Über die stationäre Lösung einer linearen stochastischen Rekursionsgleichung mit Markov-modulierten Koeffizienten

Masterarbeit

vorgelegt von

Fabian Buckmann

Betreuer: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **i**
Notation . . . ii

1 Stationäre Lösung und Hauptresultate **1**

2 Grundlagen **5**
2.1 Matrix-Erneuerungsgleichung . . . 5
2.2 Matrix-Erneuerungstheoreme . . . 10
2.3 Untersuchung der Funktion ϕ . . . 15

3 Beweis von Theorem I **21**
3.1 Asymptotik der Funktion z . . . 21
3.1.1 Anwendbarkeit des Matrix-Erneuerungstheorems I . . . 21
3.2 Fall: b_0 besitzt f.s. ein konstantes Vorzeichen . . . 29
3.3 Fall: b_0 besitzt einen einseitig unbeschränkten Träger . . . 30
3.3.1 Abschätzung der Tail-Wahrscheinlichkeit . . . 30
3.3.2 Untersuchung von $\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}$ . . . 36
3.3.3 Anwendbarkeit des Matrix-Erneuerungstheorems II . . . 42

4 Beweis von Theorem II **51**
4.1 $\mathbf{P}^{\top}$ ist l-irreduzibel . . . 53
4.2 $\mathbf{P}^{\top}$ ist l-reduzibel . . . 55

A Anhang **59**
A.1 Stationarität und Ergodizität . . . 59
A.2 Perron-Frobenius Theorie . . . 60

Anmerkungen des Autors **63**
Gegenbeispiel . . . 65

Einleitung

In dieser Arbeit ist das Untersuchungsobjekt eine stochastische Rekursionsgleichung der Form

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \geq 0.$$

Man nennt diese auch eine zufällige Differenzengleichung.
Goldie hat in [14] im Falle einer Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvektoren $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ gezeigt, dass eine stationäre Lösung der obigen Gleichung unter bestimmten Voraussetzungen existiert und das Tail-Verhalten dieser Lösung untersucht. Ist die Bedingung

$$\mathbb{P}(|b_0 - c(1-a_0)| > \varepsilon) > 0 \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R} \text{ und ein } \varepsilon > 0,$$

erfüllt, kann ein Potenzgesetz-Verhalten konstatiert werden, d.h. es existiert eine positive Konstante C und $\lambda > 0$ mit

$$t^{\lambda}\mathbb{P}(|Y| > t) \xrightarrow{t\to\infty} C,$$

wobei Y die stationäre Lösung bezeichnet.
In dem von uns behandelten Fall ist $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ ebenfalls stationär und ergodisch. Anders als bei Goldie wird vorausgesetzt, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ eine stationäre, aperiodische, positiv rekurrente Markov-Kette bildet. Ferner sind $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ unabhängig voneinander. Für Teilresultate reicht uns diesbezüglich auch eine schwächere Bedingung. Weiter setzen wir voraus, dass die Markov-Kette $(a_n)_{n\geq 0}$ nur einen endlichen Zustandsraum $\mathscr{E}$ besitzt und ein $\lambda > 0$ existiert, so dass 1 der größte Eigenwert der Matrix $\operatorname{diag}(|e_i|^{\lambda}, i \in \mathscr{E})\mathbf{P}^{\top}$ beträgt. $\mathbf{P}$ bezeichne dabei die Übergangsmatrix der Markov-Kette. Wir werden zwei verschiedene Zustandsräume studieren. Einmal ist $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}_{>}$ und das andere Mal ist $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}^*$, $\mathscr{E} \cap \mathbb{R}_{<} \neq \emptyset$ und $\mathscr{E} \cap \mathbb{R}_{>} \neq \emptyset$.
Zuerst suchen wir nach Bedingungen, die uns die Existenz einer stationären Lösung der zufälligen Differenzengleichung sichern und formulieren die Hauptresultate über das Tail-Verhalten der Lösung.
In Kapitel 2 leiten wir je nach Art des Zustandsraumes eine Matrix-Erneuerungsgleichung her, die von einer Funktion gelöst wird, von deren asymptotischem Verhalten, welches uns die Anwendung eines zu beweisenden Matrix-Erneuerungstheorems liefert, wir auf das der Tail-Wahrscheinlichkeit der stationären Lösung obiger Rekursionsgleichung schließen können.
Kapitel 3 behandelt den Fall $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}_{>}$. Wir werden zum einen mit Hilfe von Matrix-Erneuerungstheoremen eine explizite Gestalt der Grenzwerte herleiten und zum anderen ein auf die veränderte Ausgangssituation angepasstes Vorgehen von Goldie verwenden. Unter den von uns gemachten Voraussetzungen ergibt sich dann ein Potenzgesetz-Verhalten, falls b_0 fast sicher konstantes Vorzeichen oder einen einseitig unbeschränkten Träger besitzt.
Dem Fall $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}^*$, $\mathscr{E} \cap \mathbb{R}_{<} \neq \emptyset$ und $\mathscr{E} \cap \mathbb{R}_{>} \neq \emptyset$, wird das Kapitel 4 gewidmet.

