}{\mathbb{E}(F)}\right), N\,\mathbb{E}(M)\left(1+\frac{\varepsilon}{\mathbb{E}(F)}\right)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} N^{-1}\zeta\left(N(\mathbb{E}(F)+\varepsilon), N\left(\mathbb{E}(M)+\varepsilon\underbrace{\frac{\mathbb{E}(M)}{\mathbb{E}(F)}}_{\geq 1}\right)\right) \\
&\geq \lim_{N\to\infty} N^{-1}\zeta(N(\mathbb{E}(F)+\varepsilon), N(\mathbb{E}(M)+\varepsilon)) \\
&= r(\mathbb{E}(F)+\varepsilon, \mathbb{E}(M)+\varepsilon)
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir $r(\mathbb{E}(F)-\varepsilon, \mathbb{E}(M)-\varepsilon) \geq (1-\delta) r(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M))$. Dies zeigt die Stetigkeit von $r(x,y)$ in $(\mathbb{E}(F), \mathbb{E}(M))$ und somit die Behauptung. $\square$

Bemerkung 1.6. Wir haben in (1.6) implizit gezeigt, dass $\zeta\left(\sum_{i=1}^{N} F_{ni}, \sum_{i=1}^{N} M_{ni}\right)$ durch eine integrierbare Funktion majorisiert wird. D.h. wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz (☞ [11, Theorem 4.17 (iii), S. 99]) und des vorherigen Lemmas 1.5 erhält man leicht:

$$
\begin{aligned}
r &= \lim_{j\to\infty} j^{-1}\,\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) = \lim_{j\to\infty} j^{-1}\,\mathbb{E}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\lim_{j\to\infty} j^{-1}\,\zeta\left(j\,\mathbb{E}(F_{01}), j\,\mathbb{E}(M_{01})\right)\right) \\
&= r(\mathbb{E}(F_{01}), \mathbb{E}(M_{01}))
\end{aligned}
$$

Somit kann man r für die Paarungsfunktionen (M1)-(M3) auf einfache Weise berechnen:

(M1) $\zeta(x,y) = \min(x,y)$:

$$r(x,y) = \min(x,y)$$

$$r = \lim_{j\to\infty} j^{-1} \min(j\,\mathbb{E}(F_{01}), j\,\mathbb{E}(M_{01})) = \min(\mathbb{E}(F_{01}), \mathbb{E}(M_{01}))$$

(M2) $\zeta(x,y) = x\min(1,y)$:

$$r(x,y) = x$$

$$r = \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}(F_{01}) \min(1, j\,\mathbb{E}(M_{01})) = \mathbb{E}(F_{01})$$

(M3) $\zeta(x,y) = ax + by$:

$$r(x,y) = ax + by$$

$$r = a\,\mathbb{E}(F_{01}) + b\,\mathbb{E}(M_{01})$$

Für den gewöhnlichen Galton-Watson Prozess ist im kritischen Fall $(r = 1)$ die erwartete Zeit bis zum Aussterben des Prozesses unendlich. Für einen BGWP mit superadditiver Paarung muss dies nicht zwingend erfüllt sein. Im folgenden Satz geben wir für eine bestimmte Paarungsfunktion Bedingungen an, für die die erwartete Zeit bis zum Aussterben des Prozesses endlich ist.

Satz 1.7. *Für einen BGWP mit Paarungsfunktion $\zeta(x,y) = \min(x,y)$ ist die erwartete Zeit bis zum Aussterben des Prozesses endlich, falls:*

1. $r < 1$, *oder*

2. $r = 1$, $\mathbb{E}(F_{01}) = \mathbb{E}(M_{01})$ *und* $\mathbb{P}(F_{01} \neq M_{01}) > 0$

Beweis. Wir werden Satz A.5 für $A = \{0\}$ und für $X_n = Z_n$ anwenden. Es ist

$$\mu_1(j) = \mathbb{E}\left(Z_{n+1} - Z_n \mid Z_n = j \right) = \mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = j \right) - j, \quad j \geq 0.$$

Wir haben einerseits $\zeta(x,y) = \min(x,y) = x - (x-y)^+$, andererseits wegen der Symmetrie $\zeta(x,y) = y - (y-x)^+$. Somit gilt für $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = j \right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni} \right) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j} (F_{ni} - M_{ni}) \right)^+ \\ &= j\,\mathbb{E}(F_{01}) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j} (F_{ni} - M_{ni}) \right)^+ \end{aligned} \tag{1.7}$$

und andererseits

$$\mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = j \right) = j\,\mathbb{E}(M_{01}) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j} (M_{ni} - F_{ni}) \right)^+ \tag{1.8}$$

Es gilt $r = \min(\mathbb{E}(F_{01}), \mathbb{E}(M_{01}))$ (☞ Lemma 1.5 und Bemerkung 1.6).
Wir nehmen zunächst $r = \mathbb{E}(F_{01})$ an.

1. Falls $r < 1$ erhalten wir für $j \geq 1$ in (1.7):

$$\mu_1(j) < -\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j} (F_{ni} - M_{ni}) \right)^+ \leq 0$$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \ \mu_1(j) < -\varepsilon \quad \forall j \geq 1$

Weiterhin gilt

$$\mu_1(0) + 0 = \mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = 0 \right) = 0 < \infty.$$

Mit Hilfe von Satz A.5 gilt damit die Behauptung, also

$$\mathbb{E}(\inf\{n > 0 : \; Z_n = 0 \mid Z_0 = j\}) < \infty \quad \forall j \geq 0.$$

2. Sei nun $r = 1$, $\mathbb{E}(F_{01}) = \mathbb{E}(M_{01})$ und $\mathbb{P}(F_{01} \neq M_{01}) > 0$.

   Durch Gleichsetzen von (1.7) und (1.8) ist in diesem Fall

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j}(F_{ni} - M_{ni})\right)^{+} &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j}(M_{ni} - F_{ni})\right)^{+} \\ &= -\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j}(F_{ni} - M_{ni})\right)^{-},\end{aligned}$$

   insbesondere lässt sich damit (1.7) umschreiben zu

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) = j - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{j}(F_{ni} - M_{ni})\right|. \tag{1.9}$$

   Seien $W_i = F_{ni} - M_{ni}$ für $i \geq 1$ und $S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$ für $n \geq 1$. Dann ist W_i wegen der Voraussetzung zentriert. Somit gilt für $n \geq 1$ unter Benutzung der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte für die konvexe Funktion $|\cdot|$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|S_n| = \mathbb{E}\,|S_{n-1} + W_n| &= \mathbb{E}\Big[\;\mathbb{E}\Big(|S_{n-1} + W_n| \;\Big|\; S_{n-1}\Big)\;\Big] \\ &\geq \mathbb{E}\Big[\Big|\mathbb{E}\left(S_{n-1} + W_n \mid S_{n-1}\right)\Big|\Big] \\ &= \mathbb{E}\,|S_{n-1} + \mathbb{E}\left(W_n \mid S_{n-1}\right)| \\ &= \mathbb{E}\,|S_{n-1} + \mathbb{E}(W_n)| \\ &= \mathbb{E}\,|S_{n-1}|\,,\end{aligned}$$

   wobei wir zusätzlich verwendet haben, dass S_{n-1} $\sigma(S_{n-1})$-meßbar ist und W_n unabhängig von $\sigma(S_{n-1})$.

   Insbesondere also

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{j}(F_{ni} - M_{ni})\right| = \mathbb{E}\,|S_j| \geq \mathbb{E}\,|S_1| = \mathbb{E}\,|F_{n1} - M_{n1}|\,, \quad j \geq 1. \tag{1.10}$$

Dies setzen wir in (1.9) ein und erhalten

$$\mathbb{E}\,(\,Z_{n+1} \mid Z_n = j\,) \leq j - \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,|F_{n1} - M_{n1}|\,, \quad j \geq 1.$$

Damit können wir nun abschätzen: Für $j \geq 1$ und $\varepsilon := \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,|F_{01} - M_{01}| > 0$ ergibt sich daher $\mu_1(j) \leq -\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,|F_{01} - M_{01}| = -\varepsilon$ und $\mu_1(0) + 0 = 0 < \infty$ und damit sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt.

Nehmen wir nun $r = \mathbb{E}(M_{01})$ an.

1. Falls $r < 1$ erhalten wir für $j \geq 1$ in (1.8):

$$\mu_1(j) < -\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{j}(M_{ni} - F_{ni})\right)^{+} \leq 0.$$

Die anderen Schritte sind analog (s.o.).

2. Sei $r = 1$, $\mathbb{E}(F_{01}) = \mathbb{E}(M_{01})$ und $\mathbb{P}(F_{01} \neq M_{01}) > 0$. Wähle $W_i = M_{ni} - F_{ni}$, die restlichen Schritte sind ebenfalls analog (s.o.). □

Kapitel 2

Die Aussterbewahrscheinlichkeit

2.1 Monotonie und Majorisierung

Lemma 2.1. *Für einen BGWP ist die Aussterbewahrscheinlichkeit monoton fallend bzgl. der Anzahl der Anfangsgröße:*

$$q_j \geq q_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wir haben in Satz 1.4 gezeigt, dass $(Z_n)_n$ eine Markovkette ist. Also ist

$$\mathbb{P}(Z_n > k \mid Z_0 = j) \leq \mathbb{P}(Z_n > k \mid Z_0 = j+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Daher ist für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 1 - q_j &= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n > 0 \mid Z_0 = j) \\ &\leq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Z_n > 0 \mid Z_0 = j+1) \\ &= 1 - q_{j+1} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Unter Benutzung der Notation $\leq^d$ (☞ Definition im Anhang A) erhalten wir

Satz 2.2. *Seien* $(Z_n)_{n\geq 0}$ *und* $(Z'_n)_{n\geq 0}$ *zwei BGWP mit* $Z_n = \zeta(F_n, M_n)$ *und* $Z'_n = \zeta'(F'_n, M'_n)$. *Ist eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. $Z_0 \leq^d Z'_0$ *und* $\zeta \equiv \zeta'$ *und* $(F_{ni}, M_{ni}) =^d (F'_{ni}, M'_{ni})$,

2. $Z_0 =^d Z'_0$ *und* $\zeta(x,y) \leq \zeta'(x,y)\ \forall x, y$ *und* $(F_{ni}, M_{ni}) \leq^d (F'_{ni}, M'_{ni})$,

3. $Z_0 =^d Z'_0$ *und* $\zeta \equiv \zeta'$ *und* $\mathbb{E}\left[f(F_{ni}, M_{ni})\right] \leq \mathbb{E}\left[f(F'_{ni}, M'_{ni})\right]$ *für jede komponentenweise monoton steigende Funktion* $f(\cdot,\cdot)$,

so gilt:

$$q_j = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z_n = 0 \mid Z_0 = j\right) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z'_n = 0 \mid Z'_0 = j\right) =: q'_j$$

Beweis. 1. Seien also zwei BGWP $(Z_n)_n$ und $(Z'_n)_n$ mit gleicher Paarungsfunktion, gleicher Reproduktionsverteilung und $Z_0 \leq^d Z'_0$ gegeben. Wir wollen Satz A.3 anwenden. Da beide stochastische Prozesse die gleiche (Reproduktions-)Verteilung haben, sind die Übergangswahrscheinlichkeiten beider Prozesse gleich. Insbesondere besitzen beide den gleichen Übergangsoperator T (☞ Anhang A). Dieser ist stochastisch monoton, da $(Z_n)_n$ stochastisch monoton ist (Satz 1.4). Wegen $Z'_0 \geq^d Z_0$ gilt für alle $y \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(Z'_0 \leq y) \leq \mathbb{P}(Z_0 \leq y)$$

Wir können daher Satz A.3 anwenden und erhalten

$$\mathbb{P}(Z'_n \leq y) \leq \mathbb{P}(Z_n \leq y) \quad \forall y \in \mathbb{N}_0$$

Daraus folgt direkt die Behauptung:

$$q_j = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z_n \leq 0 \mid Z_0 = j\right) \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Z'_n \leq 0 \mid Z'_0 = j\right) = q'_j$$

2. In diesem Fall haben wir zwei BGWP mit gleicher Startverteilung, jedoch Paarungsfunktionen mit der Bedingung: $\zeta(x,y) \leq \zeta'(x,y)$ für alle $x, y \geq 0$. Also gilt unter Berücksichtigung der

Unabhängigkeit von (F_{ni}, M_{ni}) und $(F_{n-1,i}, M_{n-1,i})$ für alle $i \geq 1$ und $(F_{ni}, M_{ni}) \leq^d (F'_{ni}, M'_{ni})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z_{n+1} \leq i \mid Z_n = j\right) &= \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right) \leq i\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F'_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M'_{ni}\right) \leq i\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\zeta'\left(\sum_{i=1}^{j} F'_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M'_{ni}\right) \leq i\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z'_{n+1} \leq i \mid Z'_n = j\right) \ \forall i, j \geq 0 \end{aligned}$$

Da $Z_0 =^d Z'_0$ vorausgesetzt war, gilt schließlich $Z_n \leq^d Z'_n$ für alle n, was wiederum, wie im 1. Fall die Behauptung zeigt.

3. Sei $\mathbb{E}\left[f(F_{ni}, M_{ni})\right] \leq \mathbb{E}\left[f(F'_{ni}, M'_{ni})\right]$ für eine komponentenweise monoton steigende Funktion $f(\cdot, \cdot)$ und seien $F(x, y)$ und $F'(x, y)$ die 2-dimensionalen Verteilungsfunktionen von (F_{ni}, M_{ni}) respektive (F'_{ni}, M'_{ni}). Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f(F_{ni}, M_{ni})\right] \leq \mathbb{E}\left[f(F'_{ni}, M'_{ni})\right] &\iff F(x, y) \geq F'(x, y) \quad \forall x, y \geq 0 \\ &\iff (F_{ni}, M_{ni}) \leq^d (F'_{ni}, M'_{ni}) \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen für Fall 2 erfüllt und damit ist die Behauptung gezeigt. □

2.2 Bedingung für das fast sichere Aussterben von $(Z_n)_n$

Daley[5] hat bereits für die Paarungsfunktionen (M1) sowie (M2) bewiesen, dass der jeweilige BGWP genau dann ausstirbt (gegeben $Z_0 = j, j \geq 1$), wenn $r \leq 1$. Dies kann man nun mit dem folgenden Satz für alle superadditiven Paarungsfunktionen verallgemeinern:

Satz 2.3. *Für einen BGWP mit superadditiver Paarung gilt unter Annahme von (1.2):*

$$q_j = 1 \quad \forall j \geq 1 \quad \iff \quad r = \lim_{j \to \infty} j^{-1}\, \mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = j\right) \leq 1$$

Der Prozess stirbt also f.s. aus, wenn $r \leq 1$ und die Paarungsfunktion superadditiv ist, unabhängig davon mit wie vielen Paaren der Prozess startet. Schauen wir uns das Ergebnis anhand von Simulationen an, die wir mit dem Programm R (☞ http://www.r-project.org) erstellt haben. Den Quellcode der Simulationen findet der Leser im Anhang. Und zwar simulieren wir einen BGWP mit der Paarungsfunktion (M1) und (M2). Dabei seien F_{01} und M_{01} Poisson-verteilt mit Parameter λ. In den ersten drei Simulationen setzen wir $\lambda = 1.1, 1.0, 0.9$ und jeweils $Z_0 = 80$, sowe in der 4. $\lambda = 0.9$ und $Z_0 = 30$. Wir haben λ nicht ohne Grund so gewählt. Denn der Parameter λ ist wegen der Poisson-Verteilung gleichzeitig auch der Erwartungswert von F_{01}. Wegen Bemerkung 1.6 wissen wir also, dass speziell in diesem Fall $r = \lambda$ gilt. Somit ist es leicht die Aussage von Satz 2.3 zu überprüfen.

Tatsächlich kann man in Abbildung (2.1) erkennen, dass wir Z_0 ausreichend groß gewählt haben, damit der Prozess (sowohl für (M1) als auch für (M2)) eine positive Wahrscheinlichkeit hat. In diesem Fall haben sogar alle Populationen überlebt. Der kritische Fall in Abbildung (2.2) ist dagegen nicht so eindeutig. Zwar sterben alle Populationen mit (M1) nach etwas mehr als 40 Populationen aus, der BGWP mit Paarungsfunktion (M2) ist selbst nach 50 Populationen noch immer am Leben. Wie kann das sein? Satz 2.3 sagt eindeutig, dass der Prozess aussterben muß! Stimmt. In diesem Fall muß man nur lange genug warten, wie wir in Abbildung (2.5) sehen. In einem Fall ist erkennbar, dass die Population erst nach 470 (bzw. 163) Generationen ausstirbt. Eine gewisse Tendenz ist hier sichtbar: Ein BGWP mit Paarungsfunktion (M2) scheint viel schneller zu wachsen als mit (M1), und dadurch scheint (M2) eine geringere Aussterbewahrscheinlichkeit als (M1) zu besitzen. Dieses Phänomen haben Daley et al.[5] erkannt und es ist in den folgenden Abbildungen weiterhin erkennbar, wie auch in Abbildung (2.3). Die Simulation in Abbildung (2.4) soll verdeutlichen, dass sich die Population deutlich anders entwickelt, wenn wir $Z_0 = 30$ (an Stelle von $Z_0 = 80$) wählen (vgl. Abb. (2.1)).

