Implizite Erneuerungstheorie und Verzweigung

Masterarbeit

Angefertigt am
Institut für Mathematische Statistik

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Betreuer
Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

September 2012

von
Felix Poettering

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gegeben einen reellen Zufallsvektor $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$, betrachten wir die stochastische Rekursionsgleichung

$$R \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j R_j + C, \tag{1.1}$$

wobei $(R_j)_{j \geq 1}$ unabhängig und identisch verteilt (iid) und von $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ unabhängig mit $R \stackrel{d}{=} R_1$ ist. Die Summe in (1.1) soll $\mathbb{P}$-fast sicher (f.s.) existieren.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Bedingungen an $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ zu stellen, unter denen eine Lösung R von (1.1) existiert. Darüber hinaus wollen wir unter entsprechenden Anforderungen an $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ das asymptotische Verhalten der Tails dieser Lösung als polynomiell fallend charakterisieren, d.h. wir werden für ein $\alpha > 0$ und $H_{\pm} \in [0, \infty)$

$$\lim_{t \to \infty} t^{\alpha} \mathbb{P}(R > t) = H_+ \text{ bzw. } \lim_{t \to \infty} t^{\alpha} \mathbb{P}(R < -t) = H_- \tag{1.2}$$

zeigen.

Auf Existenz einer Lösung wird die Gleichung (1.1) sowohl in Kapitel 5 des Skriptes [3] von Alsmeyer sowie in dem Paper [10] von Olvera-Cravioto und Jelenković untersucht, wobei im Gegensatz zu Ersterem in Letzterem ebenfalls die Tails der Lösung charakterisiert werden.

Die Bedingungen (4.24) an $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$, die wir in Satz 4.10 für die Existenz einer Lösung von (1.1) mit endlichem β-Moment fordern, sind so in Kapitel 5 in [3] zu finden, jedoch schwächer als die Anforderungen in [10]. In dem zweiten zentralen Ergebnis dieser Arbeit, Satz 4.13 über das Verhalten (1.2) der Tails von R, können wir mithilfe dieser Bedingungen den Satz 4.6 in [10] verallgemeinern.

Um die Tails einer Zufallsgröße zu charakterisieren, verallgemeinern wir in Kapitel 3 das Implizite Erneuerungstheorem von Goldie auf den für uns interessanten Fall der Verzweigung. In Kapitel 4 werden wir dann eine Lösung $R \in L_\beta$ von (1.1) konstruieren, die Eindeutigkeit ihrer Verteilung in $P_\beta(\mathbb{R})$ zeigen und das Implizite Erneuerungstheorem auf eine Lösung anwenden. Diese Ergebnisse werden wir dann in Kapitel 5 auf den PageRank anwenden, der ein Instrument bildet, die Bedeutsamkeit einer Webseite und somit deren Priorität in Ergebnislisten einer Suchmaschine zu bestimmen. In diesem Zusammenhang entsprechen die Zufallsgröße R dem PageRank einer zufällig ausgewählten Webseite und deren Tails der Wahrscheinlichkeit, einen hohen PageRank vorzufinden. Lemmata und Sätze, die hier nicht bewiesen werden, jedoch einen höheren Stellenwert für den Kontext besitzen, werden im Anhang aufgeführt.

Um den Lesefluss nicht unnötig zu stören, verzichten wir darauf alle Begriffe einzuführen, von denen wir zwar Gebrauch machen, die aber entweder Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie oder nicht von herausragender Bedeutung für die Beweisführung sind, und verweisen in diesen Fällen auf [2] und [3].

Die hier dargestellten Ideen und ebenso die meisten Aussagen und Beweise basieren auf den Arbeiten von Olvera-Cravioto und Jelenković in [10], [11] (Kapitel 3 und 4) und [9] (Kapitel 5).

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Gerold Alsmeyer für seine motivierenden Vorlesungen, die interessante Themenstellung sowie seine Beratung und Betreuung bedanken. Darüber hinaus bedanke ich mich bei meinen Freunden und meiner Familie für ihre Unterstützung.

2 Setup

Wir werden in der weiteren Arbeit die Ulam-Harris Notation nutzen. Um die Zweckmäßigkeit derer zu sehen, betrachten wir zunächst die Abbildung $\mathscr{S}$, definiert durch $\mathscr{S}(F) = \mathscr{L}\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right)$, wobei $(X_j)_{j\geq 1}$ iid und von $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ unabhängig mit $X_1 \overset{d}{=} F$ ist (Vgl. zu $\mathscr{S}$ Abschnitt 4.2). Die Lösungen der Gleichung (1.1) sind genau die Fixpunkte von $\mathscr{S}$. Gehen wir davon aus, dass mit der Verteilung F auch $\mathscr{S}(F)$, $\mathscr{S}^2(F)$ und $\mathscr{S}^3(F)$ existieren, so gilt

$$\mathscr{S}(F) = \mathscr{L}\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right),$$

$$\mathscr{S}^2(F) = \mathscr{L}\left(\sum_{j,k\geq 1} T_j T_k(j) X(jk) + \sum_{j\geq 1} T_j C(j) + C\right) \text{ und}$$

$$\mathscr{S}^3(F) = \mathscr{L}\left(\sum_{j,k,l\geq 1} T_j T_k(j) T_l(jk) X(jkl) + \sum_{j,k\geq 1} T_j T_k(j) C(jk) + \sum_{j\geq 1} T_j C(j) + C\right)$$

für $(C(j), T_1(j), T_2(j), T_3(j), ...)$, $j \geq 1$, und $(C(jk), T_1(jk), T_1(jk), T_1(jk), ...)$, $j, k \geq 1$, unabhängige Kopien von $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$. Diese Iteration von $\mathscr{S}$ macht die Nutzung der Ulam-Harris Notation sinnvoll.

Sei dazu

$$U := \bigcup_{n\geq 0} \mathbb{N}^n$$

der Ulam-Harris Baum, wobei $\mathbb{N}^0 := \{\emptyset\}$. Für $\mathbf{i} \in U$ sei $(C(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{i}), T_2(\mathbf{i}), T_3(\mathbf{i}), ...)$ ein reeller Zufallsvektor derselben Verteilung wie $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$, sodass

$$(C(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{i}), T_2(\mathbf{i}), T_3(\mathbf{i}), ...)_{\mathbf{i}\in U}$$

iid ist. Für ein $\mathbf{i} = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \geq 1$, schreiben wir kurz $\mathbf{i} = i_1...i_n$ und für $k = 1, ..., n$

$$\mathbf{i}|\, k = i_1...i_k \in \mathbb{N}^k$$

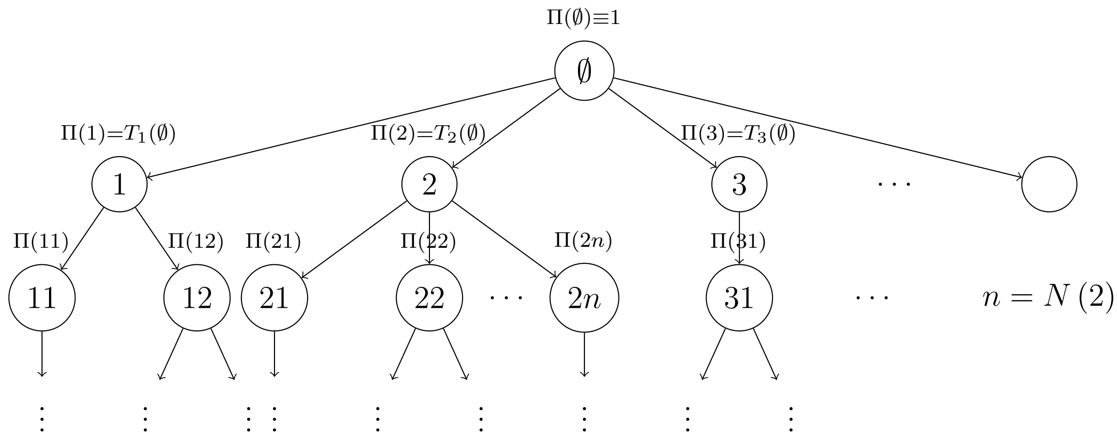

Abb. 1: Mögliche Realisierung des Ulam-Harris Baums. Der Knoten $\mathbf{i}$ wird mit dem Gewicht $\Pi(\mathbf{i})$ versehen.

sowie $\mathbf{i}|\,0 = \emptyset$. Die Länge eines Knotens notieren wir durch $|\mathbf{i}| = n$ für alle $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n$, $n \geq 0$. Weiter definieren wir $\Pi(\emptyset) := 1$ und, für $|\mathbf{i}| = n$, $n \geq 1$,

$$\Pi(\mathbf{i}) := \Pi(\mathbf{i}|\,n-1)\, T_{i_n}(\mathbf{i}|\,n-1) = \prod_{k=0}^{n-1} T_{i_{k+1}}(\mathbf{i}|\,k).$$

Diese Produkte sind in der Veranschaulichung des Ulam-Harris Baum die Gewichte der Knoten (vgl. Abbildung 1). Für $\mathbf{i} \in U$ ist $\Pi(\mathbf{i})$ das Produkt der $T_j(\cdot)$ über den Pfad von der Wurzel $\emptyset$ zu $\mathbf{i}$. Insbesondere in Abschnitt 4.2 wird bei der Konstruktion der Lösung R zu (1.1) in der Definition der W_n von diesen Gewichten Gebrauch gemacht.

Für einige Anwendungen definieren wir ebenfalls

$$V(\mathbf{i}) := \log |\Pi(\mathbf{i})|$$

für $n \geq 0$, $|\mathbf{i}| = n$ und

$$N(\mathbf{i}) := \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j(\mathbf{i}) \neq 0\}}.$$

Wir definieren die *n-Vergangenheit* im Ulam-Harris Baum als folgende σ-Algebren: $\mathfrak{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$ und für $n \geq 1$

$$\mathfrak{F}_n := \sigma\left((C(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{i}), T_2(\mathbf{i}), ...) : |\mathbf{i}| \leq n-1\right). \tag{2.1}$$

$\mathfrak{F}_n$ enthält also genau die Informationen über die Entwicklung bis zum Zeitpunkt n einschließlich, aber keine weiteren. Die Filtration $(\mathfrak{F}_n)_{n\geq 1}$ wird sich im Abschnitt 3.2 als Hilfsmittel im Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems erweisen.

3 Implizites Erneuerungstheorem mit Verzweigung

In diesem Kapitel werden wir das Implizite Erneuerungstheorem für den verzweigenden Fall vorstellen und beweisen. Bevor wir diesen Satz in Abschnitt 3.2 betrachten, werden wir in Abschnitt 3.1 auf den Beweis vorbereitende Definitionen und Lemmata angeben und beweisen.

3.1 Exponentielle Glättung und direkte Riemann-Integrierbarkeit

Für den Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems benötigen wir den Begriff der exponentiellen Glättung. Diese ist nicht für alle $\boldsymbol{\lambda}$-messbaren Funktionen definiert, sondern für $\beta > 0$ nur für die Teilmenge

$$\mathfrak{L}_\beta := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ messbar } \middle| \int_{(-\infty,t)} e^{\beta u} \left| f(u) \right| \boldsymbol{\lambda}(du) < \infty \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es gilt $L_1(\boldsymbol{\lambda}) \subset \mathfrak{L}_\beta$, wobei $L_1(\boldsymbol{\lambda}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ messbar } \middle| \int |f(u)| \boldsymbol{\lambda}(du) < \infty \right\}$ die $\boldsymbol{\lambda}$-integrierbaren Funktionen bezeichnet.

Definition 3.1. Sei $\beta > 0$. Für $f \in \mathfrak{L}_\beta$ definieren wir die *exponentielle Glättung* $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von f durch

$$\overline{f}(t) := \int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} f(u) \boldsymbol{\lambda}(du).$$

Für einen Vektor $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ von Funktionen $f_i \in \mathfrak{L}_\beta$ sei $\overline{f} := \left(\overline{f_1}, ..., \overline{f_n}\right)$.

Wir merken an, dass für $f \in \mathfrak{L}_\beta$ und eine exponentialverteilte Zufallsgröße X, d.h. $\mathscr{L}(X) = \mathrm{Exp}(\beta)$,

$$\overline{f}(t) = \frac{1}{\beta} \int_{(0,\infty)} \beta e^{-\beta u} f(t-u) \boldsymbol{\lambda}(du) = \frac{1}{\beta} \mathbb{E} f(t-X)$$

gilt.

Lemma 3.2. *Gegeben $\beta > 0$ gilt:*

(a) Mit der punktweisen Addition $+$ bildet $(\mathfrak{L}_\beta, +)$ eine Gruppe und die Zuordnung $f \mapsto \overline{f}$ von $\mathfrak{L}_\beta$ in die Gruppe der $\boldsymbol{\lambda}$-messbaren Funktionen ist ein Gruppenhomomorphisus, d.h. $\overline{f_1 + f_2} = \overline{f_1} + \overline{f_2}$ für alle $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}_\beta$.

(b) Ist $f \in \mathfrak{L}_\beta$ $\boldsymbol{\lambda}$-quasiintegrierbar, so ist $\overline{f}$ ebenfalls $\boldsymbol{\lambda}$-quasiintegrierbar und es gilt

$$\beta \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(t) \boldsymbol{\lambda}(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \boldsymbol{\lambda}(du).$$

(c) *Ist $f \in \mathfrak{L}_\beta$ $\boldsymbol{\lambda}$-quasiintegrierbar und μ endliches Maß auf $\mathbb{R}$, dann gilt $\overline{f * \mu} = \overline{f} * \mu$.*

Beweis. (a) Für $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}_\beta$, $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} \left| f_1(u) + f_2(u) \right| \boldsymbol{\lambda}(du) \leq \int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} \left| f_1(u) \right| \boldsymbol{\lambda}(du) + \int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} \left| f_2(u) \right| \boldsymbol{\lambda}(du)$$

und damit ist $(\mathfrak{L}_\beta, +)$ eine Gruppe, denn Assoziativität von $+$, $0 \in \mathfrak{L}_\beta$ und $-f \in \mathfrak{L}_\beta$ für alle $f \in \mathfrak{L}_\beta$ ist klar. In der gleichen Rechnung ohne $|\cdot|$ besteht Gleichheit und das zeigt die Additivität der Zuordnung $f \mapsto \overline{f}$.

(b) Dies ist eine einfache Schlussfolgerung aus Fubini:[1]

$$\begin{aligned}\beta \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(t) \boldsymbol{\lambda}(dt) &= \beta \int_{\mathbb{R}} \int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} f(u) \boldsymbol{\lambda}(du) \boldsymbol{\lambda}(dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \int_{(u,\infty)} \beta e^{-\beta(t-u)} \boldsymbol{\lambda}(dt) \boldsymbol{\lambda}(du) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \boldsymbol{\lambda}(du).\end{aligned}$$

Mit analoger Rechnung für f^+ statt f folgt durch Tonelli und $\int f^+ \, d\boldsymbol{\lambda} < \infty$ die $\boldsymbol{\lambda} \otimes \boldsymbol{\lambda}$-Integrierbarkeit von h^+, wobei h durch $h(u,t) := \mathbb{1}_{(-\infty,t)}(u) \, e^{-\beta(t-u)} f(u)$ definiert ist (bzw. jeweils das negative Pendant).

(c) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt mit Fubini und dem Transformationssatz für Lebesgue-Integrale[2] $(u \mapsto u - x)$

$$\begin{aligned}\overline{f * \mu}(t) &= \int_{(\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} (f * \mu)(u) \boldsymbol{\lambda}(du) \\ &= \int_{(\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} \int_{\mathbb{R}} f(u-x) \mu(dx) \boldsymbol{\lambda}(du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,t)}(u) \, e^{-\beta(t-u)} f(u-x) \mu(dx) \boldsymbol{\lambda}(du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{(-\infty,t-x)} e^{-\beta((t-x)-v)} f(v) \boldsymbol{\lambda}(dv) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(t-x) \mu(dx) = \left(\overline{f} * \mu\right)(t).\end{aligned}$$

$h(u,x) := \mathbb{1}_{(-\infty,t)}(u) \, e^{-\beta(t-u)} f(u-x)$ ist $\mu \otimes \boldsymbol{\lambda}$-quasiintegrierbar, denn aufgrund der Quasiintegrierbarkeit von f gilt mittels $\mathbb{1}_{(-\infty,t)}(u) \, e^{-\beta(t-u)} \leq 1$ auf $\mathbb{R}^2$

$$\int_{\mathbb{R}} h^p(u,x) \boldsymbol{\lambda}(du) \leq \int_{\mathbb{R}} f^p \, d\boldsymbol{\lambda} < \infty$$

[1] Zu Fubini und Tonelli vgl. Satz 19.11 aus [2].
[2] Satz 14.5 in [2].

für ein $p \in \{+,-\}$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Also folgt mit Tonelli, da $\mu(\mathbb{R}) < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h^p d(\mu \otimes \boldsymbol{\lambda}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h^p(u,x) \boldsymbol{\lambda}(du) \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} f^p \, d\boldsymbol{\lambda} \cdot \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

□

Als Anwendung des folgenden Lemmas, können wir im Hinblick auf den Abschnitt 3.2 $f(t) = r^+(t) = e^{\alpha t}\mathbb{P}(X > e^t)$ bzw. $f(t) = r^-(t) = e^{\alpha t}\mathbb{P}(X < -e^t)$ im Hinterkopf haben.

Lemma 3.3. *Gegeben eine monoton fallende Funktion g und $f(t) := e^{\alpha t} g(e^t)$, implizieren*

$$f \in \mathfrak{L}_\beta \text{ und } \lim_{t\to\infty} \overline{f}(t) = \frac{H}{\beta}$$

schon

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = H.$$

Beweis. Seien $b \in (0,1)$, $\epsilon > 0$ beliebig, und $t_\epsilon > 0$ so groß, dass für alle $t > t_\epsilon - 1$

$$\left| \overline{f}(t) - \frac{H}{\beta} \right| < \frac{\epsilon}{\beta}$$

gilt. Dann folgt mit der Monotonie von g für $t > t_\epsilon - 1$

$$\begin{aligned}
&e^{\beta b}\overline{f}(t+b) - \overline{f}(t) \\
&= e^{\beta b} \int_{(-\infty,t+b)} e^{-\beta(t+b-u)} f(u) \boldsymbol{\lambda}(du) - \int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)} f(u) \boldsymbol{\lambda}(du) \\
&= e^{-\beta t} \int_{[t,t+b)} e^{\beta u} e^{\alpha u} g(e^u) \boldsymbol{\lambda}(du) \leq \frac{e^{-\beta t} g(e^t)}{\alpha+\beta} \left(e^{(\alpha+\beta)u} \Big|_t^{t+b} \right) \\
&= \frac{e^{-(\alpha+\beta)t} f(t)}{\alpha+\beta} e^{(\alpha+\beta)t} \left(e^{(\alpha+\beta)b} - 1 \right) = \frac{f(t)}{\alpha+\beta} \left(e^{(\alpha+\beta)b} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Also können wir $f(t)$ nach unten abschätzen durch

$$\begin{aligned}
f(t) &\geq (\alpha+\beta) \frac{e^{\beta b}\overline{f}(t+b) - \overline{f}(t)}{e^{(\alpha+\beta)b} - 1} \geq (\alpha+\beta) \frac{e^{\beta b}\frac{H-\epsilon}{\beta} - \frac{H+\epsilon}{\beta}}{e^{(\alpha+\beta)b} - 1} \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\beta} \left(\frac{e^{\beta b} - 1}{e^{(\alpha+\beta)b} - 1} H - \frac{e^{\beta b} + 1}{e^{(\alpha+\beta)b} - 1} \epsilon \right).
\end{aligned}$$

Analog zu der obigen Rechnung erhalten wir eine obere Abschätzung für $f(t)$, $t > t_\epsilon$, durch

$$f(t) \leq (\alpha+\beta) \frac{\overline{f}(t) - e^{-\beta b}\overline{f}(t-b)}{1 - e^{-(\alpha+\beta)b}} \leq \frac{\alpha+\beta}{\beta} \left(\frac{1 - e^{-\beta b}}{1 - e^{-(\alpha+\beta)b}} H + \frac{1 + e^{-\beta b}}{1 - e^{-(\alpha+\beta)b}} \epsilon \right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\frac{1-e^{-\beta b}}{1-e^{-(\alpha+\beta)b}}H+\frac{1+e^{-\beta b}}{1-e^{-(\alpha+\beta)b}}\epsilon\right) &\geq \limsup_{t\to\infty} f(t) \geq \liminf_{t\to\infty} f(t) \\ &\geq \frac{\alpha+\beta}{\beta}\left(\frac{e^{\beta b}-1}{e^{(\alpha+\beta)b}-1}H-\frac{e^{\beta b}+1}{e^{(\alpha+\beta)b}-1}\epsilon\right)\end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}\frac{1-e^{-\beta b}}{1-e^{-(\alpha+\beta)b}}H \geq \limsup_{t\to\infty} f(t) \geq \liminf_{t\to\infty} f(t) \geq \frac{\alpha+\beta}{\beta}\frac{e^{\beta b}-1}{e^{(\alpha+\beta)b}-1}H,$$

da $\epsilon > 0$ beliebig war. Mittels $\lim_{b\downarrow 0}\frac{e^{\beta b}-1}{e^{(\alpha+\beta)b}-1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \lim_{b\downarrow 0}\frac{1-e^{-\beta b}}{1-e^{-(\alpha+\beta)b}}$, welches der Satz von L'Hospital liefert, schließen wir

$$H \geq \limsup_{t\to\infty} f(t) \geq \liminf_{t\to\infty} f(t) \geq H.$$

□

Lemma 3.4. *Gegeben ein Erneuerungsprozess* $(S_n)_{n\geq 1}$ *mit positiver Drift (d.h.* $\mathbb{E}[S_1] \in (0,\infty]$*) und Erneuerungsmaß* $\mathbb{U}$*, gilt für eine Funktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *und alle* $t\in\mathbb{R}$

$$f * \mathbb{U}(t) < \infty,$$

falls f *nichtnegativ und direkt Riemann-integrierbar (dRi) ist.*

Beweis. Seien für beliebiges $\delta > 0$ und $n \geq 1$

$$\begin{aligned}&m_{n,\delta} := \inf\{f(x) \mid x\in I_{n,\delta}\},\ M_{n,\delta} := \sup\{f(x) \mid x\in I_{n,\delta}\},\\ &g_\delta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} m_{n,\delta}\mathbb{1}_{I_{n,\delta}}(x),\ g^\delta := (x)\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{n,\delta}\mathbb{1}_{I_{n,\delta}}(x), \text{ wobei } I_{n,\delta} := (\delta n, \delta(n+1)]\,.\end{aligned}$$

Nun gilt[3]

$$\begin{aligned}f*\mathbb{U}(t) \leq g^\delta * \mathbb{U}(t) &= \int g^\delta(t-x)\,\mathbb{U}(dx)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{n,\delta}\mathbb{U}(t-I_{n,\delta}) \leq \mathbb{U}([-\delta,\delta])\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{n,\delta} < \infty.\end{aligned}$$

Hierbei wurde sowohl die direkte Riemann-Integrierbarkeit von f genutzt, um die Endlichkeit von $\sum_{n\in\mathbb{Z}} M_{n,\delta}$ nachzuweisen, als auch die gleichmäßige Beschränktheit von $\mathbb{U}$,[4]

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{U}(t-I_{n,\delta}) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{U}([t-n\delta-\delta, t-n\delta]) \leq \mathbb{U}([-\delta,\delta])$$

[3] Vgl. Beweis von Theorem 2.31 in [3].
[4] Vgl. Lemma 2.14 aus [3].

für alle $\delta > 0$ und $t \in \mathbb{R}$, und die Tatsache $\mathbb{U}([-\delta, \delta]) < \infty$, die wir als nächstes zeigen werden. Dies gilt, falls der zugehörige Erneuerungsprozess $(S_n)_{n\geq 0}$ transient ist,[5] d.h.

$$\mathbb{P}(|S_n - x| < \epsilon \ \ \infty\text{-oft}) < 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ erfüllt ist. Dies ist aber der Fall, da nach dem Starken Gesetz der großen Zahlen $S_n \to \infty$ $\mathbb{P}$-f.s..[6] Somit folgt

$$0 \leq \mathbb{P}(|S_n - x| < \epsilon \ \ \infty\text{-oft}) \leq \mathbb{P}\left(\{S_n \to \infty\}^{\mathrm{C}}\right) = 0.$$

□

3.2 Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems

Zu Beginn des Abschnitts notieren wir folgende Konvention: Für $\beta > 0$ definieren wir $0^\beta \log 0 := \lim_{t\downarrow 0} t^\beta \log t = -\lim_{x\to\infty} xe^{-\beta x} = 0$.

Für eine Zufallsgröße X wollen wir das asymptotische Verhalten, $t \to \infty$, deren Tails $\mathbb{P}(X > t)$ und $\mathbb{P}(X < -t)$ charakterisieren.