Notation

In diesem Abschnitt werden nicht übliche Notationen eingeführt und erklärt, von denen anschließend Gebrauch gemacht wird.
Die Menge $\mathbb{R}_{\geq}$ bezeichnet alle reellen, nicht-negativen Zahlen und entsprechend sind die Mengen $\mathbb{R}_{\leq}$, $\mathbb{R}_{>}$ und $\mathbb{R}_{<}$ definiert. $\mathbb{R}^*$ bezeichnet die Mengen der reellen Zahlen ausschließlich der 0.
Zur Abkürzung werden wir oftmals für $k \leq n$ die Schreibweisen $X_{k:n} := (X_k, \ldots, X_n)$ für Zufallsvariablen und $x_{k:n} := (x_k, \ldots, x_n)$ für reelle Zahlen benutzen. Für $k > n$ nehmen die Indizes innerhalb des Tupels jeweils um 1 ab statt zu.

1 Stationäre Lösung und Hauptresultate

Gegeben ist die zufällige Differenzengleichung

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \geq 0, \tag{1.1}$$

dabei beschreibt $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Zufallsvektoren auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum, dessen Wahrscheinlichkeitsmaß wir mit $\mathbb{P}$ bezeichnen. $(a_n)_{n\geq 0}$ bildet eine positiv rekurrente, aperiodische, stationäre Markov-Kette auf einem endlichen reellen Zustandsraum und $(b_n)_{n\geq 0}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen. Wir nehmen o.E. an, dass $(a_n)_{n\geq 0}$ irreduzibel ist, da transiente Zustände unter der stationären Anfangsverteilung keine Masse tragen.
Wir interessieren uns für das asymptotische Verhalten der Tail-Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(|Y_1| > t)$, wobei Y_1 eine stationäre Lösung von (1.1) bezeichne.
Den Anfang bildet die Suche nach Bedingungen, die die Existenz einer stationären Lösung von (1.1) liefern. Dabei können wir o.E. die Gleichung

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

untersuchen. Denn offenbar lässt sich aus einer stationären Lösung von (1.2) eine stationäre Lösung von (1.1) finden. Für die Umkehrung sei $(Y_n)_{n\geq 0}$ eine stationäre Lösung von (1.1). Mit Lemma A.1 folgt, dass $(Y_n, a_n, b_n)_{n\geq 0}$ stationär ist. Vermöge des Konsistenzsatzes von Kolmogorov lässt sich deshalb ein Maß $\mathbb{P}_1^{(Y_n', b_n', a_n')_{n\in\mathbb{Z}}}$ konstruieren, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$

$$\mathbb{P}_1^{(Y'_{k:k+n}, b'_{k:k+n}, a'_{k:k+n})} = \mathbb{P}^{(Y_{0:n}, b_{0:n}, a_{0:n})}.$$

Damit gilt insbesondere für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}_1(Y'_{n+1} = a'_n Y'_n + b'_n) = \mathbb{P}(Y_1 = a_0 Y_0 + b_0) = 1.$$

Somit haben wir eine stationäre Lösung $(Y_n')_{n\in\mathbb{Z}}$ von (1.2) konstruiert.
Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$ das Maß unter dem $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär ist.