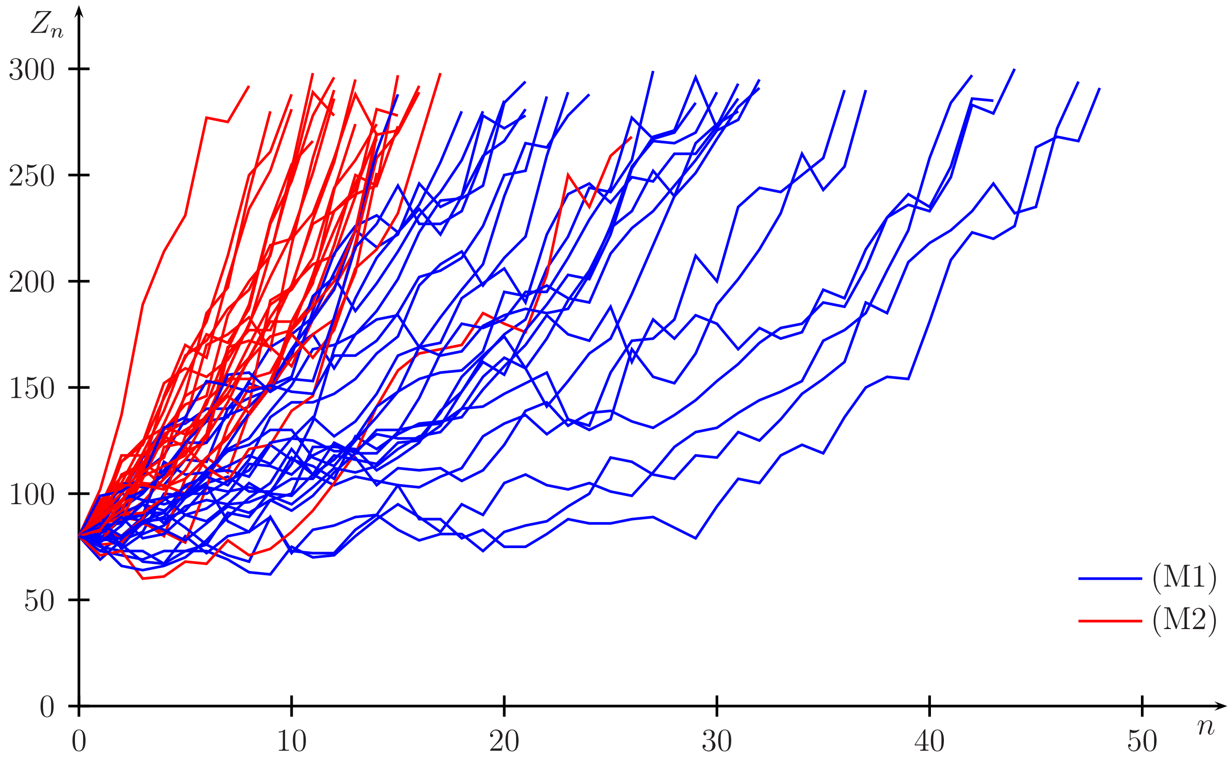

Abbildung 2.1: 25 Simulationspfade zweier BGWP mit $\lambda = 1.1$, $Z_0 = 80$

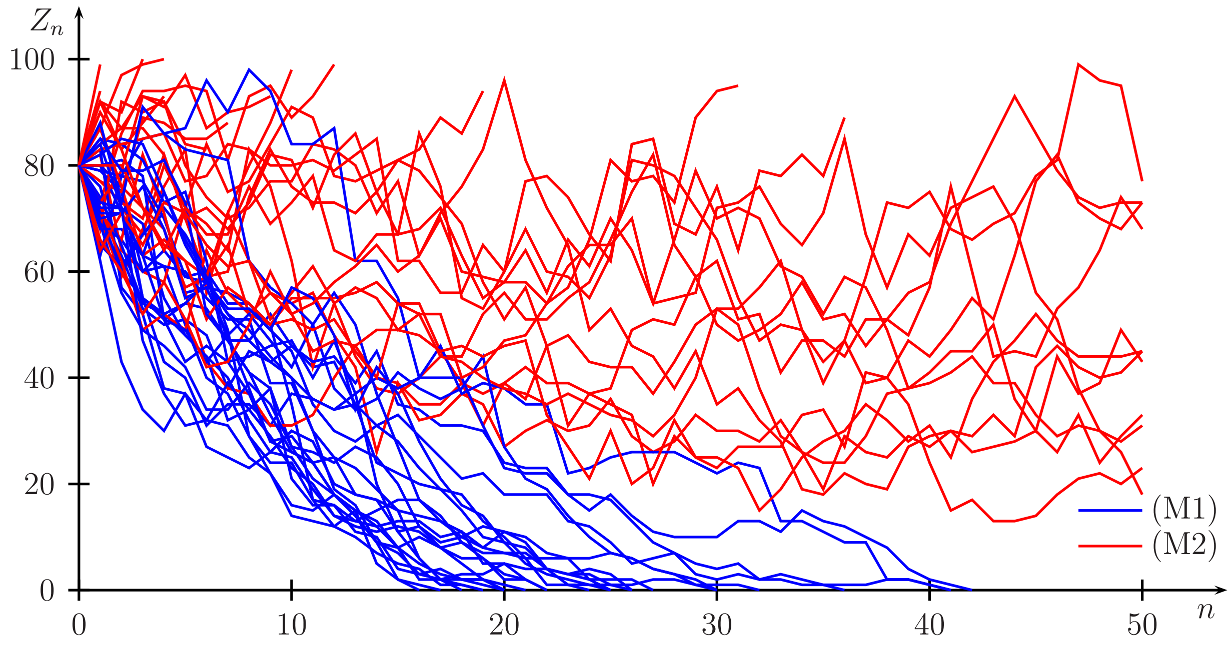

Abbildung 2.2: 25 Simulationspfade zweier BGWP mit $\lambda = 1.0$, $Z_0 = 80$

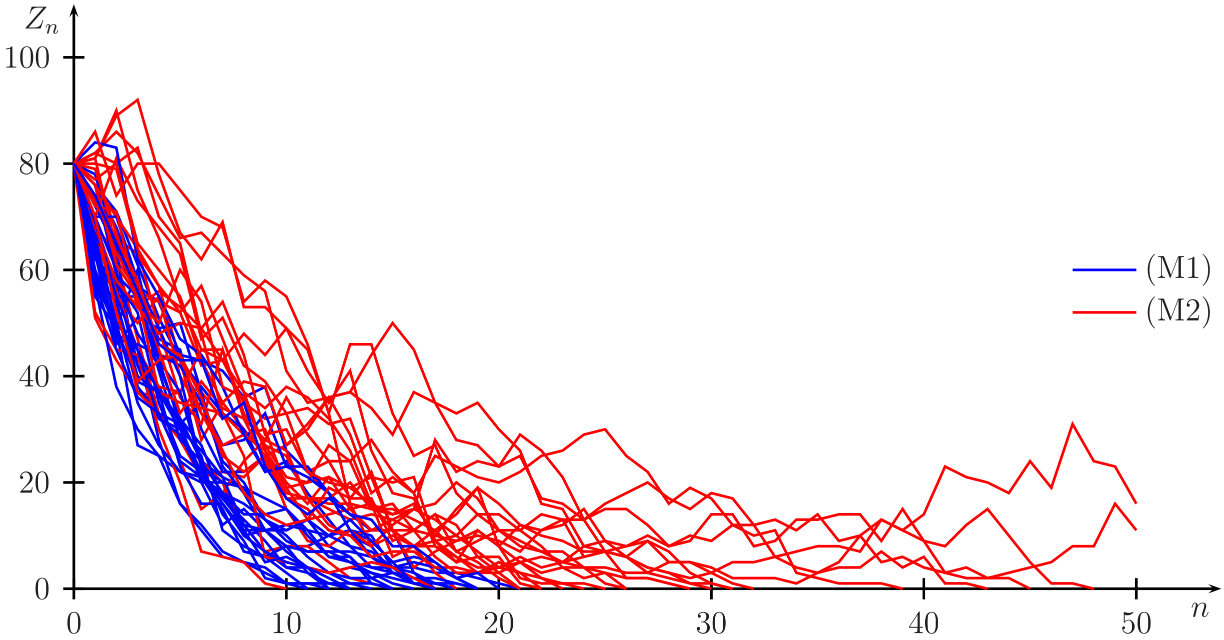

Abbildung 2.3: 25 Simulationspfade zweier BGWP mit $\lambda = 0.9$, $Z_0 = 80$

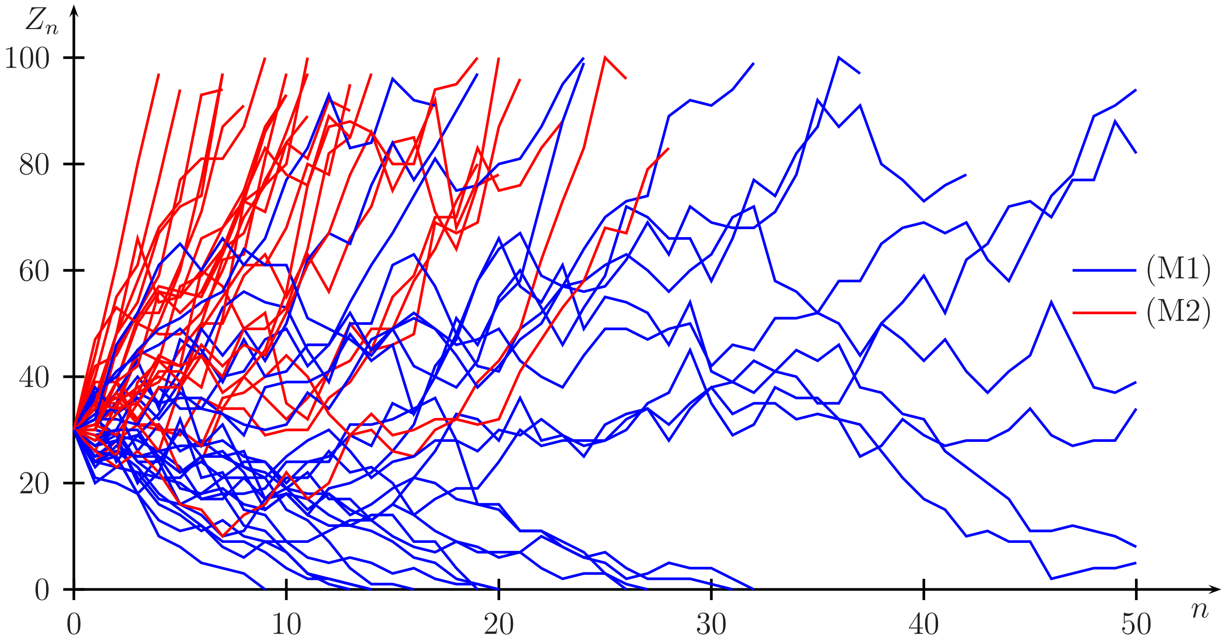

Abbildung 2.4: 25 Simulationspfade zweier BGWP mit $\lambda = 1.1$, $Z_0 = 30$

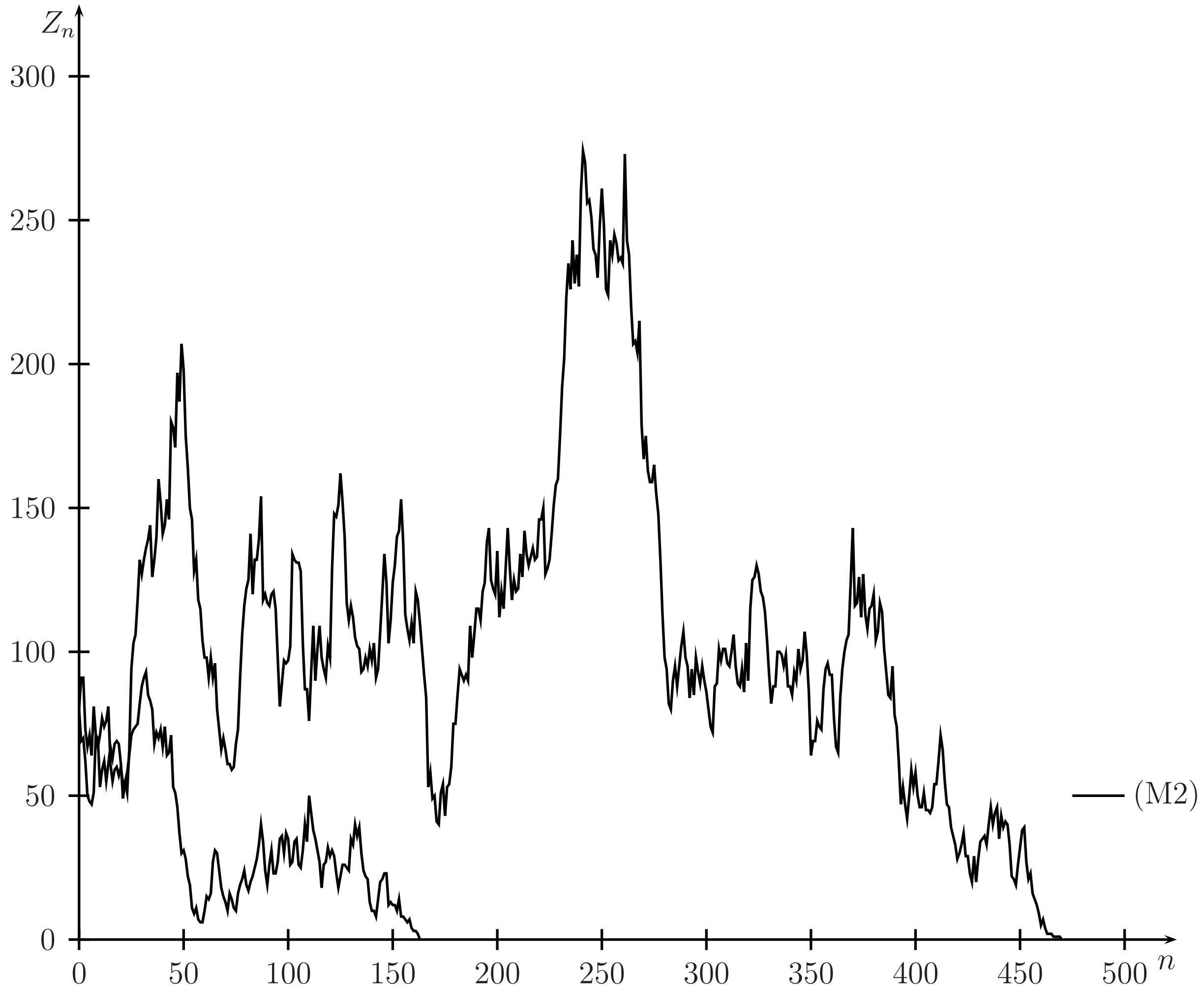

Abbildung 2.5: 2 Simulationspfade eines BGWP und $\lambda = 1.0$, $Z_0 = 80$

Beweis (zu Satz 2.3). Sei $r \leq 1$ gegeben.

Beh.: $(Z_n)_{n\geq 0}$ ist ein nicht-negatives Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Das ist klar, da zunächst $\mathbb{E}(Z_n) < \infty$ (☞ Kapitel 1). Weiterhin erhalten wir mit Satz 1.3, dass $r_j \leq r \leq 1$ für alle $j \geq 1$ ist. Damit gilt auf $\{Z_n = j\}$: $\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n) = jr_j \leq j \quad \mathbb{P}$-f.s.

Insbesondere folgt bereits aus der Nicht-Negativität von $(Z_n)_n$ und dem Konvergenzsatz für Supermartingale (Satz A.6), dass $Z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z_\infty < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. mit $\mathbb{E}(Z_\infty) < \infty$. Daraus folgt $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = \infty) = 0$ und wegen unserer Annahme (1.2) dann

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} Z_n = 0) = 1,$$

das heißt

$$q_j = 1 \quad \forall j \geq 1.$$

Sei nun $r > 1$.

Wir definieren $F \overset{\text{def}}{=} F_{01}$, $M \overset{\text{def}}{=} M_{01}, c \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Var}(F) + \operatorname{Var}(M) > 0$. Seien $\varepsilon \in (0, r-1)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ und N_0 mit $N^{-1}\zeta(N\mathbb{E}(F), N\mathbb{E}(M)) > r - \varepsilon$ für alle $N \geq N_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon \;\middle|\; Z_n\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon, \frac{F_{n+1}}{Z_n} \leq \mathbb{E}(F) - \varepsilon_1 \;\middle|\; Z_n\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon, \frac{F_{n+1}}{Z_n} > \mathbb{E}(F) - \varepsilon_1, \frac{M_{n+1}}{Z_n} \leq \mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 \;\middle|\; Z_n\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon, \frac{F_{n+1}}{Z_n} > \mathbb{E}(F) - \varepsilon_1, \frac{M_{n+1}}{Z_n} > \mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 \;\middle|\; Z_n\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{F_{n+1}}{Z_n} \leq \mathbb{E}(F) - \varepsilon_1 \;\middle|\; Z_n\right) + \mathbb{P}\left(\frac{M_{n+1}}{Z_n} \leq \mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 \;\middle|\; Z_n\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon, \frac{F_{n+1}}{Z_n} > \mathbb{E}(F) - \varepsilon_1, \frac{M_{n+1}}{Z_n} > \mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 \;\middle|\; Z_n\right) \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Sind ε_1 und ε_2 klein genug, so gilt auf $\{Z_n = N > N_0\}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon, \frac{F_{n+1}}{Z_n} > \mathbb{E}(F) - \varepsilon_1, \frac{M_{n+1}}{Z_n} > \mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 \;\middle|\; Z_n\right) \\
&= \mathbb{P}\Big(N^{-1}\zeta(F_{n+1}, M_{n+1}) \leq r - \varepsilon, F_{n+1} > N\,\mathbb{E}(F) - \varepsilon_1 N, M_{n+1} > N\,\mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 N \mid Z_n\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(N^{-1}\zeta(N\mathbb{E}(F) - \varepsilon_1 N, N\mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 N) \leq N^{-1}\zeta(F_{n+1}, M_{n+1}) \leq r - \varepsilon, \\
&\qquad F_{n+1} > N\,\mathbb{E}(F) - \varepsilon_1 N, M_{n+1} > N\,\mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 N \;\Big|\; Z_n\Big) \\
&\leq \mathbb{P}\left(r - \varepsilon < N^{-1}\zeta(F_{n+1}, M_{n+1}) \leq r - \varepsilon, F_{n+1} > \ldots \;\middle|\; Z_n\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass ζ in jedem Argument monoton steigend und $N^{-1}\zeta(N\mathbb{E}(F), N\mathbb{E}(M)) > r - \varepsilon$ für alle $N > N_0$. Also verschwindet der letzte Term in (2.1).

Wir nehmen zusätzlich $c < \infty$ und (o.B.d.A.) $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$ an. Mit (2.1) gilt auf $\{Z_n = N > N_0\}$ wegen der Tschebyscheff-Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} \leq r - \varepsilon \;\middle|\; \mathcal{F}_n \right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\frac{F_{n+1}}{Z_n} \leq \mathbb{E}(F) - \varepsilon_1 \;\middle|\; Z_n \right) + \mathbb{P}\left(\frac{M_{n+1}}{Z_n} \leq \mathbb{E}(M) - \varepsilon_2 \;\middle|\; Z_n \right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(|F_{n+1} - Z_n\,\mathbb{E}(F)| \geq \varepsilon_1 Z_n \;\middle|\; Z_n \right) + \mathbb{P}\left(|M_{n+1} - Z_n\,\mathbb{E}(M)| \geq \varepsilon_2 Z_n \;\middle|\; Z_n \right) \\
&\leq \varepsilon_1^{-2} Z_n^{-2}\ \mathrm{Var}(F) + \varepsilon_2^{-2} Z_n^{-2}\ \mathrm{Var}(M) \\
&\leq Z_n^{-1} c\, \varepsilon_1^{-2}
\end{aligned}
$$

Insbesondere gilt auf $\{Z_n > N_0(r-\varepsilon)^n\}$

$$
\mathbb{P}\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r - \varepsilon \;\middle|\; \mathcal{F}_n \right) \geq 1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-n} c\, \varepsilon_1^{-2} \tag{2.2}
$$

Als nächstes zeigen wir für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und auf $\{Z_0 > N_0\}$:

$$
\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{m} \left\{ \frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r - \varepsilon \right\} \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right) \geq \prod_{n=0}^{m} (1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-n} c\, \varepsilon_1^{-2}) \tag{2.3}
$$

per Induktion nach m.