Hierzu führte Goldie die Implizite Erneuerungstheorie ein. Wir beweisen in Satz 3.5 ein Implizites Erneurungstheorem mit Verzweigung, d.h. eine Verallgemeinerung seines Originals (siehe Satz B.1). Auch die Struktur des hier präsentierten Beweises von Satz 3.5 lehnt sich stark an die des Beweises von Goldie an. Lemma 3.7 und Definition 3.9 sind die Basis unseres Beweises. Wir legen neben dem reellen Zufallsvektor $(T_j)_{j\geq 1}$ auch ein $\alpha > 0$ zugrunde, definieren $\varphi(\gamma) := \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\gamma\right] \in [0, \infty]$ und folgende Bedingungen

$$\varphi(\alpha) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha\right] = 1 \tag{IRT-1}$$

$$\mu_\alpha := \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \log |T_j|\right] \in (0, \infty] \tag{IRT-2}$$

$$\exists i \geq 0 : \mathbb{P}(T_i \neq 0) > 0 \text{ und } \mathbb{P}(\log |T_i| \in du, T_i \neq 0) \text{ nichtarithmetisch.} \tag{IRT-3}$$

Die in diesem Abschnitt auftretenden Summen von Zufallsgrößen besitzen bis auf eine Ausnahme nichtnegative Summanden und existieren deshalb schon $\mathbb{P}$-f.s.. Die Ausnahme sehen wir gerade in (IRT-2) und diese Bedingung fordert implizit die $\mathbb{P}$-f.s.-Existenz der Summe. (IRT-2) beinhaltet ebenfalls die Quasiintegrierbarkeit bzgl. $\mathbb{P}$ von $\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \log |T_j|$.

Wir betrachten in dieser Arbeit auch weiterhin lediglich den nichtarithmetischen Fall (vgl. (IRT-3)). Zur Bedeutung der Bedingungen (IRT-1) und (IRT-2) siehe insbesondere Bemerkung 3.8.

---

[5] Vgl. Korrolar 28.5 aus [1].

[6] Vgl. Satz von Etemadi, auch für den Fall, dass $\mathbb{E}[S_1] = \infty$ ist. Vgl. Satz 35.4 bzw. Korollar 35.6 in [2].

Satz 3.5. *Sei* $(T_j)_{j\geq 1}$ *ein reeller Zufallsvektor und* $\alpha > 0$. *Es seien weiter* (IRT-1) *bis* (IRT-3) *erfüllt und* $\varphi(\gamma) < \infty$ *für ein* $\gamma \in (0,\alpha)$. X *sei eine von* $(T_j)_{j\geq 1}$ *unabhängige Zufallsgröße.*

(a) Falls $\mathbb{P}(T_j \geq 0$ *für alle* $j \geq 1) = 1$, *d.h.* $T_j \geq 0$ $\mathbb{P}$*-f.s. für alle* $j \in \mathbb{N}$, *so gilt:*

(1) Ist $\mathbb{E}\left[(X^+)^\beta\right] < \infty$ *für alle* $\beta \in [0,\alpha)$ *und*

$$\int_0^\infty \left| \mathbb{P}(X > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j X > t\}}\right]\right| t^{\alpha-1} dt < \infty, \tag{3.1}$$

so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = H_+, \tag{3.2}$$

(2) ist $\mathbb{E}\left[(X^-)^\beta\right] < \infty$ *für alle* $\beta \in [0,\alpha)$ *und*

$$\int_0^\infty \left| \mathbb{P}(X < -t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j X < -t\}}\right]\right| t^{\alpha-1} dt < \infty, \tag{3.3}$$

so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) = H_-, \tag{3.4}$$

wobei $H_\pm \in [0,\infty)$ *definiert ist durch*

$$\begin{aligned} H_\pm :=& \frac{1}{\mu_\alpha}\int_0^\infty \left(\mathbb{P}(\pm X > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{\pm T_j X > t\}}\right]\right) t^{\alpha-1} dt \\ =& \frac{1}{\alpha\mu_\alpha}\mathbb{E}\left[\left(X^\pm\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1}\left((T_j X)^\pm\right)^\alpha\right]. \end{aligned}$$

(b) Falls $\mathbb{P}(T_j < 0$ *für ein* $j \geq 1) > 0$, $\mathbb{P}(T_j > 0$ *für ein* $j \geq 1) > 0$ *und ebenfalls* $\mathbb{E}\left[|X|^\beta\right] < \infty$ *für alle* $\beta \in [0,\alpha)$ *erfüllt ist, so folgt aus* (3.1) *und* (3.3)

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = \lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) = H = \frac{H_+ + H_-}{2}, \tag{3.5}$$

wobei

$$\begin{aligned} H :=& \frac{1}{2\mu_\alpha}\int_0^\infty \left(\mathbb{P}(|X| > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{|T_j X| > t\}}\right]\right) t^{\alpha-1} dt \\ =& \frac{1}{2\alpha\mu_\alpha}\mathbb{E}\left[|X|^\alpha - \sum_{j\geq 1} |T_j X|^\alpha\right]. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.6. (a) Der Satz 3.5 hat nur dann tatsächliche Aussagekraft über die Tails von X, wenn $\mathbb{E}\left[(X^+)^\alpha\right] = \infty$ (im Fall (a1)) bzw. $\mathbb{E}\left[(X^-)^\alpha\right] = \infty$ (im Fall (a2)) bzw. $\mathbb{E}\left[|X|^\alpha\right] = \infty$ (im Fall (b)). Andernfalls gilt nämlich im Fall (a)

$$\begin{aligned} H_\pm &= \frac{1}{\alpha\mu_\alpha}\mathbb{E}\left[\left(X^\pm\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1}\left(\left(T_jX\right)^\pm\right)^\alpha\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(X^\pm\right)^\alpha\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j^\alpha \mathbb{E}\left[\left(X^\pm\right)^\alpha \middle| \left(T_k\right)_{k\geq 1}\right]\right] \overset{\text{(IRT-1)}}{=} 0 \end{aligned}$$

bzw. im Fall (b)

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\alpha\mu_\alpha}\mathbb{E}\left[|X|^\alpha - \sum_{j\geq 1}|T_jX|^\alpha\right] \\ &= \mathbb{E}\left[|X|^\alpha\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|^\alpha\, \mathbb{E}\left[|X|^\alpha \middle| \left(T_k\right)_{k\geq 1}\right]\right] \overset{\text{(IRT-1)}}{=} 0. \end{aligned}$$

$\mathbb{P}\left(X > t\right) t^\alpha \to 0$, $t \to \infty$, folgt aber direkt - ohne großen Aufwand - aus $\mathbb{E}\left[(X^+)^\alpha\right] < \infty$, denn mittels majorisierte Konvergenz[7] gilt

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(X^+\right)^\alpha \mathbb{1}_{\{X>t\}}\right] = 0$$

und mit

$$\mathbb{E}\left[\left(X^+\right)^\alpha \mathbb{1}_{\{X>t\}}\right] \geq t^\alpha \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X>t\}}\right] = t^\alpha \mathbb{P}\left(X > t\right) \geq 0 \ \forall t > 0$$

schließen wir $\mathbb{P}\left(X > t\right) t^\alpha \to 0$, $t \to \infty$.

Analoge Aussagen gelten für die Fälle (a2) und (b).

(b) In der Situation von Satz 3.5 folgt sowohl in Fall (a) als auch im Fall (b)

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}\left(|X| > t\right) = H_+ + H_-,$$

falls (3.1) und (3.3) erfüllt sind.

(c) Satz 3.5 besagt, dass die Tails von X das gleiche asymptotische Verhalten besitzen wie $t \mapsto \hat{H}t^{-\alpha}$ für $\hat{H} = H_+, = H_-$ bzw. $= H$ (Aussage (3.2), (3.4) bzw. (3.5)).

Dass die Funktionen

$$f\left(t\right) := \mathbb{P}\left(X > t\right) \text{ und } g\left(t\right) := \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\mathbb{1}_{\{T_jX>t\}}\right]$$

[7] Vgl. Satz 9.9 (c) in [2].

das gleiche asymptotische Verhalten haben, stellt die Bedingung (3.1) sicher, falls $\mathbb{E}\left[(X^+)^\alpha\right] = \infty$ erfüllt ist (bzw. jeweils die negativen Pendants) . Letzteres bedeutet mit $h(t) := t^{\alpha-1}$ nach Lemma C.1 $\int_0^\infty f(t)\, h(t) dt = \infty$.

Wenn das asymptotische Verhalten von f und g nicht gleich wäre, dann gäbe es aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit von f,g ein $\epsilon \in (0,1)$ und ein $t_\epsilon > 0$, sodass für alle $t > t_\epsilon$

$$\left| \frac{g(t)}{f(t)} - 1 \right| > \epsilon$$

gilt (hier $\frac{0}{0} := 1$, $\frac{c}{0} := sign(c) \cdot \infty$, $c \neq 0$). Daraus folgt $|f(t) - g(t)| \geq \epsilon f(t)$ für alle $t > t_\epsilon$. Dann aber folgt, da $0 \leq \int_0^{t_\epsilon} f(t)\, h(t) dt < \infty$,

$$\infty \overset{(3.1)}{>} \int_0^\infty |f(t) - g(t)|\, h(t) dt \geq \epsilon \int_{t_\epsilon}^\infty f(t)\, h(t) dt = \infty,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist. Also gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j X > t\}}\right]}{\mathbb{P}(X > t)} = 1.$$

Gegeben zwei $n \times n$-Matrizen ${}_1H$, ${}_2H$, deren Einträge Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sind, definieren wir - analog zur Definition der Matrixaddition und -multiplikation über $\mathbb{R}$ -

$${}_1H + {}_2H := \left({}_1H_{i,j} + {}_2H_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

und, falls die Einträge von ${}_1H$, ${}_2H$ endliche Maße sind,

$${}_1H * {}_2H := \left(\sum_{l=1}^n {}_1H_{i,l} * {}_2H_{l,j} \right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Ist ${}_1H$ eine $n \times n$-Matrix, deren Einträge endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sind, und $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}^n$ messbar ist, sei

$${}_1H * f := \left(\sum_{l=1}^n {}_1H_{i,l} * f_i \right)_{1\leq i\leq n},$$

sofern dies existiert. Z.B. gilt dies, falls alle $f_i \geq 0$ sind.

Um die Beweisidee für Satz 3.5 darzustellen, benötigen wir folgendes Lemma und die darauf folgende Definition.

Lemma 3.7. *Sei $(T_j)_{j\geq 1}$ ein reeller Zufallsvektor und $\alpha > 0$. Hierfür definieren wir auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ die Maße*

$$\mu_n^+(A) := \mathbb{E}\left[\sum_{|\boldsymbol{i}|=n} e^{\alpha V(\boldsymbol{i})} \mathbb{1}_{\{\Pi(\boldsymbol{i})>0\}} \mathbb{1}_A(V(\boldsymbol{i})) \right]$$

und

$$\mu_n^-(A) := \mathbb{E}\left[\sum_{|\boldsymbol{i}|=n} e^{\alpha V(\boldsymbol{i})} \mathbb{1}_{\{\Pi(\boldsymbol{i})<0\}} \mathbb{1}_A(V(\boldsymbol{i}))\right]$$

für $n \geq 1$. D.h. insbesondere

$$\eta^+(A) := \mu_1^+(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j>0\}} \mathbb{1}_A(\log(|T_j|))\right]$$

und

$$\eta^-(A) := \mu_1^-(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j<0\}} \mathbb{1}_A(\log(|T_j|))\right],$$

für $A \in \mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Mit $\eta(A) := \eta^+(A) + \eta^-(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_A(\log(|T_j|))\right]$ gilt nun, falls (IRT-1) *und* (IRT-2) *erfüllt sind:*

(a) $\eta = \eta^+ + \eta^-$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Erwartungswert μ_α:

$$\int_{\mathbb{R}} x\ \eta(dx) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \log(|T_j|)\right] = \mu_\alpha.$$

(b) $\mu_n := \begin{pmatrix}\mu_n^+ & \mu_n^-\end{pmatrix}$ und $H := \begin{pmatrix}\eta^+ & \eta^- \\ \eta^- & \eta^+\end{pmatrix}$ erfüllen für alle $n \geq 1$:

$$H^{*n} = \begin{pmatrix}\mu_n^+ & \mu_n^- \\ \mu_n^- & \mu_n^+\end{pmatrix}, \text{ also insbesondere } \mu_n = (1\ 0) * H^{*n}. \tag{3.6}$$

(c) Die n-fache Faltung von η lässt sich wie folgt bestimmen:

$$\mu_n^+ + \mu_n^- = \mu_n * \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (1\ 0) * H^{*n} * \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \eta^{*n}$$

Hier bezeichnet $1 = Dirac(0)$ das Diracmaß in 0 und $0 \equiv 0$ das Nullmaß.

Beweis. Es gilt nach Definition der $\mu_n^\pm$ für beliebiges $n \geq 1$ und beliebiges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welches quasiintegrierbar bzgl. $\mu_n^\pm$ ist,

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n^\pm = \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} e^{\alpha V_{\mathbf{i}}} \mathbb{1}_{\{\pm\Pi(\mathbf{i})>0\}} f(V_{\mathbf{i}})\right]. \tag{3.7}$$

(a) $\eta(\mathbb{R}) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(\log(|T_j|))\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|^\alpha\right] = 1$ ist aufgrund von (IRT-1) erfüllt. Für $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (quasiintegrierbar bzgl. $\eta^\pm$ wegen (IRT-2)) gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}\, d\eta &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}\, d\eta^+ + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{id}\, d\eta^- \\
&\overset{(3.7)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j>0\}} \mathrm{id}(\log(|T_j|))\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j<0\}} \mathrm{id}(\log(|T_j|))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \log(|T_j|)\right] = \mu_\alpha.
\end{aligned}$$

(b) Für beliebige endliche Maße a, b, c, d gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*c+b*d & a*d+b*c \\ a*d+b*c & a*c+b*d \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Dies zeigt, dass $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \text{ endliche Maße} \right\}$ multiplikativ abgeschlossen ist. Also reicht es, den zweiten Teil der Behauptung in (3.6) zu zeigen. Dazu führen wir eine Induktion nach $n \geq 1$. Für $n = 1$ ist (3.6) die Definition von H und $\mu_1 = (\eta^+ \ \eta^-)$. Gelte also die Behauptung für $n \geq 1$. Mit

$$(1\ 0) * H^{*(n+1)} \overset{I.V.}{=} \mu_n * H$$

ist zu zeigen, dass $\mu_{n+1} = \mu_n * H$ gilt. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mu_{n+1}^+((-\infty, t]) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} e^{\alpha V(\mathbf{i})} \sum_{j\geq 1} e^{\alpha \log|T_j(\mathbf{i})|} \mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})T_j(\mathbf{i})>0\}} \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(V(\mathbf{i}) + \log|T_j(\mathbf{i})|)\right] \\
&= \sum_{p\in\{-,+\}} \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} e^{\alpha V(\mathbf{i})} \mathbb{1}_{\{p\ \Pi(\mathbf{i})>0\}} \right. \\
&\qquad \left. \cdot\, \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} e^{\alpha \log|T_j(\mathbf{i})|} \mathbb{1}_{\{p\ T_j(\mathbf{i})>0\}} \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(V(\mathbf{i}) + \log|T_j(\mathbf{i})|) \,\middle|\, \mathfrak{F}_n\right]\right] \\
&= \sum_{p\in\{-,+\}} \int_\Omega \sum_{|\mathbf{i}|=n} e^{\alpha V(\mathbf{i})(\omega)} \mathbb{1}_{\{p\ \Pi(\mathbf{i})(\omega)>0\}} \\
&\qquad \cdot\, \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} e^{\alpha \log|T_j|} \mathbb{1}_{\{p\ T_j>0\}} \mathbb{1}_{(-\infty,t-V(\mathbf{i})(\omega)]}(\log|T_j|)\right] \mathbb{P}(d\omega) \\
&= \sum_{p\in\{-,+\}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} e^{\alpha \log|T_j|} \mathbb{1}_{\{p\ T_j>0\}} \mathbb{1}_{(-\infty,t-x]}(\log|T_j|)\right] \mu_n^p(dx)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{p\in\{-,+\}} \int_{\mathbb{R}} \eta^p \left(\left(-\infty, t-x\right]\right) \mu_n^p \left(dx\right)$$
$$= \left(\eta^+ * \mu_n^+\right) \left(\left(-\infty, t\right]\right) + \left(\eta^- * \mu_n^-\right) \left(\left(-\infty, t\right]\right),$$

mit $\mathfrak{F}_n$ aus (2.1), dem Transformationssatz[8] und in der vorletzten Gleichung aufgrund von (3.7) (Quasiintegrierbarkeit ist klar, da $\eta^\pm$ als Maße nichtnegativ sind.). Vollkommen analog folgt

$$\mu_{n+1}^- \left(\left(-\infty, t\right]\right) = \left(\eta^+ * \mu_n^-\right) \left(\left(-\infty, t\right]\right) + \left(\eta^- * \mu_n^+\right) \left(\left(-\infty, t\right]\right).$$

Damit gilt $\mu_{n+1} = \left(\eta^+ * \mu_n^+ + \eta^- * \mu_n^- \quad \eta^+ * \mu_n^- + \eta^- * \mu_n^+\right) = \mu_n * H$.

(c) Es gilt für beliebige endliche Maße a, b, c, d

$$\begin{aligned} &(1\ 0) * \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} * (1\ 0) * \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad = (a+b) * (c+d) = a*c + a*d + b*c + b*d \\ &\quad = (1\ 0) * \begin{pmatrix} a*c+b*d & a*d+b*c \\ a*d+b*c & a*c+b*d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Induktiv folgt also nun aus (3.8) und (3.9)

$$(1\ 0) * H^{*n} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left((1\ 0) * H * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{*n}$$

und damit die Behauptung.

□

Bemerkung 3.8. Mit einem Blick auf die Definition von η folgt für alle $\gamma \in \mathbb{C}$, für die das folgende Integral definiert ist,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} \eta\left(dx\right) \overset{(3.7)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \left|T_j\right|^\alpha e^{\gamma \log\left|T_j\right|}\right] = \varphi\left(\alpha + \gamma\right).$$

Also ist $\varphi\left(\alpha + \cdot\right)$ die analytische Transformierte von η. Wir erweitern hierfür den Definitionsbereich von φ auf eine Teilmenge von $\mathbb{C}$.

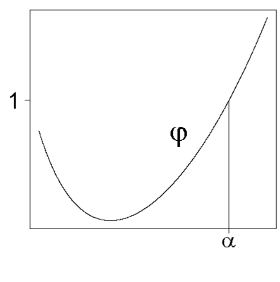

Abb. 2: Graph von φ

Gegeben (IRT-1) und (IRT-2) sowie $\varphi\left(\gamma^*\right) < \infty$ für ein $\gamma^* \in (0, \alpha)$, werden wir zeigen, dass es ein Intervall $(\alpha - \epsilon', \alpha)$ gibt, auf dem die (auf $\mathbb{R}$) konvexe Funktion φ echt kleiner 1 ist und somit den Verlauf aus Abbildung 2 besitzt. In dieser Situation folgt aus der Konvexität des Definitionsbereichs $I + i\mathbb{R}$ von Analytischen Transformierten,[9] dass $[\gamma^*, \alpha] \subset I$ gilt. Aufgrund des Differentiationssatzes[10] ist φ auf dem Inneren des Definitionsbereichs $\mathring{I} + i\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und mit dem Lemma von Fatou[11] folgt

[8] Vgl. Satz 14.1 in [2].
[9] Vgl. Lemma 40.2 in [2].
[10] Vgl. Satz 40.4 in [2].
[11] Vgl. Lemma 9.12 in [2].

$$\liminf_{\gamma\uparrow\alpha} \varphi'(\gamma) = \liminf_{\gamma\uparrow\alpha} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\gamma \log|T_j|\right] \geq \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \log|T_j|\right] \overset{\text{(IRT-2)}}{\in} (0,\infty] .$$

Es existiert also ein $\epsilon' > 0$ mit $\varphi'(\beta) > 0$ für alle $\beta \in (\alpha - \epsilon', \alpha)$ und damit $\varphi(\beta) < 1$ aufgrund von (IRT-1).

Definition 3.9. Gegeben ein $\alpha > 0$, ein reeller Zufallsvektor $(T_j)_{j\geq 1}$ und eine von diesem unabhängige Zufallsgröße X, definieren wir Funktionen $\delta_n^\pm, r^\pm, g^\pm : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\delta_n, r, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}^2$ (für $n \geq 1$) durch

$$\delta_n^+(t) := e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})X > e^t\}}\right] \text{ und } \delta_n^-(t) := e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})X < -e^t\}}\right],$$

$\delta_n := \begin{pmatrix} \delta_n^+ \\ \delta_n^- \end{pmatrix}$ für $n \geq 1$, sowie analog

$$r^+(t) := e^{\alpha t}\mathbb{P}\left(X > e^t\right) \text{ und } r^-(t) := e^{\alpha t}\mathbb{P}\left(X < -e^t\right),$$

$r := \begin{pmatrix} r^+ \\ r^- \end{pmatrix}$ und $g := \begin{pmatrix} g^+ \\ g^- \end{pmatrix} := r - \delta_1$. D.h. es gilt

$$g^+(t) = e^{\alpha t}\left(\mathbb{P}\left(X > e^t\right) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j X > e^t\}}\right]\right)$$

und

$$g^-(t) = e^{\alpha t}\left(\mathbb{P}\left(X < -e^t\right) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j X < -e^t\}}\right]\right).$$

Zu den Funktionen $\delta_n^\pm, r^\pm, g^\pm$ merken wir an dieser Stelle an, dass hiermit nicht die Positiv- bzw. Negativteile der Funktionen δ_n, r, g gemeint sind, sondern deren 1. bzw. 2. Komponente.

Mit diesen Notationen können wir die Aussage von Satz 3.5 neu formulieren. Unter den gegebenen Voraussetzungen folgt im Fall (a) aus

$$\int_{\mathbb{R}} \left|g^+\right| \, d\boldsymbol{\lambda} < \infty \text{ (Bedingung (3.1)) bzw. } \int_{\mathbb{R}} \left|g^-\right| \, d\boldsymbol{\lambda} < \infty \text{ (Bedingung (3.3))},$$

dass

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = \int_{\mathbb{R}} g^+ \, d\boldsymbol{\lambda} \text{ bzw. } \lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) = \int_{\mathbb{R}} g^- \, d\boldsymbol{\lambda}$$

gilt. Im Fall (b) folgt $\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(\pm X > t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g^+ + g^- \, d\boldsymbol{\lambda}$ aus beiden Bedingungen zusammen.

Nun können wir die Idee des Beweises für Satz 3.5 angeben. Wir wollen die Identität

$$\begin{aligned} \overline{r^+} &= \nu_n^+ * \overline{g^+} + \overline{\delta_{n+1}^+}, && \text{im Fall (a1)}, \\ \overline{r^-} &= \nu_n^+ * \overline{g^-} + \overline{\delta_{n+1}^-}, && \text{im Fall (a2) und} \\ \overline{r} &= G_n * \overline{g} + \overline{\delta_{n+1}}, && \text{im Fall (b)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

für alle $n \geq 0$ zeigen, wobei $G_n := \begin{pmatrix} \nu_n^+ & \nu_n^- \\ \nu_n^- & \nu_n^+ \end{pmatrix} := \sum_{k=0}^n H^{*k}$ und $G_0 = H^{*0}$ die Einheitsmatrix ist.

In Folge dessen werden wir das Key Renewal Theorem anwenden (Sätze A.2, A.5) und mithilfe von (3.10) zeigen, dass (3.2), (3.4) bzw. (3.5) Gültigkeit haben. Der Vollständigkeit halber werden wir wie in (3.10) ebenfalls im Beweis des Öfteren die Fälle (a1), (a2) und (b) unterscheiden, wobei die grundsätzlichen Ideen sich in allen Fällen gleichen.

Beweis von Satz 3.5. Wir wählen mithilfe von Bemerkung 3.8 ein $\beta > 0$ so groß, dass $\beta < \alpha$ und $\varphi(\beta) < 1$. Hier legen wir also β fest, welches insbesondere Einfluss auf $f \mapsto \overline{f}$ hat. Im jeweils vorliegenden Fall gilt $\delta_n^\pm \in \mathfrak{L}_\beta$ (wegen (3.12), siehe unten). Es gilt zudem $r^\pm \in \mathfrak{L}_\beta$, da $r^\pm(t) \leq e^{\alpha t}$ und $\mathbb{1}_{(-\infty,t)} e^{(\alpha+\beta)t}$ $\boldsymbol{\lambda}$-integrierbar ist.

Sei $\mathbb{G}$ das Matrixerneuerungsmaß von H (Definition A.1), d.h.

$$\mathbb{G} := \begin{pmatrix} \nu^+ & \nu^- \\ \nu^- & \nu^+ \end{pmatrix} := \sum_{k=0}^\infty H^{*k} = \lim_{n\to\infty} G_n.$$

Dieser Limes existiert, da es sich um eine aufsteigende Folge von Maßen handelt (eine aufsteigende Folge reeller Zahlen konvergiert - ggf. gegen ∞). Nach Definition A.1 und Lemma 3.7 (c) ist $\nu := \nu^+ + \nu^-$ das Erneuerungsmaß von η. Da $|g^\pm|$ mittels (3.1) bzw. (3.3) $\boldsymbol{\lambda}$-integrierbar ist, ist $\overline{|g^\pm|}$ dRi.[12] Somit gilt ($\nu^- \equiv 0$ in den Fällen (a1) und (a2))

$$\begin{aligned} &\left(\nu_n^+ * \overline{|g^+|}\right)(t) \leq \left(\nu^+ * \overline{|g^+|}\right)(t) < \infty, && \text{im Fall (a1)}, \\ &\left(\nu_n^+ * \overline{|g^-|}\right)(t) \leq \left(\nu^+ * \overline{|g^-|}\right)(t) < \infty, && \text{im Fall (a2) und} \\ &\left(\nu * \overline{|g^+|}\right)(t), \left(\nu * \overline{|g^-|}\right)(t) < \infty && \\ \Rightarrow &\left(G_n * \overline{|g|}\right)(t) \leq \left(\mathbb{G} * \overline{|g|}\right)(t) < \infty, && \text{im Fall (b)} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ aufgrund von Lemma 3.4. Also existieren insbesondere alle in (3.10) auftretenden Terme.