Es bleibt die Frage zu klären, wann eine stationäre Lösung von (1.2) existiert. Unter der Annahme, dass

$$\mathbb{E}\log|a_0| < 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\log^+|b_0| < \infty,$$

$(\log 0 := -\infty)$ erfüllt ist, können wir diese beantworten.

Theorem 1.1 *Unter den gemachten Voraussetzungen existiert eine fast sicher (f.s.) eindeutige stationäre Lösung der Gleichung* (1.2) *gegeben durch*

$$Y_n := \sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{l} a_{n-k} \right) b_{n-l-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

und diese ist f.s. reellwertig.

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass die Reihe auf der rechten Seite von (1.3) f.s. absolut konvergiert. Damit ist dann Y_n wohldefiniert und f.s. reellwertig. Da mit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ auch $(\log|a_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$ ergodisch ist, ergibt Anwendung des Birkhoffschen Ergodensatzes (siehe Korollar A.3), dass

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} \log|a_{n-k}| = \mathbb{E}\log|a_0| < 0 \text{ f.s.} \tag{1.4}$$

Mittels der Markov-Ungleichung gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\log|b_l|}{l} \geq \varepsilon \right) = \mathbb{P}\left(\frac{\log^+|b_l|}{l} \geq \varepsilon \right) \leq \frac{\mathbb{E}\log^+|b_0|}{l\varepsilon} \xrightarrow{l\to\infty} 0.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{l\to\infty} \sup_{n\geq l} \mathbb{P}\left(\frac{\log|b_n|}{n} \geq \varepsilon \right) = \lim_{l\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq l} \frac{\log|b_n|}{n} \geq \varepsilon \right) \\ &= \mathbb{P}\left(\limsup_{l\to\infty} \frac{\log|b_l|}{l} \geq \varepsilon \right), \end{aligned}$$

insbesondere $\limsup_{l\to\infty} \frac{1}{l} \log|b_{n-l-1}| \leq 0$ f.s. Zusammen mit (1.4) folgt

$$\limsup_{l\to\infty} \left[\log \left(\prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |b_{n-l-1}| \right)^{1/l} \right] = \limsup_{l\to\infty} \frac{1}{l} \left(\sum_{k=1}^{l} \log|a_{n-k}| + \log|b_{n-l-1}| \right) < 0 \text{ f.s.}$$

Daraus ergibt sich wiederum

$$\limsup_{l\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |b_{n-l-1}| \right)^{1/l} < 1 \quad \text{f.s.}$$

Anschließend folgt die Konvergenz der Reihe aus (1.3) mit dem Wurzelkriterium für Reihen.
Als nächstes vollziehen wir nach, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär ist. Y_n ist eine messbare Funktion von $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Setzen wir stattdessen $(a_{n+1}, b_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ ein, so erhalten wir

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{l} a_{n+1-k} \right) b_{n-l} = Y_{n+1}.$$

Da $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ stationär ist, leitet man daraus $(Y_k, \ldots, Y_{k+n}) \overset{\mathrm{d}}{=} (Y_{k+1}, \ldots, Y_{k+n+1})$ für $n \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ und damit die Stationarität von $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ab.
$(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bildet eine Lösung von (1.2), denn (das leere Produkt setzen wir als 1)

$$a_n Y_n + b_n = a_n \left(\sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{l} a_{n-k} \right) b_{n-l-1} \right) + b_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{l+1} a_{n+1-k}\right) b_{n-l-1} + b_n \\
&= \sum_{l=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{l} a_{n+1-k}\right) b_{n-l} + b_n \\
&= Y_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Angenommen es gibt eine weitere stationäre Lösung $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
|Y_n - y_n| &= |a_{n-1}| \cdot |Y_{n-1} - y_{n-1}| = \dots \\
&= \prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |Y_{n-l} - y_{n-l}| \\
&\le \prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |Y_{n-l}| + \prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |y_{n-l}|.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Aus (1.4) leiten wir

$$
\prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| = \left[\exp\left(\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} \log|a_{n-k}|\right)\right]^{l} \xrightarrow{l\to\infty} 0 \quad \text{f.s.} \tag{1.6}
$$

ab. Mit dem Satz von Slutsky folgt aus der Stationarität von $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und (1.6)

$$
\prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |Y_{n-l}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |y_{n-l}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{für } l \to \infty. \tag{1.7}
$$