Den Induktionsanfang $m = 0$ haben wir bereits mit (2.2) gezeigt. Die Induktionsbehauptung gelte nun für ein beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschluß: $m \rightsquigarrow m+1$. Auf $\{Z_0 > N_0\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{m+1} \left\{ \frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r - \varepsilon \right\} \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{n=0}^{m+1} 1_{\left\{ \frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r-\varepsilon \right\}} \;\middle|\; \mathcal{F}_{m+1} \right) \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(1_{\left\{ \frac{Z_{m+2}}{Z_{m+1}} > r-\varepsilon \right\}} \prod_{n=0}^{m} 1_{\left\{ \frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r-\varepsilon \right\}} \;\middle|\; \mathcal{F}_{m+1} \right) \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(1_{\left\{ \frac{Z_{m+2}}{Z_{m+1}} > r-\varepsilon \right\}} \;\middle|\; \mathcal{F}_{m+1} \right) \prod_{n=0}^{m} 1_{\left\{ \frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r-\varepsilon \right\}} \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq (1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-(m+1)} c\,\varepsilon_1^{-2})\,\mathbb{E}\left(\prod_{n=0}^{m} 1_{\left\{\frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r-\varepsilon\right\}} \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right)\\
&= (1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-(m+1)} c\,\varepsilon_1^{-2})\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{m} \left\{\frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r-\varepsilon\right\} \;\middle|\; \mathcal{F}_0 \right)\\
&\geq (1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-(m+1)} c\,\varepsilon_1^{-2}) \prod_{n=0}^{m} (1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-n} c\,\varepsilon_1^{-2})\\
&= \prod_{n=0}^{m+1} (1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-n} c\,\varepsilon_1^{-2}),
\end{aligned}
$$

wobei die Iterationsregel für bedingte Erwartungswerte für $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_{m+1}$ in der 1. Zeile und die $\mathcal{F}_{m+1}$-Meßbarkeit von $\prod_{n=0}^{m} 1_{\left\{\frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r-\varepsilon\right\}}$ in der 3. Zeile verwendet wurde. In der 4. Zeile haben wir (2.2) benutzt, da
$Z_{m+1} > Z_m(r-\varepsilon) > Z_{m-1}(r-\varepsilon)^2 > \cdots > Z_0(r-\varepsilon)^{m+1} > N_0(r-\varepsilon)^{m+1}$. Die 6. Zeile erhält man wegen der I.V. Damit ist (2.3) gezeigt und die Behauptung gilt insbesondere für $m \to \infty$. Wegen $(r-\varepsilon)^{-1} < 1$ wächst $\left|\log(1 - N_0^{-1}(r-\varepsilon)^{-n} c\,\varepsilon_1^{-2})\right|$ geometrisch, so dass das Produkt in (2.3) für $m \to \infty$ von Null verschieden ist.

Wir haben somit gezeigt, dass $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{Z_{n+1}}{Z_n} > r-\varepsilon\right\} \;\middle|\; Z_0 > N_0 \right) > 0$, d.h. $(Z_n)_n$ wird mit positiver Wahrscheinlichkeit überleben.

Wir haben oben angenommen, dass sowohl $\mathrm{Var}(F)$ als auch $\mathrm{Var}(M)$ existieren. Falls dies nicht der Fall ist, dann sei $(Z'_n)_n$ ein weiterer BGWP mit $Z'_0 =^d Z_0,\ \zeta' \equiv \zeta,\ (F'_{ni}, M'_{ni}) \leq^d (F_{ni}, M_{ni})$ und $(\mathrm{Var}(F'_{01}), \mathrm{Var}(M'_{01})) < \infty$. Für diesen Prozess gilt somit die obige Rechnung, also auch

$$q'_j := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\,(Z'_n = 0 \mid Z'_0 = j) < 1 \quad \forall j > N_0.$$

Wir können also Satz 2.2 anwenden: Man erhält daher

$$q_j \leq q'_j < 1 \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

d.h. auch in diesem Fall überlebt der Prozess mit positiver Wahrscheinlichkeit. □

An dieser Stelle bemerken wir, dass wir in dem Beweis für den *superkritischen Fall* $r > 1$ die Superadditivität nicht zwangsläufig angenommen haben. Für den *subkritischen Fall* $r < 1$ ist dies aber zwingend notwendig:

Sei also $(Z_n)_n$ ein BGWP mit superadditiver Paarung und $r < 1$. Also

$$\exists N_0 \geq 0 \text{ d.d. } r_j < 1 \quad \forall j \geq N_0. \tag{2.4}$$

Sei $m \geq 0,\ M \geq m$ und

$$A_m^M \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=m}^{M} \frac{Z_{k+1}}{Z_k} 1_{\{Z_k > N_0\}}$$

Beh.: $(A_m^M)_{M=m,m+1,\dots}$ ist ein nicht-neg. Supermartingal bzgl. $\mathcal{F}_{M+1} = \sigma(Z_0, \dots, Z_{M+1})$.
Man sieht sofort, dass die folgende Identität besteht:

$$A_m^M = \frac{Z_{M+1}}{Z_m} \prod_{k=m}^{M} 1_{\{Z_k > N_0\}}$$

Es ist $(A_m^M)_{M \geq m} \in \mathfrak{L}^1$ für alle $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|A_m^M|\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{Z_{M+1}}{Z_m} \prod_{k=m}^{M} 1_{\{Z_k > N_0\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\frac{Z_{M+1}}{Z_m} \prod_{k=m}^{M} 1_{\{Z_k > N_0\}} \;\middle|\; Z_M\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Z_{M+1} \frac{1}{Z_m} 1_{\{Z_M > N_0\}} \prod_{k=m}^{M-1} 1_{\{Z_k > N_0\}} \;\middle|\; Z_M\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_m} \prod_{k=m}^{M-1} 1_{\{Z_k > N_0\}} \underbrace{\mathbb{E}\left(Z_{M+1} \mid Z_M\right) 1_{\{Z_M > N_0\}}}_{< Z_M}\right) \\
&< \mathbb{E}\left(\frac{Z_M}{Z_m} \prod_{k=m}^{M-1} 1_{\{Z_k > N_0\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(Z_M \frac{1}{Z_m} 1_{\{Z_{M-1} > N_0\}} \prod_{k=m}^{M-2} 1_{\{Z_k > N_0\}} \;\middle|\; Z_{M-1}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_m}\prod_{k=m}^{M-2} 1_{\{Z_k>N_0\}} \underbrace{\mathbb{E}\left(Z_M \mid \mathcal{F}_{M-1}\right) 1_{\{Z_{M-1}>N_0\}}}_{<Z_{M-1}}\right)\\
&\vdots\\
&< \mathbb{E}\left(\frac{Z_{m+1}}{Z_m}\prod_{k=m}^{m} 1_{\{Z_k>N_0\}}\right)\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\frac{Z_{m+1}}{Z_m} 1_{\{Z_m>N_0\}} \;\middle|\; Z_M\right)\right]\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z_m}\underbrace{\mathbb{E}\left(Z_{m+1} \mid Z_M\right) 1_{\{Z_m>N_0\}}}_{<Z_m}\right) < 1 < \infty,
\end{aligned}
$$

wobei wir benutzt haben, dass wegen (2.4) gilt:

$$
\mathbb{E}(Z_{M+1} \mid Z_M) 1_{\{Z_M>N_0\}} = Z_M\, r_{Z_M} 1_{\{Z_M>N_0\}} < Z_M
$$

A_m^M ist $\mathcal{F}_{M+1}$ messbar für alle $m \geq 1, M \geq m$ und es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(A_m^{M+1} \mid \mathcal{F}_{M+1}\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=m}^{M+1} \frac{Z_{k+1}}{Z_k} 1_{\{Z_k>N_0\}} \;\middle|\; Z_{M+1}\right)\\
&= \mathbb{E}\left(Z_{M+2} \underbrace{\frac{1}{Z_{M+1}} 1_{\{Z_{M+1}>N_0\}} \prod_{k=m}^{M} \frac{Z_{k+1}}{Z_k} 1_{\{Z_k>N_0\}}}_{\sigma(Z_{M+1}) \text{ meßbar}} \;\middle|\; Z_{M+1}\right)\\
&= \frac{1}{Z_{M+1}} \prod_{k=m}^{M} \frac{Z_{k+1}}{Z_k} 1_{\{Z_k>N_0\}} \underbrace{\mathbb{E}\left(Z_{M+2} \mid Z_{M+1}\right) 1_{\{Z_{M+1}>N_0\}}}_{<Z_{M+1}}\\
&< A_m^M
\end{aligned}
$$

Damit gilt wegen dem Martingalkonvergenzsatz (Satz A.6): $A_m^M \stackrel{M\to\infty}{\longrightarrow} A_m^\infty$ $\mathbb{P}$-f.s. mit $\mathbb{E}(A_m^\infty) < \infty$. Wir nehmen nun an, dass $Z_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Wegen $A_m^\infty < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt auf
$B_m \stackrel{\text{def}}{=} \{Z_n \to \infty, Z_k \geq N_0, k = m, m+1, \dots\}$

$$
\frac{Z_{k+1}}{Z_k} 1_{\{Z_k>N_0\}} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 1
$$

Aber wegen Bemerkung 1.6 ist auf B_m:

$$\begin{aligned}1 &= \mathbb{E}\left(\lim_{k\to\infty} \frac{Z_{k+1}}{Z_k} 1_{\{Z_k>N_0\}}\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(\lim_{j\to\infty} j^{-1}\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right)\right)\\ &= r(\mathbb{E}(F_{01}), \mathbb{E}(M_{01}))\\ &= r < 1,\end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Somit ist $A_m^\infty = \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. oder es divergiert bestimmt gegen 0. Letzteres trifft nicht zu, da wegen der Superadditivität von ζ sowie dem starken Gesetz der großen Zahlen auf B_m gilt

$$\begin{aligned}\frac{Z_{k+1}}{Z_k} 1_{\{Z_k>N_0\}} &= Z_k^{-1}\zeta\left(\sum_{i=1}^{Z_k} F_{ki}, \sum_{i=1}^{Z_k} M_{ki}\right) 1_{\{Z_k>N_0\}}\\ &\geq Z_k^{-1} \sum_{i=1}^{Z_k} \zeta(F_{ki}, M_{ki}) 1_{\{Z_k>N_0\}}\\ &\xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{E}(\zeta(F_{01}, M_{01})) > 0\end{aligned}$$

D.h. wir haben $A_m^\infty = \infty$ auf B_m gezeigt, was ein Widerspruch ist. Demzufolge ist die Annahme $Z_n \to \infty$ falsch und $(Z_n)_n$ stirbt $\mathbb{P}$-f.s. aus.

Im folgenden Beispiel sieht man, dass ein BGWP mit einer nicht-superadditiven Paarungsfunktion überleben kann, trotz $r \leq 1$:

Beispiel 2.4 (Gegenbeispiel). Sei $\zeta(x, y) = [\sqrt{x}\ ]$ für alle $x, y \geq 0$ und $\mathbb{P}(F_{ni} = 0) = 0$. Zunächst ist ζ <u>nicht</u> superadditiv, da $\sqrt{\cdot}$ nicht superadditiv und wegen Lemma 1.5:

$$\begin{aligned}r &= \lim_{j\to\infty} j^{-1}[\sqrt{j\,\mathbb{E}(F_{01})}] = \lim_{j\to\infty} j^{-1}\sqrt{j\,\mathbb{E}(F_{01})}\\ &= \sqrt{\mathbb{E}(F_{01})} \lim_{j\to\infty} j^{-\frac{1}{2}} = 0 \leq 1\end{aligned}$$

und trivialerweise $q_j = 0$ für alle $j \geq 1$, weil der Prozess so kontruiert worden ist: $\mathbb{P}(F_{ni} = 0) = 0$. D.h. der Prozess wird mit Wahrscheinlichkeit 1 überleben, obwohl $r \leq 1$.

Kapitel 3

Asymptotisches Verhalten von $(r^{-n}Z_n)_n$

Im letzten Kapitel haben wir bereits bewiesen, dass ein BGWP ungeachtet der Anfangsgröße Z_0 mit superadditiver Paarung und $r \leq 1$ f.s. ausstirbt. Äquivalent dazu überlebt der Prozess mit positiver Wahrscheinlichkeit, wenn wir annehmen, dass Z_0 groß genug und $r > 1$ ist. Und genau das ist das Ziel dieses Kapitels: Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens eines BGWP, genauer das asymptotische Verhalten von $(r^{-n}Z_n)_n$ und infolgedessen natürlich auch $(r^{-n}F_n)_n$ sowie $(r^{-n}M_n)_n$. Im Abschnitt 1 untersuchen wir die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz und in Abschnitt 2 die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$. Dabei werden wir Bedingungen angeben, so dass $(r^{-n}Z_n)_n$ gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable konvergiert. Schließlich geben wir im letzten Abschnitt eine $(F \log F)$-Bedingung an, für die $(r^{-n}Z_n)_n$, sowie $(r^{-n}F_n)_n$ und $(r^{-n}M_n)_n$ in $\mathfrak{L}^1$ gegen eine nicht-degenerierte Zufallsvariable konvergieren. Für dieses Kapitel nehmen wir also $r > 1$ an und setzen für die nächsten beiden Abschnitte:

$$W_n \stackrel{\text{def}}{=} r^{-n}Z_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} r^{-n}F_n & \text{falls } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{S}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} r^{-n-1}\sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni}1_{\{F_{ni} \leq r^n\}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\varepsilon_k \stackrel{\text{def}}{=} r - r_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

sowie weiterhin

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen Satz 1.3 ist $\varepsilon_k \geq 0$ für alle $k \geq 1$ und $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

3.1 Fast sichere Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$, $(r^{-n}F_n)_n$, $(r^{-n}M_n)_n$

Satz 3.1. *$(W_n)_{n\geq 0}$ ist ein Supermartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Insbesondere gilt*

$$W_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} W \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \quad und \quad \mathbb{E}(W_n) \leq Z_0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei W eine nicht-negative und endliche Zufallsvariable bezeichnet.

Beweis. Es ist klar, dass W_n $\mathcal{F}_n$-messbar und integrierbar für alle n ist. Weiterhin wissen wir bereits aus Satz 1.3, dass $r \geq r_k$ für alle $k \geq 1$. Daher folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= r^{-n-1}\,\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n)\\ &= r^{-n-1} Z_n r_{Z_n}\\ &\leq r^{-n} Z_n = W_n\end{aligned}$$

Da $(W_n)_n$ nicht-negativ ist, folgt direkt mit dem (Super-)Martingalkonvergenzsatz (Satz A.6) die $\mathbb{P}$-f.s-Konvergenz von W_n gegen eine endliche Zufallsvariable $W \geq 0$. Wegen der Martingaleigenschaft gilt zusätzlich $\mathbb{E}(W_n) \leq \mathbb{E}(W_0) = Z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Um die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz von $(r^{-n}F_n)_n$ und $(r^{-n}M_n)_n$ zu zeigen, benötigen wir den folgenden wichtigen Satz:

Satz 3.2. *Die Reihe*

$$\sum_{n\geq 0}\left(\tilde{S}_{n+1}-\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}\mid \mathcal{F}_n)\right)$$

konvergiert $\mathbb{P}$*-f.s. und in* $\mathfrak{L}^1$. *Ferner gilt*

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}\mid \mathcal{F}_n)=r^{-1}W_n\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right)\quad \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}\mid \mathcal{F}_n)&=r^{-n-1}\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_n}F_{ni}\,1_{\{F_{ni}\leq r^n\}}\;\middle|\;\mathcal{F}_n\right)\\
&=r^{-n-1}\,\mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 1}1_{\{Z_n\geq i\}}F_{ni}\,1_{\{F_{ni}\leq r^n\}}\;\middle|\;\mathcal{F}_n\right)\\
&=r^{-n-1}\sum_{i\geq 1}1_{\{Z_n\geq i\}}\,\mathbb{E}\left(F_{ni}1_{\{F_{ni}\leq r^n\}}\;\middle|\;\mathcal{F}_n\right)\\
&=r^{-n-1}\sum_{i=1}^{Z_n}\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right) &(3.1)\\
&=r^{-1}W_n\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right)\quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, &(3.2)
\end{aligned}$$

wobei die 3. Gleichung aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz ([11, Theorem 4.17 (i), S. 99]) gilt ($F_{ni}\geq 0$). Damit ist die zweite Behauptung gezeigt. Um die Aussage über die Konvergenz zu zeigen, reicht es die Voraussetzungen des Satzes A.12 zu überprüfen. Wir setzen $X_k=\tilde{S}_k-\mathbb{E}(\tilde{S}_k\mid \mathcal{F}_{k-1})$, $k\in\mathbb{N}$. Es ist klar, dass X_k zentriert und $\mathcal{F}_k$-meßbar für alle $k\geq 1$ ist, sowie $\mathbb{E}(X_{k+1}\mid \mathcal{F}_k)=0$ für alle $k\geq 0$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass

$$\sum_{n\geq 0}\operatorname{Var}\left(\tilde{S}_{n+1}-\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}\mid \mathcal{F}_k)\right)<\infty$$

erfüllt ist. Nun schätzen wir $\mathrm{Var}(\tilde{S}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n))$ für $n \geq 0$ ab:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(\tilde{S}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\tilde{S}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right)^2\right] \\
&= r^{-2n-2}\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{Z_n}\left(F_{ni}\,1_{\{F_{ni}\leq r^n\}} - \mathbb{E}(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}})\right)\right)^2\right] \\
&= r^{-2n-2}\sum_{j\geq 0}\mathbb{P}\left(Z_n = j\right)\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{Z_n}\left(F_{ni}\,1_{\{F_{ni}\leq r^n\}} - \mathbb{E}(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}})\right)\right)^2 \,\middle|\, Z_n = j\right] \\
&= r^{-2n-2}\sum_{j\geq 0}\mathbb{P}\left(Z_n = j\right)\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{j}\left(F_{ni}\,1_{\{F_{ni}\leq r^n\}} - \mathbb{E}(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}})\right)\right)^2\right] \\
&= r^{-2n-2}\sum_{j\geq 0}\mathbb{P}\left(Z_n = j\right)\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{j}\left(F_{ni}\,1_{\{F_{ni}\leq r^n\}} - \mathbb{E}(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}})\right)\right) \\
&= r^{-2n-2}\sum_{j\geq 0}\mathbb{P}\left(Z_n = j\right) j\ \mathrm{Var}\left(F_{01}\,1_{\{F_{01}\leq r^n\}} - \mathbb{E}(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}})\right) \\
&= r^{-2n-2}\,\mathbb{E}(Z_n)\ \mathrm{Var}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right) \\
&\leq r^{-n-2}Z_0\ \mathrm{Var}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right) \\
&\leq r^{-n-2}Z_0\int_0^\infty x^2 1_{\{x\leq r^n\}}d\,\mathbb{P}(F_{01}\leq x),
\end{aligned}$$

wobei die 2. Zeile wegen (3.1) gilt und die vorletzte wegen $\mathbb{E}(Z_n) \leq r^n Z_0$ (☞ Satz 3.1). Mit dieser Abschätzung folgt nun weiter

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\mathrm{Var}\left(\tilde{S}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) &\leq Z_0\,r^{-2}\sum_{n\geq 0} r^{-n}\int_0^\infty x^2\,1_{\{x\leq r^n\}}\ d\,\mathbb{P}(F_{01}\leq x) \\
&= Z_0\,r^{-2}\int_0^\infty x^2\sum_{n\geq 0} r^{-n}\,1_{\{x\leq r^n\}}\ d\,\mathbb{P}(F_{01}\leq x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Z_0\, r^{-2} \int_0^\infty x^2 O(x^{-1})\; d\,\mathbb{P}(F_{01} \le x) \\
&\approx Z_0\, r^{-2} \int_0^\infty x\; d\,\mathbb{P}(F_{01} \le x) \\
&= Z_0\, r^{-2}\, \mathbb{E}(F_{01}) < \infty, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

wobei die 2. Zeile wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz (☞ [11, Theorem 4.17 (i), S. 99]) gilt und die 3. wegen Satz A.10.