[12] Vgl. Lemma 2.30 aus [3].

Um die Identität (3.10) nachzuweisen, werden wir

$$H * \delta_n = \delta_{n+1} \text{ für } n \geq 1 \text{ sowie } H * r = \delta_1 = r - g \tag{3.11}$$

zeigen (hier in allen Fällen (a1), (a2), (b), da wir Faltungen für alle nichtnegativen Funktionen definieren können).

In der Tat folgt mit (3.11) mittels Lemma 3.2 (a) und (c) induktiv

$$\begin{aligned}
\overline{r^+} &= \eta^+ * \overline{r^+} + \overline{g^+} \overset{I.V.}{=} \eta^+ * \left(\nu_n^+ * \overline{g^+} + \overline{\delta_{n+1}^+}\right) + \left(\eta^+\right)^{*0} * \overline{g^+} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\eta^+\right)^{*k} * \overline{g^+} + \left(\eta^+\right)^{*0} * \overline{g^+} + \eta^+ * \overline{\delta_{n+1}^+} = \nu_{n+1}^+ * \overline{g^+} + \overline{\delta_{n+2}^+}, \quad \text{im Fall (a1)}, \\
\overline{r^-} &= \eta^+ * \overline{r^-} + \overline{g^-} \overset{I.V.}{=} \eta^+ * \left(\nu_n^+ * \overline{g^-} + \overline{\delta_{n+1}^-}\right) + \left(\eta^+\right)^{*0} * \overline{g^-} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\eta^+\right)^{*k} * \overline{g^-} + \left(\eta^+\right)^{*0} * \overline{g^-} + \eta^+ * \overline{\delta_{n+1}^-} = \nu_{n+1}^+ * \overline{g^-} + \overline{\delta_{n+2}^-}, \quad \text{im Fall (a2)}, \\
\overline{r} &= H * \overline{r} + \overline{g} \overset{I.V.}{=} H * \left(G_n * \overline{g} + \overline{\delta_{n+1}}\right) + H^{*0} * \overline{g} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} H^{*k} * \overline{g} + H^{*0} * \overline{g} + H * \overline{\delta_{n+1}} = G_{n+1} * \overline{g} + \overline{\delta_{n+2}}, \quad \text{im Fall (b)},
\end{aligned}$$

wobei wir hierbei (3.10) für $n \geq 0$ als Induktionsvoraussetzung zugrunde legen. Für $n = 0$ gilt (3.10) nach Definition von r, also zeigen die Gleichungen (3.11) die Gültigkeit von (3.10) für alle $n \geq 0$.

Um (3.11) zu zeigen, berechnen wir für beliebiges $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\eta^+ * \delta_n^+ (t) &\overset{(3.7)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j>0\}} \delta_n^+ \left(t - \log|T_j|\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\sum_{|\mathbf{i}|=n} |T_j(\mathbf{i})|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j(\mathbf{i})>0\}} e^{-\alpha \log|T_j(\mathbf{i})|} e^{\alpha t}\right. \\
&\qquad \left. \cdot\, \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{\Pi(\mathbf{i})X > e^{t-\log\left|T_j(\mathbf{i})\right|}\right\}} \,\middle|\, \left(T_j(\mathbf{i})\right)_{j\geq 1, \mathbf{i}\in\mathbb{N}^n}\right]\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n}\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j(\mathbf{i})>0\}} \mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})T_j(\mathbf{i})X>e^t\}} \,\middle|\, \left(T_j(\mathbf{i})\right)_{j\geq 1, \mathbf{i}\in\mathbb{N}^n}\right]\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \mathbb{1}_{\left\{T_{i_{n+1}}(\mathbf{i}|n)>0\right\}} \mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})X>e^t\}}\right],
\end{aligned}$$

wobei wir $(T_j) \overset{d}{=} \left(T_j(\mathbf{i})\right)_{j\geq 1}$ für $|\mathbf{i}| = n$ und die Unabhängigkeit dieser beiden Folgen von X und $(\Pi(\mathbf{i}))_{|\mathbf{i}|=n}$ benutzt haben. Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}
\eta^- * \delta_n^-(t) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j<0\}}\delta_n^-(t-\log|T_j|)\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \mathbb{1}_{\left\{T_{i_{n+1}}(\mathbf{i}|n)<0\right\}}\mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})X>e^t\}}\right] \\
\eta^+ * \delta_n^-(t) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j>0\}}\delta_n^-(t-\log|T_j|)\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \mathbb{1}_{\left\{T_{i_{n+1}}(\mathbf{i}|n)>0\right\}}\mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})X<-e^t\}}\right] \\
\eta^- * \delta_n^+(t) &= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j<0\}}\delta_n^+(t-\log|T_j|)\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \mathbb{1}_{\left\{T_{i_{n+1}}(\mathbf{i}|n)<0\right\}}\mathbb{1}_{\{\Pi(\mathbf{i})X<-e^t\}}\right].
\end{aligned}$$

Dies ergibt zusammen $\eta^+ * \delta_n^+ + \eta^- * \delta_n^- = \delta_{n+1}^+$ sowie $\eta^+ * \delta_n^- + \eta^- * \delta_n^+ = \delta_{n+1}^-$ und damit

$$H * \delta_n = \delta_{n+1}.$$

Um die zweite Identität in (3.11) zu sehen, berechnen wir

$$\begin{aligned}
\eta^+ * r^+(t) &\overset{(3.7)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j>0\}} r^+(t-\log|T_j|)\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j>0\}} e^{-\alpha\log|T_j|}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{X>e^{t-\log|T_j|}\right\}}\,\middle|\,(T_j)_{j\geq 1}\right]\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\mathbb{1}_{\{T_j>0\}}\mathbb{1}_{\{T_jX>e^t\}}\,\middle|\,(T_k)_{k\geq 1}\right]\right] \\
&= e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\mathbb{1}_{\{T_j>0\}}\mathbb{1}_{\{T_jX>e^t\}}\right]
\end{aligned}$$

und analog

$$\eta^- * r^-(t) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_j<0\}} r^-(t-\log|T_j|)\right] = e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\mathbb{1}_{\{T_j<0\}}\mathbb{1}_{\{T_jX>e^t\}}\right]$$

$$\eta^{+} * r^{-}(t) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\alpha} \mathbb{1}_{\{T_j>0\}} r^{-}(t-\log|T_j|)\right] = e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j>0\}}\mathbb{1}_{\{T_j X<-e^t\}}\right]$$

$$\eta^{-} * r^{+}(t) = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\alpha} \mathbb{1}_{\{T_j<0\}} r^{+}(t-\log|T_j|)\right] = e^{\alpha t}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j<0\}}\mathbb{1}_{\{T_j X<-e^t\}}\right].$$

Dies ergibt zusammen die zweite Identität in (3.11):

$$H * r = \begin{pmatrix} \eta^{+} * r^{+} + \eta^{-} * r^{-} \\ \eta^{-} * r^{+} + \eta^{+} * r^{-} \end{pmatrix} = \delta_1 = r - g.$$

Somit haben wir (3.10) gezeigt.

In (3.10) möchten wir nun $n \to \infty$ betrachten, um darauf das Key Renewal Theorem anzuwenden. Mit dem Lemma 3.3 können wir dann einen Rückschluss auf $\lim_{t\to\infty} r(t)$ ziehen.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt mittels majorisierter Konvergenz und $\left|\overline{g^{\pm}}\right| \leq \overline{|g^{\pm}|}$

$$\begin{aligned}
\left(\nu^{+} * \overline{g^{+}}\right)(t) &= \lim_{n\to\infty} \int \overline{g^{+}}(t-x)\nu_n^{+}(dx) = \lim_{n\to\infty} \left(\nu_n^{+} * \overline{g^{+}}\right)(t) \text{ im Fall (a1)},\\
\left(\nu^{+} * \overline{g^{-}}\right)(t) &= \lim_{n\to\infty} \int \overline{g^{-}}(t-x)\nu_n^{+}(dx) = \lim_{n\to\infty} \left(\nu_n^{+} * \overline{g^{-}}\right)(t) \text{ im Fall (a2) und}\\
(\mathbb{G} * \overline{g})(t) &= \begin{pmatrix} \int \overline{g^{+}}(t-x)\,\nu^{+}(dx) + \int \overline{g^{-}}(t-x)\,\nu^{-}(dx) \\ \int \overline{g^{+}}(t-x)\,\nu^{-}(dx) + \int \overline{g^{-}}(t-x)\,\nu^{+}(dx) \end{pmatrix}\\
&= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \int \overline{g^{+}}(t-x)\,\nu_n^{+}(dx) + \int \overline{g^{-}}(t-x)\,\nu_n^{-}(dx) \\ \int \overline{g^{+}}(t-x)\,\nu_n^{-}(dx) + \int \overline{g^{-}}(t-x)\,\nu_n^{+}(dx) \end{pmatrix}\\
&= \lim_{n\to\infty} (N_n * \overline{g})(t) \text{ im Fall (b).}
\end{aligned}$$

Jetzt wollen wir $\lim_{n\to\infty} \overline{\delta_n}(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zeigen (auch hier nur in der ersten Komponente im Fall (a1), in der zweiten im Fall (a2) und in beiden im Fall (b)). Es gilt mit Lemma C.1 und $d(\cdot) := (\cdot)^{+}$, $(\cdot)^{-}$ bzw. $|\cdot|$ in den Fällen (a1), (a2) bzw. (b)

$$\begin{aligned}
\overline{\delta_n^{\pm}}(t) &= \int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)}\delta_n^{\pm}(u)\,\boldsymbol{\lambda}(du)\\
&= \int_{(-\infty,t)} e^{-\beta(t-u)}e^{\alpha u}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbb{1}_{\{\pm\Pi(\mathbf{i})X>e^u\}}\right]\boldsymbol{\lambda}(du)\\
&\leq e^{(\alpha-\beta)t}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbb{1}_{\{d(\Pi(\mathbf{i})X)>e^u\}}\right] e^{\beta u}\boldsymbol{\lambda}(du)\\
&= \frac{1}{\beta}e^{(\alpha-\beta)t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} (d(\Pi(\mathbf{i})X))^{\beta}\right]\\
&\leq \frac{1}{\beta}e^{(\alpha-\beta)t}\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^{\beta}\right]\mathbb{E}\left[(d(X))^{\beta}\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

für δ_n^+ im Fall (a1), δ_n^- im Fall (a2) und für δ_n^+ sowie δ_n^- im Fall (b), da nach Voraussetzung $\mathbb{E}\left[(d(X))^\beta\right] < \infty$ gegeben ist. Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^\beta\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt. Mittels $\varphi(\beta) < 1$ folgt induktiv

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^\beta\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n-1} |\Pi(\mathbf{i})|^\beta\, \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j(\mathbf{i})|^\beta \,\middle|\, (T_j(\mathbf{j}))_{j\geq 1, |\mathbf{j}|\leq n-2}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n-1} |\Pi(\mathbf{i})|^\beta\, \varphi(\beta)\right] = \varphi(\beta)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Also können wir in (3.10) eine Grenzwertbildung für $n \to \infty$ vornehmen und es gilt

$$\begin{aligned}
\overline{r^+} &= \nu^+ * \overline{g^+}, && \text{im Fall (a1),} \\
\overline{r^-} &= \nu^+ * \overline{g^-}, && \text{im Fall (a2) und} \\
\overline{r} &= \mathbb{G} * \overline{g}, && \text{im Fall (b).}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Nun können wir die einzelnen Fällen abschließen:

(a) Mittels (3.13), dem Key Renewal Theorem (Satz A.2), Bemerkung A.3 und Lemma 3.2 (b) schließen wir

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \overline{r^+}(t) &= \lim_{t\to\infty} \left(\nu^+ * \overline{g^+}\right)(t) \overset{\text{KRT}}{=} \frac{1}{\mu_\alpha} \int \overline{g^+}\, d\boldsymbol{\lambda} = \frac{H_+}{\beta}, && \text{im Fall (a1) und} \\
\lim_{t\to\infty} \overline{r^-}(t) &= \lim_{t\to\infty} \left(\nu^+ * \overline{g^-}\right)(t) \overset{\text{KRT}}{=} \frac{1}{\mu_\alpha} \int \overline{g^-}\, d\boldsymbol{\lambda} = \frac{H_-}{\beta}, && \text{im Fall (a2).}
\end{aligned}$$

(b) Nach Bemerkung A.6 (b) können wir das verallgemeinerte Key Renewal Theorem (Satz A.5) anwenden und mittels (3.13) und Lemma 3.2 (b) schließen wir

$$\lim_{t\to\infty} \overline{r}(t) = \lim_{t\to\infty} (\mathbb{G} * \overline{g})(t) \overset{\text{verall. KRT}}{=} \frac{1}{2\mu_\alpha} \begin{pmatrix} \int \overline{g^+} + \overline{g^-}\, d\boldsymbol{\lambda} \\ \int \overline{g^+} + \overline{g^-}\, d\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} H \\ H \end{pmatrix}.$$

Mit Lemma 3.3 folgt in jedem Fall die Behauptung. Die zweite Darstellung für H_+, H_- und H folgt mit Lemma C.1 aufgrund von (3.1) bzw. (3.3) und da

$$g^+ + g^- = e^{\alpha t}\left(\mathbb{P}\left(|X| > e^t\right) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{|T_j X| > e^t\}}\right]\right)$$

gilt. Letzteres zeigt ebenso $H = \frac{H_+ + H_-}{2}$. $\square$

4 Die Rekursionsgleichung $R \stackrel{d}{=} \sum_{j\geq 1} T_j R_j + C$

Wir wollen in diesem Kapitel die zu Beginn der Arbeit vorgestellte stochastische Rekursionsgleichung

$$R \stackrel{d}{=} \sum_{j\geq 1} T_j R_j + C \tag{1.1}$$

untersuchen, wobei $(R_j)_{j\geq 1}$ und $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ unabhängige reelle Zufallsvektoren sind, sodass $(R_j)_{j\geq 1}$ iid mit $R_1 \stackrel{d}{=} R$ ist.

Nachdem wir in Abschnitt 4.1 die für unsere Resultate notwendigen Ungleichungen bewiesen haben, wenden wir uns in Abschnitt 4.2 der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu (1.1) zu. In Abschnitt 4.3 werden wir in Satz 4.13 mittels Satz 3.5 das Tailverhalten einer Lösung der Gleichung (1.1) charakterisieren.

Wie üblich definieren wir für $\beta \geq 1$

$$\|X\|_\beta := \left(\mathbb{E}\left[|X|^\beta\right]\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

für Zufallsgrößen X und erhalten dadurch eine Halbnorm $\|\cdot\|_\beta$ auf L_β. Hier folgt die Dreiecksungleichung durch die Minkowski-Ungleichung.[13] Wie in Abschnitt 5.3 in [3] erweitern wir diese Definition für alle $\beta > 0$ durch

$$\|X\|_\beta := \left(\mathbb{E}\left[|X|^\beta\right]\right)^{1\wedge\frac{1}{\beta}}$$

für Zufallsgrößen X und erhalten im Fall $\beta \leq 1$ jedoch keine Halbnorm, da für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda X\|_\beta = |\lambda|^\beta \|X\|_\beta \leq |\lambda| \|X\|_\beta$$

gilt und im Allgemeinen hier auch keine Gleichheit gilt (echte Ungleichung, falls $\lambda \neq 0$ und X nicht $\mathbb{P}$-f.s. verschwindet). Die Dreiecksungleichung ist aber auch im Fall $\beta \leq 1$ aufgrund der Subadditivität der Abbildung $x \mapsto x^\beta$ auf $[0, \infty)$ erfüllt:

$$\|X_1 + X_2\|_\beta = \mathbb{E}\left[|X_1 + X_2|^\beta\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_1|^\beta + |X_2|^\beta\right] = \|X_1\|_\beta + \|X_2\|_\beta .$$

4.1 Ungleichungen

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer Ungleichung, die auf Lemma 5.2 in [10] beruht und einen wichtigen Baustein für die Aussagen und Beweise in Abschnitt 4.2 bildet.

---

[13] Satz 17.4(e) in [2].

Lemma 4.1. *Gegeben zwei unabhängige reelle Zufallsvektoren* $(D_j)_{j\geq 1}$ *und* $(Y_j)_{j\geq 1}$, *seien* $(Y_j)_{j\geq 1}$ *iid und* $\sum_{j\geq 1}(D_jY_j)^+ < \infty$ $\mathbb{P}$*-f.s.. Dann folgt für ein* $\beta > 1$ *mit* $p := \lceil \beta \rceil$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(D_jY_j)^+\right)^\beta - \sum_{j\geq 1}\left((D_jY_j)^+\right)^\beta\right] \leq \|Y\|_{p-1}^\beta \left\|\sum_{j\geq 1}|D_j|\right\|_\beta^\beta .$$

Bemerkung 4.2. Im Allgemeinen müssen die in Lemma 4.1 vorkommenden Erwartungswerte sowie $\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((D_jY_j)^+\right)^\beta\right]$ nicht endlich sein. Gilt aber in der Tat $\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((D_jY_j)^+\right)^\beta\right] < \infty$, so ist die Ungleichung aus dem Lemma gleichbedeutend mit

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(D_jY_j)^+\right)^\beta\right] \leq \|Y\|_{p-1}^\beta \left\|\sum_{j\geq 1}|D_j|\right\|_\beta^\beta + \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((D_jY_j)^+\right)^\beta\right].$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit dem Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{j_1,...,j_m} := \frac{n!}{j_1!...j_m!} \text{ für } n, j_1, ..., j_m \in \mathbb{N} \text{ mit } \sum_{i=1}^m j_l = n$$

gilt für $y_i \geq 0$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^p &= \sum_{j_i\in\{0,...,p\},\sum_{i=1}^m j_i = n} \binom{p}{j_1,...,j_m} y_1^{j_1}...y_m^{j_m} \\ &= \sum_{j_i\in\{0,...,p-1\},\sum_{i=1}^m j_i = n} \binom{p}{j_1,...,j_m} y_1^{j_1}...y_m^{j_m} + \sum_{i=1}^m y_i^p.\end{aligned}$$

Mit der Subadditivität von $x \mapsto x^{\frac{\beta}{p}}$, $\frac{\beta}{p} \in (0,1]$, gilt weiter

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^\beta &= \left(\left(\sum_{i=1}^m y_i\right)^p\right)^{\frac{\beta}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j_i\in\{0,...,p-1\},\sum_{i=1}^m j_i = n} \binom{p}{j_1,...,j_m} y_1^{j_1}...y_m^{j_m}\right)^{\frac{\beta}{p}} + \sum_{i=1}^m y_i^{p\frac{\beta}{p}}. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Seien nun $j_1, ..., j_m \in \{0, ..., p-1\}$ mit $\sum_{i=1}^m j_i = p$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\prod_{l=1}^m |Y_l|^{j_l}\right] = \prod_{l=1}^m \|Y_l\|_{j_l}^{j_l} \leq \prod_{l=1}^m \|Y_1\|_{p-1}^{j_l} = \|Y_1\|_{p-1}^p, \qquad (4.2)$$

wobei wir hier verwendet haben, dass $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_s$ für $r \leq s$ gilt. Mittels der Jensenschen Ungleichung[14] folgt somit

$$\begin{aligned}
0 \ &\leq \ \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{m}(D_jY_j)^+\right)^{\beta} - \sum_{j=1}^{m}\left((D_jY_j)^+\right)^{\beta}\right] \\
&\overset{(4.1)}{\leq} \ \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j_i\in\{0,\dots,p-1\},\sum_{i=1}^m j_i=n}\binom{p}{j_1,\dots,j_m}\prod_{l=1}^{m}|D_lY_l|^{j_l}\right)^{\frac{\beta}{p}}\right] \\
&\overset{\frac{\beta}{p}\leq 1}{\leq} \ \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j_i\in\{0,\dots,p-1\},\sum_{i=1}^m j_i=n}\binom{p}{j_1,\dots,j_m}\prod_{l=1}^{m}|D_l|^{j_l}\,\mathbb{E}\left[\prod_{l=1}^{m}|Y_l|^{j_l}\,\middle|\,(D_k)_{k\geq 1}\right]\right)^{\frac{\beta}{p}}\right] \\
&\overset{(4.2)}{\leq} \ \|Y_1\|_{p-1}^{p\frac{\beta}{p}}\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j_i\in\{0,\dots,p\},\sum_{i=1}^m j_i=n}\binom{p}{j_1,\dots,j_m}\prod_{l=1}^{m}|D_l|^{j_l}\right)^{\frac{\beta}{p}}\right] \\
&= \ \|Y_1\|_{p-1}^{\beta}\left\|\sum_{j=1}^{m}|D_j|\right\|_{\beta}^{\beta} < \infty.
\end{aligned}$$

Um die Aussage des Lemmas herzuleiten, betrachten wir nun unter Grenzwertbildung, $m \to \infty$, mittels monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(D_jY_j)^+\right)^{\beta} - \sum_{j\geq 1}\left((D_jY_j)^+\right)^{\beta}\right] \\
&= \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{m}(D_jY_j)^+\right)^{\beta} - \sum_{j=1}^{m}\left((D_jY_j)^+\right)^{\beta}\right] \\
&\leq \|Y_1\|_{p-1}^{\beta}\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{m}|D_j|\right\|_{\beta}^{\beta} = \|Y_1\|_{p-1}^{\beta}\left\|\sum_{j\geq 1}|D_j|\right\|_{\beta}^{\beta} < \infty,
\end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass $\left(\sum_{i=1}^{m+1} y_i\right)^{\beta} - \sum_{i=1}^{m+1} y_i^{\beta} \geq \left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right)^{\beta} - \sum_{i=1}^{m} y_i^{\beta}$ für $y_i \geq 0$ und alle $m \geq 1$ gilt ($\beta > 1$), und wir somit monotone Konvergenz anwenden können. □

Die folgenden Lemmata 4.3, 4.4 sowie 4.5 sind wesentliche Hilfsmittel im Beweis von Satz 4.13 die Bedingungen (3.1) und (3.3) aus Satz 3.5 nachzuweisen. Sie beruhen auf den Lemmata 4.10, 4.8 und 4.9 sowie 4.11 in [10].

[14] Vgl. Satz 17.4(f) in [2].

Für die Beweise der folgenden Lemmata benötigen wir die elementaren Ungleichungen

$$|x^\alpha - y^\alpha| \le |x-y|^\alpha \qquad \text{für } x,y \ge 0 \text{ und } \alpha \in (0,1] \tag{4.3}$$
$$|x^\alpha - y^\alpha| \le \alpha\,(x \vee y)^{\alpha-1}\,|x-y| \qquad \text{für } x,y \ge 0 \text{ und } \alpha \in (1,\infty) \tag{4.4}$$
$$\left((x+t)^+\right)^\alpha \le \left(x^+\right)^\alpha + \alpha\left((x+t)^+\right)^{\alpha-1} t^+ \qquad \text{für } x,t \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha \in (1,\infty) \tag{4.5}$$

Die Ungleichung (4.3) sieht man leicht durch die Dreiecksungleichung und die Subadditivität der Funktion $x \mapsto x^\alpha$, $x \ge 0$, denn es gilt

$$x^\alpha = |x-y+y|^\alpha \le (|x-y|+y)^\alpha \le |x-y|^\alpha + y^\alpha$$

(Vertausche danach die Rollen x und y).

Die Ungleichung (4.4) sieht man folgendermaßen: Für differenzierbare Funktionen $f,\, g : (y,\infty) \to \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, mit $\lim_{x\downarrow y} f(x) \ge \lim_{x\downarrow y} g(x)$ und $f'(x) \ge g'(x)$ für alle $x \in (y,\infty)$ folgt, dass $f(x) \ge g(x)$ für alle $x \in (y,\infty)$ gilt. Für Ungleichung (4.4) sei für festes $y \ge 0$ hier $g(x) := x^\alpha - y^\alpha$ und $f(x) := \alpha\,(x \vee y)^{\alpha-1}\,|x-y|$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^{\alpha-1}(x-y) = g'(x)(x-y) && \text{und somit} \\ f'(x) &= g'(x) + \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}(x-y) \ge g'(x)\,. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (4.5) ist eine Folgerung aus der Ungleichung (4.4): Für $x,t \ge 0$ stellen wir die Gleichung (4.4) mit $y := x+t$ um:

$$\left((x+t)^+\right)^\alpha - x^\alpha = y^\alpha - x^\alpha \overset{(4.4)}{\le} \alpha\,(x \vee y)^{\alpha-1}\,|x-y| = \alpha\,(x+t)^{\alpha-1}\,t.$$

Im Fall $x<0$, $t \ge 0$ folgt mit $(x+t)^+ \le t$

$$\begin{aligned} \left((x+t)^+\right)^\alpha &= \left((x+t)^+\right)^{\alpha-1}(x+t)^+ \\ &\le \alpha\left((x+t)^+\right)^{\alpha-1} t^+ = \left(x^+\right)^\alpha + \alpha\left((x+t)^+\right)^{\alpha-1} t^+. \end{aligned}$$

Für $x \ge 0$, $t<0$ gilt mit $(x+t)^+ \le x$ schon

$$\left((x+t)^+\right)^\alpha \le \left(x^+\right)^\alpha = \left(x^+\right)^\alpha + \alpha\left((x+t)^+\right)^\alpha t^+.$$

Im Fall $x,t<0$ ist die Ungleichung trivial.