Zusammen mit (1.5) ergibt sich nun für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$
\mathbb{P}(|Y_n - y_n| > \varepsilon) \le \mathbb{P}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |Y_{n-l}| > \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{n-k}| \cdot |y_{n-l}| > \varepsilon\right) \xrightarrow{l\to\infty} 0,
$$

und daraus die fast sichere Gleichheit von Y_n und y_n für $n \in \mathbb{Z}$. □

Fortan bezeichnet $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die f.s. eindeutige, stationäre Lösung. Wie bereits erwähnt interessieren wir uns für das asymptotische Verhalten der Tail-Wahrscheinlichkeit dieser Lösung, d.h. $\mathbb{P}(|Y_1| > t)$ für $t \to \infty$. Wir beschränken uns auf den Fall $\mathbb{P}(a_0 = 0) = 0$ und $\mathbb{P}(b_0 \neq 0) > 0$. Der Fall $b_0 = 0$ f.s. ist trivial, denn nach (1.1) gilt dann $Y_1 = 0$ f.s.
Des Weiteren werden wir zwei mögliche Arten von endlichen Zustandsräumen der Markov-Kette $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ untersuchen. Wir bezeichnen den Zustandsraum mit $\mathscr{E} := \{e_1, \dots, e_p\}$.
Für eine $p \times p$ Matrix $\mathbf{A}$ bezeichne $\rho(\mathbf{A})$ deren betraglich größten Eigenwert auch Spektralradius genannt. Ferner definieren wir

$$
\mathbf{P}_\alpha := \operatorname{diag}(|e_i|^\alpha, 1 \le i \le p)\mathbf{P}^\top,
$$

wobei $\mathbf{P}$ die Übergangsmatrix von $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist. Wir werden in Proposition 2.9 sehen, dass wegen $\mathbb{E}\log|a_0| < 0$ und Konvexitätsargumenten entweder ein $\lambda > 0$ mit $\rho(\mathbf{P}_\lambda) = 1$ existiert oder

$\rho(\mathbf{P}_\alpha) < 1$ für alle $\alpha > 0$. Zum letzteren Fall sei nur erwähnt, dass unter Annahme der Existenz von $\mathbb{E}|b_0|^\alpha < \infty$ für ein $\alpha > 0$ mit Lemma 3.1 folgt, dass $\mathbb{E}|Y_1|^\alpha < \infty$ gilt. Weiter liefert dann die Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|Y_1| > t) \leq \frac{\mathbb{E}|Y_1|^\alpha}{t^\alpha}$$

und somit können wir aussagen

$$t^\beta \mathbb{P}(|Y_1| > t) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

für alle $\beta < \alpha$.
Von nun an beschäftigen wir uns mit dem Fall, dass ein $\lambda > 0$ existiert mit $\rho(\mathbf{P}_\lambda) = 1$. Die folgenden zwei Theoreme gilt es in dieser Arbeit zu beweisen.

Theorem I *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine irreduzible, aperiodische, stationäre Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_p\} \subset \mathbb{R}_>$, $p \geq 2$, Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ und stationärer Verteilung π. $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen, die nicht degeneriert in 0 sind. Falls erfüllt ist, dass*
(i) $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ voneinander unabhängig sind,
(ii) $\mathbb{E}\log|a_0| < 0$ und $\mathbb{E}\log^+|b_0| < \infty$,
(iii) die Zahlen $\log|e_1|, \ldots, \log|e_p|$ keine ganzzahligen Vielfachen derselben Zahl sind,
(iv) ein $\lambda > 0$ existiert, so dass $\rho(\mathbf{P}_\lambda) = 1$,
(v) ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\mathbb{E}|b_0|^{\lambda+\delta} < \infty$,
(vi) b_0 f.s. konstantes Vorzeichen oder einen einseitig unbeschränkten Träger besitzt,
dann gilt für $x \in \{-1, 1\}$

$$t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t) \xrightarrow{t\to\infty} L(x),$$

wobei $L(-1) + L(1) > 0$.
Falls $b_0 \geq 0$ f.s. ist, so folgt $L(1) > 0$ und $L(1) = 0$. Ist $b_0 \leq 0$ f.s., ergibt sich $L(-1) > 0$ und $L(1) = 0$.