Die Voraussetzungen von Satz A.12 sind damit erfüllt und daher konvergiert $\sum_{n\ge 0}(\tilde{S}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n))$ $\mathbb{P}$-f.s. und in $\mathfrak{L}^1$. □

Wir sind somit in der Lage nun die $\mathbb{P}$-f.s. Konvergenz zu zeigen, die wir im folgenden Satz festhalten:

Satz 3.3.

$$r^{-n} F_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-1}\, \mathbb{E}(F_{01})\, W \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.,$$
$$r^{-n} M_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-1}\, \mathbb{E}(M_{01})\, W \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.,$$

wobei W den fast sicheren Limes von $W_n = r^{-n}Z_n$ bezeichnet.

Beweis. Da wir $r > 1$ angenommen haben, ist $F_{01} 1_{\{F_{01} \le r^n\}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_{01}$ $\mathbb{P}$-f.s.

Wegen $|F_{01} 1_{\{F_{01} \le r^n\}}| \le F_{01}$ für alle $n \ge 0$ und $\mathbb{E}(F_{01}) < \infty$ gilt damit aufgrund des Satzes von der majorisierten Konvergenz (☞ [11, Theorem 4.17 (iii), S. 99]) :

$$\mathbb{E}\left(F_{01} 1_{\{F_{01} \le r^n\}}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(F_{01}). \qquad (3.4)$$

Wegen dem vorigen Satz 3.2 wissen wir nun, dass

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = r^{-1} W_n\, \mathbb{E}\left(F_{01} 1_{\{F_{01} \le r^n\}}\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

D.h. für $n \to \infty$ auf beiden Seiten erhalten wir wegen (3.4) und Satz 3.1:

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-1}\, \mathbb{E}(F_{01}) W \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (3.5)$$

Im vorherigen Satz 3.2 haben wir auch gezeigt, dass $\sum_{n\geq 0}(\tilde{S}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n))$ $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert, inbesondere $\tilde{S}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Mithilfe von (3.5) ergibt dies:

$$\tilde{S}_{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})\,W \;\mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3.6}$$

D.h. wir müssen nur noch zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n$ $\mathbb{P}$-fs. Wir erinnern uns, dass $F_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni}$ für $n \geq 0$. Somit

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_{n+1} \neq \tilde{S}_{n+1}) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(1_{\left\{\sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni} \,\neq\, \sum_{i=1}^{Z_n} F_{ni} 1_{\{F_{ni}\leq r^n\}}\right\}}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(1_{\{\bigcup_{i=1}^{Z_n}\{F_{ni}>r^n\}\}} \;\middle|\; Z_n\right)\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{Z_n} \{F_{ni} > r^n\} \;\middle|\; Z_n\right)\right) \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{P}\left(F_{ni} > r^n \mid Z_n\right)\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{P}(F_{ni} > r^n)\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\mathbb{E}(Z_n)\,\mathbb{E}(1_{\{F_{01}>r^n\}})\right) \\
&\leq Z_0 \sum_{n\geq 0} r^n\,\mathbb{E}(1_{\{F_{01}>r^n\}}) \\
&= Z_0 \sum_{n\geq 0} r^n \int_0^\infty 1_{\{x>r^n\}} d\,\mathbb{P}(F_{01} \leq x) \\
&= Z_0 \int_0^\infty \sum_{n\geq 0} r^n 1_{\{x>r^n\}} d\,\mathbb{P}(F_{01} \leq x) \\
&= Z_0 \int_0^\infty O(x)\, d\,\mathbb{P}(F_{01} \leq x) \\
&\approx Z_0\,\mathbb{E}(F_{01}) < \infty,
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass die 6. Zeile wegen der Unabhängigkeit von (1.1) gilt, die 7. Zeile wegen Satz 3.1 gilt, die 9. wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz (☞ [11, Theorem 4.17 (i), S. 99]) , sowie die vorletzte wegen Satz A.10. Aus der Summierbarkeit der Reihe folgt direkt mit dem Borel-Cantelli-Lemma, dass $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{S_n \neq \tilde{S}_n\right\}\right) = 0$ und daher $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = \tilde{S}_n) = 1$. D.h. wir haben gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} r^{-n}F_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n \overset{(3.6)}{=} r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Auf analoge Art und Weise erhalten wir

$$r^{-n}M_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-1}\,\mathbb{E}(M_{01})W \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

□

3.2 $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$, $(r^{-n}F_n)_n$ und $(r^{-n}M_n)_n$

Satz 3.4. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\mathbb{E}(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = W_n - r^{-1}W_n\,\varepsilon_{Z_n} \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.,$$

insbesondere

$$\mathbb{E}(W_{n+1}) = Z_0 - r^{-1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}(W_k\,\varepsilon_{Z_k}).$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir erinnern an dieser Stelle, dass

$$r_j = j^{-1}\,\mathbb{E}\left(Z_{n+1} \mid Z_n = j\right) \quad j \in \mathbb{N}.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) &= r^{-1}r^{-n}Z_n r_{Z_n} \\
&= r^{-1}W_n r_{Z_n} + W_n - W_n \\
&= W_n - r^{-1}W_n(r - r_{Z_n}) \\
&= W_n - r^{-1}W_n\,\varepsilon_{Z_n} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},
\end{aligned}$$

insbesondere

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{n+1}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(W_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right] \\
&= \mathbb{E}(W_n) - r^{-1}\mathbb{E}(W_n\,\varepsilon_{Z_n}) \\
&= \mathbb{E}(W_{n-1}) - r^{-1}\mathbb{E}(W_{n-1}\,\varepsilon_{Z_{n-1}}) - r^{-1}\mathbb{E}(W_n\,\varepsilon_{Z_n}) \\
&\vdots \\
&= Z_0 - r^{-1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}(W_k\,\varepsilon_{Z_k}),
\end{aligned}$$

wobei $\mathbb{E}(W_0) = \mathbb{E}(Z_0) = Z_0$ benutzt wurde. □

Das folgende Lemma spielt in diesem und dem folgenden Kapitel eine große Rolle.

Lemma 3.5. *Sei $\varepsilon(x)$ eine positive Funktion mit*

- *$\varepsilon(x)$ monoton fallend für alle $x \geq 0$,*
- *$\varepsilon_n \leq \varepsilon(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und*
- *$x\varepsilon(x)$ konkav auf $\mathbb{R}^+$.*

Falls

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty,$$

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(W_n \mid Z_0 = i) > 0 \quad \forall i \geq 1$$

Beweis. Offensichtlich gilt $\varepsilon(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, weil $\varepsilon(x) \geq 0$, monoton fallend ist und $\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty$. Damit

$$\exists\,\delta > 0 : \; \varepsilon(x) < 1 \quad \forall x \geq \delta,$$

speziell wegen $r > 1$:

$$\varepsilon(\delta r^n) < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Wir zeigen nun, dass für $a_n \overset{\text{def}}{=} (1 - r^{-1}\varepsilon(\delta r^n))^{-1}$ gilt

$$x_0 \overset{\text{def}}{=} \prod_{n\geq 0} a_n < \infty.$$

Zunächst ist wegen $r > 1$ und $\varepsilon(x) \geq 0$:

$$a_n = (1 - r^{-1}\varepsilon(\delta r^n))^{-1} \geq 1 \quad \forall n \geq 0$$

Da $\varepsilon(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ergibt dies $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Um also zu zeigen, dass $x_0 < \infty$, reicht es $\sum_{n\geq 0} \log(a_n) < \infty$ zu zeigen. Unter Verwendung von $\log(1 - r^{-1}\varepsilon(\delta r^n)) \leq -r^{-1}\varepsilon(\delta r^n)$ für alle $n \geq 0$ erhält man:

$$\sum_{n\geq 0} \log(a_n) = -\sum_{n\geq 0} \log(1 - r^{-1}\varepsilon(\delta r^n)) \leq r^{-1} \sum_{n\geq 0} \varepsilon(\delta r^n) < \infty,$$

wobei man die Endlichkeit des letzten Termes durch die Anwendung von Lemma A.7 mit $f(x) := \varepsilon(x)$, $m := r > 1$ und $c := \delta > 0$ erhält:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty \iff \sum_{n\geq 1} \varepsilon(\delta r^n) < \infty$$

Also gilt $1 < x_0 < \infty$.

Wir wollen nun Lemma A.8 für $f(x) := r^{-1}\varepsilon(x)$, $m := r$, $a_n := \mathbb{E}(W_n)$ anwenden und überprüfen dafür die Voraussetzungen des Lemmas:

$a_n = \mathbb{E}(W_n) \geq 0$, $xf(x)$ steigend, weil $x\varepsilon(x)$ auf $\mathbb{R}^+$ konkav ist und

$$\begin{aligned}
|a_{n+1} - a_n| &= |\mathbb{E}(W_{n+1}) - \mathbb{E}(W_n)| \\
&= | - r^{-n-1}\, \mathbb{E}(W_n\, \varepsilon_{Z_n})| \\
&= r^{-n-1}\, \mathbb{E}(Z_n\, \varepsilon_{Z_n}) \\
&\leq r^{-n-1}\, \mathbb{E}(Z_n\, \varepsilon(Z_n)) \\
&\leq r^{-n-1}\, \mathbb{E}(Z_n)\, \varepsilon(\mathbb{E}(Z_n)) \\
&= \mathbb{E}(W_n) r^{-1} \varepsilon(\mathbb{E}(W_n) r^n) \\
&= a_n f(a_n r^n),
\end{aligned}$$

wobei die 2. Zeile wegen Satz 3.4 gilt, die 4. wegen $\varepsilon_n \leq \varepsilon(n)$ für alle n und die 5. wegen der Jensenschen Ungleichung für die konkave Funktion $x\varepsilon(x)$.
Da $(W_n)_{n\geq 0}$ ein Supermartingal (bzgl. $\mathcal{F}_n$) wegen Satz 3.1 ist, ist $(\mathbb{E}(W_n))_{n\geq 0}$ fallend und damit konvergent. D.h. wegen Lemma A.8 wissen wir, dass es eine Konstante z_0 existiert, die nur von der Funktion f und r abhängt, d.d.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \quad \text{für } a_0 > z_0.$$

Es ist $a_0 = Z_0$ und für $z_0 := x_0$ bekommt man:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n \mid Z_0 > x_0) = a > 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n \mid Z_0 = i) =: b_i > 0 \quad \forall i > x_0$$

Nun zeigen wir, dass dies für alle i gilt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_n \mid Z_0 = i) &= r^{-n} \sum_{k\geq 0} k \underbrace{\mathbb{P}\left(Z_n = k \mid Z_0 = i\right)}_{p_{i,k}^{(n)}} \\
&= r^{-n} \sum_{k\geq 0} k \sum_{j\geq 0} p_{i,j}\, p_{j,k}^{(n-1)} \\
&= r^{-n} \sum_{j\geq 0} p_{i,j} \sum_{k\geq 0} k\, p_{j,k}^{(n-1)} \\
&= r^{-n} \sum_{j\geq 0} p_{i,j} \sum_{k\geq 0} k\, \mathbb{P}\left(Z_{n-1} = k \mid Z_0 = j\right) \\
&= r^{-1} \sum_{j\geq 0} p_{i,j}\, \mathbb{E}(W_{n-1} \mid Z_0 = j) \\
&= r^{-1} \sum_{j\geq 0} p_{i,j}\, r^{-1} \sum_{k\geq 0} p_{j,k}\, \mathbb{E}(W_{n-2} \mid Z_0 = k) \\
&= r^{-2} \sum_{k\geq 0} \underbrace{\sum_{j\geq 0} p_{i,j}\, p_{j,k}}_{p_{i,k}^{(2)}} \mathbb{E}(W_{n-2} \mid Z_0 = k) \\
&= r^{-2} \sum_{k\geq 0} p_{i,k}^{(2)}\, \mathbb{E}(W_{n-2} \mid Z_0 = k),
\end{aligned}$$

wobei die 2. und letzte Zeile wegen der Kolomogorov-Chapman-Gleichung für Markovketten (☞ [2, Korollar 1.7, S.8]) gilt. Durch Iteration der obigen Rechnung erhält man für alle $i, j \geq 1$:

$$\mathbb{E}(W_n \mid Z_0 = i) = r^{-j} \sum_{k \geq 0} p_{i,k}^{(j)} \, \mathbb{E}(W_{n-j} \mid Z_0 = k)$$

Für $n \to \infty$ auf beiden Seiten ergibt dies für alle $i, j \geq 1$:

$$b_i = r^{-j} \sum_{k \geq 0} p_{i,k}^{(j)} b_k$$

Da wir (1.3) angenommen haben, existiert ein $j \geq 1$, d.d $p_{i,k}^{(j)} > 0$ für ein $k > x_0$. D.h., wir haben gezeigt, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(W_n \mid Z_0 = i) = b_i > 0 \quad \forall i \geq 1. \qquad \square$$

Der letzte Satz benötigt viele Voraussetzungen, um zu garantieren, dass $\mathbb{E}(W_n) > 0$ für große n. Mit dem folgenden Lemma können wir die Voraussetzungen auf ein Minimum reduzieren:

Lemma 3.6. *Falls $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend ist und*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty,$$

so gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(W_n \mid Z_0 = i) > 0 \quad \forall i \geq 1$$

BEWEIS. Sei

$$\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1_{\{0 \leq x < 1\}} \varepsilon_1 + 1_{\{x \geq 1\}} \varepsilon_{[x]}, \quad x \geq 0,$$

dabei sei $[\,\cdot\,]$ die Gaußklammer. Es ist $\varepsilon(x)$ positiv und fallend auf $\mathbb{R}^+$, da $(\varepsilon_n)_n$ (laut Voraussetzung) positiv und fallend ist. Weiterhin ist $\varepsilon(n) = \varepsilon_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty \iff \int_1^\infty \frac{\varepsilon(x)}{x} dx < \infty$$

Somit sind wir in der Lage Lemma A.9 für $f(x) := x\varepsilon(x)$ anzuwenden und erhalten die Existenz einer monoton steigenden Funktion $\hat{e}(x)$ mit

$$x\hat{\varepsilon}(x) \geq x\varepsilon(x) \quad \forall x \geq 0, \tag{3.7}$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\hat{\varepsilon}(x)}{x} dx < \infty, \tag{3.8}$$

$\hat{\varepsilon}(x)$ fallend und $x\hat{\varepsilon}(x)$ konkav auf $\mathbb{R}^+$.

Insbesondere folgt aus (3.8):

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\hat{\varepsilon}(n)}{n} < \infty.$$

Des Weiteren gilt $\varepsilon_n = \varepsilon(n) \leq \hat{\varepsilon}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ wegen (3.7).

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3.5 für die Funktion $\hat{\varepsilon}(x)$ erfüllt und der Beweis ist abgeschlossen. □

Wir haben nun alle Mittel, um den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.7. *Sei*

$$R_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\Big(|Z_{n+1} - kr_k| \;\Big|\; Z_n = k\Big) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sind $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ *und* $\left(\frac{R_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ *monoton fallend und*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty \quad \textit{sowie} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{R_n}{n^2} < \infty,$$

so gilt

$$W_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^1} W \quad \textit{für } n \to \infty$$

mit $0 < \mathbb{E}(W) < \infty$.

Beweis. Da $\mathfrak{L}^1$ vollständig ist, genügt es das Cauchy-Kriterium zu überprüfen.

Für $x \geq 0$ sei

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} (R_1 + \varepsilon_1)1_{\{0\leq x\leq 1\}} + x\left(\frac{R_{[x]}}{[x]} + \varepsilon_{[x]}\right)1_{\{x\geq 1\}} \geq 0.$$

Es ist klar, dass $\frac{g(n)}{n} = \frac{R_n}{n} + \varepsilon_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ist. Wegen der Voraussetzung ist daher $\left(\frac{g(n)}{n}\right)_n$ monoton fallend und es gilt

$$\sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^2} < \infty.$$

Insbesondere gilt

$$\int_1^\infty \frac{g(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Somit sind wir in der Lage Satz A.9 für die Funktion $g(x)$ anzuwenden. D.h. es existiert eine Funktion $\hat{g}$ mit

$$\hat{g}(x) \geq g(x) \quad \forall x \geq 0, \tag{3.9}$$

$$\hat{g} \text{ konkav auf } \mathbb{R}^+, \tag{3.10}$$

$$\frac{\hat{g}(x)}{x} \text{ fallend und} \tag{3.11}$$

$$\int_1^\infty \frac{\hat{g}(x)}{x^2} dx < \infty. \tag{3.12}$$

Da $(\varepsilon_n)_n$ monoton fallend ist und $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty$, wissen wir bereits wegen Lemma 3.6, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_n) > 0$. Mit $W_n = r^{-n}Z_n$ ergibt dies für große n:

$$\mathbb{E}(Z_n) \geq \delta r^n \quad \text{für ein gewisses } \delta > 0. \tag{3.13}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|W_{n+1} - W_n\right| &= \mathbb{E}\left|r^{-n-1}Z_{n+1} - r^{-n}Z_n\right| \\
&= r^{-n-1}\,\mathbb{E}\left|Z_{n+1} - rZ_n\right| \\
&= r^{-n-1}\,\mathbb{E}\left|Z_{n+1} - r_{Z_n}Z_n + r_{Z_n}Z_n - rZ_n\right| \\
&\leq r^{-n-1}\Big(\mathbb{E}\left|Z_{n+1} - r_{Z_n}Z_n\right| + \mathbb{E}\left|rZ_n - r_{Z_n}Z_n\right|\Big)
\end{aligned}$$

und weiter:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|W_{n+1}-W_n| &\le r^{-n-1}\Big(\mathbb{E}\,|Z_{n+1}-r_{Z_n}Z_n|+\mathbb{E}\,|rZ_n-r_{Z_n}Z_n|\Big)\\
&= r^{-n-1}\Big(\mathbb{E}(R_{Z_n})+\mathbb{E}(Z_n\,\varepsilon_{Z_n})\Big)\\
&= r^{-n-1}\,\mathbb{E}(R_{Z_n}+Z_n\,\varepsilon_{Z_n})\\
&= r^{-n-1}\,\mathbb{E}\left(g(Z_n)\right)\\
&\le r^{-n-1}\,\mathbb{E}(\hat{g}(Z_n))\\
&\le r^{-n-1}\,\hat{g}(\mathbb{E}(Z_n))\\
&= r^{-n-1}\,\mathbb{E}(Z_n)\frac{\hat{g}(\mathbb{E}(Z_n))}{\mathbb{E}(Z_n)}\\
&= r^{-1}\,\mathbb{E}(W_n)\frac{\hat{g}(\mathbb{E}(Z_n))}{\mathbb{E}(Z_n)}\\
&\le r^{-1}Z_0\frac{\hat{g}(\mathbb{E}(Z_n))}{\mathbb{E}(Z_n)}\\
&\le r^{-1}Z_0\frac{\hat{g}(\delta r^n)}{\delta r^n},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

wobei die 5. Zeile wegen (3.9) gilt, die 6. wegen (3.10) und der Jensenschen Ungleichung, die vorletzte, weil $(W_n)_n$ ein Supermartingal ist (3.1) und die letzte wegen (3.13) und (3.11).