Lemma 4.3. *Gegeben ein $\alpha > 0$ und zwei unabhängige reelle Zufallsvektoren $(T_j)_{j\ge1}$ und $(X_j)_{j\ge1}$, seien $(X_j)_{j\ge1}$ iid und $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\ge1}|T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty$ für ein $\epsilon \in (0,1)$ sowie $\sum_{j\ge1}|T_jX_j|^\alpha < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s.. Dann folgt aus $\|X_1\|_\beta < \infty$ für alle $\beta \in (0,\alpha)$, dass*

$$0 \le \int_0^\infty \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{d(T_jX_j)>t\}}\right] - \mathbb{P}\left(\sup_{j\ge1} d(T_jX_j) > t\right)\right) t^{\alpha-1}dt \tag{4.6}$$
$$= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\sum_{j\ge1}\left(d(T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sup_{j\ge1} d(T_jX_j)\right)^+\right)^\alpha\right] < \infty \tag{4.7}$$

gilt, wobei $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine der Funktionen id, $-$id oder $|\cdot|$ ist.

Beweis. Durch Übergang von $(T_j)_{j\geq 1}$ und $(X_j)_{j\geq 1}$ auf $(-T_j)_{j\geq 1}$ und $(X_j)_{j\geq 1}$ bzw. $(|T_j|)_{j\geq 1}$ und $(|X_j|)_{j\geq 1}$ sehen wir, dass die Voraussetzungen des Lemmas ebenfalls für diese Folgen erfüllt sind und es folglich reicht die Behauptung für $d = id$ zu zeigen.

Da $\mathbb{1}_{\{\sup(T_jX_j)^+>t\}} \leq \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{(T_jX_j)^+>t\}}$ für alle $t \in (0,\infty)$ gilt, ist der Integrand in (4.6) nichtnegativ und somit das Integral ebenfalls. Die Gleichheit in (4.7) folgt mit Lemma C.1, falls (4.6) endlich ist. Letzteres verbleibt also zu zeigen. In (4.6) können wir wegen Bemerkung C.2 (c) das Riemann- durch das Lebesgue-Integral ersetzen, da der Integrand auf jedem kompakten Teilintervall Riemann-integrierbar ist. Dazu gilt zunächst mit Tonelli

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)} \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{(T_jX_j)^+>t\}}\right] - \mathbb{P}\left(\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+ > t\right)\right) t^{\alpha-1}\boldsymbol{\lambda}(dt) \\
&= \int_{(0,\infty)} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{(T_jX_j)^+>t\}} - \mathbb{1}_{\{\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+>t\}} \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right]\right] t^{\alpha-1}\boldsymbol{\lambda}(dt) \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{(0,\infty)} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{(T_jX_j)^+>t\}} - \mathbb{1}_{\{\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+>t\}} \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] t^{\alpha-1}\boldsymbol{\lambda}(dt)\right]. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}; s \mapsto s - 1 + e^{-s}$ und $\beta := \frac{\alpha}{1+\epsilon}$. Für g gilt $\lim_{s\downarrow 0} g(s) = 0$ und $g'(s) = 1 - e^{-s} > 0$, also ist g positiv und strikt monoton wachsend auf $(0,\infty)$. Wir wollen zeigen, dass

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{(T_jX_j)^+>t\}} - \mathbb{1}_{\{\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+>t\}} \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] t^{\alpha-1}\boldsymbol{\lambda}(dt) \\
&\leq \frac{1}{\beta}\mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\sum_{j\geq 1}|T_j|^\beta\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \int_0^\infty g(s)\, s^{-(2+\epsilon)} ds \qquad (4.9) \\
&= \frac{c(1+\epsilon)}{\alpha}\mathbb{E}\left[|X_1|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right]^{1+\epsilon} \left(\sum_{j\geq 1}|T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

und $c := \int_0^\infty g(s)\, s^{-(2+\epsilon)} ds < \infty$ gilt. Für letzteres beachten wir zunächst, dass mit $g(s) \leq \frac{s^2}{2}$ (folgt durch $\frac{d}{ds}\left(g(s) - \frac{s^2}{2}\right) = -g(s) < 0$ und $\lim_{s\downarrow 0} g(s) = \frac{0^2}{2}$)

$$\int_0^1 g(s)\, s^{-(2+\epsilon)} ds \leq \frac{1}{2}\int_0^1 s^{-\epsilon} ds = \frac{1}{2(1-\epsilon)}\left(s^{(1-\epsilon)}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2(1-\epsilon)} < \infty$$

gilt, und auf der anderen Seite, dass mit $g(s) \leq s$

$$\int_1^\infty g(s)\, s^{-(2+\epsilon)} ds \leq \int_1^\infty s^{-(1+\epsilon)} ds = \frac{-1}{\epsilon}\left(s^{-\epsilon}\Big|_1^\infty\right) = \frac{1}{\epsilon} < \infty$$

gilt, also zusammen $c < \infty$. Um die Ungleichung (4.9) zu sehen, nutzen wir, dass die $(T_j X_j)_{j\geq 1}$, unter $(T_k)_{k\geq 1}$ bedingt, unabhängig sind:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\left\{(T_jX_j)^+>t\right\}} - \mathbb{1}_{\left\{\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+>t\right\}}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&= \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\left((T_jX_j)^+ > t \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+ \leq t \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right) - 1 \\
&= \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\left((T_jX_j)^+ > t \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right) + \prod_{j\geq 1}\left(1 - \mathbb{P}\left((T_jX_j)^+ > t \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right)\right) - 1 \\
&\leq g\left(\sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\left((T_jX_j)^+ > t \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right)\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.,}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

wobei wir in der letzten Zeile die Ungleichung $\prod_{j\geq 1}(1-s_j) \leq \prod_{j\geq 1} e^{-s_j} \leq e^{-\sum_{j\geq 1} s_j}$ für $(s_j)_{j\geq 1} \in [0,\infty)^{\mathbb{N}}$ genutzt haben, was wiederum aus $e^{-s} + s - 1 = g(s) \geq 0$ für $s \geq 0$ folgt. Mit der Markov-Ungleichung[15] folgt für $j \geq 1$

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{P}\left((T_jX_j)^+ > t \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right) \leq t^{-\beta}\mathbb{E}\left[\left((T_jX_j)^+\right)^\beta \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&\leq t^{-\beta}|T_j|^\beta\, \mathbb{E}\left[|X_j|^\beta \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right] t^{-\beta}|T_j|^\beta \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Setzen wir dies in (4.11) ein und nutzen die Monotonie von g, folgt

$$
\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\left\{(T_jX_j)^+>t\right\}} - \mathbb{1}_{\left\{\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+>t\right\}}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] t^{\alpha-1}\boldsymbol{\lambda}(dt) \\
&\overset{(4.11),(4.12)}{\leq} \int_{(0,\infty)} g\left(t^{-\beta}\mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]\sum_{j\geq 1}|T_j|^\beta\right) t^{\alpha-1}\boldsymbol{\lambda}(dt) \\
&= \int_{(0,\infty)} g\left(v(s)^{-\beta}\,\mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]\sum_{j\geq 1}|T_j|^\beta\right) v(s)^{\alpha-1}\left|\frac{d}{ds}v(s)\right|\boldsymbol{\lambda}(ds) \\
&= \int_{(0,\infty)} g(s)\left(s^{-\frac{1}{\beta}}\mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha-1} \\
&\qquad \cdot\frac{1}{\beta}s^{-\frac{1}{\beta}-1}\mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\boldsymbol{\lambda}(ds) \\
&= \frac{1}{\beta}\mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|^\beta\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\int_{(0,\infty)} g(s)\, s^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}}\boldsymbol{\lambda}(ds) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.,}
\end{aligned}
$$

[15] Vgl. Satz 17.4(a).

wobei $v : (0,\infty) \to (0,\infty); s \mapsto s^{-\frac{1}{\beta}} \mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} \left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, für den $\frac{d}{ds} v(s) = -\frac{1}{\beta} s^{-\frac{1}{\beta}-1} \mathbb{E}\left[|X_1|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} \left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$ gilt und wir den Transformationssatz für Lebesgue-Integrale genutzt haben. Damit haben wir (4.9) gezeigt und schließen

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,\infty)} \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\left\{(T_jX_j)^+ > t\right\}}\right] - \mathbb{P}\left(\sup_{j\geq 1} (T_jX_j)^+ > t\right)\right) t^{\alpha-1} \boldsymbol{\lambda}(dt) \\
&\overset{(4.8),(4.10)}{\leq} \frac{c(1+\epsilon)}{\alpha} \mathbb{E}\left[|X_1|^{\frac{\alpha}{\epsilon}}\right]^{1+\epsilon} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty
\end{aligned}$$

nach den Voraussetzungen. $\square$

Lemma 4.4. *Gegeben ein $\alpha > 0$ und zwei unabhängige reelle Zufallsvektoren $(T_j)_{j\geq 1}$ und $(X_j)_{j\geq 1}$, seien $(X_j)_{j\geq 1}$ iid und $\sum_{j\geq 1} |T_jX_j| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s., sowie weiterhin*

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha) < \infty,\ \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty \text{ für ein } \epsilon \in (0,1) \text{ und} \\
&\sum_{j\geq 1} |T_jX_j|^\alpha < \infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.}, && \text{falls } \alpha \leq 1, \\
&\left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\alpha < \infty \text{ und } \sum_{j\geq 1} |T_jX_j| < \infty \ \mathbb{P}\text{-f.s.}, , && \text{falls } \alpha > 1
\end{aligned}$$

erfüllt. Dann folgt aus $\|X_1\|_\beta < \infty$ für alle $\beta \in (0,\alpha)$, dass

$$\mathbb{E}\left| d\left(\sum_{j\geq 1} T_jX_j\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1} d(T_jX_j)^\alpha \right| < \infty$$

gilt, wobei $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine der Funktionen $(\cdot)^+$, $(\cdot)^-$ oder $|\cdot|$ ist.

Beweis. Zunächst wollen wir uns klar machen, dass es reicht, den Fall $d = (\cdot)^+$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left| \left(\left(\sum_{j\geq 1} T_jX_j\right)^-\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1} \left((T_jX_j)^-\right)^\alpha \right| \\
&= \mathbb{E}\left| \left(\left(\sum_{j\geq 1} (-T_j) X_j\right)^+\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1} \left(((-T_j) X_j)^+\right)^\alpha \right|. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Also folgt der Fall $d = (\cdot)^-$ aus dem Fall $d = (\cdot)^+$ durch Übergang von $(T_j)_{j\geq 1}$ auf $(-T_j)_{j\geq 1}$, wofür die Bedingungen des Lemmas ebenfalls erfüllt sind. Weiter folgt aus

$$\left|\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right|^\alpha = \left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right)^\alpha + \left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^-\right)^\alpha$$

und Analogem für $\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|^\alpha$, dass

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\left|\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right|^\alpha - \sum_{j\geq 1} |T_j X_j|^\alpha\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left|\left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1} \left((T_j X_j)^+\right)^\alpha\right| \\
&\quad + \mathbb{E}\left|\left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^-\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1} \left((T_j X_j)^-\right)^\alpha\right|.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

gilt. Also folgt der Fall $d = |\cdot|$ aus den Fällen $d = (\cdot)^+, (\cdot)^-$ und wir können uns auf den Fall $d = (\cdot)^+$ beschränken. Nun gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1} \left((T_j X_j)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right)^\alpha\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} \left((T_j X_j)^+\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \leq 0\right\}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1} \left((T_j X_j)^+\right)^\alpha - \left(\sum_{j\geq 1} (T_j X_j)^+\right)^\alpha\right| \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j > 0\right\}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\left|\left(\sum_{j\geq 1} (T_j X_j)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right)^\alpha\right| \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j > 0\right\}}\right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

und wir werden zeigen, dass die einzelnen Erwartungswerte in (4.15) endlich sind:

Zum ersten Erwartungswert in (4.15): Es sei $a := \frac{\alpha}{1+\epsilon}$ für $\alpha \in (0, 1]$ und $a := 1$ für $\alpha \in (1, 2]$. Mit $b := \alpha - a$ gilt dann $a + b = \alpha$ sowie $a, \frac{b}{a} \leq 1$ und

$$\begin{aligned}
|T_j X_j|^\alpha = |T_j X_j|^a\, |T_j X_j|^b &\leq |T_j X_j|^a \left|T_j X_j - \sum_{j_2\geq 1} T_{j_2} X_{j_2}\right|^b \\
&= |T_j X_j|^a \left|\sum_{j_2\neq j} T_{j_2} X_{j_2}\right|^b
\end{aligned} \tag{4.16}$$

auf $\{T_jX_j \geq 0\} \cap \{\sum_{j_2\geq 1} T_{j_2}X_{j_2} \leq 0\}$. Dies impliziert

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^{\alpha}\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j_2\geq 1}T_{j_2}X_{j_2}\leq 0\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_jX_j|^{\alpha}\mathbb{1}_{\{T_jX_j\geq 0\}}\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j_2\geq 1}T_{j_2}X_{j_2}\leq 0\right\}}\,\middle|\,(T_k)_{k\geq 1}\right]\right] \\
&\overset{(4.16)}{\leq} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|^a\,\mathbb{E}\left[|X_j|^a\left|\sum_{j_2\neq j}T_{j_2}X_{j_2}\right|^b\right]\,\middle|\,(T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X_1|^a\right]\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|^a\,\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j_2\geq 1}T_{j_2}X_{j_2}\right|^{a\frac{b}{a}}\right]\,\middle|\,(T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&\overset{a,\frac{b}{a}\leq 1}{\leq} \mathbb{E}\left[|X_1|^a\right]\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|^a\left(\sum_{j_2\geq 1}|T_{j_2}|^a\,\mathbb{E}\left[|X_{j_2}|^a\,|\,(T_k)_{k\geq 1}\right]\right)^{\frac{b}{a}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X_1|^a\right]^{\frac{a+b}{a}}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|^a\left(\sum_{j_2\geq 1}|T_{j_2}|^a\right)^{\frac{b}{a}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|X_1|^a\right]^{\frac{a+b}{a}}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|^a\right)^{\frac{a+b}{a}}\right],
\end{aligned}$$

wobei wir sowohl die Unabhängigkeit von X_j und $\left(T_{j_2}X_{j_2}\right)_{j_2\neq j}$, wenn wir unter $(T_k)_{k\geq 1}$ bedingen, als auch die Unabhänigkeit $(X_j)_{j\geq 1}$ und $(T_k)_{k\geq 1}$ sowie die Jensensche Ungleichung ($x \mapsto x^{\frac{b}{a}}$) und die Subadditivität von $x \mapsto x^a$ nutzen. Also folgt für den Fall $\alpha \in (0,1]$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^{\alpha}\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j_2\geq 0}T_{j_2}X_{j_2}\leq 0\right\}}\right] \leq \mathbb{E}\left[|X_1|^a\right]^{1+\epsilon}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty$$

und für den Fall $\alpha \in (1,2]$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^{\alpha}\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j_2\geq 1}T_{j_2}X_{j_2}\leq 0\right\}}\right] \leq \|X_1\|_1^{\alpha}\left\|\sum_{j\geq 1}|T_j|\right\|_{\alpha}^{\alpha} < \infty.$$

Eine ähnliche Rechnung können wir für den Fall $\alpha > 2$ anwenden (Benutzung von (4.16) benötigt nur $a + b = \alpha$):

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^{\alpha}\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j_2\geq 1}T_{j_2}X_{j_2}\leq 0\right\}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_jX_j|^\alpha \mathbb{1}_{\{T_jX_j\geq 0\}} \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j_2\geq 1} T_{j_2}X_{j_2}\leq 0\right\}}\right] \\
&\overset{(4.16)}{\leq} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\alpha-1}\, \mathbb{E}\left[|X_j|^{\alpha-1}\left|\sum_{j_2\neq j} T_{j_2}X_{j_2}\right| \,\middle|\, (T_k)_{k\geq 1}\right]\right] \\
&\leq \|X_1\|_{\alpha-1}^{\alpha-1}\, \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\alpha-1} \sum_{j_2\geq 1} |T_{j_2}|\, \mathbb{E}\left[|X_{j_2}| \,\middle|\, (T_k)_{k\geq 1}\right]\right] \\
&= \|X_1\|_{\alpha-1}^{\alpha-1} \|X_1\|_1\, \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\alpha-1}\right)\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)\right] \\
&\leq \|X_1\|_{\alpha-1}^{\alpha-1} \|X_1\|_1 \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\alpha^\alpha < \infty,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Unabhängigkeit von X_j und $(T_{j_2}X_{j_2})_{j_2\neq j}$, wenn wir unter $(T_k)_{k\geq 1}$ bedingen, sowie die Superadditivität der Funktion $x \mapsto x^\alpha$ für $\alpha > 1$ nutzen. Für den zweiten Erwartungswert in (4.15) benutzen wir Lemma 4.3 und Lemma 4.1. Im Fall $\alpha \in (0,1]$ sehen wir mittels Lemma 4.3, der Subadditivität von $x \mapsto x^\alpha$ auf $[0,\infty)$ und $\sum_{j\geq 1} y_j \geq \sup_{j\geq 1} y_j$ für $(y_j)_{j\geq 1} \in [0,\infty)^{\mathbb{N}}$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha\right| \\
&\quad + \mathbb{E}\left|\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha\right| \\
&\leq 2\mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\sup_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha\right| < \infty.
\end{aligned}
$$

Im Fall $\alpha > 1$ folgt mit Lemma 4.1

$$
\mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha\right| \leq \|X_1\|_{\lceil\alpha\rceil-1}^\alpha \left\|\sum_{j\geq 1}|T_j|\right\|_\alpha^\alpha < \infty.
$$

Es bleibt also die Endlichkeit vom dritten Erwartungswert in (4.15) zu zeigen: Im Fall $\alpha \in (0,1]$ nutzen wir die elementare Ungleichung (4.3) und sehen

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\sum_{j\geq 1}T_jX_j\right)^\alpha\right| \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1}T_jX_j>0\right\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+ - \sum_{j\geq 1}T_jX_j\right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1}T_jX_j\geq 0\right\}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^-\right)^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_jX_j \geq 0\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}((-T_j)\,X_j)^+\right)^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} (-T_j)X_j \leq 0\right\}}\right],
\end{aligned}
$$

was endlich ist, da wir schon gezeigt haben, dass der erste Erwartungswert in (4.15) endlich ist (Hierzu Übergang von $(T_k)_{k\geq 1}$ zu $(-T_k)_{k\geq 1}$). Für den Fall $\alpha > 1$ überlegen wir uns, dass $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^{\alpha-1}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \leq c_\alpha \left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-1}$ $\mathbb{P}$-f.s. für ein $c_\alpha \in [0,\infty)$: Für $\alpha \in (1,2]$ gilt mit $c_\alpha := \|X_1\|_1^{\alpha-1} < \infty$ und der Jensenschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^{\alpha-1}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&\leq \left(\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right]\right)^{\alpha-1} \\
&\leq \left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-1} \mathbb{E}\left[|X_j|\,|\,(T_k)_{k\geq 1}\right]^{\alpha-1} = c_\alpha \left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-1} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

und für $\alpha > 2$ gilt mit $p := \lceil \alpha - 1 \rceil$ und $c_\alpha := \|X_1\|_{\alpha-1}^{\alpha-1} + \|X_1\|_{p-1}^{\alpha-1} < \infty$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^{\alpha-1}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&\overset{\text{Bem. 4.2}}{\leq} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left((T_jX_j)^+\right)^{\alpha-1}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&\qquad + \mathbb{E}\left[|X_1|^{p-1}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right]^{\frac{\alpha-1}{p-1}} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-1}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] \\
&\leq \sum_{j\geq 1}|T_j|^{\alpha-1}\,\mathbb{E}\left[|X_j|^{\alpha-1}\middle| (T_k)_{k\geq 1}\right] + \|X_1\|_{p-1}^{\alpha-1}\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-1} \\
&\overset{\alpha-1>1}{\leq} c_\alpha \left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-1} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}. \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

Damit und mit der elementaren Ungleichung (4.4) folgt nun weiter für beliebiges

$\alpha > 1$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sum_{j\geq 1}T_jX_j\right)^+\right)^\alpha\right| \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1}T_jX_j>0\right\}}\right] \\
&= \quad \mathbb{E}\left[\left|\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^\alpha - \left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+ - \sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^-\right)^\alpha\right| \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1}T_jX_j>0\right\}}\right] \\
&\overset{(4.4)}{\leq} \quad \alpha\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^+\right)^{\alpha-1}\left|\sum_{j\geq 1}(T_jX_j)^-\right| \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1}T_jX_j>0\right\}}\right] \\
&\leq \quad \alpha\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_jX_j|\,\mathbb{1}_{\{T_jX_j<0\}}\left(\sum_{j_2\geq 1}(T_{j_2}X_{j_2})^+\right)^{\alpha-1}\right] \\
&\leq \quad \alpha\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|\,\mathbb{E}\left[|X_j|\,\mathbb{1}_{\{T_jX_j<0\}}\left(\sum_{j_2\neq j}(T_{j_2}X_{j_2})^+\right)^{\alpha-1}\middle|(T_k)_{k\geq 1}\right]\right] \\
&\leq \quad \alpha\left\|X_1\right\|_1\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_j|\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j_2\geq 1}(T_{j_2}X_{j_2})^+\right)^{\alpha-1}\middle|(T_k)_{k\geq 1}\right]\right] \\
&\overset{(4.17),(4.18)}{\leq} \quad \alpha c_\alpha\left\|X_1\right\|_1\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)\left(\sum_{j_2\geq 1}|T_{j_2}|\right)^{\alpha-1}\right] \\
&= \quad \alpha c_\alpha\left\|X_1\right\|_1\left\|\sum_{j\geq 1}|T_j|\right\|_\alpha^\alpha < \infty,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Unabhängigkeit von X_j und $(T_{j_2}X_{j_2})_{j_2\neq j}$, wenn wir unter $(T_k)_{k\geq 1}$ bedingen, nutzen. Dies schließt den Beweis ab. $\square$

Lemma 4.5. *Gegeben ein $\alpha > 0$ und zwei unabhängige reelle Zufallsvektoren $(X_j)_{j\geq 1}$ und $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$, seien $(X_j)_{j\geq 1}$ iid, $\|C\|_\alpha < \infty$ und $\sum_{j\geq 1}|T_jX_j| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s., sowie $\left\|\sum_{j\geq 1}|T_j|\right\|_\alpha < \infty$. Dann folgt aus $\|X_1\|_\beta < \infty$ für alle $\beta \in [0, \alpha)$, dass*

$$\mathbb{E}\left|d\left(\sum_{j\geq 1}T_jX_j + C\right)^\alpha - d\left(\sum_{j\geq 1}T_jX_j\right)^\alpha\right| < \infty$$

gilt, wobei $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine der Funktionen $(\cdot)^+$, $(\cdot)^-$ oder $|\cdot|$ ist.

Beweis. Analog zu den Überlegungen in (4.13) sehen wir, dass ein Übergang von $C, (T_j)_{j\geq 1}$ auf $(-C), (-T_j)_{j\geq 1}$ den Fall $d = (\cdot)^-$ aus dem Fall $d = (\cdot)^+$ folgen lässt. Ebenso, analog zu (4.14), stellen die Fälle $d = (\cdot)^+, (\cdot)^-$ auch den Fall $d = |\cdot|$ sicher. Also können wir uns auf den Fall $d = (\cdot)^+$ beschränken.