Wir definieren

$$\mathcal{G}_n := \sigma(a_0, \ldots, a_{-n}), \quad n \geq 0.$$

Falls b_0 f.s. konstantes Vorzeichen besitzt, reicht es in obigem Theorem aus, statt die Gültigkeit von (i) zu fordern, dass $b_{-(n+1)}$ unabhängig von $\mathcal{G}_n$ für alle $n \geq 0$ ist. Wegen der Stationarität ist dies äquivalent dazu, dass b_{n-1} unabhängig von $(a_k)_{k\geq n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist.

Theorem II *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vorausgesetzt wie in Theorem I, bis auf dass $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}^*$, wobei ein $1 \leq l \leq p-1$ existiere mit $e_1, \ldots, e_l > 0$ und $e_{l+1}, \ldots, e_p < 0$. Weiter sei $b_{-(n+1)}$ sei unabhängig von $\mathcal{G}_n$ für alle $n \geq 0$. Falls neben den Bedingungen (ii) bis (v) aus Theorem I erfüllt ist, dass $\mathbf{P}^\top$ l-irreduzibel ist (siehe Defintion 4.1), so gilt $L(-1) = L(1)$.*

Des Weiteren leiten wir sowohl für den Fall einer l-irreduziblen als auch für den einer l-reduziblen Matrix $\mathbf{P}^\top$ eine Gestalt von $L(-1)$ und $L(1)$ her.

2 Grundlagen

Wir werden eine explizite Gestalt der Limiten von $t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t)$ für $t \to \infty$ und $x \in \{-1,1\}$ herleiten. Der Ansatz basiert auf der folgenden Proposition.

Proposition 2.1 *Falls $t^{-1}\int_0^t y^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > y)dy \sim C$ für $t \to \infty$ und eine positive Konstante C, dann gilt*

$$t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t) \sim C.$$

Beweis: Sei $b > 1$ und $t > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{b^{\lambda+1}-1}{\lambda+1}t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t) = t^{-1}\int_t^{bt} y^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t)dy \geq t^{-1}\int_t^{bt} y^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > y)dy \\ \sim C(b-1).\end{aligned}$$

Daraus ersehen wir

$$\liminf_{t\to\infty} t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t) \geq C\frac{b-1}{b^{\lambda+1}-1}(\lambda+1)$$

für $b > 1$. Weiter folgt

$$\lim_{b\downarrow 1} C\frac{b-1}{b^{\lambda+1}-1}(\lambda+1) \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{b\downarrow 1} C\frac{1}{(\lambda+1)b^\lambda}(\lambda+1) = C.$$

Resultierend ist gültig

$$\liminf_{t\to\infty} t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t) \geq C.$$

Analog erhalten wir die gewünschte Abschätzung für den Limes superior durch Betrachtung von

$$\frac{1-b^{\lambda+1}}{\lambda+1}t^{\lambda+1}\mathbb{P}(xY_1 > t)$$

für $0 < b < 1$ und damit die Behauptung. □

2.1 Matrix-Erneuerungsgleichung

Die Grenzwerte von $t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t)$ und $\exp(-t)\int_0^{\exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > y)dy$ für $t \to \infty$ stimmen nach Proposition 2.1 überein. Letztere Gestalt, d.h. t und t^{-1} ersetzt durch $\exp(t)$ und $\exp(-t)$, wird den Nutzen haben, dass eine mit diesem Term in Verbindung stehende Funktion eine Lösung