Mit (3.12) und Lemma A.7 ergibt sich nun folgende Äquivalenz:

$$
\int_1^\infty \frac{\hat{g}(x)}{x^2} < \infty \iff \sum_{n\ge 1}\frac{\hat{g}(n)}{n^2} < \infty \iff \sum_{n\ge 1}\frac{\hat{g}(\delta r^n)}{\delta r^n} < \infty,
$$

d.h. wegen dem Cauchy-Kriterium für Reihen gilt somit:

$$
\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ d.d. } \forall m \ge n \ge n_0 : \quad \left|\sum_{k=n}^{m}\frac{\hat{g}(\delta r^k)}{\delta r^k}\right| < \varepsilon\frac{r}{Z_0},
$$

insbesondere also für alle $m \ge n \ge n_0$:

$$
\mathbb{E}\,|W_n-W_m| \le \sum_{k=n}^{m}\mathbb{E}\,|W_{k+1}-W_k| \overset{(3.14)}{\le} r^{-1}Z_0\sum_{k=n}^{m}\frac{\hat{g}(\delta r^k)}{\delta r^k} < \varepsilon
$$

D.h. wir haben die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(W_n)_n$ gezeigt. $\square$

Bemerkung 3.8. Es ist klar, dass der $\mathbb{P}$-f.s. Limes aus Satz 3.1 mit dem $\mathfrak{L}^1$-Limes aus Satz 3.7 übereinstimmt.

Bemerkung 3.9. Ist $R_n = O(\log(n))$ oder $R_n = O(\log^{-p}(n))$ für ein $p > 0$, so sind die Bedingungen des letzten Satzes erfüllt.

Nun können wir leicht die Äquivalenz der $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz zwischen $(r^{-n}Z_n)_n$, $(r^{-n}F_n)_n$ und $(r^{-n}M_n)_n$ zeigen, was wir im folgenden Lemma notieren:

Lemma 3.10. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

- $(r^{-n}Z_n)_{n\geq 0}$ *konvergiert in* $\mathfrak{L}^1$
- $(r^{-n}F_n)_{n\geq 0}$ *konvergiert in* $\mathfrak{L}^1$
- $(r^{-n}M_n)_{n\geq 0}$ *konveriert in* $\mathfrak{L}^1$

Beweis. Wir zeigen: $(r^{-n}Z_n)_n$ konv. in $\mathfrak{L}^1 \Longrightarrow (r^{-n}F_n)_n$ konv. in $\mathfrak{L}^1$.
Wir nehmen nun an, dass $(r^{-n}Z_n)_n$ in $\mathfrak{L}^1$ gegen W konvergiert, wobei $W = \lim_{n\to\infty} W_n$ f.s. Wegen Satz 3.3 gilt

$$r^{-n}F_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01}) \lim_{n\to\infty} W_n = r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{3.15}$$

somit folgt unter der Verwendung der Voraussetzung und (3.15)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(r^{-n}F_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W_n\right)\\ &= \mathbb{E}\left(r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01}) \lim_{n\to\infty} W_n\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} r^{-n}F_n\right),\end{aligned}$$

d.h. wegen Theorem 4.17 (iv) (☞ [11, S. 99]) konvergiert $(r^{-n}F_n)_n$ in $\mathfrak{L}^1$ (gegen $r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W$).
Die Rückrichtung zeigt man auf ähnliche Weise, die anderen Implikationen sind analog. □

Bemerkung 3.11. Es ist nun nicht mehr erstaunlich, dass sobald $(r^{-n}Z_n)_n$ einen in 0 nicht-degenerierten Limes hat, so gilt dies ebenfalls für $(r^{-n}F_n)_n$ sowie $(r^{-n}M_n)_n$.

3.3 $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$ unter einer $(F\log F)$-Bedingung

In Satz 3.7 haben wir unter gewissen Voraussetzungen bereits die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$ gezeigt, jedoch wird die Summierbarkeit von $\frac{R_n}{n^2}$ vorausgesetzt. Da dies für gewöhnlich nicht einfach zu überprüfen ist, benötigen wir eine "handlichere" Voraussetzung.
Wir sagen, dass die $(F\log F)$-Bedingung erfüllt ist, wenn

$$\mathbb{E}\left(F_{01}\log^+ F_{01}\right) = \sum_{k\geq 0} k\log^+(k)\,\mathbb{P}(F_{01}=k) < \infty$$

gilt. Für diesen Abschnitt setzen wir

$$D_n \stackrel{\text{def}}{=} S_n - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n), \quad n\in\mathbb{N}_0$$

Satz 3.12. *Ist $D_n \geq 0$ für alle $n\geq 0$ und die $(F\log F)$-Bedingung erfüllt, so gilt*

$$r^{-n}F_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^1} W^*,$$

wobei $W^* \stackrel{\text{def}}{=} r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W$ bezeichnet und W der $\mathbb{P}$-f.s. Limes von W_n ist.
Ist außerdem $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{n} < \infty,$$

so ist W^* eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable.

Beweis. Wir zeigen als erstes unter der $(F\log F)$-Bedingung, dass $\sum_{n\geq 0}(\tilde{S}_{n+1}-S_n)$ in $\mathfrak{L}^1$ konvergiert.

Zunächst gilt wegen Satz 3.2:

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = r^{-1}W_n\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3.16}$$

sowie

$$\sum_{n\geq 0}(\tilde{S}_{n+1}-S_n+D_n) = \sum_{n\geq 0}(\tilde{S}_{n+1}-\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)) \quad \mathbb{P}\text{-f.s. und in } \mathfrak{L}^1.$$

D.h., es genügt zu zeigen, dass $\sum_{n\geq 0} D_n$ in $\mathfrak{L}^1$ konvergiert. Laut Voraussetzung ist $D_n \geq 0$ für alle n, also ist es hinreichend zu zeigen, dass $\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(D_n) < \infty$.

Wir machen zunächst ein paar Nebenrechnungen. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= r^{-n}\,\mathbb{E}(F_n) \\
&= r^{-n}\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} F_{n-1,i}\right) \\
&= r^{-n}\,\mathbb{E}(Z_{n-1})\,\mathbb{E}(F_{01}) \\
&= r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1})\,\mathbb{E}(F_{01}) \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

und für $j \in \mathbb{N} : r_j = j^{-1}\,\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) = j^{-1}\,\mathbb{E}(Z_n \mid Z_{n-1} = j)$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_n) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(W_n \mid Z_{n-1})\right] \\
&= r^{-n}\,\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Z_n \mid Z_{n-1})\right] \\
&= r^{-n}\,\mathbb{E}(Z_{n-1}\,r_{Z_{n-1}}) \\
&= r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1}\,r_{Z_{n-1}}) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{n-1}) - r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1}\,r_{Z_{n-1}}) &= r^{-1}\,\mathbb{E}(rW_{n-1} - W_{n-1}\,r_{Z_{n-1}}) \\
&= r^{-1}\mathbb{E}(W_{n-1}\,\varepsilon_{Z_{n-1}}) \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_n) &= \mathbb{E}\left(S_n - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\right) \\
&= \mathbb{E}(S_n) - \mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}) \\
&= r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1})\,\mathbb{E}(F_{01}) - r^{-1}\,\mathbb{E}(W_n)\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right) \\
&= r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1})\Big(\mathbb{E}(F_{01}1_{\{F_{01}>r^n\}}) + \mathbb{E}(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}})\Big) \\
&\quad - r^{-2}\,\mathbb{E}(W_{n-1}\,r_{Z_{n-1}})\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\leq r^n\}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1})\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}>r^n\}}\right)\\
&\qquad + r^{-1}\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\le r^n\}}\right)\Big(\mathbb{E}(W_{n-1}) - r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1}\,r_{Z_{n-1}})\Big)\\
&= r^{-1}\,\mathbb{E}(W_{n-1})\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}>r^n\}}\right)\\
&\qquad - r^{-2}\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\le r^n\}}\right)\,\mathbb{E}(W_{n-1}\,\varepsilon_{Z_{n-1}})\\
&\le r^{-1}Z_0\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}>r^n\}}\right) + r^{-2}\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}\le r^n\}}\right)\mathbb{E}(W_{n-1}\varepsilon_{Z_{n-1}})\\
&\le r^{-1}Z_0\,\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}>r^n\}}\right) + r^{-2}\,\mathbb{E}(F_{01})\,\mathbb{E}\left(W_{n-1}\varepsilon_{Z_{n-1}}\right), \quad n\in\mathbb{N}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

wobei in der 3. Zeile (3.16) und (3.17) benutzt wurde, in der 4. (3.18), in der 6. (3.19) sowie Satz 3.1 in der vorletzten Zeile. Wir möchten $\sum_{n\ge0}\mathbb{E}(D_n)<\infty$ zeigen, also mithilfe von (3.20) ist noch

$$
\sum_{n\ge0}\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}>r^n\}}\right)<\infty \quad \text{und} \quad \sum_{n\ge0}\mathbb{E}\left(W_n\,\varepsilon_{Z_n}\right)<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}
$$

zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\ge0}\mathbb{E}\left(F_{01}1_{\{F_{01}>r^n\}}\right) &= \sum_{n\ge0}\int_0^\infty x1_{\{x>r^n\}}\,d\,\mathbb{P}(F_{01}\le x)\\
&= \int_0^\infty \sum_{n\ge0} x1_{\{x>r^n\}}\,d\,\mathbb{P}(F_{01}\le x)\\
&= \int_0^\infty x\,O(\log^+ x)\,d\,\mathbb{P}(F_{01}\le x)\\
&= \mathbb{E}(F_{01}\log^+ F_{01})<\infty,
\end{aligned}
$$

wobei wir den Satz von der monotonen Konvergenz (☞ [11, Theorem 4.17 (i), S. 99]) in der 2. Zeile sowie Satz A.10 in der 3. Zeile benutzt haben.

Mit Satz 3.4 erhält man nun:

$$
\sum_{k=0}^n \mathbb{E}\left(W_k\,\varepsilon_{Z_k}\right) = r(Z_0-\mathbb{E}(W_{n+1}))
$$

Für $n \to \infty$ auf beiden Seiten ergibt dies:

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(W_n\, \varepsilon_{Z_n}\right) = r(Z_0 - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}(W_n)}_{\in[0,Z_0]}) < \infty \tag{3.21}$$

Fassen wir kurz zusammen: Aus der $(F \log F)$-Bedingung folgt $\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(D_n) < \infty$, und daraus wiederum die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $\sum_{n\geq 1}(\tilde{S}_{n+1} - S_n)$. Wegen Satz 3.3 ist bekannt, dass $(r^{-n}F_n)_n$ f.s. gegen $W^* \in [0,\infty)$ konvergiert. Also für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W^*) &= \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} r^{-m}F_m\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1}(S_{k+1} - S_k)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(S_{k+1} - S_k)\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{k=n}^{\infty}(S_{k+1} - S_k)\right) \\
&\geq \mathbb{E}(S_n) + \mathbb{E}\left(\sum_{k=n}^{\infty}(\tilde{S}_{k+1} - S_k)\right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Aus (3.22) folgt wegen der $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $\sum_{n\geq 1}(\tilde{S}_{n+1} - S_n)$ nun

$$\mathbb{E}(W^*) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n)$$

Schließlich erhält man wegen dem Lemma von Fatou (☞ [11, Theorem 4.17 (ii), S. 98]) auch $\mathbb{E}(W^*) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n)$, was also

$$\mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} r^{-n}F_n\right) = \mathbb{E}(W^*) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(r^{-n}F_n)$$

impliziert. Also folgt (mithilfe von [11, Theorem 4.17 (iv), S. 99]):

$$r^{-n}F_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^1} W^* = r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W \quad \text{für } n \to \infty, \tag{3.23}$$

wobei $W = \lim_{n\to\infty} W_n$ $\mathbb{P}$-f.s. Wie wir in Lemma 3.10 gesehen haben, ist die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}F_n)_n$ äquivalent zur $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $W_n = r^{-n}Z_n$. Es folgt mit (3.23) die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)$ gegen $r[\mathbb{E}(F_{01})]^{-1}W$. Insbesondere, falls $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge mit $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty$ ist, dann folgt mit Lemma 3.6, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(r^{-n}Z_n) > 0$, was

$$\mathbb{E}(W^*) > 0$$

impliziert. Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 3.13. Die Forderung des letzten Satzes, dass D_n nicht-negativ für alle n ist, ist in der Tat eine Bedingung, die man leicht überprüfen kann. Es reicht anzunehmen, dass für die Paarungsfunktion $\zeta(x,y) \leq \frac{xr}{\mathbb{E}(F_{01})}$ bzw. $\zeta(x,y) \leq \frac{yr}{\mathbb{E}(M_{01})}$ für alle x, y gilt.

Zum Schluss des Kapitels zeigen wir noch mithilfe des letzten Satzes, dass für die Paarungsfunktion $\zeta(x,y) = x\min(1,y)$ die $(F\log F)$-Bedingung für die $\mathfrak{L}^1$-Konvergenz von $r^{-n}F_n$ ausreicht, unter zusätzlicher Annahme von Daley's Modell.

Satz 3.14. *Sei $(Z_n)_n$ ein BGWP mit Paarungsfunktion $\zeta(x,y) = x\min(1,y)$ unter der Annahme von Daley's Modell. Falls die $(F\log F)$-Bedingung erfüllt ist, gilt*

$$r^{-n}F_n \xrightarrow{\mathfrak{L}^1} W^*,$$

wobei W^* eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable ist.

Beweis. Seien für $j \geq 1$ und $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} g(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(s^{T_{01}}\right) \\ h_j(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = j), \end{aligned}$$

dann gilt einerseits

$$h_j'(1) = \mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) = jr_j$$

und andererseits wegen der zusätzlchen Annahme von Daley's Modell mit Satz A.13:

$$h_j'(1) = \alpha j g'(1) - \alpha j g(\alpha)^{j-1} g'(\alpha).$$

und damit insbesondere

$$r_j = j^{-1}\, h_j'(1) = \alpha g'(1) - \alpha g(\alpha)^{j-1} g'(\alpha)$$

Mit diesem Ergebnis können wir ε_n berechnen:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= r - r_n = \lim_{j\to\infty} r_j - r_n \\ &= \alpha g'(1) - \alpha g'(\alpha) \lim_{j\to\infty} g(\alpha)^{j-1} - \alpha g'(1) + \alpha g(\alpha)^{n-1} g'(\alpha) \\ &= \alpha g(\alpha)^{n-1} g'(\alpha),\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wegen $g(\alpha) < 1$ gilt. Insbesondere ist $\varepsilon_n = \alpha g(\alpha)^{n-1} g'(\alpha)$ eine fallende Folge für alle n und es gilt $\sum_{n\geq 0} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty$.
In Bemerkung 1.6 haben wir bereits gesehen, dass speziell für diese Paarungsfunktion $r = \mathbb{E}(F_{01})$ ist. Daher läßt sich nun $D_n \geq 0$ leicht zeigen:

$$\begin{aligned}D_n &= S_n - r^{-1} W_n \, \mathbb{E}\left(F_{01} 1_{\{F_{01} \leq r^n\}}\right) \\ &\geq S_n - r^{-1} W_n \, \mathbb{E}(F_{01}) \\ &= S_n - W_n = r^{-n}(F_n - Z_n) \\ &= r^{-n}(F_n - F_n \min(1, M_n)) \geq 0\end{aligned}$$

Also sind die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt, und damit ist der Satz bewiesen. □

Kapitel 4

Bedingungen für die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$

Wie im letzten Kapitel nehmen wir weiterhin an, dass $r > 1$ und Z_0 ausreichend groß ist, damit $(Z_n)_n$ f.s. überlebt. Die Notationen für W_n und ε_n übernehmen wir aus dem letzten Kapitel. Für dieses Kapitel definieren wir zusätzlich für $j \in \mathbb{N}$:

$$m_j^2 \stackrel{\text{def}}{=} j^{-1}\,\mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j)$$

$$\sigma_j^2 \stackrel{\text{def}}{=} j^{-1}\,\mathrm{Var}(Z_{n+1} \mid Z_n = j)$$

Wir nehmen $m_j^2 < \infty$ für alle j an, insbesondere ist auch σ_j^2 endlich für alle j.

Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned} jm_j^2 &= \mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j) \\ &= \mathrm{Var}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) + \mathbb{E}^2(Z_{n+1} \mid Z_n = j) \\ &= j\sigma_j^2 + j^2 r_j^2, \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

insbesondere

$$
\begin{aligned}
Z_n m_{Z_n}^2 &= Z_n \sigma_{Z_n}^2 + Z_n^2\, r_{Z_n}^2 && (4.1)\\
&= Z_n^2 \left(\frac{\sigma_{Z_n}^2}{Z_n} + r_{Z_n}^2 \right). && (4.2)
\end{aligned}
$$

Weiterhin ist wegen $r_n \leq r$ für alle $n \geq 1$ (Satz 1.3) mithilfe von (4.1)

$$
Z_n m_{Z_n}^2 \leq Z_n \sigma_{Z_n}^2 + r^2\, Z_n^2 \tag{4.3}
$$

Unter Verwendung von (4.2) und $r_{Z_n}^2 = r^2 + (r_{Z_n} - r)(r_{Z_n} + r)$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{n+1}^2) &= r^{-2n-2}\, \mathbb{E}(Z_{n+1}^2)\\
&= r^{-2n-2}\, \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \mid Z_n)\right]\\
&= r^{-2n-2}\, \mathbb{E}(Z_n m_{Z_n}^2)\\
&= r^{-2n-2}\, \mathbb{E}\left(Z_n^2 \left(\frac{\sigma_{Z_n}^2}{Z_n} + r_{Z_n}^2 \right)\right)\\
&= r^{-2}\, \mathbb{E}\left(W_n^2 \left(\frac{\sigma_{Z_n}^2}{Z_n} + r^2 + (r_{Z_n} - r)(r_{Z_n} + r) \right)\right)\\
&= \mathbb{E}(W_n^2) + \mathbb{E}\left(W_n^2 \left(\frac{\sigma_{Z_n}^2}{Z_n} - \varepsilon_{Z_n}(r_{Z_n} + r) \right)\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned}
$$

was wiederum

$$
\mathbb{E}(W_{n+1}^2) = Z_0^2 + r^{-2} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(W_k^2 \left(\frac{\sigma_{Z_k}^2}{Z_k} - \varepsilon_{Z_k}(r_{Z_k} + r) \right)\right) \tag{4.4}
$$

impliziert.

4.1 Notwendige Bedingungen

Satz 4.1. *Für einen BGWP mit superadditiver Paarung existiert*

$$
m^2 \overset{\text{def}}{=} \lim_{j \to \infty} m_j^2.
$$

Ferner gilt

$$m^2 = \lim_{j\to\infty} m_j^2 = \sup_{j>0} m_j^2$$

Insbesondere

$$m^2 \geq m_j^2 \quad \forall j \geq 1.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jm_j^2 für $j \geq 1$ eine superadditive Funktion ist: Für $j, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(j+k)m_{j+k}^2 &= \mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j+k) \\
&= \mathbb{E}\left[\zeta\left(\sum_{i=1}^{j+k} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j+k} M_{ni}\right)^2\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\left(\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right) + \zeta\left(\sum_{i=j+1}^{j+k} F_{ni}, \sum_{i=j+1}^{j+k} M_{ni}\right)\right)^2\right] \\
&\geq \mathbb{E}\left[\zeta\left(\sum_{i=1}^{j} F_{ni}, \sum_{i=1}^{j} M_{ni}\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\zeta\left(\sum_{i=j+1}^{j+k} F_{ni}, \sum_{i=j+1}^{j+k} M_{ni}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = j) + \mathbb{E}(Z_{n+1}^2 \mid Z_n = k) \\
&= jm_j^2 + km_k^2,
\end{aligned}$$

wobei wir in der 2. und vorletzten Zeile die Unabhängigkeit von (F_{ni}, M_{ni}) für alle $n \geq 0, i \geq 1$ benutzt haben, sowie die Superadditivität von ζ in der 3. Zeile, und in der 4. die Nicht-Negativität von ζ. Außerdem haben wir in der vorletzten Gleichung die Tatsache verwendet, dass $\sum_{i=j+1}^{j+k} F_{ni} =^d \sum_{i=1}^{k} F_{ni}$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar mit Satz A.4. □

Satz 4.2.

$$m^2 = \infty$$

ist eine notwendige Bedingung für die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(W_n)_n$ gegen einen in 0 nicht-degenerierten Limes.