Zunächst nutzen wir die Ungleichung (4.3), falls $\alpha \leq 1$ ist:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right)^\alpha\right| \\
&\overset{(4.3)}{\leq} \mathbb{E}\left[\left|\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right)^+ - \left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right|^\alpha\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right)\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq -C\right\}} - \sum_{j\geq 1} T_j X_j\right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq 0\right\}}\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\left|\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right)\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq -C\right\}}\right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j < 0\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|-\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j < -C\right\}} - C\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq -C\right\}}\right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq 0\right\}}\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{-C\leq\sum_{j\geq 1} T_j X_j < 0\right\}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{0\leq\sum_{j\geq 1} T_j X_j < -C\right\}}\right] + \mathbb{E}\left[|C|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq -C\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq 0\right\}}\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{0\leq\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C < C\right\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|C|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{0\leq\sum_{j\geq 1} T_j X_j < -C\right\}}\right] + \mathbb{E}\left[|C|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq -C\right\}}\mathbb{1}_{\left\{\sum_{j\geq 1} T_j X_j \geq 0\right\}}\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[|C|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{0\leq\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C < C\right\}}\right] \\
&\leq \|C\|_\alpha < \infty.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\alpha > 1$. Wir nutzen hier die elementare Ungleichung (4.5). Iteriert angewendet gilt für $x, t \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\left((x+t)^+\right)^\alpha - \left(x^+\right)^\alpha &\overset{(4.5)}{\leq} \alpha\left((x+t)^+\right)^{\alpha-1} t^+ \\
&\overset{(4.5)}{\leq} \sum_{i=1}^{1} \alpha^i \left(x^+\right)^{\alpha-i}\left(t^+\right)^i + \alpha(\alpha-1)\left((x+t)^+\right)^{\alpha-2}\left(t^+\right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{1} \alpha^i \left(x^+\right)^{\alpha-i}\left(t^+\right)^i + \alpha^2\left((x+t)^+\right)^{\alpha-2}\left(t^+\right)^2 \\
&\overset{(4.5)}{\leq} \ldots \overset{(4.5)}{\leq} \sum_{i=1}^{q-1} \alpha^i \left(x^+\right)^{\alpha-i}\left(t^+\right)^i + \alpha^q\left((x+t)^+\right)^{\alpha-q}\left(t^+\right)^q,
\end{aligned}
$$

wobei $q := \lceil \alpha \rceil - 1 \in [\alpha - 1, \alpha)$. Nutzen wir nun noch, dass $\alpha - q \in (0,1]$, also $\left((x+t)^+\right)^{\alpha-q} \leq (x^+)^{\alpha-q} + (t^+)^{\alpha-q}$ gilt, folgt

$$\left((x+t)^+\right)^\alpha - \left(x^+\right)^\alpha \leq \sum_{i=1}^{q} \alpha^i \left(x^+\right)^{\alpha-i} \left(t^+\right)^i + \alpha^q \left(t^+\right)^\alpha. \tag{4.19}$$

Dies hilft uns wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right)^\alpha\right| \\
&\overset{(4.19)}{\leq} \sum_{i=1}^{q} \alpha^i \mathbb{E}\left[\left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j\right)^+\right)^{\alpha-i} \left(C^+\right)^i\right] + \alpha^q \mathbb{E}\left[\left(C^+\right)^\alpha\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{q} \alpha^i \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|\right)^{\alpha-i} |C|^i\right] + \alpha^q \|C\|_\alpha^\alpha.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dies ist endlich. Der Beweis ist vollständig, falls wir $\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|\right)^{\alpha-i} |C|^i\right] < \infty$ für $i \in \{1, ..., q\}$ zeigen können. Dazu folgt zunächst aus der Hölder-Ungleichung[16]

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)^{\alpha-i} |C|^i\right\|_1 &\leq \left\|\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)^{\alpha-i}\right\|_{\frac{\alpha}{\alpha-i}} \left\||C|^i\right\|_{\frac{\alpha}{i}} \\
&= \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\alpha^{\alpha-i} \|C\|_\alpha^i < \infty,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

für $i \in \{1, ..., q\}$. Für $i \in \{1, ..., q-1\}$ gilt mit Bemerkung 4.2 ($\alpha - i > 1$)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|\right)^{\alpha-i} |C|^i\right] = \mathbb{E}\left[|C|^i\, \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|\right)^{\alpha-i} \middle| (T_k)_{k\geq 1}, C\right]\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|C|^i \left(\mathbb{E}\left[|X_j|^{\lceil \alpha-i \rceil - 1} \middle| (T_k)_{k\geq 1}, C\right]\right)^{\frac{\alpha-i}{\lceil \alpha-i \rceil - 1}} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)^{\alpha-i} \middle| (T_k)_{k\geq 1}, C\right]\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[|C|^i \sum_{j\geq 1} |T_j|^{\alpha-i}\, \mathbb{E}\left[|X_j|^{\alpha-i} \middle| (T_k)_{k\geq 1}, C\right]\right] \\
&= \|X_1\|_{q-i}^{\alpha-i}\, \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)^{\alpha-i} |C|^i\right] + \mathbb{E}\left[|C|^i \sum_{j\geq 1} |T_j|^{\alpha-i}\, \mathbb{E}\left[|X_j|^{\alpha-i}\right]\right]
\end{aligned}$$

[16] Vgl. Satz 11.3 aus [2]; mit $r := \frac{\alpha}{i}$, $s := \frac{\alpha}{\alpha-i}$ gilt $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$

$$\overset{\alpha-i>1}{\leq} \|X_1\|_{q-i}^{\alpha-i}\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-i}|C|^i\right] + \|X_1\|_{\alpha-i}^{\alpha-i}\,\mathbb{E}\left[|C|^i\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-i}\right] \overset{(4.21)}{<} \infty.$$

Für $i = q = \lceil\alpha\rceil - 1$ gilt, unter Beachtung von $\alpha - q \in (0,1]$ mit der Jensenschen Ungleichung,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_jX_j|\right)^{\alpha-i}|C|^i\right] &= \mathbb{E}\left[|C|^q\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_jX_j|\right)^{\alpha-q}\middle|\,(T_k)_{k\geq 1},C\right]\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|C|^q\left(\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}|T_jX_j|\,\middle|\,(T_k)_{k\geq 1},C\right]\right)^{\alpha-q}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[|C|^q\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\,\mathbb{E}\left[|X_j|\,|\,(T_k)_{k\geq 1},C\right]\right)^{\alpha-q}\right] \\
&= \|X_1\|_1^{\alpha-q}\,\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1}|T_j|\right)^{\alpha-q}|C|^q\right] \overset{(4.21)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Endlichkeit von (4.20) gezeigt und schließen den Beweis ab. □

4.2 Konstruktion einer Lösung

Für einen Messraum $(A,\mathfrak{A})$ definieren wir $P_0(A) := \{F \text{ W'Maß auf } A\}$ sowie, für $\beta > 0$, $P_\beta(A) := \left\{F \in P_0(A)\,\middle|\,\int |x|^\beta F(dx) < \infty\right\}$. Für eine Zufallsgröße X notieren wir deren Verteilung mit $\mathscr{L}(X) := \mathbb{P}^X$.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, unter welchen Bedingungen die Gleichung (1.1) eine Lösung in $P_\beta(\mathbb{R})$ besitzt, konstruieren eine solche Lösung und zeigen die Eindeutigkeit deren Verteilung in $P_\beta(\mathbb{R})$. Dazu ist die folgende Definition von besonderer Bedeutung.

Definition 4.6. Gegeben ein reeller Zufallsvektor $(C,T_1,T_2,T_3,...)$, definieren wir durch

$$\mathfrak{D} := \left\{F \in P_0(\mathbb{R})\,\middle|\,\sum_{j\geq 1}|T_jX_j| < \infty \ \ \mathbb{P}\text{-f.s.},\ (X_j)_{j\geq 1} \text{ iid}, \mathscr{L}(X_1) = F, \text{ unabh. von } (T_k)_{k\geq 1}\right\}$$

den Definitionsbereich der Abbildung

$$\mathscr{S} : \mathfrak{D} \to P_0(\mathbb{R}); F \mapsto \mathscr{L}\left(\sum_{j\geq 1}T_jX_j + C\right),$$

wobei $(X_j)_{j\geq 1}$ iid mit $\mathscr{L}(X_1) = F$ und unabhängig von $(C,T_1,T_2,T_3,...)$ sei. $\mathscr{S}$ bezeichnen wir als *smoothing transform*.

Bemerkung 4.7. (a) Die Bedingung in der Definition von $\mathfrak{D}$ hängt nicht von der Wahl der Folge $(X_j)_{j\geq 1}$ ab, denn mit $\left(X_j'\right)_{j\geq 1}$ iid, $\mathscr{L}\left(X_1'\right) = F$, unabhängig von $(T_k)_{k\geq 1}$ gilt $\mathscr{L}\left(\sum_{j=1}^n |T_j X_j|\right) = \mathscr{L}\left(\sum_{j=1}^n \left|T_j X_j'\right|\right)$ für alle $n \geq 1$, was $\mathscr{L}\left(\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|\right) = \mathscr{L}\left(\sum_{j\geq 1} \left|T_j X_j'\right|\right)$ begründet. Analog erhalten wir in dieser Situation mit $F \in \mathfrak{D}$ dann $\mathscr{L}\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j + C\right) = \mathscr{L}\left(\sum_{j\geq 1} T_j X_j' + C\right)$, was die Wohldefiniertheit von $\mathscr{S}$ zeigt.

(b) Gegeben $\left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta, \varphi(\beta) < \infty$ (im folgenden ist dies der Fall), gilt insbesondere $P_\beta(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{D}$, denn für $\beta \geq 1$ folgt

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j| \, \mathbb{E}\left[|X_j| \,\middle|\, (T_k)_{k\geq 1}\right]\right] = \|X_1\|_1 \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_1 < \infty$$

und für $\beta \leq 1$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|^\beta\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\beta \, \mathbb{E}\left[|X_j|^\beta \,\middle|\, (T_k)_{k\geq 1}\right]\right] = \|X_1\|_\beta \, \varphi(\beta) < \infty,$$

woraus in beiden Fällen $\sum_{j\geq 1} |T_j X_j| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. folgt (wir nutzen $x^\beta > x$ für $x \in (0,1)$, falls $0 < \beta < 1$).

Die smoothing transform ist für uns interessant, denn die Frage, ob Gleichung (1.1) eine Lösung in L_β besitzt, entspricht der Frage, ob die Abbildung $\mathscr{S}$ einen Fixpunkt in $P_\beta(\mathbb{R})$ besitzt.

Sei nun $F \in \mathfrak{D}$ mit $\mathscr{S}(F)$, $\mathscr{S}^2(F) \in \mathfrak{D}$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^2(F) &= \mathscr{L}\left(\sum_{k\geq 1} T_k X_k' + C\right) \\
&= \mathscr{L}\left(\sum_{k\geq 1} T_k \left(\sum_{j\geq 1} T_j(k)\, X(jk) + C(k)\right) + C\right) \\
&= \mathscr{L}\left(\sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} T_k T_j(k)\, X(jk) + \sum_{k\geq 1} T_k C(k) + C\right)
\end{aligned}$$

mit $(X_k')_{k\geq 1}$ iid bzw. $(X(jk))_{j,k\geq 1}$ iid und der Verteilung $\mathscr{L}(X_1') = \mathscr{S}(F)$ bzw. $\mathscr{L}(X(11)) = F$. Gegeben $F \in \mathfrak{D}$ mit $\mathscr{S}(F), \mathscr{S}^2(F), \mathscr{S}^3(F), ..., \mathscr{S}^{n-1}(F) \in \mathfrak{D}$, erhalten wir für $n \geq 1$ induktiv

$$\mathscr{S}^n(F) = \mathscr{L}\left(\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, X(\mathbf{i}) + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|\mathbf{i}|=k} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i})\right), \tag{4.22}$$

wobei $(X(\mathbf{i}))_{|\mathbf{i}|=n}$ iid mit Verteilung F.

Gehen wir für einen Moment davon aus, dass wir einen Fixpunkt $\hat{F} \in \mathfrak{D}$ von unserer Abbildung $\mathscr{S}$ gefunden haben, dessen β-Moment existiert. Mit Blick auf die Darstellung (4.22) folgt dann

$$\hat{F} = \mathscr{S}^n\left(\hat{F}\right) = \mathscr{L}\left(\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, X(\mathbf{i}) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\mathbf{i}|=k} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i})\right),$$

für $(X(\mathbf{i}))_{|\mathbf{i}|\geq 0}$ iid mit Verteilung $\hat{F}$, also insbesondere

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, X(\mathbf{i}) + \sum_{|\mathbf{i}|\leq n-1} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}) \xrightarrow{d} X(\emptyset),\ n \to \infty. \tag{4.23}$$

Gehen wir nun zusätzlich davon aus, dass $\varphi(1 \wedge \beta) < 1$ gilt, so folgt für alle $\epsilon > 0$ mit der Markov-Ungleichung und (4.30), welches wir erst später beweisen, aber keine weiteren Voraussetzungen benötigt,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, X(\mathbf{i})\right| > \epsilon\right) &\leq \frac{1}{\epsilon^{1\wedge\beta}} \mathbb{E}\left[\left|\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, X(\mathbf{i})\right|^{1\wedge\beta}\right] \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^{1\wedge\beta}} \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})\, X(\mathbf{i})|^{1\wedge\beta}\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^{1\wedge\beta}} \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^{1\wedge\beta}\, \mathbb{E}\left[|X(\mathbf{i})|^{1\wedge\beta} \middle| \mathfrak{F}_n\right]\right] \\
&\overset{(4.30)}{=} \frac{1}{\epsilon^{1\wedge\beta}} \|X(\emptyset)\|_{1\wedge\beta}\, \varphi(1\wedge\beta)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

D.h. $\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, X(\mathbf{i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \to \infty$. Nun gilt mit (4.23) und dem Satz von Slutsky[17]

$$\sum_{|\mathbf{i}|\leq n} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}) \xrightarrow{d} X(\emptyset),\ n \to \infty.$$

Da diese Folge nicht von dem oben angenommenen Fixpunkt $\hat{F}$ von $\mathscr{S}$ abhängt, stehen wir damit vor der Frage, unter welchen Voraussetzungen wir andersherum über den Grenzwert dieser Folge einen Fixpunkt von $\mathscr{S}$ definieren können. Die Antwort (Satz 4.10 (a)) ist positiv, denn wir benötigen noch geringere Voraussetzungen als oben. Wir fordern für ein $\beta > 0$

$$\|C\|_\beta,\ \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta < \infty \text{ und } \psi(\beta) < 1, \tag{4.24}$$

[17] Vgl. Satz 36.12 aus [2].

wobei wir $\psi : (0,\infty) \to [0,\infty]$ durch

$$\psi(\gamma) := \begin{cases} \varphi(\gamma), & \text{falls } \gamma \in (0,1] \\ \varphi(\gamma) \vee \left| \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right|, & \text{falls } \gamma \in [1,2] \\ \varphi(\gamma) \vee \varphi(2) \vee \left| \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right|, & \text{falls } \gamma \in [2,\infty) \end{cases}$$

definieren. Hierbei folgt in (4.24) die Bedingung $\left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta < \infty$ aus der Bedingung $\psi(\beta) < 1$, falls $\beta \leq 1$ ist. Denn in diesem Fall gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)^\beta\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\beta\right] = \varphi(\beta).$$

Bemerkung 4.8. Wir stellen mit unseren Bedingungen (4.24) schwächere Forderungen an $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ als Kapitel 4 in [10], denn dort wird (4.24) mit $\psi^*(\beta) < 1$ anstelle von $\psi(\beta) < 1$ gefordert, wobei $\psi^* : (0,\infty) \to [0,\infty]$ durch

$$\psi^*(\gamma) := \begin{cases} \varphi(\gamma), & \text{falls } \gamma \in (0,1] \\ \varphi(\gamma) \vee \varphi(1), & \text{falls } \gamma \in [1,\infty) \end{cases}$$

definiert ist. Da φ konvex ist und $\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| \leq \varphi(1)$ gilt, folgt $\psi \leq \psi^*$. Also sind die Bedingungen (4.24) in der Tat die schwächeren.

Gehen wir nun davon aus, dass die Bedingungen (4.24) für ein $\beta > 0$ erfüllt sind. Wir wollen eine Zufallsgröße R konstruieren, die die Gleichung (1.1) löst, und dies werden wir über eine Folge $(R^n)_{n\geq 1}$ erreichen, deren $\mathbb{P}$-f.s.-Grenzwert R sein wird. Zunächst definieren wir für $n \geq 0$

$$W_n := \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}).$$

Dass die Zufallsgrößen W_n existieren, stellen schon die Bedingungen (4.24) sicher. Falls $\beta \geq 1$ impliziert $\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i})|\right] = \varphi(1) \|C\|_1 < \infty$ insbesondere $\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i})| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s.. Falls $\beta \leq 1$ sieht man analog $\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i})|^\beta < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s., was $\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i})| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. impliziert (hier gilt $x^\beta > x$ für $x \in (0,1)$).

Mit Blick auf Abbildung 1 aus Kapitel 2 ist W_n die Summe über die n-te Generation der Gewichte $\Pi(\mathbf{i})$ multipliziert mit $C(\mathbf{i})$. Für $n \geq 1$ lassen sich die W_n durch

$$\begin{aligned} W_n &= \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}) = \sum_{j\geq 1} \sum_{|\mathbf{i}|=n,\, \mathbf{i}|1=j} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}) \\ &= \sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset) \sum_{i_2,\dots,i_n\in\mathbb{N}} \left(\prod_{l=1}^{n-1} T_{i_{l+1}}(ji_2...i_l)\right) C(ji_2...i_n) = \sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset)\, W_{n-1,j} \end{aligned} \quad (4.25)$$

beschreiben. Hierbei wird $(W_{0,j})_{j\geq 1} := (C(j))_{j\geq 1}$ und

$$W_{m,j} := \sum_{i_1,\dots,i_m\in\mathbb{N}} C(ji_1...i_m) \prod_{l=0}^{m-1} T_{i_{l+1}}(ji_1...i_l)$$

für $m, j \geq 1$ gesetzt. Da die $(C(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{i}), T_2(\mathbf{i}), T_3(\mathbf{i}), \dots)_{|\mathbf{i}|\leq m+1}$ iid sind, gilt ebenfalls, dass die $(W_{m,j})_{j\geq 1}$ iid sind und $W_{m,1} \stackrel{d}{=} W_m$ für alle $m \geq 0$ gilt.

Mit Blick auf Abbildung 1 veranschaulicht sich die Zerlegung (4.25) durch den Übergang auf die Teilbäume unterhalb der Knoten in der 1. Generation. Gehen wir für $j \in \mathbb{N} = \mathbb{N}^1$ auf den Teilbaum unterhalb des Knotens j über, so entsprechen die $\tilde{W}_{n-1}$ bezogen auf diesen Teilbaum eben den $W_{n-1,j}$. Denn innerhalb des Teilbaums mit Wurzel j ist $\tilde{\Pi}(\mathbf{i}) = \frac{\Pi(\mathbf{i})}{T_j(\emptyset)}$ das Gewicht des Knoten $\mathbf{i} = ji_2...i_n$, da hier der Pfad von $\mathbf{i}$ zur neuen Wurzel j und nicht mehr bis $\emptyset$ führt (insbesondere $\tilde{\Pi}(j) \equiv 1$).

Weiter definieren wir nun

$$R^n := \sum_{k=0}^{n} W_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|\mathbf{i}|=k} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}).$$

Wir wollen zeigen, dass der $\mathbb{P}$-f.s.-Limes der Folge $(R^n)_{n\geq 1}$ existiert und dieser die Gleichung (1.1) löst. Für $(R^n)_{n\geq 1}$ erhalten wir eine Rekursion. Analog bzw. mithilfe der Zerlegung (4.25) gilt nämlich für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} R^n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset)\, W_{k-1,j} + W_0 = \sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset) \sum_{k=0}^{n-1} W_{k,j} + C(\emptyset) \\ &= \sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset)\, R_j^{n-1} + C(\emptyset). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Hierbei definieren wir für $j \geq 1$ und $m \geq 0$

$$R_j^m := \sum_{k=0}^{m} W_{k,j}.$$

Da $(W_{m,j})_{j\geq 1}$ iid ist, gilt dies auch für $\left(R_j^m\right)_{j\geq 1}$, für $m \geq 0$. $W_{m,1} \stackrel{d}{=} W_m$ impliziert nun $R_j^m \stackrel{d}{=} R^m$, für $m \geq 0$. Also zeigt (4.26), dass für alle $n \geq 1$ insbesondere $\mathscr{S}(\mathscr{L}(R^{n-1})) = \mathscr{L}(R^n)$ und somit $\mathscr{S}^n(\mathscr{L}(C)) = \mathscr{L}(R^n)$ gilt. Hierbei setzen wir $\mathscr{L}(R^n) \in \mathfrak{D}$ für $n \geq 1$ voraus. Letzteres ist mit Lemma 4.9 und Bemerkung 4.7 (b) klar.

Wichtig für die $\mathbb{P}$-f.s.-Konvergenz der Folge $(R^n)_{n\geq 1}$ ist das folgende Lemma, dessen Beweis wir am Ende des Abschnitts angeben.

Lemma 4.9. *Gegeben ein $\beta > 0$ und ein reeller Zufallsvektor $(C, T_1, T_2, T_3, \dots)$, die die Bedingungen (4.24) erfüllen, existiert ein $K_\beta > 0$ (unabhängig von n), sodass für alle $n \geq 1$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left[|W_n|^\beta\right] \leq K_\beta \cdot \psi(\beta)^n.$$

Somit gilt insbesondere $\|R^n\|_\beta < \infty$, da die R^n endliche Summen von Zufallsgrößen mit β-Moment sind. Gelten die Bedingungen (4.24) für ein $\beta > 0$, so können wir

$$R := \sum_{k\geq 0} W_k \tag{4.27}$$

definieren. Die Zufallsgröße R und sogar deren β-Moment existieren:

Satz 4.10. *Gegeben ein $\beta > 0$ und ein reeller Zufallsvektor $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$, folgt aus den Bedingungen (4.24):*

(a) Es existiert ein $\mathbb{P}$-f.s. Limes R der Folge $(R^n)_{n\geq 1}$, der sich durch (4.27) beschreiben lässt und für den $\|R\|_\beta < \infty$ gilt. Die Konvergenz ist ebenfalls in L_β, falls $\beta \geq 1$.

(b) R ist Lösung der Gleichung (1.1) und $\mathscr{L}(R)$ ein Fixpunkt der Abbildung $\mathscr{S}$.

(c) Es gilt $\mathscr{S}(P_\beta(\mathbb{R})) \subset P_\beta(\mathbb{R})$ und für alle $F \in P_\beta(\mathbb{R})$ darüber hinaus

$$\mathscr{S}^n(F) \xrightarrow{w} \mathscr{L}(R),\ n \to \infty.$$

Dies zeigt insbesondere, dass $\mathscr{L}(R)$ eindeutiger Fixpunkt von $\mathscr{S}$ in $P_\beta(\mathbb{R})$ ist.

Beweis. Wir stellen zunächst fest:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k>n}|W_k|\right\|_\beta^{1\vee\beta} &\leq \left(\sum_{k>n}\|W_k\|_\beta\right)^{1\vee\beta} \overset{\textit{Lemma } 4.9}{\leq} K_\beta\left(\sum_{k>n}(\psi(\beta))^{k\cdot 1\wedge\frac{1}{\beta}}\right)^{1\vee\beta} \\ &= \frac{K_\beta(\psi(\beta))^{n+1}}{\left(1-(\psi(\beta))^{1\wedge\frac{1}{\beta}}\right)^{1\vee\beta}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

(a) Mit der Markov-Ungleichung folgt für alle $\epsilon > 0$ mittels (4.28)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{m>n}|R^m - R^n| > \epsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{m>n}\sum_{k=n+1}^{m}|W_k| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{k>n}|W_k| > \epsilon\right) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^\beta}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k>n}|W_k|\right)^\beta\right] = \frac{1}{\epsilon^\beta}\left\|\sum_{k>n}|W_k|\right\|_\beta^{1\vee\beta} \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

da $\psi(\beta) < 1$. Damit ist $R^n \to R$ $\mathbb{P}$-f.s. und insbesondere die Existenz der Zufallsgröße R sichergestellt.

Mit analoger Argumentation folgt für das β-Moment von R

$$\|R\|_\beta \leq \sum_{k\geq 0}\|W_k\|_\beta \leq K_\beta^{1\wedge\frac{1}{\beta}}\sum_{k\geq 0}\psi(\beta)^{k\cdot 1\wedge\frac{1}{\beta}} = \frac{K_\beta^{1\wedge\frac{1}{\beta}}}{1-\psi(\beta)^{1\wedge\frac{1}{\beta}}} < \infty.$$

Für die L_β-Konvergenz im Fall $\beta \geq 1$ sehen wir nun, dass

$$\mathbb{E}\left[|R - R^n|^\beta\right] = \left\|\sum_{k>n} |W_k|\right\|_\beta^{1\vee\beta}$$

gilt und mit (4.28) die Behauptung folgt.

(b) In (a) haben wir gesehen, dass R eine Zufallsgröße ist, deren β-Moment existiert. Mittels Bemerkung 4.7 (b) gilt somit $\mathscr{L}(R) \in \mathfrak{D}$. Darüber hinaus ist R eine Lösung der Gleichung (1.1), denn mit der Zerlegung (4.26) gilt

$$\begin{aligned} R = \lim_{n\to\infty} R^n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset) R_j^{n-1} + C(\emptyset) \\ &= \sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset) \lim_{n\to\infty} R_j^{n-1} + C(\emptyset) = \sum_{j\geq 1} T_j R_j + C, \end{aligned}$$

wobei $(R_j)_{j\geq 1} := \left(\sum_{k\geq 0} W_{k,j}\right)_{j\geq 1}$ iid mit $R_1 \stackrel{d}{=} R$. Wir können hier $\lim_{n\to\infty}$ und $\sum_{j\geq 1}$ vertauschen, da wir den Satz von der majorisierten Konvergenz bzgl. des Zählmaßes anwenden können und $\sum_{j\geq 1} |T_j(\emptyset) R_j| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. aus $\mathscr{L}(R) \in \mathfrak{D}$ folgt.

(c) Gegeben ein $F \in P_\beta(\mathbb{R})$, gilt aufgrund von Bemerkung 4.7 (b) zunächst $F \in \mathfrak{D}$. Es gilt weiter $\mathscr{S}(F) \in P_\beta(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{D}$, da $\|C\|_\beta < \infty$. $\|\mathscr{S}(F)\|_\beta < \infty$ wird sichergestellt durch

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j X_j|\right)^\beta\right] \\ &\leq \begin{cases} \|X_1\|_{\lceil\beta\rceil - 1}^\beta \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta + \|X_1\|_\beta \varphi(\beta) < \infty, & \text{falls } \beta > 1 \text{ und} \\ \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\beta \, \mathbb{E}\left[|X_j|^\beta \,\middle|\, (T_k)_{k\geq 1}\right]\right] = \|X_1\|_\beta \varphi(\beta) < \infty, & \text{falls } \beta \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei wir im Fall $\beta > 1$ Bemerkung 4.2 benutzt haben. Damit haben wir $\mathscr{S}(P_\beta(\mathbb{R})) \subset P_\beta(\mathbb{R})$ gezeigt und es folgt $\mathscr{S}^n(F) \in P_\beta(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{D}$ für alle $n \geq 1$.