einer Matrix-Erneuerungsgleichung bildet.
Wir definieren für $(x,t) \in \{-1,1\} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z(x,t) &:= exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > y)dy = \sum_{i=1}^p Z_i(x,t) \\ \text{mit} \quad Z_i(x,t) &:= exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > y, a_0 = e_i)dy. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Aus den Z_i werden wir eine Funktion definieren, die eine Matrix-Erneuerungsgleichung erfüllt und mit Hilfe der Matrix-Erneuerungstheoreme aus dem nächsten Abschnitt erhalten wir den Grenzwert von $z(x,t)$ für $t \to \infty$. Der Begriff einer Matrix-Erneuerungsgleichung erklärt sich im Laufe der nächsten Seiten.
$F = (F_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ bezeichne eine Matrix, deren Einträge Verteilungsfunktionen sind, d.h. die Einträge sind monoton wachsende, rechtsseitig stetige Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_\geq$ mit Grenzwert 0 in $-\infty$.
Wir führen ein verallgemeinertes Faltungsprodukt ein.

Definition 2.2 *Sei $r \geq 1$ und H eine $p \times r$ Matrix, deren Einträge Borel-messbare Funktionen sind. Dann definieren wir das Faltungsprodukt $F * H$ durch*

$$(F * H)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^p \int H_{kj}(t-y)F_{ik}(dy)$$

für $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq r$ und $t \in \mathbb{R}$, sofern die Integrale existieren.

Das Faltungsprodukt von zwei $p \times p$ Matrizen muss für $p \geq 2$ nicht mehr kommutativ sein. Außerdem ist das Faltungsprodukt assoziativ, d.h. für F und H wie aus obiger Definition sowie einer weiteren Matrix von Verteilungsfunktionen G gilt

$$(G * F) * H = G * (F * H),$$

sofern definierbar. Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} [(G * F) * H]_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^p \int H_{kj}(t-y)(G * F)_{ik}(dy) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p H_{kj}(t-x-y)F_{lk}(dx)G_{il}(dy) \\ &= \sum_{l=1}^p (F * H)_{lj}(t-y)G_{il}(dy) \\ &= [G * (F * H)]_{ij}(t). \end{aligned}$$

Die n-fache Faltung von F definieren wir durch

$$F^{*(n)}(t) := (F * F^{*(n-1)})(t)$$

und

$$F^{*(0)}(t) := \begin{cases} \mathbf{E}, & t \geq 0 \\ \mathbf{0}, & t < 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Letztere Matrix bildet das neutrale Element bzgl. der definierten Verknüpfung, deswegen bezeichnen wir dieses im Anschluss als $E^{(*)}$.
Für Borel-messbare Funktionen f werden wir von der Schreibweise

$$\int f(y)F(dy) := \left(\int f(y)F_{ij}(dy) \right)_{1\leq i,j\leq p}$$

Gebrauch machen.
Nun kommen wir zur Herleitung einer Matrix-Erneuerungsgleichung. Aus $Y_1 = a_0Y_0 + b_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(xY_1 > y, a_0 = e_i) =& \mathbb{P}(xa_0Y_0 + xb_0 > y, xa_0Y_0 > y, a_0 = e_i) \\ &+ \mathbb{P}(xa_0Y_0 + xb_0 > y, xa_0Y_0 \leq y, a_0 = e_i) \\ =& \mathbb{P}(xa_0Y_0 > y, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0Y_0 + xb_0 \leq y, xa_0Y_0 > y, a_0 = e_i) \\ &+ \mathbb{P}(xa_0Y_0 + xb_0 > y, xa_0Y_0 \leq y, a_0 = e_i) \\ =& \mathbb{P}(xa_0Y_0 > y, a_0 = e_i) + \psi_i(x,y). \end{aligned}$$

Dabei bezeichne für $1 \leq i \leq p$

$$\psi_i(x,y) := \mathbb{P}(y - xb_0 < xa_0Y_0 \leq y, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(y < xa_0Y_0 \leq y - xb_0, a_0 = e_i).$$

Durch die Definition von

$$g_i(x,t) := exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \psi_i(x,y)dy \tag{2.3}$$

lässt sich notieren

$$Z_i(x,t) = exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(xa_0Y_0 > y, a_0 = e_i)dy + g_i(x,t) \quad \text{für } (x,t) \in \{-1,1\} \times \mathbb{R}.$$

Mit der Substitution $\breve{y} = \frac{y}{|e_i|} = y \cdot \exp(-\log|e_i|)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(xa_0Y_0 > y, a_0 = e_i)dy \\ =& |e_i|^\lambda exp(-(t - \log|e_i|)) \int_0^{exp(t-\log|e_i|)} y^\lambda \mathbb{P}(\operatorname{sgn}(xe_i)Y_0 > y, a_0 = e_i)dy \end{aligned}$$

Anschließend benötigen wir den Fall $n = 0$ des folgenden Lemmas. Die Aussage für beliebiges n wird später noch verwendet.