Beweis. Falls $m^2 < \infty$, dann gilt unter Verwendung von Satz 4.1

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbb{E}(W_{n+1}^2) &= r^{-2n-2}\,\mathbb{E}(Z_{n+1}^2)\\ &= r^{-2n-2}\,\mathbb{E}(Z_n\, m_{Z_n}^2)\\ &\leq r^{-2n-2}\, m^2\,\mathbb{E}(Z_n)\\ &\leq r^{-n}\left(\frac{m}{r}\right)^2 Z_0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

und damit kann nicht $(W_n)_n$ gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable konvergieren. □

Satz 4.3.

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{n} < \infty \qquad und \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

sind notwendige Bedingungen für die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(W_n)_n$ gegen einen in 0 nicht-degenerierten Limes, falls es Funktionen $\varepsilon(x)$ und $\sigma^2(x)$ gibt mit

- $\varepsilon(n) = \varepsilon_n,\ \sigma^2(n) = \sigma_n^2, \quad n \geq 1,$
- *$\varepsilon(x)$ und $\frac{\sigma^2(x)}{x}$ sind monoton fallend,*
- *$\frac{\sigma_n^2}{n} - \varepsilon_n(r + r_n)$ hat für alle $n \geq 1$ das gleiche Vorzeichen.*

Beweis. Sei $W = \lim_{n\to\infty} W_n$ f.s., $\mathbb{P}(W > 0) > 0$ und (W_n) konvergent in $\mathfrak{L}^2$. Dann gilt wegen (4.4):

$$\left|\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}\left(W_n^2\left(\frac{\sigma_{Z_n}^2}{Z_n} - \varepsilon_{Z_n}(r_{Z_n} + r)\right)\right)\right| < \infty$$

Da $W_n \geq 0$ und $\frac{\sigma_n^2}{n} - \varepsilon_n(r + r_n)$ für alle n das gleiche Vorzeichen besitzt, ergibt dies

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}\left(W_n^2\left|\frac{\sigma_{Z_n}^2}{Z_n} - \varepsilon_{Z_n}(r_{Z_n} + r)\right|\right) < \infty$$

und daraus wiederum

$$\sum_{n\geq 0} W_n^2\left|\frac{\sigma_{Z_n}^2}{Z_n} - \varepsilon_{Z_n}(r_{Z_n} + r)\right| < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

sowie

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{\sigma^2_{Z_n}}{Z_n}-\varepsilon_{Z_n}(r_{Z_n}+r)\right|<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{W>0\}. \tag{4.5}$$

Weiterhin ist

$$-\varepsilon_{Z_n}(r+r_{Z_n})=\varepsilon_{Z_n}(r-r_{Z_n}-2r)=\varepsilon_{Z_n}(\varepsilon_{Z_n}-2r)=\varepsilon^2_{Z_n}-2\,r\varepsilon_{Z_n},$$

so dass (4.5) äquivalent zu

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{\sigma^2_{Z_n}}{Z_n}+\varepsilon^2_{Z_n}-2r\varepsilon_{Z_n}\right|<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{W>0\} \tag{4.6}$$

ist. Wir zeigen nun $\sum_{n\geq 0}\varepsilon_{Z_n}<\infty$ auf $\{W>0\}$:

Im letzten Kapitel haben wir im Beweis von Satz 3.12 gezeigt (☞ (3.21)) , S. 48), dass

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}(W_n\,\varepsilon_{Z_n})<\infty,$$

und somit

$$\sum_{n\geq 0}W_n\,\varepsilon_{Z_n}<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und

$$\sum_{n\geq 0}\varepsilon_{Z_n}<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{W>0\}. \tag{4.7}$$

D.h. mit (4.6) und (4.7) haben wir gezeigt, dass

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma^2_{Z_n}}{Z_n}<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{W>0\} \tag{4.8}$$

Sei nun $\tilde{W}\overset{\text{def}}{=}\sup_{n\geq 0}W_n$. Auf $\{W>0\}$ gilt daher $\tilde{W}>0$ f.s.

Da $\frac{\sigma^2(x)}{x}$ fallend ist, $\tilde{W}\geq W_n$ und $\sigma^2(n)=\sigma^2_n$ für alle n ergiebt dies

$$\frac{\sigma^2(\tilde{W}r^n)}{\tilde{W}r^n}\leq\frac{\sigma^2(W_nr^n)}{W_nr^n}=\frac{\sigma^2(Z_n)}{Z_n}=\frac{\sigma^2_{Z_n}}{Z_n}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Mit (4.8) und (4.9) erhält man somit

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma^2(\tilde{W}r^n)}{\tilde{W}r^n}<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{W>0\},$$

was mithilfe von Lemma A.7 äquivalent ist zu

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty$$

Analog zu (4.9) bekommt man mithilfe der Eigenschaften von $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon(\tilde{W}r^n)\leq \varepsilon_{Z_n},$$

so dass wegen (4.7) gilt.

$$\sum_{n\geq 1}\varepsilon(\tilde{W}r^n)<\infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{W>0\}$$

Mit Satz A.7 folgt die letzte Behauptung, nämlich

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{n}<\infty. \qquad \square$$

Eine direkte Folgerung des letzten Satzes liefert uns das folgende

Lemma 4.4.

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{n}<\infty \qquad \textit{und} \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty$$

sind notwendige Bedingungen für die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(W_n)_n$ gegen einen in 0 nicht-degenerierten Limes, falls

- $(\varepsilon_n)_n$ *sowie* $\left(\frac{\sigma_n^2}{n}\right)_n$ *monoton fallend,*
- $\frac{\sigma_n^2}{n}-\varepsilon_n(r+r_n)$ *hat für alle* $n\geq 1$ *das gleiche Vorzeichen.*

Beweis. Seien

$$\varepsilon(x)\stackrel{\text{def}}{=}\varepsilon_1 1_{\{0\leq x<1\}}+\varepsilon_{[x]}1_{\{x\geq 1\}}, \quad x\geq 1$$

$$\sigma^2(x)\stackrel{\text{def}}{=}x\sigma_1^2 1_{\{0\leq x<1\}}+\left(x\frac{\sigma_{[x]}^2}{[x]}\right)1_{\{x\geq 1\}}, \quad x\geq 1$$

Es ist klar, dass $\varepsilon(n)=\varepsilon_n$, $\sigma^2(n)=\sigma_n^2$ für $n\geq 1$, sowie $\varepsilon(x)$ und $\frac{\sigma^2(x)}{x}$ monoton fallende Funktionen sind, da $(\varepsilon_n)_n$ und $\left(\frac{\sigma_n^2}{n}\right)_n$ monoton fallend. Damit sind Voraussetzungen des letzten Satzes 4.3 erfüllt, und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

4.2 Hinreichende Bedingungen

Satz 4.5. *Seien $\varepsilon(x)$ und $\sigma^2(x)$ positive Funktionen mit*

- $\varepsilon_n \leq \varepsilon(n)$, $\sigma_n^2 \leq \sigma^2(n)$ *für alle* $\in \mathbb{N}$,
- $\varepsilon(x)$ *und* $\frac{\sigma^2(x)}{x}$ *fallend,*
- $x\varepsilon(x)$ *konkav.*

Falls

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma^2(n)}{n^2} < \infty,$$

dann konvergiert $(W_n)_n$ *in* $\mathfrak{L}^2$ *gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable.*

Beweis. Als erstes zeigen wir, dass $(W_n)_n$ $\mathfrak{L}^2$-beschränkt ist. Dafür benötigen wir ein wenig Vorarbeit. Wir definieren

$$\tilde{\sigma}^2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\sigma^2(1)1_{\{0\leq x<1\}} + \left(\sigma^2(1) + \int_1^x \frac{\sigma^2(t)}{t}dt\right) 1_{\{x\geq 1\}}, \quad x \geq 0.$$

Wegen Satz A.9 ist bekannt, dass

$$\tilde{\sigma}^2(x) \geq \sigma^2(x), \quad x \geq 1, \tag{4.10}$$

$$\frac{\tilde{\sigma}^2(x)}{x} \text{ fallend und} \tag{4.11}$$

$$\int_1^\infty \frac{\tilde{\sigma}^2(x)}{x^2}dx < \infty. \tag{4.12}$$

Mit (4.10) und der Voraussetzung ergibt dies speziell für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_n^2 \leq \sigma^2(n) \leq \tilde{\sigma}^2(n) \tag{4.13}$$

Aus (4.11) folgt

$$\int_1^\infty \frac{\tilde{\sigma}^2(x)}{x^2}dx < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{\tilde{\sigma}^2(n)}{n^2} < \infty,$$

was wiederum mithilfe von Satz A.7

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\tilde{\sigma}^2(\delta r^n)}{\delta r^n} < \infty \tag{4.14}$$

impliziert. Des Weiteren ist

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x}\,\tilde{\sigma}^2(\sqrt{x}) \tag{4.15}$$

eine konkave Funktion. Denn für $x < 1$ ist $f(x) = x\sigma^2(1)$ konkav und für $x > 1$ ist

$$f(x) = \sqrt{x}\,\tilde{\sigma}^2(\sqrt{x}) = \sqrt{x}\,\sigma^2(1) + \sqrt{x}\int\limits_1^{\sqrt{x}} \frac{\sigma^2(t)}{t}dt$$

eine Summe von konkaven Funktionen (der 2. Summand ist wegen Satz A.14 konkav). Es bleibt noch zu zeigen, dass $f'_-(1) \geq f'_+(1)$.

Wir notieren die Ableitung von f:

$$f'(x) = \begin{cases} \sigma^2(1) & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\tilde{\sigma}^2(\sqrt{x}) + \sigma^2(\sqrt{x})\right) & x \geq 1 \end{cases},$$

Also gilt

$$f'_-(1) = \sigma^2(1) = f'_+(1)$$

und es ist (4.15) gezeigt.

Unter Verwendung von (4.15) und (4.11) gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n\tilde{\sigma}^2(Z_n)) &= \mathbb{E}\left(\sqrt{Z_n^2}\,\tilde{\sigma}^2(\sqrt{Z_n^2})\right) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}(Z_n^2)}\,\tilde{\sigma}^2\left(\sqrt{\mathbb{E}(Z_n^2)}\right) \\ &= \mathbb{E}(Z_n^2)\,\frac{\tilde{\sigma}^2(\sqrt{\mathbb{E}(Z_n^2)})}{\sqrt{\mathbb{E}(Z_n^2)}} \\ &\leq \mathbb{E}(Z_n^2)\,\frac{\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n))}{\mathbb{E}(Z_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

und daher

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{n+1}^2) &= r^{-2n-2}\,\mathbb{E}(Z_n\, m_{Z_n}^2) \\
&\le r^{-2n-2}\,\mathbb{E}(Z_n \sigma_{Z_n}^2) + r^{-2n}\,\mathbb{E}(Z_n^2) \\
&\le r^{-2n-2}\,\mathbb{E}(Z_n \tilde{\sigma}^2(Z_n)) + \mathbb{E}(W_n^2) \\
&\le \mathbb{E}(W_n^2) + r^{-2}\,\mathbb{E}(W_n^2) \frac{\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n))}{\mathbb{E}(Z_n)} \\
&= \mathbb{E}(W_n^2) \left(1 + r^{-2} \frac{\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n))}{\mathbb{E}(Z_n)}\right) \\
&\vdots \\
&= Z_0^2 \prod_{k=0}^{n} \left(1 + r^{-2} \frac{\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_k))}{\mathbb{E}(Z_k)}\right) \\
&\le Z_0^2 \prod_{k=0}^{n} \left(1 + r^{-2} \frac{\tilde{\sigma}^2(\delta r^k)}{\delta r^k}\right) \quad \text{für ein } \delta > 0,\ n \in \mathbb{N}_0, \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

wobei wir in der 2. Zeile (4.3) benutzt haben, (4.13) in der 3. und (4.16) in der 4. Die letzte Zeile gilt wegen Satz 3.5 und (4.11) für ein $\delta > 0$. Für $n \to \infty$ auf beiden Seiten von (4.17) erhält man mit (4.14):

$$
\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(W_{n+1}^2) \le Z_0^2 \prod_{n\ge 0} \left(1 + r^{-2} \frac{\tilde{\sigma}^2(\delta r^n)}{\delta r^n}\right) < \infty
$$

Insbesondere existiert ein $C > 0$ d.d.

$$
\mathbb{E}(W_n^2) < C \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \qquad (4.18)
$$

Damit ist $(W_n)_n$ $\mathfrak{L}^2$-beschränkt und es fehlt nun die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz. Seien

$$
\begin{aligned}
T_n &\overset{\text{def}}{=} r^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} W_k\, \varepsilon_{Z_k}, \quad n \ge 1 \\
Y_n &\overset{\text{def}}{=} W_n + T_n, \quad n \ge 1.
\end{aligned}
$$

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir also die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(T_n)_n$ und $(Y_n)_n$ zeigen.

Sei $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\varepsilon(x)$. Da g laut Voraussetzung konkav ist, ist auch
$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g^2(\sqrt{x}) = x\varepsilon^2(\sqrt{x})$ konkav, denn

$$h'(x) = 2\,g(\sqrt{x})\,g'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \varepsilon(\sqrt{x})\,g'(\sqrt{x})$$

ist ein Produkt von positiven, fallenden Funktionen und damit selbst fallend, also ist h konkav. Wir schätzen weiter ab

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_n^2\,\varepsilon^2(Z_n)) &= r^{-2n}\,\mathbb{E}(\underbrace{Z_n^2\,\varepsilon^2(Z_n)}_{h(Z_n^2)}) \\
&\le r^{-2n}\,\mathbb{E}(Z_n^2)\,\varepsilon^2\left(\sqrt{\mathbb{E}(Z_n^2)}\right) \\
&\le \mathbb{E}(W_n^2)\,\varepsilon^2(\mathbb{E}(Z_n)) \\
&\le C\varepsilon^2(\delta r^n), \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

wobei in der 2. Zeile die Jensensche Ungleichung für die konkave Funktion $h(x)$ benutzt wurde. Die 3. Zeile gilt ebenfalls wegen der Jensenschen Ungleichung für $\sqrt{x}$ und zusätzlich, weil $\varepsilon(x)$ fallend laut Vorraussetzung ist. Die letzte Zeile gilt einerseits wegen (4.18) und andererseits wegen $\mathbb{E}(Z_n) \ge \delta r^n$ für ein $\delta > 0$ (Satz 3.5) und wiederum, weil $\varepsilon(x)$ fallend.
Weiterhin folgt aus $\sum_{n\ge 1} \frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty$, Satz A.7 und weil $\varepsilon(n)$ fallend für alle n ist:

$$\sum_{n\ge 1} \varepsilon(\delta r^n) < \infty \qquad (4.20)$$

Damit folgt unter Verwendung der Dreiecksungleichung, (4.19) und (4.20)

$$\left\| \sum_{n\ge 0} W_n \varepsilon_{Z_n} \right\|_2 \le \sum_{n\ge 0} \|W_n\,\varepsilon_{Z_n}\|_2 \le \sqrt{C} \sum_{n\ge 0} \varepsilon(\delta r^n) < \infty, \qquad (4.21)$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die $\mathfrak{L}^2$-Norm ist. D.h., wir haben gezeigt, dass $(T_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$ konvergiert. Nun behaupten wir, dass $(Y_n)_n$ ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n$ ist.

- T_n ist $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ meßbar, also ist Y_n $\mathcal{F}_n$-meßbar für alle $n \ge 1$.

- $\mathbb{E}\,|Y_n| \leq \mathbb{E}(W_n) + \mathbb{E}(T_n) \leq Z_0 + \mathbb{E}(T_n) < \infty$ für alle n,
  weil $(W_n)_n$ ein Supermartingal ist (Satz 3.1) und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n) < \infty$ (☞ (3.21) im Beweis zu Satz 3.12, S.48)

-
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= T_{n+1} + \mathbb{E}(W_{n+1} \mid Z_n) \\ &= T_{n+1} + W_n - r^{-1} W_n \varepsilon_{Z_n} \\ &= T_n + W_n = Y_n, \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

  wobei benutzt wurde, dass T_{n+1} $\mathcal{F}_n$-meßbar und $\mathbb{E}(W_{n+1} \mid Z_n) = W_n - r^{-1} W_n\, \varepsilon_{Z_n}$ f.s. für $n \geq 1$ (☞ Satz 3.4).

Mit der Dreiecksungleichung sowie mit (4.18) und (4.21) erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|Y_n\|_2 &\leq \|W_n\|_2 + \|T_n\|_2 \\ &< \sqrt{C} + r^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \|W_k\, \varepsilon_{Z_k}\|_2 < \infty,\end{aligned}$$

und daher ist (Y_n) ein $\mathfrak{L}^2$-beschränktes Martingal und damit $\mathfrak{L}^2$-konvergent (☞ [11, Satz 11.42, S. 329]). Somit konvergiert auch $(W_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$. Dabei ist der Limes in 0 nicht-degeneriert (☞ Satz 3.5) und der Beweis ist abgeschlossen. □

Mit dem folgenden Lemma benötigen wir nicht mehr so viele Voraussetzungen, um $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz zu folgern.

Lemma 4.6. *Falls* $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ *und* $\left(\frac{\sigma_n^2}{n}\right)_{n\geq 1}$ *fallend sind mit*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty,$$

so konvergiert $(W_n)_n$ *in* $\mathfrak{L}^2$ *gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable.*

Beweis. Ziel dieses Beweises ist die Überprüfung der Voraussetzungen des vorherigen Satzes. Sei

$$\sigma^2(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\left(\sigma_1^2 1_{\{0\le x<1\}} + \frac{\sigma_{[x]}^2}{[x]} 1_{\{x\ge 1\}}\right)$$

1. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sigma^2(n) = \sigma_n^2$. Insbesondere gilt wegen der Voraussetzung also $\sum_{n\ge 1} \frac{\sigma^2(n)}{n^2} < \infty$.

2. $\frac{\sigma^2(x)}{x} = \sigma_1^2 1_{\{0\le x<1\}} + \frac{\sigma_{[x]}^2}{[x]} 1_{\{x\ge 1\}}$ ist fallend, da laut Voraussetzung $\frac{\sigma^2(n)}{n}$ fallend für $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{\sigma^2(x)}{x}$ stetig in 1 ist.