Sei X Zufallsgröße mit Verteilung F. Wir betrachten den reellen Zufallsvektor $(X, T_1, T_2, T_3, ...)$ für einen Moment als Grundlage unseres Modells (anstelle von $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$). Dieser erfüllt ebenso die Bedingungen in (4.24) (hier geht $\|X\|_\beta < \infty$ ein) und damit gilt mit $W_n^X = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i}) X(\mathbf{i})$ und Lemma 4.9 für ein $K_\beta^X > 0$ für alle $\epsilon > 0$ mittels der Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i}) X(\mathbf{i})\right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^\beta} \mathbb{E}\left[|W_n^X|^\beta\right] \stackrel{\text{Lemma 4.9}}{\leq} \frac{K_\beta^X}{\epsilon^\beta} \psi(\beta)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also gilt $\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i}) X(\mathbf{i}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \to \infty$.

Nun zurück zum ursprünglichen Modell mit Grundlage $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$. Da $R^{n-1} \xrightarrow{d} R$, $n \to \infty$, (folgt aus (a)), schließen wir mittels dem Satz von Slutsky[18]

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i}) X(\mathbf{i}) + R^{n-1} \xrightarrow{d} R,\ n \to \infty,$$

was aufgrund von (4.22) mit $\mathscr{S}^n(F) \xrightarrow{w} \mathscr{L}(R)$, $n \to \infty$, gleichbedeutend ist. Ist $\hat{F} \in P_\beta(\mathbb{R})$ ein Fixpunkt von $\mathscr{S}$, so gilt damit $\hat{F} = \mathscr{S}^n\left(\hat{F}\right) \xrightarrow{w} \mathscr{L}(R)$, was die Eindeutigkeitsaussage zeigt.

□

Bemerkung 4.11. Die Voraussetzungen des Lemmas 4.9 und des Satzes 4.10 sind durch die Bedingungen (4.24) gegeben. Wie in Bemerkung 4.8 begründet sind diese schwächer als die Voraussetzungen in den entsprechenden Lemmata 4.3, 4.4 und 4.1 in [10]. Außerdem wird die Existenz der Lösung R in den Arbeiten von Olvera-Cravioto und Jelenković nur für $\beta \leq 1$ oder $T_j \geq 0$, $j \geq 1$ gezeigt und die Eindeutigkeitsaussage nur im Fall $\beta \leq 1$ und $T_j \geq 0$, $j \geq 1$.[19]

Die Anforderungen an $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ sind jedoch in den Theoremen 5.45 (für $\beta < 1$), 5.48 ($\beta \in (1, 2]$) und 5.53 ($\beta > 2$) in [3] zu finden, in denen die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes von $\mathscr{S}$ in $P_\beta(\mathbb{R})$ bewiesen wird.

Nun kommen wir zum Beweis von Lemma 4.9: Wie wir in Kürze sehen, löst sich der Fall $\beta \leq 1$ so elegant wie schnell durch die Subadditivität der Funktion $x \mapsto x^\beta$. Für $\beta > 1$ wird wesentlich mehr zu tun sein - im Fall $\beta \in (1, 2]$ wird die Topchii-Vatutin-Ungleichung (vgl. Kapitel D) an entscheidender Stelle eingehen. Im Gegensatz zu dem Beweis von Theorem 5.53 in [3] nutzen wir hier im Fall $\beta > 2$ nicht zudem die Burkholder-Ungleichung[20], sondern nutzen mit Lemma 4.1 eine Methode aus [10], um die Reduktion des Exponenten zu erreichen.

Beweis von Lemma 4.9. Zunächst betrachten wir den Fall $\beta \in (0, 1]$. Wie oben erwähnt ist $x \mapsto x^\beta$ in diesem Fall subadditiv, d.h. für $(x_j)_{n \geq 1} \in [0, \infty)^{\mathbb{N}}$ gilt $\left(\sum_{j=1} x_j\right)^\beta \leq \sum_{j=1} x_j^\beta$. Damit folgt für $n \geq 1$ mittels der Zerlegung (4.25)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|W_n|^\beta\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset) W_{n-1,j}\right|^\beta\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j(\emptyset)|^\beta |W_{n-1,j}|^\beta \,\middle|\, (T_k(\emptyset))_{k\geq 1}\right]\right] \\ &= \varphi(\beta)\,\mathbb{E}\left[|W_{n-1}|^\beta\right] \overset{iterativ}{=} \varphi(\beta)^n \mathbb{E}\left[|W_0|^\beta\right] = \mathbb{E}\left[|C|^\beta\right] \psi(\beta)^n. \end{aligned}$$

[18] Vgl. Satz 36.12 aus [2].

[19] Vgl. zur Existenz Lemma 4.1 in [10] bzw. Kapitel 4 in [11] und zur Eindeutigkeit Lemma 4.5 in [11].

[20] Vgl. Theorem B.4 in [3].

Setzen wir nun $K_\beta := \mathbb{E}\left[|C|^\beta\right] < \infty$, so folgt die Behauptung für $\beta \leq 1$.

Kommen wir zum Fall $\beta > 1$. Für diesen Fall genügt es zu zeigen, dass für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ mit $p > 1$ die Behauptung für alle $\beta \in (p-1, p]$ gilt. Hierfür führen wir eine Induktion nach p, die den Rest des Beweises einnehmen wird. Sei also zunächst für den **Induktionsanfang** p = 2.

Wir wählen ein beliebiges $\beta \in (1, 2]$ und für β seien die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Wir erinnern an die σ-Algebren $\mathfrak{F}_n$ in (2.1). Für festes $n \geq 1$ definieren wir für einen Moment den stochastischen Kern P_n, wobei $P_n(\omega, \cdot) := \mathbb{P}^{\cdot|\mathfrak{F}_n}(\omega, \cdot)$ sei, d.h. für messbares A gilt $P_n(\omega, A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathfrak{F}_n](\omega)$. Dies bedeutet insbesondere, dass für eine P_n-quasiintegrierbare Zufallsgröße X

$$E_n[X] = \mathbb{E}[X|\mathfrak{F}_n] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt. Wir definieren weiter für $k \geq 1$

$$M_k^n := \sum_{l=1}^{k} \Pi\left(\mathbf{i}^l\right)\left(U\left(\mathbf{i}^l\right) - \mathbb{E}\left[U\left(\mathbf{i}^l\right)\right]\right)$$

und $M_0^n := 0$, wobei $\left\{\mathbf{i}^l \middle| l \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{N}^n$ und $U(\mathbf{i}) := \sum_{j\geq 1} T_j(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}j)$ gelte. Um die Momente von W_n abzuschätzen ist M_k^n aufgrund der Beziehung

$$M_\infty^n := \liminf_{k\to\infty} M_k^n = W_{n+1} - \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}[U(\mathbf{i})] \tag{4.29}$$

für $n \geq 0$ interessant, die wir später in (4.33) zeigen werden.

Wir wollen zunächst zeigen, dass $(M_k^n)_{k\geq 0}$ unter P_n (d.h. unter $\mathfrak{F}_n$ bedingt) ein Martingal bildet. Für $k \geq 0$ nutzen wir, dass $E_n[U(\mathbf{i})] = \mathbb{E}[U(\mathbf{i})|\mathfrak{F}_n] = \mathbb{E}[U(\mathbf{i})]$ $\mathbb{P}$-f.s. für $|\mathbf{i}| = n$ gilt, da $U(\mathbf{i})$ und $\mathfrak{F}_n$ unabhängig sind, und folgern

$$\begin{aligned}
E_n\left[M_{k+1}^n - M_k^n \middle| M_k^n\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{k+1}^n - M_k^n \middle| M_k^n\right] \middle| \mathfrak{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[M_{k+1}^n - M_k^n \middle| \mathfrak{F}_n\right] \middle| M_k^n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Pi\left(\mathbf{i}^{k+1}\right)\mathbb{E}\left[U\left(\mathbf{i}^{k+1}\right) - \mathbb{E}\left[U\left(\mathbf{i}^{k+1}\right)\right] \middle| \mathfrak{F}_n\right] \middle| M_k^n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Pi\left(\mathbf{i}^{k+1}\right)\cdot 0 \middle| M_k^n\right] = 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}
\end{aligned}$$

Also ist $(M_k^n)_{k\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $(\sigma(M_1^n, ..., M_k^n))_{k\geq 0}$ unter P_n. Mit der Topchii-Vatutin-Ungleichung (vgl. Kapitel D) erhalten wir nun ($x \mapsto |x|^\beta$ ist konvex mit konkaver Ableitung auf $(0, \infty)$ und $|0|^\beta = 0$)

$$\begin{aligned}
E_n\left[|M_\infty^n|^\beta\right] &\leq 2\sum_{l\geq 1} E_n\left[\left|M_l^n - M_{l-1}^n\right|^\beta\right] \\
&= 2\sum_{l\geq 1} E_n\left[\left|\Pi\left(\mathbf{i}^l\right)\right|^\beta \left|U\left(\mathbf{i}^l\right) - \mathbb{E}\left[U\left(\mathbf{i}^l\right)\right]\right|^\beta\right] \\
&= 2\sum_{l\geq 1} \mathbb{E}\left[\left|\Pi\left(\mathbf{i}^l\right)\right|^\beta \left|U\left(\mathbf{i}^l\right) - \mathbb{E}\left[U\left(\mathbf{i}^l\right)\right]\right|^\beta \middle| \mathfrak{F}_n\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2 \sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^{\beta} \, \mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i}) - \mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|^{\beta} \middle| \mathfrak{F}_n \right] \\
&= 2 \sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^{\beta} \, \mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i}) - \mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|^{\beta} \right] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},
\end{aligned}
$$

wobei wir die Unabhängigkeit von $U(\mathbf{i})$ und $\mathfrak{F}_n$ für $|\mathbf{i}| = n$ genutzt haben. Hierfür gilt für $|\mathbf{i}| = n$ auf der einen Seite

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^{\beta} \right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n-1} |\Pi(\mathbf{i})|^{\beta} \, \mathbb{E}\left[\sum_{j \geq 1} |T_j(\mathbf{i})|^{\beta} \middle| \mathfrak{F}_n \right] \right] \\
&= \varphi(\beta) \, \mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n-1} |\Pi(\mathbf{i})|^{\beta} \right] \overset{\text{iterativ}}{=} \varphi(\beta)^n \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

aufgrund der Unabhängigkeit von $\mathfrak{F}_n$ und $(T_1(\mathbf{i}), T_2(\mathbf{i}), T_3(\mathbf{i}), ...)$, sowie auf der anderen Seite mittels der elementaren Ungleichung (4.5) ($x = |U(\mathbf{i})|, t = |\mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|$)

$$
\begin{aligned}
\frac{K_\beta^*}{2} &:= \mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i}) - \mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|^{\beta} \right] \leq \mathbb{E}\left[(|U(\mathbf{i})| + |\mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|)^{\beta} \right] \\
&\overset{(4.5)}{\leq} \mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i})|^{\beta} \right] + \beta \mathbb{E}\left[(|U(\mathbf{i})| + |\mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|)^{\beta-1} \right] |\mathbb{E}[U(\mathbf{i})]| \\
&\overset{\beta-1\leq 1}{\leq} \mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i})|^{\beta} \right] + \beta \mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i})|^{\beta-1} \right] |\mathbb{E}[U(\mathbf{i})]| + \beta \, |\mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|^{\beta}. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

Dies ist genau dann endlich, wenn $\mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i})|^{\beta} \right] < \infty$ ist, und dafür gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i})|^{\beta} \right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j \geq 1} |T_j(\mathbf{i})| \, |C(\mathbf{i}j)| \right)^{\beta} \right] \\
&\overset{\text{Bem. 4.2}}{\leq} \mathbb{E}\left[|C|^{p-1} \right]^{\frac{\beta}{p-1}} \left\| \sum_{j \geq 1} |T_j| \right\|_{\beta}^{\beta} + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j \geq 1} |T_j(\mathbf{i})|^{\beta} \, |C(\mathbf{i}j)|^{\beta} \middle| (T_k)_{k \geq 1} \right] \right] \\
&\leq \|C\|_1^{\beta} \left\| \sum_{j \geq 1} |T_j| \right\|_{\beta}^{\beta} + \varphi(\beta) \, \|C\|_{\beta}^{\beta} < \infty.
\end{aligned}
$$

Zusammen liefern also (4.30) und die Endlichkeit von (4.31)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|M_\infty^n|^{\beta} \right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|M_\infty^n|^{\beta} \middle| \mathfrak{F}_n \right] \right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} |\Pi(\mathbf{i})|^{\beta} \, \mathbb{E}\left[|U(\mathbf{i}) - \mathbb{E}[U(\mathbf{i})]|^{\beta} \right] \right] \leq K_\beta^* \varphi(\beta)^n. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Im folgenden weisen wir die Beziehung (4.29) nach, wobei wir in der zweiten Zeile zum Limes übergehen können, da die W_n als $\mathbb{P}$-f.s.-Limes existieren und (4.30) gilt:

$$\begin{aligned} M_\infty^n &= \liminf_{k\to\infty} M_k^n = \liminf_{k\to\infty} \sum_{l=1}^k \Pi\left(\mathbf{i}^l\right)\left(U\left(\mathbf{i}^l\right) - \mathbb{E}\left[U\left(\mathbf{i}^l\right)\right]\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^k \Pi\left(\mathbf{i}^l\right) U\left(\mathbf{i}^l\right) - \lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^k \Pi\left(\mathbf{i}^l\right) \mathbb{E}\left[U\left(\mathbf{i}^l\right)\right] \\ &= \sum_{|\mathbf{i}|=n} \sum_{j\geq 1} \Pi(\mathbf{i})\, T_j(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}j) - \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}[U(\mathbf{i})] \\ &= W_{n+1} - \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}[U(\mathbf{i})] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Wir berechnen mittels der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}[U(\mathbf{i})] \right\|_\beta &= \left\| \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right] \mathbb{E}[C] \right\|_\beta \\ &= \left\| \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}[C(\mathbf{i}) \,|\mathfrak{F}_n] \right\|_\beta \left| \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| \\ &= \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i}) \middle| \mathfrak{F}_n\right]\right|^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} \left| \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left|\sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, C(\mathbf{i})\right|^\beta \middle| \mathfrak{F}_n\right]\right]^{\frac{1}{\beta}} \left| \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| \\ &= \|W_n\|_\beta \left| \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right|, \end{aligned} \tag{4.34}$$

wobei wir die Unabhängigkeit von $C(\mathbf{i})$ und $\mathfrak{F}_n$ und die Messbarkeit von $\Pi(\mathbf{i})$ bzgl. $\mathfrak{F}_n$ für $|\mathbf{i}| = n$ genutzt haben. Setzen wir in

$$\|W_{n+1}\|_\beta \overset{(4.29)}{=} \left\| M_\infty^n + \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}[U(\mathbf{i})] \right\|_\beta \leq \|M_\infty^n\|_\beta + \left\| \sum_{|\mathbf{i}|=n} \Pi(\mathbf{i})\, \mathbb{E}[U(\mathbf{i})] \right\|_\beta$$

(4.32) und (4.34) ein, so erhalten wir iterativ

$$\|W_{n+1}\|_\beta \leq \left(K_\beta^*\right)^{\frac{1}{\beta}} \varphi(\beta)^{\frac{n}{\beta}} + \left| \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| \|W_n\|_\beta \leq \left(K_\beta^*\right)^{\frac{1}{\beta}} \psi(\beta)^{\frac{n}{\beta}} + \psi(\beta)\, \|W_n\|_\beta$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ldots \leq \left(K_\beta^*\right)^{\frac{1}{\beta}} \sum_{k=0}^{n} \psi(\beta)^{\frac{n-k}{\beta}} \psi(\beta)^k + \psi(\beta)^{n+1} \|W_0\|_\beta \\
&= \left(K_\beta^*\right)^{\frac{1}{\beta}} \psi(\beta)^{\frac{n}{\beta}} \sum_{k=0}^{n} \left(\psi(\beta)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right)^k + \psi(\beta)^{n+1} \|C\|_\beta \\
&\leq \left(K_\beta^*\right)^{\frac{1}{\beta}} \psi(\beta)^{\frac{n}{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\psi(\beta)^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right)^k + \psi(\beta)^{\frac{n+1}{\beta}} \|C\|_\beta \\
&= \left(\frac{\left(K_\beta^*\right)^{\frac{1}{\beta}} \psi(\beta)^{\frac{-1}{\beta}}}{1-\psi(\beta)^{\frac{\beta-1}{\beta}}} + \|C\|_\beta\right) \psi(\beta)^{\frac{n+1}{\beta}} =: \left(K_\beta\right)^{\frac{1}{\beta}} \psi(\beta)^{\frac{n+1}{\beta}}
\end{aligned}
$$

mit $K_\beta < \infty$ nach den Voraussetzungen. Zusammengefasst zeigen wir also den Induktionsanfang ($p = 2$), denn für alle $\beta \in (p-1, p] = (1, 2]$ und alle $n \geq 0$ gilt unter den Bedingungen (4.24) für β

$$
\mathbb{E}\left[|W_{n+1}|^\beta\right] \leq \|W_{n+1}\|_\beta^\beta \leq K_\beta \psi(\beta)^{n+1}.
$$

Kommen wir nun zum **Induktionsschritt**. Sei also $p \in \{3, 4, 5, \ldots\}$ beliebig und gelte die Behauptung für alle $2, \ldots, p-1$. Sei $\beta \in (p-1, p]$ beliebig. Wir stellen fest, dass die Bedingungen (4.24) auch für alle $\beta' \in [2, \beta]$ erfüllt sind (insbesondere für $\beta' = \lceil \beta \rceil - 1 = p-1$), da sie für β erfüllt sind. Dies liegt unter anderem daran, dass ψ auf $[2, \infty)$ monoton wachsend ist (φ ist auf $(0, \infty)$ konvex). Also können wir mittels der Induktionsvoraussetzung nun die Aussage für alle $\beta' \in [2, p-1]$ verwenden.

Wir berechnen mit der Zerlegung (4.25)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|W_n|^\beta\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1} T_j(\emptyset) W_{n-1,j}\right|^\beta\right] \\
&\overset{\text{Bem. 4.2}}{\leq} \|W_{n-1}\|_{p-1}^\beta \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta^\beta + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j(\emptyset)|^\beta |W_{n-1,j}|^\beta \,\middle|\, (T_k(\emptyset))_{k\geq 1}\right]\right] \\
&\overset{\text{I.V.}}{\leq} \left(K_{p-1}\psi(p-1)^{n-1}\right)^{\frac{\beta}{p-1}} \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta^\beta + \varphi(\beta)\, \mathbb{E}\left[|W_{n-1}|^\beta\right] \\
&\leq K_\beta^* \psi(\beta)^{\frac{\beta(n-1)}{p-1}} + \psi(\beta)\, \mathbb{E}\left[|W_{n-1}|^\beta\right]
\end{aligned}
$$

mit $K_\beta^* := \left(K_{p-1}\right)^{\frac{\beta}{p-1}} \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta^\beta$, wobei wir die Monotonie von ψ auf $[2, \infty)$ genutzt haben. Nach den Bedingungen (4.24) und der Induktionsvoraussetzung gilt

$K_\beta^* < \infty$. Iterativ folgt damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|W_n|^\beta\right] &\leq ... \leq K_\beta^* \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\beta)^{\frac{\beta}{p-1}(n-1-k)} \psi(\beta)^k + \psi(\beta)^n \mathbb{E}\left[|C|^\beta\right] \\ &= \left(K_\beta^* \psi(\beta)^{-\frac{\beta}{p-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\psi(\beta)^{\frac{\beta}{p-1}-1}\right)^{n-k} + \|C\|_\beta^\beta\right) \psi(\beta)^n \\ &\leq \left(K_\beta^* \psi(\beta)^{-\frac{\beta}{p-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\psi(\beta)^{\frac{\beta}{p-1}-1}\right)^{k} + \|C\|_\beta^\beta\right) \psi(\beta)^n =: K_\beta \psi(\beta)^n\end{aligned}$$

mit $K_\beta < \infty$, da $\psi(\beta) < 1$ und $K_\beta^*, \|C\|_\beta < \infty$. Damit ist die Behauptung für alle $\beta \in (p-1, p]$ gezeigt. Dies schließt die Induktion nach p und damit den Fall $\beta > 2$ ab, somit auch den Beweis des Lemmas. $\square$

Bemerkung 4.12. Im Kapitel 5 in [3] wird die Abbildung $\mathscr{S}$ intensiver betrachtet. Dort wird auf $P_\beta(\mathbb{R})$ die Metrik

$$l_\beta(F, G) := \min_{\mathscr{L}(X)=F,\ \mathscr{L}(Y)=G} \|X - Y\|_\beta$$

definiert und unter anderem gezeigt, dass unter eben unseren Bedingungen (4.24) die Abbildung $\mathscr{S}$ eine Kontraktion des metrischen Raums $(P_\beta(\mathbb{R}), l_\beta)$ bildet, d.h.

$$l_\beta(\mathscr{S}(F), \mathscr{S}(G)) \leq c \cdot l_\beta(F, G) \text{ für alle } F, G \in P_\beta(\mathbb{R})$$

für ein $c \in (0, 1)$ gilt, und somit einen eindeutigen Fixpunkt besitzt (vgl. Satz 4.10). Es wird ebenfalls gezeigt, dass $\mathscr{S}^n(F)$ in l_β gegen den Fixpunkt konvergiert (in Satz 4.10 (c) Konvergenz in Verteilung).

4.3 Tailverhalten von Lösungen

Gegeben ein $\alpha > 0$, ein reeller Zufallsvektor $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ und ein $\epsilon' > 0$, sodass für alle $\beta' \in (\alpha - \epsilon', \alpha)$ die Bedingungen (4.24) erfüllt sind, existiert nach Satz 4.10 eine Lösung $R \in \cap_{\beta<\alpha} L_\beta$ zu (1.1), deren Verteilung $\mathscr{L}(R)$ in $\cap_{\beta<\alpha} P_\beta(\mathbb{R})$ eindeutig ist. Es gilt hierbei $P_{\beta_1}(\mathbb{R}) \supset P_{\beta_2}(\mathbb{R})$ sowie $L_{\beta_1} \supset L_{\beta_2}$ für alle $\beta_1 < \beta_2$. Der nun folgende Satz 4.13 charakterisiert in genau dieser Situation das asymptotische Verhalten der Tails der Lösung R. Der Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes B.2 von Goldie, der das asymptotische Verhalten der Tails einer Lösung der Gleichung

$$R \stackrel{d}{=} TR + C$$

untersucht.

Satz 4.13. *Gegeben ein $\alpha > 0$ und ein reeller Zufallsvektor $(C, T_1, T_2, ...)$ mit $\|C\|_\alpha < \infty$ und $\mathbb{P}(C \neq 0) > 0$, seien sowohl* (IRT-1) *bis* (IRT-3) *als auch*

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] < \infty \text{ für ein } \epsilon \in (0,1), \qquad \text{falls } \alpha \leq 1,$$

$$\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| < 1 \text{ und } \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\alpha < \infty, \qquad \text{falls } \alpha > 1, \text{ sowie zusätzlich}$$

$$\varphi(2) < 1, \qquad \text{falls } \alpha > 2$$

erfüllt. Dann ist (4.24) *für $\beta < \alpha$ groß genug erfüllt; sei R eine Lösung zu* (1.1) *in $\cap_{\beta<\alpha} L_\beta$. Es gilt:*

(a) Ist $\mathbb{P}(T_j \geq 0$ für alle $j \geq 1) = 1$, so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R > t) = H_+ \text{ und } \lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R < -t) = H_-,$$

wobei

$$\begin{aligned} H_\pm &:= \frac{1}{\mu_\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathbb{P}(\pm R > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{\pm T_j R > t\}}\right]\right) dt \\ &= \frac{1}{\alpha\mu_\alpha} \mathbb{E}\left[\left(\left(\sum_{j\geq 1} T_j R_j + C\right)^\pm\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1} \left((T_j R_j)^\pm\right)^\alpha\right]. \end{aligned}$$

(b) Ist $\mathbb{P}(T_j < 0$ für ein $j \geq 1) > 0$ und $\mathbb{P}(T_j > 0$ für ein $j \geq 1) > 0$, so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R > t) = \lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R < -t) = H,$$

wobei

$$\begin{aligned} H &:= \frac{H_+ + H_-}{2} = \frac{1}{2\mu_\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathbb{P}(|R| > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{|T_j R| > t\}}\right]\right) dt \\ &= \frac{1}{2\alpha\mu_\alpha} \mathbb{E}\left[\left|\sum_{j\geq 1} T_j R_j + C\right|^\alpha - \sum_{j\geq 1} |T_j R_j|^\alpha\right]. \end{aligned}$$

Beweis von Satz 4.13. Wir nutzen die Voraussetzung $\varphi\left(\frac{\alpha}{1+\epsilon}\right) < \infty$ im Fall $\alpha \leq 1$ sowie $\varphi(1) = \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_1 \leq \left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\alpha < \infty$ im Fall $\alpha > 1$ um zu folgern, dass ein $\gamma^* \in (0, \alpha)$ mit $\varphi(\gamma^*) < \infty$ existiert. Also sind mit Bemerkung 3.8 für $\beta < \alpha$ groß genug alle Bedingungen in (4.24) erfüllt, da dann nach den gegebenen Voraussetzungen $\psi(\beta) < 1$, $\|C\|_\beta$, $\left\|\sum_{j\geq 1} |T_j|\right\|_\beta < \infty$ gelten. Mit Satz 4.10 folgt die Existenz einer Lösung R mit $\|R\|_\beta < \infty$ für alle $\beta \in (0, \alpha)$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 3.5 bis auf die Bedingungen (3.1) und (3.3) erfüllt.