Lemma 2.3 *Für alle $n \geq 0$ gilt*

$$\mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\Big)Y_{-n} > y, a_0 = e_i\bigg) = \sum_{j=1}^{p} p_{ji}\mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}\Big)Y_{1-n} > y, a_0 = e_j\bigg)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\Big)Y_{-n} > y, a_0 = e_i\bigg)\\
&= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\Big)Y_{-n} > y, a_0 = e_i, a_{-1} = e_j\bigg)\\
&= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}\bigg(a_0 = e_i \bigg| \operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\Big)Y_{-n} > y, a_{-1} = e_j\bigg)\\
&\quad \cdot \mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\Big)Y_{-n} > y \bigg| a_{-1} = e_j\bigg)\pi(e_j)\\
&= \sum_{j=1}^{p} p_{ji}\mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\Big)Y_{-n} > y \bigg| a_{-1} = e_j\bigg)\pi(e_j)\\
&= \sum_{j=1}^{p} p_{ji}\mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}\Big)Y_{1-n} > y \bigg| a_0 = e_j\bigg)\pi(e_j)\\
&= \sum_{j=1}^{p} p_{ji}\mathbb{P}\bigg(\operatorname{sgn}(xe_i)\Big(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}\Big)Y_{1-n} > y, a_0 = e_j\bigg).
\end{aligned}$$

Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir die Markov-Eigenschaft von $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ benutzt und dass $\sigma(Y_{-n}) \subset \sigma(a_{-k}, b_{-k}, k \geq n)$ gilt. Beim 4. Gleichheitszeichen geht ein, dass Y_{-n} eine messbare Funktion von $(a_{-k}, b_{-k})_{k\geq n}$ ist und dass

$$\mathrm{P}^{(a_n,b_n)_{n\in\mathbb{Z}}|a_{-1}} = \mathrm{P}^{(a_{n+1},b_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}|a_0} \quad \mathbb{P}^{a_0}\text{-f.s.}$$

wegen $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \stackrel{d}{=} (a_{n+1}, b_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ gilt. □

Wir betrachten nun erst den Fall $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}_{>}$. Mit der Aussage des obigen Lemmas im Fall $n = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
Z_i(x,t) &= e_i^{\lambda} exp(-(t - \log e_i)) \sum_{j=1}^{p} p_{ji} \int_0^{exp(t-\log e_i)} y^{\lambda}\mathbb{P}(xY_1 > y, a_0 = e_j)dy + g_i(x,t)\\
&= e_i^{\lambda} \sum_{j=1}^{p} p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) + g_i(x,t) \qquad (2.4)\\
&= \sum_{j=1}^{p} F_{ij} * Z_j(x,t) + g_i(x,t)\\
&= (F * Z)_i(x,t) + g_i(x,t),
\end{aligned}$$

wobei

$$F(t) := (F_{ij}(t))_{1\le i,j\le p} := \left(e_i^{\lambda} p_{ji}\mathbb{1}_{[\log e_i,\infty)}(t)\right)_{1\le i,j\le p}. \tag{2.5}$$

Schreiben wir $Z := (Z_1,\dots,Z_p)^\top$ und $g := (g_1,\dots,g_p)^\top$, so lässt sich das Gleichungssystem aufgestellt durch (2.4) für $1 \le i \le p$ in der folgenden Matrix-Erneuerungsgleichung zusammenfassen

$$Z(x,t) = F * Z(x,t) + g(x,t). \tag{2.6}$$

Im Fall $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}^*$ sind $e_1,\dots,e_l > 0$ und $e_{l+1},\dots,e_p < 0$. Um wieder auf eine Matrix-Erneuerungsgleichung zu stoßen, definieren wir für $1 \le i \le p$

$$^{+}Z_i(t) := Z_i(1,t) = exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^{\lambda}\mathbb{P}(Y_1 > y, a_0 = e_i)dy$$

$$\text{und} \quad ^{-}Z_i(t) := Z_i(-1,t) = exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^{\lambda}\mathbb{P}(-Y_1 > y, a_0 = e_i)dy.$$