Sei nun

$$\tilde{\varepsilon}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1 1_{\{0\le x<1\}} + \varepsilon_{[x]} 1_{\{x\ge 1\}}$$

Wir überprüfen die Voraussetzungen für Satz A.9 für die Funktion $x\tilde{\varepsilon}(x)$. Diese ist positiv sowie $\frac{x\tilde{\varepsilon}(x)}{x} = \tilde{\varepsilon}(x)$ fallend laut Voraussetzung. Außerdem gilt $\varepsilon_n = \tilde{\varepsilon}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ und daher wiederum wegen der Voraussetzung

$$\sum_{n\ge 1} \frac{n\,\tilde{\varepsilon}(n)}{n^2} = \sum_{n\ge 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty,$$

das äquivalent ist zu

$$\int_1^\infty \frac{\tilde{\varepsilon}(x)}{x} dx < \infty.$$

D.h. mit Satz A.9 existiert eine Funktion $\varepsilon(x)$, d.d.

$$\varepsilon(x) \ge \tilde{\varepsilon}(x)\ \forall x \ge 1, \quad \varepsilon(x) \text{ fallend}, \quad \int_1^\infty \frac{\varepsilon(x)}{x} dx < \infty, \quad x\varepsilon(x) \text{ konkav},$$

insbesondere $\varepsilon(n) \ge \tilde{\varepsilon}(n) = \varepsilon_n$ für $n \in \mathbb{N}$, sowie $\sum_{n\ge 1} \frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllt und damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Bemerkung 4.7. Falls $\varepsilon_n = O(\log^{-a}(n))$ und $\sigma_n^2 = O(n\log^{-b}(n))$ für $a, b > 1$, dann sind die Voraussetzungen für das vorherige Lemma 4.6 gegeben.

Es stellt sich die Frage, ob $\sigma_n^2 = O(n \log^{-b}(n))$ für ein $b > 1$ auch tatsächlich eine untere Schranke darstellt, also ausreichend klein gewählt ist. Kann man die Bedingungen für σ_n^2 verschärfen, dass $(W_n)_n$ trotzdem in $\mathfrak{L}^2$ konvergiert? In der Tat kann man Lemma 4.6 verschärfen. Wir geben zunächst eine verschärfte Version von Satz 4.5 an.

Satz 4.8. *Seien $\varepsilon(x)$ und $\sigma^2(x)$ positive Funktionen mit*

- $\varepsilon_n \le \varepsilon(n)$, $\sigma_n^2 \le \sigma^2(n)$ *für alle* $\in \mathbb{N}$,
- $\varepsilon(x)$ *und* $\sigma^2(x)$ *fallend,*
- $x\varepsilon(x)$ *konkav.*

Falls

$$\sum_{n\ge 1} \frac{\varepsilon(n)}{n} < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n\ge 1} \frac{\sigma^2(n)}{n} < \infty,$$

so konvergiert $(W_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$ gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable.

Beweis. Es ist offensichtlich, dass die Voraussetzungen für Satz A.9 für die Funktion $x\sigma^2(x)$ erfüllt sind. Dabei ist $\int_1^\infty \frac{\sigma^2(x)}{x} dx < \infty$, weil $\sum_{n\ge 1} \frac{\sigma^2(n)}{n} < \infty$. Es ist somit bekannt, dass

$$\tilde{\sigma}^2(x) \overset{\text{def}}{=} \sigma^2(1) 1_{\{0\le x<1\}} + \frac{1}{x}\left(\sigma^2(1) + \int_1^x \sigma^2(t)dt\right) 1_{\{x\ge 1\}}$$

folgende Eigenschaften hat:

$$\tilde{\sigma}^2(x) \ge \sigma^2(x), \quad x \ge 1, \tag{4.22}$$

$$\tilde{\sigma}^2(x) \text{ fallend,} \tag{4.23}$$

$$x\tilde{\sigma}^2(x) \text{ konkav,} \tag{4.24}$$

$$\int_1^\infty \frac{\tilde{\sigma}^2(t)}{t} dt < \infty. \tag{4.25}$$

Aus (4.22), (4.24) und wegen $\sigma_n^2 \le \sigma^2(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir somit für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(Z_n\,\sigma_{Z_n}^2) \le \mathbb{E}(Z_n\,\sigma^2(Z_n)) \le \mathbb{E}(Z_n\,\tilde{\sigma}^2(Z_n)) \le \mathbb{E}(Z_n)\,\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n)) \tag{4.26}$$

Multipliziert man (4.26) mit r^{-n} auf beiden Seiten, so folgt

$$\mathbb{E}(W_n\,\sigma_{Z_n}^2) \le \mathbb{E}(W_n)\,\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n)). \tag{4.27}$$

Damit schätzen wir $\mathbb{E}(W_{n+1}^2)$ ab. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt für ein $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_{n+1}^2) &= r^{-2n-2}\,\mathbb{E}(Z_n m_{Z_n}^2) \\
&\le \mathbb{E}(W_n^2) + r^{-n-2}\,\mathbb{E}(W_n\sigma_{Z_n}^2) \\
&\le \mathbb{E}(W_n^2) + r^{-n-2}\,\mathbb{E}(W_n)\,\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n)) \\
&\le \mathbb{E}(W_n^2) + r^{-n-2}\,Z_0\,\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n)) \\
&\le \mathbb{E}(W_n^2) + r^{-2}\,Z_0\,\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_n)) \\
&\vdots \\
&\le Z_0^2 + r^{-2}Z_0\sum_{k=0}^{n}\tilde{\sigma}^2(\mathbb{E}(Z_k)) \\
&\le Z_0^2 + r^{-2}Z_0\sum_{k=0}^{n}\tilde{\sigma}^2(\delta r^k), \quad n \in \mathbb{N}_0,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

wobei die 2. Zeile wegen (4.3) gilt, die 3. Zeile wegen (4.27), die 4. weil $(W_n)_n$ ein Supermartingal ist, die 5. aufgrund $r^n \ge 1$ und die letzte wegen Satz 3.5.

Für $n \to \infty$ auf beiden Seiten von (4.28) ergibt dies

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(W_{n+1}^2) \le Z_0^2 + r^{-2}Z_0\sum_{n\ge 0}\tilde{\sigma}^2(\delta r^n) < \infty,$$

wobei die Endlichkeit aufgrund von Satz A.7 gilt ($\sum_{n\ge 1}\frac{\tilde{\sigma}^2(n)}{n} < \infty$ und $\tilde{\sigma}^2(x)$ fallend laut der Voraussetzung). Damit haben wir wie im Beweis zu Satz 4.5 gezeigt, dass $(W_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$ beschränkt ist, allerdings mit einer stärkeren Voraussetzung. Der Beweis, dass $(W_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$ gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable konvergiert, ist ab diesem Punkt identisch zu dem Beweis zu Satz 4.5. Es werden nur noch die Voraussetzungen für $\varepsilon(x)$ verwendet, also ist der Satz damit bewiesen. $\square$

Wie angekündigt, möchten wir schließlich auch Lemma 4.6 verschärfen. Die stärkere Version erhält man direkt mit Satz 4.8.

Lemma 4.9. *Sind $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ und $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ fallend mit*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty \quad \textit{und} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sigma_n^2}{n} < \infty,$$

dann konvergiert $(W_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$ gegen eine in 0 nicht-degenerierte Zufallsvariable.

Beweis. Sei

$$\sigma^2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1^2 1_{\{0\leq x<1\}} + \sigma_{[x]}^2 1_{\{x\geq 1\}}.$$

Da σ_n^2 fallend ist, ist auch $\sigma^2(x)$ fallend für alle x. Aus $\sigma^2(n) = \sigma_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt unmittelbar mit der Voraussetzung, dass $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma^2(n)}{n} < \infty$. Damit sind alle Bedingungen an $\sigma^2(x)$ im Satz 4.8 erfüllt. Die anderen Beweisschritte hängen nicht mehr von $\sigma^2(x)$ ab, der Beweis ab diesem Punkt ist identisch mit dem Beweis von Lemma 4.6. $\square$

Bemerkung 4.10. Die Voraussetzungen des letzten Lemmas sind also erfüllt, wenn $\varepsilon_n = O(\log^{-a}(n))$ und $\sigma_n^2 = O(\log^{-b}(n))$ für $a, b > 1$ gegeben ist.

4.3 $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(r^{-n}F_n)_n$ und $(r^{-n}M_n)_n$

Für diesen Abschnitt nehmen wir an, dass

$$\hat{\sigma}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Var}(F_{01}) < \infty \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(M_{01}) < \infty.$$

Satz 4.11. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

- $(r^{-n}Z_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert in* $\mathfrak{L}^2$
- $(r^{-n}F_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert in* $\mathfrak{L}^2$
- $(r^{-n}M_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert in* $\mathfrak{L}^2$

Beweis. Wir zeigen zunächst aus der $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(r^{-n}Z_n)_n$ die $\mathfrak{L}^2$-Konvergenz von $(r^{-n}F_n)_n$. Sei also $(W_n)_n$ konvergent in $\mathfrak{L}^2$ gegen W, wobei W der $\mathbb{P}$-f.s. Limes von $(W_n)_n$ $\mathbb{P}$-f.s. ist. Es ist aus Satz 3.3 bekannt, dass

$$S_n = r^{-n}F_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W_n \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

d.h. es ist zu zeigen, dass $S_n \overset{\mathfrak{L}^2}{\longrightarrow} r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W$. Demnach gilt:

$$\begin{aligned}\left\|S_n - r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W\right\|_2 &\leq \left\|S_n - r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W_{n-1} + r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W_{n-1} - r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W\right\|_2 \\ &\leq \left\|S_n - r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W_{n-1}\right\|_2 + r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})\left\|W_{n-1} - W\right\|_2\end{aligned}$$

Da vorausgesetzt wurde, dass $W_n \overset{\mathfrak{L}^2}{\longrightarrow} W$, verschwindet der letzte Term für $n \to \infty$. D.h., wir müssen nur noch zeigen, dass der erste Term auch verschwindet. Wegen

$$\begin{aligned}S_n - r^{-1}\,\mathbb{E}(F_{01})W_{n-1} &= r^{-n}F_n - r^{-n}\,\mathbb{E}(F_{01})Z_{n-1} \\ &= r^{-n}\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}\Big(F_{n-1,i} - \mathbb{E}(F_{01})\Big), \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}&\left\|S_n - r^{-1}\mathbb{E}(F_{01})W_{n-1}\right\|_2^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\left(S_n - r^{-1}\mathbb{E}(F_{01})W_{n-1}\right)^2\right] \\ &= r^{-2n}\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}\Big(F_{n-1,i} - \mathbb{E}(F_{01})\Big)\right)^2\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r^{-2n} \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}\left(Z_{n-1}=j\right) \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \Big(F_{n-1,i}-\mathbb{E}(F_{01})\Big)\right)^2 \,\middle|\, Z_{n-1}=j\right] \\
&= r^{-2n} \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}\left(Z_{n-1}=j\right) \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{j} \Big(F_{n-1,i}-\mathbb{E}(F_{01})\Big)\right)^2\right] \\
&= r^{-2n} \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}\left(Z_{n-1}=j\right) j \ \mathrm{Var}(F_{01}-\mathbb{E}(F_{01})) \\
&= r^{-2n}\, \mathbb{E}(Z_{n-1}) \ \mathrm{Var}(F_{01}) \\
&= r^{-n-1}\, \sigma_1^2\, \mathbb{E}(W_{n-1}) \\
&\leq r^{-n-1}\, \sigma_1^2\, Z_0 \quad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die 5. Zeile, da (F_{n-1}, M_{n-1}) unabhängig von (F_{n-2}, M_{n-2}) und die letzte, weil $(W_n)_n$ ein Supermartingal ist (☞ Satz 3.1).

Der Beweis der Rückrichtung zeigt man auf ähnliche Weise, die anderen Implikationen sind analog. □

Wir wollen abschließend zeigen, dass ein BGWP mit der Paarungsfunktion (M1) unter der Annahme von Daley's Modell in $\mathfrak{L}^2$ konvergiert. Setzen wir $\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Var}(T_{01})$, dann gilt:

Satz 4.12. *Für einen BGWP mit Paarungsfunktion $\zeta(x,y) = x\min(1,y)$ gilt unter Annahme von Daley's Modell:*

Falls $\sigma^2 < \infty$, dann konvergiert $(W_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$ gegen einen in 0 nicht-degenerierten Limes. Insbesondere konvergieren $(r^{-n}F_n)_n$ sowie $(r^{-n}M_n)_n$ in $\mathfrak{L}^2$ gegen einen in 0 nicht-degenerierten Limes.

Beweis. Wir haben bereits berechnet (☞ Bemerkung 1.6 sowie der Beweis zu Satz 3.14), dass

$$r = \mathbb{E}(F_{01}) \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_n = \alpha g(\alpha)^{n-1} g'(\alpha). \tag{4.29}$$

Wegen $g(\alpha) < 1$ ist $(\varepsilon_n)_n$ monoton fallend sowie $\sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n} < \infty$. Damit fehlt nur noch die Berechnung von σ_n^2 für $n \in \mathbb{N}$.

Für $s \in [0,1]$ sei $g(s) = \mathbb{E}(s^{T_{01}})$ und $h_j(s) = \mathbb{E}(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n = j)$ die erzeugende Funktion von T_{01} respektive Z_{n+1} (gegeben $Z_n = j$). Wir wissen also, dass $\mathbb{E}(T_{01}) = g'(1)$, sowie $\mathbb{E}(T_{01}(T_{01}-1)) = g''(1)$. Unter Berücksichtigung, dass ein Nachkomme mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in (0,1)$ weiblich ist, ergiebt dies:

$$\mathbb{E}(F_{01}) = \alpha g'(1) \tag{4.30}$$

$$\mathbb{E}(F_{01}(F_{01}-1)) = \alpha^2 g''(1) \tag{4.31}$$

Unter Verwendung von (4.30) sowie (4.31) erhält man

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 = \operatorname{Var}(F_{01}) &= \mathbb{E}(F_{01}(F_{01}-1)) + \mathbb{E}(F_{01}) - (\mathbb{E}(F_{01}))^2 \\
&= \alpha^2 g''(1) + \alpha g'(1) - \alpha^2 g'(1)^2 && (4.32) \\
&= \alpha^2 g''(1) + \alpha^2 g'(1) - \alpha^2 g'(1)^2 + (\alpha - \alpha^2) g'(1) \\
&= \alpha^2 \sigma^2 + \alpha(1-\alpha) g'(1) && (4.33)
\end{aligned}$$

Da vorausgesetzt war, dass $\sigma^2 < \infty$, so ist wegen (4.33) auch $\hat{\sigma}^2 < \infty$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\sigma_j^2 &= j^{-1} \operatorname{Var}(Z_{n+1} \mid Z_n = j) \\
&= j^{-1}(h_j''(1) + h_j'(1) - h_j'(1)^2), \quad j \in \mathbb{N}, && (4.34)
\end{aligned}$$

und wegen Satz A.13

$$h_j'(1) = \alpha j g'(1) - \alpha j g(\alpha)^{j-1} g'(\alpha)$$

und

$$h_j''(1) = \alpha^2 j \Big[(j-1) g'(1)^2 + g''(1) - (j-1) g(\alpha)^{j-2} g'(\alpha)^2 - g(\alpha)^{j-1} g''(\alpha)\Big],$$

so dass wir mit (4.34) und (4.32) folgendes erhalten:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= \alpha^2\Big[(n-1)g'(1)^2 + g''(1) - (n-1)g(\alpha)^{n-2}g'(\alpha)^2 - g(\alpha)^{n-1}g''(\alpha)\Big] \\
&\quad + \alpha\Big[g'(1) - g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha)\Big] - \alpha^2 n\Big[g'(1) - g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha)\Big]^2 \\
&= \alpha^2\Big[(n-1)g'(1)^2 + g''(1) - (n-1)g(\alpha)^{n-2}g'(\alpha)^2 - g(\alpha)^{n-1}g''(\alpha)\Big] \\
&\quad + \alpha\Big[g'(1) - g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha)\Big] - \alpha^2 n g'(1)^2 + 2\alpha^2 n g'(1)g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha) \\
&\quad - \alpha^2 n g(\alpha)^{2n-2}g'(\alpha)^2 \\
&= \alpha^2(n-1)g'(1)^2 + \alpha^2 g''(1) + \alpha g'(1) - \alpha^2 n g'(1)^2 \\
&\quad - \alpha\Big[\alpha(n-1)g(\alpha)^{n-2}g'(\alpha)^2 + \alpha g(\alpha)^{n-1}g''(\alpha) + g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha) \\
&\qquad + \alpha n g(\alpha)^{2n-2}g'(\alpha)^2\Big] + 2\alpha^2 n g'(1)g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha) \\
&= \hat{\sigma}^2 - \alpha\Big[\alpha(n-1)g(\alpha)^{n-2}g'(\alpha)^2 + \alpha g(\alpha)^{n-1}g''(\alpha) + g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha) \\
&\qquad + \alpha n g(\alpha)^{2n-2}g'(\alpha)^2\Big] + 2\alpha^2 n g'(1)g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha) \\
&\leq \hat{\sigma}^2 + 2\alpha^2 n g'(1)g(\alpha)^{n-1}g'(\alpha) \\
&= \hat{\sigma}^2 + 2rn\varepsilon_n, \qquad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Daraus folgern wir direkt, dass

$$\frac{\sigma_n^2}{n^2} \leq \frac{\hat{\sigma}^2}{n^2} + 2r\frac{\varepsilon_n}{n},$$

also hat $\frac{\sigma_n^2}{n^2}$ eine konvergente Majorante ($\sum_{n\geq 1}\frac{\varepsilon_n}{n}$ ist konvergent und $\hat{\sigma}^2 < \infty$), daher

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty.$$

Die Voraussetzungen von Lemma 4.6 sind damit erfüllt und der Beweis ist damit abgeschlossen.□

Anhang A

Definition A.1. Seien X,Y zwei Zufallsvariablen. X ist stoch. kleiner gleich Y, kurz

$$X \leq^d Y, \quad \text{falls}$$

$$\mathbb{P}(X \leq j) \geq \mathbb{P}(Y \leq j) \quad \forall j \geq 0$$

gilt.

Definition A.2. Sei $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{N}_0), \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(X_n)_{n\geq 0}$ diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$. Man nennt $(X_n)_n$ *stochastisch monoton*, falls für alle $j, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} \leq k \mid X_n = j\right) \geq \mathbb{P}\left(X_{n+1} \leq k \mid X_n = j+1\right)$$

Definiere den *Übergangsoperator* T auf dem W-Maß $\mathbb{P}$ durch:

$$(T\,\mathbb{P})(\{0, \ldots, y\}) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(X_{n+1} \leq y \mid X_n = x\right) \mathbb{P}(dx) \quad \forall y \in \mathbb{N}_0$$

Wir nennen T *stochastisch monoton*, falls $(X_n)_n$ stochastisch monoton ist.

Satz A.3. *Sei $(\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{N}_0), \mathbb{P})$ ein W-Raum und $(X_n)_{n\geq 0}$ eine diskrete Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbb{N}_0$ und Übergangsoperator T.*

Dann gilt:

$$T\,\mathbb{P}_1 \leq T\,\mathbb{P}_2 \text{ für alle W-Maße } \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \text{ auf } \mathcal{B}(\mathbb{N}_0) \text{ mit } \mathbb{P}_1(\{0, \ldots, y\}) \leq \mathbb{P}_2(\{0, \ldots, y\})\ \forall y \in \mathbb{N}_0$$

$$\Longleftrightarrow T \text{ ist stochastisch monoton}$$

Beweis (☞ [4]) .