Um diese Bedingungen nachzuweisen, benötigen wir die Lemmata 4.3, 4.4 und 4.5. Wir wollen zuerst zeigen, dass alle deren Bedingungen erfüllt sind: Mithilfe von $\varphi(\beta), \|R\|_\beta < \infty$ folgt $\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j R_j|^\beta\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\beta \, \mathbb{E}\left[|R_j|^\beta \middle| (T_k)_{k\geq 1}\right]\right] < \infty$, also insbesondere $\sum_{j\geq 1} |T_j R_j|^\beta < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt. Dies impliziert $\sum_{j\geq 1} |T_j R_j|^\alpha < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s., da $x^\alpha \leq x^\beta$ für $x \in (0,1)$. Aus dem gleichen Grund folgt $\sum_{j\geq 1} |T_j R_j| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s., falls $\alpha \leq 1$. Falls $\alpha > 1$ liefern $\varphi(1), \|R\|_1 < \infty$ mit einer ähnlichen Argumentation $\sum_{j\geq 1} |T_j R_j| < \infty$ $\mathbb{P}$-f.s.. Damit sind die Voraussetzungen der Lemmata 4.4 und 4.5 erfüllt. Im Fall $\alpha > 1$ erhalten wir die Voraussetzungen von Lemma 4.3 durch

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)^{\alpha}\right] < \infty,$$

für $\epsilon \in (0,1)$ mit $\frac{\alpha}{1+\epsilon} > 1$.

Für $d(\cdot) = \mathrm{id}$ bzw. $d(\cdot) = -\mathrm{id}$ ist

$$\int_0^\infty \left| \mathbb{P}(d(R) > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{d(T_j R_j) > t\}}\right]\right| t^{\alpha-1} dt < \infty$$

zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left| \mathbb{P}(d(R) > t) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{d(T_j R_j) > t\}}\right]\right| t^{\alpha-1} dt \\
&\leq \int_0^\infty \left| \mathbb{P}(d(R) > t) - \mathbb{P}\left(\sup_{j\geq 1} d(T_j R_j) > t\right)\right| t^{\alpha-1} dt \\
&\quad + \int_0^\infty \left| \mathbb{P}\left(\sup_{j\geq 1} d(T_j R_j) > t\right) - \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{d(T_j R_j) > t\}}\right]\right| t^{\alpha-1} dt
\end{aligned}$$

und mit Lemma 4.3 bleibt nur noch zu zeigen, dass das erste Integral endlich ist. Da $R \stackrel{d}{=} \sum_{j\geq 1} T_j R_j + C$ gilt, folgt mit Bemerkung C.2 (b) und den Lemmata 4.5, 4.4 und 4.3:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left| \mathbb{P}\left(d\left(\sum_{j\geq 1} T_j R_j + C\right) > t\right) - \mathbb{P}\left(\sup_{j\geq 1} d(T_j R_j) > t\right)\right| t^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}\left| \left(\left(d\left(\sum_{j\geq 1} T_j R_j + C\right)\right)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sup_{j\geq 1} d(T_j R_j)\right)^+\right)^\alpha \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}\left| \left(\left(d\left(\sum_{j\geq 1} T_j R_j + C\right)\right)^+\right)^\alpha - \left(\left(d\left(\sum_{j\geq 1} T_j R_j\right)\right)^+\right)^\alpha \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left|\left(\left(d\left(\sum_{j\geq 1} T_j R_j\right)\right)^+\right)^\alpha - \sum_{j\geq 1}\left(\left(d\left(T_j R_j\right)\right)^+\right)^\alpha\right| \\
&+ \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1}\left(\left(d\left(T_j R_j\right)\right)^+\right)^\alpha - \left(\left(\sup_{j\geq 1} d\left(T_j R_j\right)\right)^+\right)^\alpha\right| \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Für die Anwendung der Lemmata nutzen wir $(d(\cdot))^+ = (\cdot)^+$, falls $d(\cdot) = \mathrm{id}$, und $(d(\cdot))^+ = (\cdot)^-$, falls $d(\cdot) = -\mathrm{id}$. Die Behauptungen (a) und (b) sowie ebenfalls die verschiedenen Darstellungen für H_+, H_- und H folgen aus Satz 3.5. □

Bemerkung 4.14. (a) Wie in Bemerkung 4.8 merken wir an dieser Stelle an, dass die Bedingungen an $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ in Satz 4.13 schwächer sind als die Bedingungen in Satz 4.6 in [10], denn dort wird im Fall $\alpha > 1$ gefordert, dass $\varphi(1) < 1$ gilt. Wegen der Konvexität von φ und Bemerkung 3.8 gilt $\varphi(2) < 1$, falls $\varphi(1) < 1$. Aufgrund von $\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| \leq \varphi(1)$ sind die Bedingungen in Satz 4.13 in der Tat die schwächeren.

(b) Wenden wir nun die Bemerkung 3.6 (c) auf die Situation von Satz 4.13 an, so folgt hier direkt aus den Voraussetzungen des Satzes, dass die Funktionen

$$
t \mapsto \mathbb{P}(R > t) = \mathbb{P}\left(\sum_{j\geq 1} T_j R_j + C > t\right) \text{ und } t \mapsto \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j R_j > t\}}\right]
$$

das gleiche asymptotische Verhalten haben, falls $\mathbb{E}\left[(R^+)^\alpha\right] = \infty$ gilt. Ebenso gilt das negative Pendant.

5 Der PageRank

Führende Suchmaschinen verwalten eine große Datenbank mit analysierten Webseiten.[21] Wenn nach einem Begriff gesucht wird, ist die Frage, welche der infrage kommenden Seiten aus der Datenbank dem Suchenden zuoberst angezeigt werden soll. Ein wichtiges Instrument für dieses Ranking ist im Falle der Suchmaschine Google der PageRank, benannt nach dem Google Mitbegründer Larry Page.[22] Jeder analysierten Webseite wird ein solcher PageRank zugewiesen, welcher mithilfe des Webgraphen bestimmt wird (siehe Abschnitt 5.1). Die Idee des PageRank ist es, die Bedeutsamkeit einer Website zu bemessen, in dem zur Bestimmung die Rückverweise der Seite sowie deren Bedeutsamkeit verwendet werden. Je höher der PageRank einer Website, desto interessanter ist sie für den Suchenden und sollte auch weiter oben in der Ergebnisliste eingeordnet werden.

[21]Vgl. Abschnitte 4.2 und 4.3 in [5] zur Webseitenanalyse (Crowling).

[22]Vgl. http://www.google.com/competition/howgooglesearchworks.html (19.09.2012).

In diesem Kapitel werden wir zuerst den PageRank von Google vorstellen (Abschnitt 5.1) und unsere Ergebnisse aus Kapitel 4 danach auf diesen anwenden, um auszusagen, wie sich die Tails eines PageRanks R einer zufällig ausgewählten Seite verhalten (Abschnitte 5.2 und 5.3), d.h. eine Idee der Antwort auf die Frage zu bekommen, wie wahrscheinlich es ist, viele Webseiten mit einem hohen PageRank vorzufinden.

Grundlage für das Kapitel 5 ist [9], wobei wir in Abschnitt 5.1 ebenfalls [5] zugrunde legen.

5.1 Googles PageRank

Wir betrachten eine zugrundeliegende Menge $\mathscr{M}$ von Webseiten und Hyperlinks zwischen Webseiten, die zusammen den zugehörigen Webgraphen bilden. Die Knotenmenge des Webgraphen bildet $\mathscr{M}$, die Menge $\mathscr{E}$ der gerichteten Kanten besteht aus den Hyperlinks, d.h. für $p, q \in \mathscr{M}$ gilt genau dann $p \to q \in \mathscr{E}$, wenn es auf der Webseite q einen Hyperlink gibt, der auf p verweist. Eine Kante $p \to q \in \mathscr{E}$ nennen wir auch einen Rückverweis auf die Webseite p.

Für eine Webseite $p \in \mathscr{M}$ sei

(i) $R(p)$ der *PageRank* von p,

(ii) $\mathscr{M}(p) := \{q \in \mathscr{M} \,|\, p \to q \in \mathscr{E}\}$ die Menge der Websites, die einen Rückverweis auf p enthalten, und

(iii) $L(p) := |\{q \in \mathscr{M} \,|\, q \to p \in \mathscr{E}\}|$ die Anzahl der von p ausgehenden Hyperlinks.

Weiter sei $d \in (0,1)$ ein Parameter.[23] Für eine beliebige Webseite $p \in \mathscr{M}$ soll gelten

$$R(p) = \frac{1-d}{|\mathscr{M}|} + d \sum_{q \in \mathscr{M}(p)} \frac{R(q)}{L(q)}, \tag{5.1}$$

wobei die leere Summe $\sum_{q \in \emptyset} \frac{R(q)}{L(q)} = 0$ definiert wird. Zunächst gibt uns (5.1) ein Gleichungssystem mit $|\mathscr{M}|$ Gleichungen an, welches wir durch einen Vektor $(R(p))_{p \in \mathscr{M}}$ lösen möchten.

Bemerkung 5.1. (a) In der Beschreibung des PageRank (5.1) wird der Rang einer Seite $q \in \mathscr{M}(p)$, die einen Rückverweis auf p enthält, mit $\frac{1}{L(q)}$ gewichtet. Dies passiert, um der Idee Rechnung zu tragen, dass Webseiten mit übermäßig vielen Hyperlinks über eine darauf verlinkte Seite eine geringere Aussage haben, als Seiten mit wenigen Hyperlinks.

(b) Ist R eine Lösung des durch (5.1) gegebenen Gleichungssystems mit $R(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathscr{M}$, so ist

$$R : \mathscr{M} \to [0,1] \,;\, p \mapsto R(p)$$

[23] Meist wird $d = 0,85$ angenommen. Vgl. Abschnitt 2 in [5] und Abschnitt 1.1 in [9].

die Zähldichte einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathscr{M}$. Da in der doppelten Summe $\sum_{p\in\mathscr{M}}\sum_{q\in\mathscr{M}(p)}\frac{R(q)}{L(q)}$ der Bruch $\frac{R(q)}{L(q)}$ für ein festes q genau $L(q)$-mal vorkommt (aufgrund von $L(q) = |\{p \in \mathscr{M} \,|\, q \in \mathscr{M}(p)\}|$), folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathscr{M}} R(p) &= \sum_{p\in\mathscr{M}} \frac{1-d}{|\mathscr{M}|} + d\sum_{p\in\mathscr{M}}\sum_{q\in\mathscr{M}(p)} \frac{R(q)}{L(q)} = 1-d+d\sum_{q\in\mathscr{M}} L(q)\frac{R(q)}{L(q)} \\
\iff (1-d)\sum_{p\in\mathscr{M}} R(p) &= 1-d \\
\iff \sum_{p\in\mathscr{M}} R(p) &= 1.
\end{aligned}$$

(c) Wir definieren für $n := |\mathscr{M}|$ zwei Matrizen ${}_1A, {}_2A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$${}_1A_{pq} := \begin{cases} \dfrac{1}{L(q)}, & \text{falls } q \in \mathscr{M}(p) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad {}_2A_{pq} := 1$$

für alle $p, q \in \mathscr{M}$. Dann ist $R = (R(p))_{p\in\mathscr{M}}$ genau dann ein Lösungsvektor des zu (5.1) gehörigen Gleichungssystems, wenn $\sum_{p\in\mathscr{M}} R(p) = 1$ und

$$R = \frac{1-d}{|\mathscr{M}|}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} + d\cdot {}_1A\cdot R = \left(\frac{1-d}{|\mathscr{M}|}\cdot {}_2A + d\cdot {}_1A\right)\cdot R$$

erfüllt sind. Wir suchen also einen normierten, nichtnegativen Eigenvektor von $A := (1-d)\,|M|^{-1}\cdot {}_1A + d\cdot {}_2A$.

Mit $\sum_{q\in\mathscr{M}}\frac{1-d}{|\mathscr{M}|}+\sum_{q\in\mathscr{M}(p)}\frac{d}{L(q)} = 1$ für alle $p\in\mathscr{M}$ folgt, dass A eine stochastische Matrix ist (Zeilen summieren sich zu 1). Somit ist die Frage nach einer Lösung zu (5.1) genau die Frage nach einer stationären Verteilung der zu A gehörigen Markovkette.

5.2 Übertragung auf die Gleichung $R \stackrel{d}{=} \sum_{j\geq 1} T_j R_j + C$

Hier betrachten wir nun einen Teilgraphen des Webgraphen (aus Abschnitt 5.1), der eine Baumstruktur besitzt.

Sei R der PageRank einer zufällig ausgewählten Seite. Wir können R durch die stochastische Rekursionsgleichung

$$R \stackrel{d}{=} c\sum_{j=1}^{N}\frac{R_j}{D_j} + \gamma \tag{5.2}$$

beschreiben, wobei $\gamma, c > 0$ Konstanten und N, $(D_j)_{j\geq 1}$, $(R_j)_{j\geq 1}$ Zufallsgrößen sind, sodass

(a) $(D_j)_{j\geq 1}$ iid mit $D_1 \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und $\mathbb{E}\left[\frac{1}{D_1}\right] < 1$,

(b) N $\mathbb{N}_0$-wertig,

(c) $(R_j)_{j\geq 1}$ iid mit $R_1 \stackrel{d}{=} R$ und

(d) N, $(D_j)_{j\geq 1}$, $(R_j)_{j\geq 1}$ unabhängig sind.

In (5.1) entsprechen γ bzw. c dem Bruch $(1-d)\,|\mathscr{M}|^{-1}$ bzw. d, N der Anzahl an Rückverweise auf die Webseite im Teilgraphen und die D_j der Anzahl der ausgehenden Hyperlinks $L(q_j)$ im Webgraphen der j-ten verweisenden Webseite q_j. Um die Unabhängigkeitsforderung aufrecht zu halten, geht hier die Baumstruktur ein, denn mit Zyklen innerhalb des Teilgraphen könnten die $(R_j)_{j\geq 1}$ nicht plausibel als unabhängig angenommen werden. Außerdem führt die Reduktion auf einen Teilgraphen dazu, dass die Folgerung einer Summation zu 1 von $R : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ aus (5.1) nicht auf die Lösung R der Gleichung (5.2) übertragen werden kann, da diese Reduktion nicht bei $L(\cdot)$ durchgeführt wird und dies weiterhin im ganzen Webgraphen gemessen wird (vgl. Bemerkung 5.1 (b)). In der Tat kann eine solche Lösung von (5.2) mit positiver Wahrscheinlichkeit Werte größer 1 annehmen.

Die Gleichung (5.2) wird nun in einem Schritt verallgemeinert zu der stochastischen Rekursionsgleichung

$$R \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{N} \hat{T}_j R_j + C, \tag{5.3}$$

wobei N, $\left(\hat{T}_j\right)_{j\geq 1}$, C, $(R_j)_{j\geq 1}$ Zufallsgrößen sind, sodass

(a) $\left(\hat{T}_j\right)_{j\geq 1}$ iid mit $\hat{T}_1 \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s.,

(b) N $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$-wertig, C mit $C \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und $\mathbb{P}(C \neq 0) > 0$,

(c) $(R_j)_{j\geq 1}$ iid mit $R_1 \stackrel{d}{=} R$ und

(d) N, $\left(\hat{T}_j\right)_{j\geq 1}$, C, $(R_j)_{j\geq 1}$ unabhängig sind.

In (5.1) entsprechen C dem dort konstanten Bruch $(1-d)\,|\mathscr{M}|^{-1}$, N der Anzahl an Rückverweise auf die Webseite im Teilgraphen und $\hat{T}_j$ dem Bruch $\frac{d}{L(q_j)}$ für die j-te verweisende Webseite q_j.

5.3 Tailverhalten von Lösungen der PageRank-Gleichung

Betrachten wir den PageRank R einer zufällig ausgewählten Seite, d.h. eine Lösung zur Gleichung (5.3). Die Frage nach der Existenz einer solchen Lösung R und dem

Verhalten von deren Tails beantwortet der Satz 5.2, der den Satz 4.13 auf unser Beispiel anwendet.

Zunächst formulieren wir für $\alpha > 0$ Bedingungen für den in diesem Kapitel behandelten Fall, die den Bedingungen (IRT-1) bis (IRT-3) entsprechen werden:

$$\mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}\left[\hat{T}_1^\alpha\right] = 1 \tag{5.4}$$

$$\mathbb{E}\left[\hat{T}_1^\alpha \log\left(\hat{T}_1\right)\right] \in (0,\infty] \tag{5.5}$$

$$\mathbb{P}\left(\log\left(\hat{T}_1\right) \in \cdot, \hat{T}_1 \neq 0\right) \text{ ist nichtarithmetisch.} \tag{5.6}$$

Nun können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 5.2. *Gegeben ein $\alpha > 0$ und ein reeller Zufallsvektor $\left(N, C, \hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3, ...\right)$, sodass N $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$-wertig, $C \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s., $\left(\hat{T}_j\right)_{j\geq 1}$ iid mit $\hat{T}_1 \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und N, C, $\left(\hat{T}_j\right)_{j\geq 1}$ unabhängig sind, seien weiterhin $\|C\|_\alpha < \infty$,* (5.4) *bis* (5.6)*, sowie*

$$\mathbb{E}\left[N^{1+\epsilon}\right] < \infty \text{ für ein } \epsilon \in (0,1)\,, \qquad \text{falls } \alpha \leq 1 \text{ und}$$

$$\mathbb{E}\left[N^\alpha\right] < \infty \text{ sowie } \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}\left[\hat{T}_1\right] < 1, \qquad \text{falls } \alpha > 1$$

erfüllt. Dann existiert eine Lösung $R \in \cap_{\beta<\alpha} L_\beta$ zu der Gleichung (5.3)*, deren Verteilung in $\cap_{\beta<\alpha} P_\beta(\mathbb{R})$ eindeutig ist und für die $R \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. sowie*

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R > t) = H_+$$

gilt, wobei

$$\begin{aligned} H_+ :=& \frac{1}{\mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}\left[\hat{T}_1^\alpha \log \hat{T}_1\right]} \int_0^\infty \left(\mathbb{P}(R>t) - \mathbb{E}[N]\,\mathbb{P}\left(\hat{T}_1 R > t\right)\right) t^{\alpha-1} dt \\ =& \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^N \hat{T}_j R_j + C\right)^\alpha - \sum_{j=1}^N \left(\hat{T}_j R_j\right)^\alpha\right]}{\alpha \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}\left[\hat{T}_1^\alpha \log \hat{T}_1\right]}. \end{aligned}$$

Beweis. Seien $T_j := \mathbb{1}_{\{N\geq j\}} \hat{T}_j$ für $j \geq 1$ ($\left(T_j\right)_{j\geq 1}$ i.A. also weder unabhängig noch gleichverteilt). Dann ist (5.3) gleichbedeutend mit (1.1) für $(C, T_1, T_2, T_3, ...)$ und wir wollen Satz 4.13 darauf anwenden. Aufgrund von (5.4) bis (5.6) gilt

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left[\hat{T}_j^\alpha \middle| N\right]\right] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}\left[\hat{T}_j\right] \overset{(5.4)}{=} 1, \tag{IRT-1}$$

$$\begin{aligned} \mu_\alpha = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} |T_j|^\alpha \log|T_j|\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \hat{T}_j^\alpha \mathbb{1}_{\{N\geq j\}} \log\left(\hat{T}_j \mathbb{1}_{\{N\geq j\}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N \mathbb{E}\left[\hat{T}_j^\alpha \log \hat{T}_j \middle| N\right]\right] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}\left[\hat{T}_1^\alpha \log \hat{T}_1\right] \overset{(5.5)}{\in} (0,\infty] \end{aligned} \tag{IRT-2}$$

(hier ging $0^\alpha \log 0 = 0$ ein) und

$$\mathbb{P}\left(\log T_1 \in \cdot, T_1 \neq 0\right) = \mathbb{P}\left(\log \hat{T}_1 \in \cdot, \hat{T}_1 \neq 0\right) \mathbb{P}\left(N \geq 1\right) \tag{IRT-3}$$

ist aufgrund von (5.6) nichtarithmetisch

(hier ging die Unabhängigkeit von N und $\hat{T}_1$ ein).

Weiter gilt für $\alpha \leq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right)^{1+\epsilon}\right] &\overset{\text{Bem 4.2}}{\leq} \left\|\hat{T}_1^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right\|_1^{1+\epsilon} \left\|\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\leq 1\}}\right\|_{1+\epsilon}^{1+\epsilon} + \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}(1+\epsilon)}\right] \\ &= \left\|\hat{T}_1^{\frac{\alpha}{1+\epsilon}}\right\|_1^{1+\epsilon} \mathbb{E}\left[N^{1+\epsilon}\right] + \mathbb{E}\left[N\right]\mathbb{E}\left[\hat{T}_1^{\alpha}\right] < \infty\end{aligned}$$

und für $\alpha > 1$

$$\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j\right]\right| = \mathbb{E}\left[N\right]\mathbb{E}\left[\hat{T}_1\right] < 1$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j\geq 1} |T_j|\right)^{\alpha}\right] &\overset{\text{Bem 4.2}}{\leq} \left\|\hat{T}_1\right\|_{\lceil\alpha\rceil-1}^{\alpha} \left\|\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\geq j\}}\right\|_{\alpha}^{\alpha} + \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} T_j^{\alpha}\right] \\ &= \left\|\hat{T}_1\right\|_{\lceil\alpha\rceil-1}^{\alpha} \|N\|_{\alpha}^{\alpha} + \mathbb{E}\left[N\right]\mathbb{E}\left[\hat{T}_1^{\alpha}\right] < \infty.\end{aligned}$$

Da alle Voraussetzungen erfüllt sind, existiert nach Satz 4.13 die Zufallsgröße R als Lösung von (5.3). Nach der Konstruktion in (4.27) sehen wir sofort, dass $R \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s.. Wir sind in Fall (a) von Satz 4.13, also folgen mit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j R > t\}}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\geq j\}} \mathbb{1}_{\{\hat{T}_j R > t\}}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\geq j\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\hat{T}_j R > t\}} \middle| N\right]\right] \\ &= \mathbb{P}\left(\hat{T}_1 R > t\right) \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{N\geq j\}}\right] = \mathbb{E}\left[N\right]\mathbb{P}\left(\hat{T}_1 R > t\right)\end{aligned} \tag{5.7}$$

für $t > 0$ die Behauptungen. □

Bemerkung 5.3. Die Bedingung (3.1), die im Beweis von Satz 4.13 nachgewiesen wird, vereinfacht sich hier unter den Gegebenheiten von Satz 5.2 zu

$$\int_0^{\infty} \left|\mathbb{P}\left(R > t\right) - \mathbb{E}\left[N\right]\mathbb{P}\left(\hat{T}_1 R > t\right)\right| t^{\alpha-1} dt < \infty$$

(vgl. Rechnung (5.7)). Hieraus folgt insbesondere, dass

$$t \mapsto \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \hat{T}_j R + C > t\right) \text{ und } t \mapsto \mathbb{E}\left[N\right]\mathbb{P}\left(\hat{T}_1 R > t\right)$$

das gleiche asymptotische Verhalten besitzen, falls $\mathbb{E}\left|R^{\alpha}\right| = \infty$ (vgl. Bemerkung 3.6 (c)).

A Das Key Renewal Theorem

Eine wichtige Anwendung von Blackwells Erneuerungsthorem[24] ist das Key Renewal Theorem, welches ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis des Impiliziten Erneuerungstheorems von Goldie ist (Satz B.1). Wir wollen hier sowohl das Key Renewal Theorem als auch eine Verallgemeinerung dessen auf eine Matrix-Version vorstellen, die entsprechend für den Beweis des Impliziten Erneuerungstheorems mit Verzweigung von entscheidender Bedeutung ist (Satz 3.5). Zunächst eine Definition.

Definition A.1. Für ein endliches Maß F heißt

$$\mathbb{U} := \sum_{n \geq 0} F^{*n}$$

das zu F gehörige *Erneuerungsmaß*. Für eine $n \times n$-Matrix H, deren Einträge endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ sind, heißt

$$\mathbb{U} := \sum_{n \geq 0} H^{*n}$$

das zu H gehörige *Matrixerneuerungsmaß*.

Damit lautet das Key Renewal Theorem:[25]

Satz A.2. *Gegeben eine nichtarithmetische Verteilung F mit Erneuerungsmaß $\mathbb{U}$ und Erwartungswert $\mu \in (0, \infty]$, gilt für jede dRi Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\lim_{t \to \infty} (\mathbb{U} * f)(t) = \frac{1}{\mu} \int_{\mathbb{R}} f \ d\boldsymbol{\lambda}.$$

Bemerkung A.3. Gegeben ein $\alpha > 0$ und ein reellen Zufallsvektor $(T_j)_{j \geq 1}$, die (IRT-1) und (IRT-2) erfüllen, ist η genau dann nichtarithmetisch, wenn (IRT-3) gilt. Dies liegt daran, dass für $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\eta(A) = \sum_{j \geq 1} \mathbb{E}\left[|T_j|^{\alpha} \mathbb{1}_A (\log |T_j|)\right]$$

gilt.

In der Situation von Satz 3.5 Fall (a) folgt mit Satz A.2 für jede dRi Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{t \to \infty} \left(\nu^+ * f\right)(t) = \frac{1}{\mu_\alpha} \int_{\mathbb{R}} f \ d\boldsymbol{\lambda}.$$

[24] Vgl. Theorem 1 in Kapitel 11 §9 in [6].

[25] Vgl. Bemerkung nach Theorem 1 in Kapitel 11 §9 in [6] bzw. für $\mu = \infty$ Theorem 4 in [12] mit $n = 1$.

Für die verallgemeinerte Version benötigen wir die folgende Definition.[26] Eine Matrix $P \in \{0,1\}^{n\times n}$ heißt *Permutationsmatrix*, falls jede Zeilen- und jede Spaltensumme 1 ergeben, also falls in jeder Spalte und jeder Zeile genau eine 1 steht.

Definition A.4. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *reduzibel*, falls

(a) $n = 1$ und $A = 0$ gilt oder

(b) ein $r \in \{1, ..., n-1\}$ und eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existieren, sodass

$$P^T AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

für Matrizen $A_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{r\times n-r}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{n-r\times n-r}$ und die Nullmatrix $0 \in \mathbb{R}^{n-r\times r}$ gilt.

Eine Matrix, die nicht reduzibel ist, heißt *irreduzibel*.

Für eine Matrix A ist ihre Irreduzibilität gleichbedeutent mit der Irreduzibilität von A^T: Ist A reduzibel, erfüllt also (A.1) für eine Permutationsmatrix P, so gilt für Einheitsmatrizen $I_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $I_2 \in \mathbb{R}^{n-r\times n-r}$ und Nullmatrizen $0_1 \in \mathbb{R}^{r\times n-r}$, $0_2 \in \mathbb{R}^{n-r\times r}$

$$\begin{pmatrix} 0_1 & I_1 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}^T P^T A^T P \begin{pmatrix} 0_1 & I_1 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0_1 & I_1 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}^T P^T AP \begin{pmatrix} 0_1 & I_1 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} \right)^T$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 0_1 & I_1 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_1 & I_1 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} \right)^T = \left(\begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} A_3^T & A_2^T \\ 0^T & A_1^T \end{pmatrix},$$

also erfüllt A^T (A.1) für $\hat{r} := n - r$ und $\hat{P} := P \begin{pmatrix} 0_1 & I_1 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$.

Gegeben eine nichtnegative, irreduzible Matrix A mit Eigenwert 1 als betragsmäßig größtem Eigenwert ($|\lambda| \leq 1$ für alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A), besitzt der Eigenraum zu 1 die algebraische Vielfachheit 1, einen linken Eigenvektor l und einen rechten r mit $l_i, r_i \geq 0$ für alle $i = 1, ..., n$.[27] Dies wird im folgenden Satz auf die Matrix $H(\mathbb{R})$ angewendet, die aufgrund der Nichtnegativität der Einträge von H nichtnegativ ist.

Für eine $n \times n$-Matrix H von Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ sei

$$H(B) := (H_{i,j}(B))_{1\leq i,j\leq n} \in [0,\infty]^{n\times n}.$$

Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bzgl. allen $H_{i,j}$ quasiintegrierbare Funktion, so sei

$$\int_{\mathbb{R}} g \; dH := \left(\int_{\mathbb{R}} g \; dH_{i,j} \right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Nun kommen wir zum verallgemeinerten Key Renewal Theorem:[28]

[26] Vgl. Definition 6.2.21 in [8].
[27] Vgl. Theorem 8.4.4 in [8]. Wir nutzen, dass l rechter Eigenvektor zu A^T ist.
[28] Vgl. Theorem 4 in [12].

Satz A.5. *Sei H eine symmetrische $n \times n$-Matrix, deren Einträge endliche Maße auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ sind und für die $\sum_{1 \leq i,j \leq n} H_{i,j}$ nichtarithmetisch ist, und $\mathbb{U}$ ihr Matrixerneuerungsmaß. Nehmen wir an, dass $H(\mathbb{R})$ eine irreduzible Matrix mit Eigenwert 1 als betragsmäßig größtem Eigenwert ist, l linker und r rechter Eigenvektor zum Eigenwert 1 mit $l_i, r_i \geq 0$ für alle $i = 1, ..., n$ sind und $\mu^* := l \cdot \int_{\mathbb{R}} id \, dH \cdot r \in (0, \infty]$, so gilt für dRi Funktionen $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, ..., n$,*

$$\lim_{t\to\infty} (\mathbb{U} * f)(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} (U_{i,j} * f_i)(t) \right)_{1 \leq j \leq n} = \frac{rl}{\mu^*} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j \; d\boldsymbol{\lambda} \right)_{1 \leq j \leq n}.$$

Bemerkung A.6. (a) In Theorem 4 in [12] sind die Voraussetzungen an die Matrix H schwächer. Wir haben hier auf diese allgemeinere Version dennoch verzichtet, um die Übersichtlichkeit und Funktionalität des Anhangs zu wahren.

(b) Befinden wir uns in der Situation von Fall (b) des Beweises von Satz 3.5, so gilt hier insbesondere $\eta^+, \eta^- \not\equiv 0$ und

$$H = \begin{pmatrix} \eta^+ & \eta^- \\ \eta^- & \eta^+ \end{pmatrix}, \; \mathbb{U} = \mathbb{G}.$$

Da $H(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix mit nichtverschwindenden Einträgen ist, ist $H(\mathbb{R})$ offensichtlich irreduzibel, weiter sind $1 = \eta(\mathbb{R}) = \eta^+(\mathbb{R}) + \eta^-(\mathbb{R})$ (vgl. (IRT-1)) und $\eta^+(\mathbb{R}) - \eta^-(\mathbb{R}) \in (-1, 1)$ Eigenwerte von $H(\mathbb{R})$ und es gilt

$$l = (1 \; 1), \; r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mu^* = 2 \int \text{id} \; d\eta = 2\mu_\alpha, \; f = \overline{g} = \begin{pmatrix} \overline{g^+} \\ \overline{g^-} \end{pmatrix}.$$

Mit $\sum_{1 \leq i,j \leq 2} H_{i,j} = 2\eta$ folgt durch (IRT-3), dass $\sum_{1 \leq i,j \leq 2} H_{i,j}$ nichtarithmetisch ist. Also können wir hier mit Satz A.5 schießen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} (\mathbb{G} * \overline{g})(t) &= \lim_{t\to\infty} (\mathbb{U} * f)(t) = \frac{rl}{\mu^*} \left(\int f_j \; d\boldsymbol{\lambda} \right)_{1 \leq j \leq 2} \\ &= \frac{1}{2\mu_\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int \overline{g^+} \; d\boldsymbol{\lambda} \\ \int \overline{g^-} \; d\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu_\alpha} \begin{pmatrix} \int \overline{g^+} + \overline{g^-} \; d\boldsymbol{\lambda} \\ \int \overline{g^+} + \overline{g^-} \; d\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

B Goldies Implizites Erneuerungstheorem

Der Satz 3.5 verallgemeinert das von Goldie (1991) in [7] gegebene Implizite Erneuerungstheorem, welches den Fall ohne Verzweigung betrachtet und im folgenden angegeben wird. Wir legen eine Zufallsgröße T zugrunde und die Bedingungen (IRT-1) bis (IRT-3) entsprechen in diesem Fall für $\alpha > 0$

$$\mathbb{E}\left[|T|^\alpha\right] = 1 \tag{IRT-1*}$$

$$\mathbb{E}\left[|T|^\alpha \log |T|\right] \in (0, \infty] \tag{IRT-2*}$$

$$\mathbb{P}(\log |T| \in \cdot, \; T \neq 0) \; \text{ ist nichtarithmetisch.} \tag{IRT-3*}$$

Goldies Implizites Erneuerungstheorem lautet nun:[29]

Satz B.1. *Gegeben ein $\alpha > 0$ und eine reelle Zufallsgröße T, die* (IRT-1*) *bis* (IRT-3*) *erfüllen, sei X eine von T unabhängige Zufallsgröße.*

(a) Falls $T \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s., so gilt:

(1) Ist $\mathbb{E}\left[(X^+)^\beta\right] < \infty$ für alle $\beta \in [0, \alpha)$ und

$$\int_0^\infty \left|\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{P}(TX > t)\right| t^{\alpha-1} dt < \infty, \tag{B.1}$$

so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = H_+,$$

(2) ist $\mathbb{E}\left[(X^-)^\beta\right] < \infty$ für alle $\beta \in [0, \alpha)$ und

$$\int_0^\infty \left|\mathbb{P}(X < -t) - \mathbb{P}(TX < -t)\right| t^{\alpha-1} dt < \infty, \tag{B.2}$$

so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) = H_-,$$

wobei $H_\pm \in [0, \infty)$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} H_\pm :=& \frac{1}{\mu_\alpha} \int_0^\infty \left(\mathbb{P}(\pm X > t) - \mathbb{P}(\pm TX > t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ =& \frac{1}{\alpha\mu_\alpha} \mathbb{E}\left[\left(X^\pm\right)^\alpha - \left((TX)^\pm\right)^\alpha\right]. \end{aligned}$$

(b) Falls $\mathbb{P}(T < 0) > 0$, $\mathbb{P}(T > 0) > 0$ und $\mathbb{E}\left[|X|^\beta\right] < \infty$ für alle $\beta \in [0, \alpha)$, so folgt, falls (B.1) *und* (B.2) *erfüllt sind,*

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = \lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) = H = \frac{H_+ + H_-}{2},$$

wobei

$$\begin{aligned} H :=& \frac{1}{2\mu_\alpha} \int_0^\infty \left(\mathbb{P}(|X| > t) - \mathbb{P}(|TX| > t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ =& \frac{1}{2\alpha\mu_\alpha} \mathbb{E}\left[|X|^\alpha - |TX|^\alpha\right]. \end{aligned}$$

[29] Theorem 2.3 in [7].

Neben Satz B.1 betrachtet Goldie auch die stochastische Rekursionsgleichung

$$R \stackrel{d}{=} TR + C \tag{1.1*}$$

und beweist für eine Lösung dieser Gleichung ein Analogon bzw. einen Spezialfall von Satz 4.13:[30]

Satz B.2. *Gegeben ein $\alpha > 0$ und ein reeller Zufallsvektor (C, T) mit $\mathbb{P}(C \neq 0) > 0$ und $\|C\|_\alpha < \infty$, seien (IRT-1*) bis (IRT-3*) erfüllt. Dann existiert eine Lösung R zu (1.1*) in $\cap_{\beta<\alpha} L_\beta$, deren Verteilung in $\cap_{\beta<\alpha} P_\beta(\mathbb{R})$ eindeutig ist, und es gilt:*

(a) Ist $T \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s., so folgt

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R > t) = H_+ \text{ und } \lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R < -t) = H_-,$$

wobei

$$\begin{aligned} H_\pm &:= \frac{1}{\mu_\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathbb{P}(\pm R > t) - \mathbb{P}(\pm TR > t)\right) dt \\ &= \frac{1}{\alpha\mu_\alpha} \mathbb{E}\left[\left((TR + C)^\pm\right)^\alpha - \left((T_j R_j)^\pm\right)^\alpha\right] \end{aligned}$$

(b) Ist $\mathbb{P}(T < 0) > 0$ und $\mathbb{P}(T > 0) > 0$, so folgt:

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R > t) = \lim_{t\to\infty} t^\alpha \mathbb{P}(R < -t) = H,$$

wobei

$$\begin{aligned} H &:= \frac{H_+ + H_-}{2} = \frac{1}{2\mu_\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\mathbb{P}(|R| > t) - \mathbb{P}(|TR| > t)\right) dt \\ &= \frac{1}{2\alpha\mu_\alpha} \mathbb{E}\left[|TR + C|^\alpha - |TR|^\alpha\right] \end{aligned}$$

C Grundlegende Integralgleichung

Lemma C.1. *Seien $Y, X, X_1, X_2, X_3, \ldots$ Zufallsgrößen und $\alpha > 0$. Dann gilt*

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{\{X>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}\left|\left(X^+\right)^\alpha - \left(Y^+\right)^\alpha\right|. \tag{C.1}$$

Falls

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_j>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1} dt < \infty \tag{C.2}$$

und $\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \left(X_j^+\right)^\beta\right] < \infty$ für ein $\beta \in (0, \alpha]$ erfüllt ist, gilt ebenfalls

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_j>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right] t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \left(X_j^+\right)^\alpha - \left(Y^+\right)^\alpha\right]. \tag{C.3}$$

[30] Vgl. Satz 4.1 in [7].

Beweis. Zunächst gilt aufgrund von Tonelli (Riemann- und Lebesgue-Integral entsprechen sich aufgrund von Bemerkung C.2 (c))

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{\{X>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1} dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left|\mathbb{1}_{\{X>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1} dt\right].$$

Sei nun $\omega \in \Omega$. Falls $X(\omega) \geq Y(\omega)$, so gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\mathbb{1}_{\{X>t\}}(\omega) - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}(\omega)\right| t^{\alpha-1} dt &= \int_0^\infty \left(\mathbb{1}_{\{X>t\}}(\omega) - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}(\omega)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \left|\int_0^\infty \left(\mathbb{1}_{\{X>t\}}(\omega) - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}(\omega)\right) t^{\alpha-1} dt\right|. \qquad \text{(C.4)}\end{aligned}$$

Da dies symmetrisch in X und Y ist, gilt (C.4) also auch, falls $X(\omega) < Y(\omega)$. Weiter gilt

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X>t\}}(\omega)\, t^{\alpha-1} dt = \int_0^{X^+(\omega)} t^{\alpha-1} dt = \left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha\right|_0^{X^+(\omega)} = \frac{1}{\alpha}\left(X^+(\omega)\right)^\alpha. \qquad \text{(C.5)}$$

Also folgt zusammen (C.1):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left|\mathbb{1}_{\{X>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1} dt\right] &\overset{\text{(C.4)}}{=} \mathbb{E}\left|\int_0^\infty \left(\mathbb{1}_{\{X>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right) t^{\alpha-1} dt\right| \\ &\overset{\text{(C.5)}}{=} \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left|\left(X^+\right)^\alpha - \left(Y^+\right)^\alpha\right|.\end{aligned}$$

(C.3) folgt mit dem Satz von Fubini und dem Satz von der monotonen Konvergenz (Integrierbarkeit wird durch Tonelli und (C.2) sichergestellt, Riemann- und Lebesgue-Integral entsprechen sich aufgrund von Bermerkung C.2 (c)):

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_j>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right] t^{\alpha-1} dt \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left(\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_j>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right) t^{\alpha-1} dt\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \left(\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_j>t\}}\right) t^{\alpha-1} dt - \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{Y>t\}} t^{\alpha-1} dt\right] \\ &\overset{\mathbb{1}\geq 0}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_j>t\}} t^{\alpha-1} dt - \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{Y>t\}} t^{\alpha-1} dt\right] \\ &\overset{\text{(C.5)}}{=} \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \left(X_j^+\right)^\alpha - \left(Y^+\right)^\alpha\right].\end{aligned}$$

□

Bemerkung C.2. (a) Ist (C.1) endlich, so gilt dieselbe Gleichung auch ohne Beträge ((C.2) und (C.3) auf die Folge $X := X_1$ und $X_2 \equiv X_3 \equiv ... \equiv 0$ angewendet).

(b) Für eine Zufallsgröße X gilt insbesondere $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[(X^+)^\alpha\right]$ und für zwei Zufallsgrößen X, Y

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\mathbb{P}(X > t) - \mathbb{P}(Y > t)\right| t^{\alpha-1} dt &\leq \int_0^\infty \mathbb{E}\left|\mathbb{1}_{\{X>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1} dt \\ &\overset{(C.1)}{=} \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left|\left(X^+\right)^\alpha - \left(Y^+\right)^\alpha\right|.\end{aligned}$$

(c) Gegeben ein $\beta \in (0, \alpha]$ mit $\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left(X_j^+\right)^\beta\right] < \infty$, folgt für jedes Integral

$$\int_0^b \mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_j>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1} dt < \infty$$

mit $b > 0$, denn es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^b \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right] t^{\alpha-1} dt &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(Y\mathbb{1}_{\{Y<b\}} > t\right) t^{\alpha-1} dt \\ &\overset{Bem. (b)}{=} \mathbb{E}\left[\left(Y^+\right)^\alpha \mathbb{1}_{\{Y<b\}}\right] \leq b^\alpha < \infty \qquad \text{(C.6)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_0^b \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{X_j>t\}}\right] t^{\alpha-1} dt &= \sum_{j\geq 1}\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\left\{X_j \mathbb{1}_{\left\{X_j<b\right\}}>t\right\}}\right] t^{\alpha-1} dt \\ &\overset{Bem. (b)}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left(X_j^+\right)^\beta \left(X_j^+\right)^{\alpha-\beta} \mathbb{1}_{\{X_j<b\}}\right] \\ &\leq b^{\alpha-\beta}\mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 1}\left(X_j^+\right)^\beta\right] < \infty.\end{aligned}$$

Nach Satz 9.17 aus [2] entsprechen also in diesem Fall in Lemma C.1 die Riemann- jeweils den Lebesgue-Integralen. Die Rechnung (C.6) zeigt, dass wir aus dem selben Grund (C.1) in jedem Fall als Lebesgue-Integral schreiben können (insbesondere ohne die Forderung $\mathbb{E}\left[(X^+)^\beta\right] < \infty$).

(d) Eine analoge Aussage zu (C.1) gilt im zweiten Fall - also mit der Summe - im Allgemeinen nicht.

Es ist sogar möglich, dass das entsprechende zweite Integral 0 und das erste Integral noch nicht mal endlich ist: Seien dazu z.B. $X_j := 2^{-\frac{j}{\alpha}}Y$. Wegen

$\sum_{j\geq 1}\left(X_j^+\right)^\alpha = \left(Y^+\right)^\alpha$ sehen wir sofort

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1}\left(X_j^+\right)^\alpha - \left(Y^+\right)^\alpha\right| = 0.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 1}\mathbb{1}_{\{X_j>t\}} - \mathbb{1}_{\{Y>t\}}\right| t^{\alpha-1}dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 2}\mathbb{1}_{\left\{Y>2^{\frac{j}{\alpha}}t\right\}} - \left(\mathbb{1}_{\{Y>t\}} - \mathbb{1}_{\left\{Y>2^{\frac{1}{\alpha}}t\right\}}\right)\right| t^{\alpha-1}dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left|\sum_{j\geq 2}\mathbb{1}_{\left\{Y>2^{\frac{j}{\alpha}}t\right\}} - \mathbb{1}_{\left\{2^{\frac{1}{\alpha}}t\geq Y>t\right\}}\right| t^{\alpha-1}dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 2}\mathbb{1}_{\left\{Y>2^{\frac{j}{\alpha}}t\right\}} + \mathbb{1}_{\left\{2^{\frac{1}{\alpha}}t\geq Y>t\right\}}\right] t^{\alpha-1}dt \\
&\geq \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\sum_{j\geq 2}\mathbb{1}_{\left\{Y>2^{\frac{j}{\alpha}}t\right\}}\right]dt = \sum_{j\geq 2}\int_0^\infty \mathbb{P}\left(X_j>t\right)t^{\alpha-1}dt \\
&= \sum_{j\geq 2}\frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left[\left(X_j^+\right)^\alpha\right] = \frac{1}{2\alpha}\mathbb{E}\left[\left(Y^+\right)^\alpha\right]
\end{aligned}$$

Ist also Y^+ eine Zufallsgröße mit unendlichem α-Moment, so ist dieses Integral unendlich.

D Die Topchii-Vatutin-Ungleichung

Im Beweis von Lemma 4.9 nutzen wir die Topchii-Vatutin-Ungleichung für Martingale mit endlichen $\mathbb{E}h\left(M_n\right)$, wobei h schwach konvex ist: Eine Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt *schwach konvex*, falls

(a) h eine konvexe, gerade Funktion mit $h(0)=0$ ist,

(b) h auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist, sodass $\lim_{x\downarrow 0}h'(x)$ existiert, und

(c) h' auf $(0,\infty)$ konkav ist.

Eine schwach konvexe Funktion ist insbesondere nichtnegativ und auf $(0,\infty)$ monoton steigend (folgt direkt aus (a)). Die hier zu findende Version ist Theorem 1 in [4] entnommen, es basiert auf der Originalversion, Theorem 2 in [13].

Satz D.1. *Sei h eine schwach konvexe Funktion, $(M_n)_{n\geq 0}$ ein $(\mathfrak{G}_n)_{n\geq 0}$-Martingal mit $\mathbb{E}\left[h \circ M_n\right] < \infty$ für alle $n \geq 0$. Dann folgt für ein $c > 0$ und für alle $n \geq 1$*

$$\mathbb{E}h\left(M_n\right) - \mathbb{E}h\left(M_0\right) \leq c \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}h\left(M_j - M_{j-1}\right).$$

Es kann in jedem Fall $c = 2$ gewählt werden. Falls $(M_n)_{n\geq 0}$ nichtnegativ ist oder alle $M_n - M_{n-1}$ bedingt unter $\mathfrak{G}_n$ symmetrisch sind, können wir sogar $c = 1$ wählen.

Bezeichnen wir $M_\infty := \liminf_{n\to\infty} M_n$, so folgt in der Situation von Satz D.1 mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\mathbb{E}h\left(M_\infty\right) - \mathbb{E}h\left(M_0\right) &\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}h\left(M_n\right) - \mathbb{E}h\left(M_0\right)\\ &\leq c \sum_{j\geq 1} \mathbb{E}h\left(M_j - M_{j-1}\right).\end{aligned}$$

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\lvert M\rvert$	Mächtigkeit einer Menge M
$\mathscr{L}(X)$	$:= \mathbb{P}^X$, Verteilung von X für eine beliebige Zufallsgröße X
$\mathfrak{L}_\beta$	Menge der messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $\overline{f}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert, $\beta > 0$
$\lVert X\rVert_\beta$	$:= \left(\mathbb{E}\left[\lvert X\rvert^\beta\right]\right)^{1\wedge\frac{1}{\beta}}$ für eine beliebige Zufallsgröße X, $\beta > 0$
$\overline{f}$	Exponentielle Glättung einer Funktion $f \in \mathfrak{L}_\beta$
$\overset{d}{=}$	Verteilungsgleichheit
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
$\xrightarrow{d}$	Verteilungskonvergenz
$\xrightarrow{L_\beta}$	L_β-Konvergenz, Konvergenz im β-Mittel
$\xrightarrow{w}$	schwache Konvergenz
$L_\beta(\boldsymbol{\lambda})$	$:= L_\beta(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{\lambda})$, Menge der $\mathfrak{B}$-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die $\lvert f\rvert^\beta$ $\mathbb{P}$-integrierbar ist, $\beta > 0$
L_β	$:= L_\beta(\mathbb{P}) := L_\beta(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, Menge der Zufallsgrößen $X : \Omega \to \mathbb{R}$, für die $\lvert X\rvert^\beta$ $\mathbb{P}$-integrierbar ist, $\beta > 0$
$P_0(A)$	Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(A, \mathfrak{A})$
$P_\beta(A)$	Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(A, \mathfrak{A})$ mit endlichem β-Moment, $\beta > 0$

Abkürzungsverzeichnis

dRi	direkt Riemann-integrierbar
f.s.	fast sicher
iid	unabhängig und identisch verteilt

Literatur

[1] ALSMEYER, GEROLD: *Stochastische Prozesse.* Institut für Mathematische Statistik Universität Münster, 3. Auflage, 2005.

[2] ALSMEYER, GEROLD: *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Institut für Mathematische Statistik Universität Münster, 5. Auflage, 2007.

[3] ALSMEYER, GEROLD: *Random Recursive Equations and Their Distributional Fixed Points.* Vorlesungsskript, Januar 2012.

[4] ALSMEYER, GEROLD und UWE RÖSLER: *The best constant in the Topchii-Vatutin inequality for martingales.* Statistics & Probability Letters, 65(3):199 – 206, 2003.

[5] BRIN, SERGEY und LAWRENCE PAGE: *The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine.* Computer Networks and ISDN Systems, 30:107 – 117, 1998.

[6] FELLER, WILIAM: *An introduction to probability theory and its applications.*, Band 2. New York-London-Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1966.

[7] GOLDIE, CHARLES M.: *Implicit Renewal Theory and Tails of Solutions of Random Equations.* Annals of Applied Probability, 1(1):126 – 166, 1991.

[8] HORN, ROGER A. und CHARLES R. JOHNSON: *matrix analysis.* Cambridge University Press, 1. Auflage, 1985.

[9] JELENKOVIC, PREDRAG R. und MARIANA OLVERA-CRAVIOTO: *Information ranking and power laws on trees.* Advances in Applied Probability, 42(4):1057 – 1093, 2010.

[10] JELENKOVIC, PREDRAG R. und MARIANA OLVERA-CRAVIOTO: *Implicit renewal theorem for trees with general weights.* Stochastic Processes and their Applications, 122:3209 – 3238, 2012.

[11] JELENKOVIC, PREDRAG R. und MARIANA OLVERA-CRAVIOTO: *Implicit renewal theory and power tails on trees.* Advances in Applied Probability, 44(2):528 – 561, 2012.

[12] SGIBNEV, M. C.: *The matrix analogue of the Blackwell renewal theorem on the real line.* Sbornik: Mathematics, 197(3):369 – 386, 2006.

[13] TOPCHII, VALENTIN ALEKSEEVICH und VLADIMIR ALEKSEEVICH VATUTIN: *Maximum of the Critical Galton–Watson Processes and Left-Continuous Random Walks.* Theory of Probability & Its Applications, 42(1):17 – 27, 1998.

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist nicht veröffentlicht.

28. September 2012 ....

(Unterschrift)