Satz A.4. *Ist* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine superadditive Folge, d.h.*

$$a_{m+n} \geq a_m + a_n \quad \forall m, n \geq 0,$$

dann existiert der Limes

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

($a = \infty$ ist möglich). Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n>0} \frac{a_n}{n}$$

Beweis. Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine superadditive Folge. Dann ist $(-a_n)_{n\geq 0}$ eine subadditive Folge, d.h.

$$-a_{m+n} \leq -a_m + (-a_n) \quad \forall m, n \geq 0.$$

Wende Satz 98 in [13, S. 23] für $(-a_n)_n$ an. Damit existiert

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-a_n}{n}$$

und

$$b = \inf_{n>0} \frac{-a_n}{n} = -\left(-\inf_{n>0} -\frac{a_n}{n}\right) = -\sup_{n>0} \frac{a_n}{n}$$

(dabei ist $b = -\infty$ möglich), insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \sup_{n>0} \frac{a_n}{n}. \qquad \square$$

Satz A.5. *Sei* $(X_n)_{n\geq 0}$ *eine Markov-Kette auf* $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.
Seien $\mu_k(x) = \mathbb{E}\big((X_{n+1} - X_n)^k \;\big|\; X_n = x\,\big)$, *die k-ten Momente der Zuwächse. Falls* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ *und es existiert ein* $\varepsilon > 0$ *d.d.*

$$\mu_1(x) \leq -\varepsilon, \quad x \in A^c,$$

so gilt

$$\mathbb{E}(\inf\{n > 0 : \; X_n \in A \mid X_0 = x\}) \leq \frac{x}{\varepsilon}, \quad x \in A^c$$

Gilt außerdem

$$\mu_1(x) + x < \infty, \quad x \in A,$$

so ist die erwartete Zeit des Besuchs von A gestartet in $x \in \mathbb{R}^+$ endlich:

$$\mathbb{E}(\inf\{n > 0 : \ X_n \in A \mid X_0 = x\}) < \infty$$

Beweis s. [14, Satz 7.1]

Satz A.6 (Martingalkonvergenzsatz). *Sei $(M_n)_n$ ein (Super-)Martingal mit*

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(M_n^-) < \infty.$$

Dann gilt

$$M_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

mit $M \in \mathfrak{L}^1$. Insbesondere konvergiert jedes nicht-negative (Super-)Martingal $\mathbb{P}$-f.s. gegen einen endlichen Limes.

Beweis s. [11, Korollar 11.35, S. 325]

Lemma A.7. *Sei $f(x)$ positiv und monoton fallend. Dann gilt für alle $c > 0$ und $m > 1$:*

$$\sum_{n\geq 1} f(cm^n) < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n} < \infty$$

Beweis. s [9, Lemma 1, S. 42]

Lemma A.8. *Sei $f(x)$ eine auf $\mathbb{R}^+$ positive, fallende Funktion mit $xf(x)$ steigend,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n} < \infty$$

und für bestimmte $m > 1$, $n \geq 0$ sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von positiven Zahlen mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq a_n f(a_n m^n).$$

Dann existiert der Limes $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und eine Konstante z_0, die nur von f und m abhängt, d.d. für $a_0 > z_0$ der Limes $a > 0$ ist.

Beweis s. [9, Lemma 2, S. 44]

Satz A.9. *Ist $f(x)$ eine positive Funktion mit*

$$\frac{f(x)}{x} \text{ fallend} \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}dx < \infty,$$

so existiert eine Funktion $\tilde{f}(x)$ mit

- $\tilde{f}(x) \geq f(x)\ \forall x \geq 1,$
- $\frac{\tilde{f}(x)}{x}$ *monoton fallend,*
- $\int_1^\infty \frac{\tilde{f}(x)}{x^2}dx < \infty,$
- $\tilde{f}(x)$ *konkav auf* $[0, \infty)$

Beweis. Der Satz wurde in [10, S. 53] zwar schon bewiesen, allerdings war der Beweis nicht sehr ausführlich. Wir zeigen, dass

$$\tilde{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} xf(1)1_{\{0\leq x<1\}} + \left(f(1) + \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt\right) 1_{\{x\geq 1\}}, \quad x \geq 0$$

alle im Satz genannten Eigenschaften erfüllt. Wir nehmen an, $\tilde{f}$ sei differenzierbar. Ist dies nicht der Fall, dann interpretiere $\tilde{f}'$ als die linksseitige Ableitung.

1. $\tilde{f}(x) \geq f(x)$ für alle $x \geq 1$:

   Für $x \geq 1$ gilt unter Verwendung, dass $\frac{f(x)}{x}$ fallend:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= f(1) + \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt \geq f(1) + \int_1^x \frac{f(x)}{x}dt \\
&= f(1) + \frac{f(x)}{x}(x-1) \\
&= f(x) + f(1) - \frac{f(x)}{x} \\
&\geq f(x)
\end{aligned}$$

2. $\frac{\tilde{f}(x)}{x}$ fallend:

   Man sieht leicht, dass $\frac{\tilde{f}(x)}{x}$ für $x < 1$ konstant, also fallend ist. Wir nehmen also wieder an, es sei $x \geq 1$ und zeigen $\frac{\tilde{f}(x)}{x}$ fallend $\Longleftrightarrow \tilde{f}(x) \geq f(x)$:

   Es gilt

$$\frac{\tilde{f}(x)}{x} \text{ fallend} \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{f}(x)}{x}\right) \leq 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{f}(x)}{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\left(f(1) + \int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}dt\right)\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\tilde{f}(x) + \frac{f(x)}{x^2} \overset{!}{\leq} 0 \\ &\Longleftrightarrow f(x) \leq \tilde{f}(x)\end{aligned}$$

   Da $\frac{\tilde{f}(x)}{x}$ fallend ist für $x < 1$ und $x \geq 1$ und stetig in 1, gilt die Behauptung.

3. $\int \frac{\tilde{f}(x)}{x^2}dx < \infty$:

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty \frac{\tilde{f}(x)}{x^2}dx &= \int\limits_1^\infty \left(\frac{f(1)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}dt\right)dx \\ &= f(1) + \int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x^2}\int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}dt\right)dx \\ &= f(1) - \left[\frac{1}{x}\int\limits_1^x \frac{f(t)}{t}dt\right]_1^\infty + \int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}dx \\ &= f(1) + \int\limits_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}dx < \infty,\end{aligned}$$

   wobei partielle Integration in der 3. Gleichung benutzt wurde.

4. $\tilde{f}$ konkav auf $\mathbb{R}^+$:

   Es genügt zu zeigen, dass $\frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x}$ fallend ist:

$$\frac{\partial \tilde{f}(x)}{\partial x} = \begin{cases} f(1) & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ \frac{f(x)}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

ist laut Voraussetzung fallend für $x \geq 1$ und stetig in 1, was den Beweis abschließt. □

Satz A.10. *Für $x \geq 0$ und $r > 1$ gilt:*

$$\sum_{n\geq 0} r^{-n} 1_{\{x \leq r^n\}} < \infty, \text{ speziell für } x > 0 = O(x^{-1}),$$

$$\sum_{n\geq 0} r^{n} 1_{\{x > r^n\}} = O(x),$$

$$\sum_{n\geq 0} 1_{\{x > r^n\}} = O(\log^+(x))$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} r^{-n} 1_{\{x \leq r^n\}} &= \sum_{n \geq \lceil \log_r(x) \rceil} r^{-n} = \sum_{n\geq 0} r^{-n} - \sum_{n=0}^{\lceil \log_r(x)\rceil - 1} r^{-n} \\ &= \frac{1}{1-r^{-1}} - \frac{1-(r^{-1})^{\lceil \log_r(x)\rceil - 1}}{1-r^{-1}} \\ &= r\frac{r^{\lceil \log_r(x^{-1})\rceil}}{1-r^{-1}} \approx \frac{r}{1-r^{-1}} x^{-1} = O(x^{-1}) \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise erhält man

$$\sum_{n\geq 0} r^{n} 1_{\{x > r^n\}} = \sum_{n \leq \lfloor \log_r(x) \rfloor} r^n = O(x)$$

und analog

$$\sum_{n\geq 0} 1_{\{x > r^n\}} = \sum_{0 \leq n \leq \lfloor \log_r^+(x) \rfloor} 1 = \lfloor \log_r^+(x) \rfloor = O(\log^+(x))$$ □

Satz A.11. *Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von integrierbaren Zufallsvariablen, und*

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$$

für ein $p > 1$, so ist $(X_n)_n$ gleichmäßig integrierbar.

Beweis. Setze $\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} |t|^p$ für ein $p > 1$ und wende Satz 11.20 in [11, S. 311] an. $\square$

Satz A.12. *Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von $\mathcal{F}_n$-meßbaren Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0$. Falls $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, so konvergiert*

$$\sum_{n\geq 1} X_n \ \mathbb{P}\text{-f.s. und in } \mathfrak{L}^1.$$

Beweis. Sei $M_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $M_0 = 0$. Wegen der Voraussetzung erhält man sofort, dass $\mathbb{E}(M_n) < \infty$ für alle n ist. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\\ &= M_n + \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n,\end{aligned}$$

also ist M_n ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}_n$. Mit der Martingaleigenschaft folgt damit

$$\mathbb{E}(M_{n+1}M_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{n+1}M_n \mid M_n)) = \mathbb{E}(M_n\,\mathbb{E}(M_{n+1} \mid M_n)) = \mathbb{E}(M_n^2).$$

Dies impliziert sofort

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}\left[(M_n - M_{n-1})^2\right] = \mathbb{E}(M_n^2) - \mathbb{E}(M_{n-1}^2),$$

und schließlich

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) = \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}(M_k^2) - \mathbb{E}(M_{k-1}^2)) = \mathbb{E}(M_n^2).$$

Aus der letzten Rechnung folgt

$$\mathbb{E}\left(|M_n|^2\right) = \mathbb{E}(M_n^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2) \leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty, \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

insbesondere

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}(|M_n|^2) < \infty,$$

da obere Abschätzung unabhängig von n ist. Somit ist $(M_n)_n$ nach Satz A.11 gleichmäßig integrierbar und unter Anwendung von Satz 22.3 (☞ [2, S. 185]) konvergiert $M_n \to M_\infty = \sum_{n\geq 1} X_n$ $\mathbb{P}$-f.s. und in $\mathfrak{L}^1$ für $n \to \infty$. $\square$

Satz A.13. *Sei $(Z_n)_n$ ein BGWP mit Paarungsfunktion $\zeta(x,y) = x\min(1,y)$. Setze für $j \in \mathbb{N}$ und $s \in [0,1]$*

$$g(s) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(s^{T_{01}}\right),$$
$$h_j(s) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(s^{Z_{n+1}} \;\middle|\; Z_n = j\right).$$

Dann gilt unter Annahme von Daley's Modell

$$h_j'(1) = \alpha j g'(1) - \alpha j g(\alpha)^{j-1} g'(\alpha)$$

und

$$h_j''(1) = \alpha^2 j\Big[(j-1)g'(1)^2 + g''(1) - (j-1)g(\alpha)^{j-2}g'(\alpha)^2 - g(\alpha)^{j-1}g''(\alpha)\Big].$$

Beweis. Sei $s \in [0,1]$. Für die Paarungsfunktion ist bereits bekannt (☞ [3]), dass

$$h_j(s) = \mathbb{E}\left(s^{Z_{n+1}} \;\middle|\; Z_n = j\right) = g(\alpha s + 1 - \alpha)^j - g(\alpha s)^j + g(\alpha)^j,$$

was

$$h_j'(s) = \alpha j g(\alpha s + 1 - \alpha)^{j-1} g'(\alpha s + 1 - \alpha) - \alpha j g(\alpha s)^{j-1} g'(\alpha s) \tag{A.1}$$

impliziert. Unter Verwendung von $g(1) = 1$ erhält man

$$h_j'(1) = \alpha j g'(1) - \alpha j g(\alpha)^{j-1} g'(\alpha).$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}\Big[g(\alpha s + 1 - \alpha)^{j-1} g'(\alpha s + 1 - \alpha)\Big]\\ &\quad = \alpha\Big[(j-1)g(\alpha s + 1 - \alpha)^{j-2} g'(\alpha s + 1 - \alpha)^2 + g(\alpha s + 1 - \alpha)^{j-1} g''(\alpha s + 1 - \alpha)\Big]\end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big[g(\alpha s)^{j-1} g'(\alpha s)\Big] = \alpha\Big[(j-1)g(\alpha s)^{j-2} g'(\alpha s)^2 + g(\alpha s)^{j-1} g''(\alpha s)\Big]$$

Zusammengesetzt ergibt dies:

$$h_j''(s) = \alpha^2 j \Big[(j-1)g(\alpha s + 1 - \alpha)^{j-2} g'(\alpha s + 1 - \alpha)^2 + g(\alpha s + 1 - \alpha)^{j-1} g''(\alpha s + 1 - \alpha) - (j-1)g(\alpha s)^{j-2} g'(\alpha s)^2 - g(\alpha s)^{j-1} g''(\alpha s)\Big], \qquad \square$$

und daraus wiederum

$$h_j''(1) = \alpha^2 j \Big[(j-1)g'(1)^2 + g''(1) - (j-1)g(\alpha)^{j-2} g'(\alpha)^2 - g(\alpha)^{j-1} g''(\alpha)\Big].$$

Satz A.14. *Sei $f(x)$ eine nicht-negative, integrierbare und fallende Funktion. Dann sind*

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^x f(t)dt \quad \textit{und}$$

$$\sqrt{x}\, g(\sqrt{x})$$

konkav auf $(1, \infty)$.

Beweis. Zunächst ist g differenzierbar und $g'(x) = f(x)$ monoton fallend für $x > 1$. Somit ist $g(x)$ konkav für $x > 1$. Sei nun $g'_-(x)$ und $g'_+(x)$ die linksseitige respektive rechtsseitige Ableitung von g. Da g konkav ist, gilt $g'_-(x) \geq g'_+(x)$ für $x > 1$. Sei $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x} g(\sqrt{x})$. Somit gilt

$$\begin{aligned} h'_-(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) + \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} g'_-(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + g'_-(\sqrt{x})\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + g'_+(\sqrt{x})\right) \\ &= h'_+(x), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Listing A.1: R-Quellcode der Simulationen

```
M1 <- function(x,y) {
        return(min(x,y))
}
M2 <- function(x,y) {
        return(x*min(1,y))
}
M3 <- function(x,y) {
        return(x)
}

BGWP <- function(n=50,z="M1",lambda=1.0,Z0=30,max=300,path="/",sims=1) {
# n: Anzahl der Generationen
# z: Paarungsfunktion
# lambda: Poisson(lambda) Verteilung
# Z0: Startwert
# max: Simulation bis hoechstens Zn = max
# path: Pfad des Ordners, wo die Simulationen abgelegt werden
# sims: Anzahl der Simulationen

        if(n <= 0 || lambda <= 0 || Z0 <= 0 || max < Z0 || sims < 1)
                return(NULL)
        if (z == "M1")
                zeta <- M1
        else if (z == "M2")
                zeta <- M2
        else if (z == "M3")
                zeta <- M3
        else
```

```
                return(NULL)
        if(!file.exists(path))
                dir.create(path)
        folder <- paste(path,z,"_",lambda,"_",Z0,"_",n,"/",sep="")
        if(!file.exists(folder))
                dir.create(folder)
        setwd(folder)
        print(paste("Simuliere ",sims," Pfade mit der Paarungsfunktion ",z
            ,", lambda=",lambda,", Z0=",Z0,sep=""))
        for (i in 1:sims) {
                sim <- c(0,Z0)
#               Ziel: sim = (0,Z0, 1,Z1, 2,Z2, ..., n,Zn)
                if(sims > 1)
                        print(paste(i,". Simulation:",sep=""))
                print(paste("Z0=",Z0,sep=""))
                for (j in 1:n) {
                        if (sim[2*j] == 0) break
#                       Breche Simulation ab, wenn sim[2*j]=Zj=0
                        Fn <- rpois(sim[2*j],lambda)
#                       Generierung von Zj ZVen mit Verteilung ~Poi(lambda
    ). Fn[k] (1<=k<=Zj) gibt die Anzahl der weiblichen Nachkommen des k-
    ten Paares in der j-ten Generation an.
                        Mn <- rpois(sim[2*j],lambda)
                        Zn <- zeta(sum(Fn),sum(Mn))

                        if (Zn <= max) {
                                sim <- c(sim,j,Zn)
                                print(paste("Z",j,"=",Zn,sep=""))
                        }
```

```
                    else
                              break
          }
          sim <- matrix(sim, ncol=2,nrow=length(sim)/2,byrow=TRUE)
          write.table(sim, file=paste("Simulation",i,sep=""),row.
             names=F, col.names=F)
     }
     setwd(path)
}

# Beispiele:
# Folgende Aufrufe sind aequivalent:
# 1) BGWP(50, "M1", 1.1, 30, 100, "/", 3)
# 2) BGWP(n=50, z="M1", lambda=1.1 ,Z0=30, max=100, path="/", sims=3)
# 3) BGWP(path="/", Z0=30, z="M1", max=100, n=50, sims=3, lambda=1.1)
#
# 1) BGWP(n=50, z="M2", lambda=1.1)
# 2) BGWP(n=50, z="M2", lambda=1.1, Z0=30, max=300, path="/", sims=1)
```

Literaturverzeichnis

[1] G. Alsmeyer, *Vorlesungsmitschrift: Galton-Watson Prozesse*, 2008

[2] G. Alsmeyer, *Stochastische Prozesse, Teil 1*, 3. Auflage, 2005

[3] D. J. Daley, *Extinction Conditions for certain bisexual Galton-Watson branching processes*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie **9**, 1968, 315-322.

[4] D. J. Daley, *Stochastically monotone Markov Chains*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie **10**, 1968, 305-317.

[5] D. J. Daley, D. M. Hull, J. M. Taylor, *Bisexual Galton-Watson Branching Processes with superadditive mating functions*, J. Appl. Prob. **23**, 1986, 585-600.

[6] P. Haccou, P. Jagers and V. A. Vatutin, *Variation, Growth, and Extinction of Populations*, Cambridge University Press, 2005, ISBN: 978-0521832205.

[7] M. González and M. Molina, *On the limit behavioir of a superadditive bisexual Galton-Watson branching process*, J. Appl. Prob. **33**, 1996, 960-967.

[8] M. González and M. Molina, *On the $\mathfrak{L}^2$-convergence of a superadditive bisexual Galton-Watson branching process*, J. Appl. Prob. **34**, 1997, 575-582.

[9] F. C. Klebaner, *Geometric rate of growth in population-size-dependent branching processes*, J. Appl. Prob. **21**, 1984, 40-49.

[10] F. C. Klebaner, *A limit theorem for population-size-dependent branching processes*, J. Appl. Prob. **22**, 1985, 48-57.

[11] D. Meintrup, S. Schäffler, *Stochastik - Theorie und Anwendungen*, Springer-Verlag, Berlin, 2005, ISBN: 3-540-21676-6

[12] M. Molina, M. Mota, A. Ramos, *Bisexual Galton-Watson Branching Process with population-size-dependent mating*, J. Appl. Prob. **39**, 2002, 479-490.

[13] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis*, Vol I, Springer-Verlag, Berlin, 1972, ISBN: 0-387-90224-4

[14] R. L. Tweedie, *Criteria for classifying general Markov Chains*, Adv. Appl. Prob. **8**, 1976, 737-771.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 30. Juli 2009

Mathias Mazur