Damit ergibt sich analog zum positiven Fall

$$\begin{aligned}
^{+}Z_i(t) =& exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^{\lambda}\mathbb{P}(a_0Y_0 > y, a_0 = e_i)dy + g_i(1,t) \\
=& |e_i|^{\lambda} exp(-(t-\log|e_i|)) \int_0^{exp(t-\log|e_i|)} y^{\lambda}\mathbb{P}(\operatorname{sgn}(e_i)Y_0 > y, a_0 = e_i)dy + g_i(1,t) \\
=& |e_i|^{\lambda} exp(-(t-\log|e_i|)) \sum_{j=1}^{p} p_{ji} \int_0^{exp(t-\log|e_i|)} y^{\lambda}\mathbb{P}(\operatorname{sgn}(e_i)Y_1 > y, a_0 = e_j)dy + g_i(1,t) \\
=& \begin{cases} |e_i|^{\lambda}\sum_{j=1}^{p} p_{ji}{}^{+}Z_j(t-\log|e_i|) + g_i(1,t), & \text{für } 1 \le i \le l \\ |e_i|^{\lambda}\sum_{j=1}^{p} p_{ji}{}^{-}Z_j(t-\log|e_i|) + g_i(1,t), & \text{für } l+1 \le i \le p. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Entsprechend erhalten wir

$$^{-}Z_i(t) = \begin{cases} |e_i|^{\lambda}\sum_{j=1}^{p} p_{ji}{}^{-}Z_j(t-\log|e_i|) + g_i(-1,t), & \text{für } 1 \le i \le l \\ |e_i|^{\lambda}\sum_{j=1}^{p} p_{ji}{}^{+}Z_j(t-\log|e_i|) + g_i(-1,t), & \text{für } l+1 \le i \le p. \end{cases} \tag{2.8}$$

Sei $\mathfrak{I}_i := [\log|e_{\bar{i}}|,\infty)$ für $1 \le i \le 2p$, wobei $\bar{i} := i \mod p$. Dann definieren wir eine $2p \times 2p$ Matrix von Verteilungsfunktionen $\widetilde{F}$ durch

$$\widetilde{F}_{ij}(t) := \begin{cases} |e_{\bar{i}}|^{\lambda} p_{\overline{ji}}\mathbb{1}_{\mathfrak{I}_i}(t), & \text{falls } 1 \le i \le l \text{ und } 1 \le j \le p, \\ & \text{oder } l+1 \le i \le p+l \text{ und } p+1 \le j \le 2p, \\ & \text{oder } p+l+1 \le i \le 2p \text{ und } 1 \le j \le p, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner bezeichne $\check{F}$ die $p \times p$ Matrix von Verteilungsfunktionen mit Einträgen

$$\check{F}_{ij}(t) = |e_i|^{\lambda} p_{ji} \mathbb{1}_{[\log|e_i|,\infty)}(t).$$

Zur Veranschaulichung von $\widetilde{F}$ betrachte man:

$$\widetilde{F} = \begin{pmatrix} (\check{F}_{ij})_{1\leq i\leq l,\ 1\leq j\leq p} & 0 \\ 0 & (\check{F}_{ij})_{l+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} \\ 0 & (\check{F}_{ij})_{1\leq i\leq l,\ 1\leq j\leq p} \\ (\check{F}_{ij})_{l+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter setzen wir ${}^{+}g_i(t) := g_i(1,t)$, ${}^{-}g_i(t) := g_i(-1,t)$,

$$\widetilde{Z} := ({}^{+}Z_1, \ldots, {}^{+}Z_p, {}^{-}Z_1, \ldots, {}^{-}Z_p)^{\top}$$

und

$$\widetilde{g} := ({}^{+}g_1, \ldots, {}^{+}g_p, {}^{-}g_1, \ldots, {}^{-}g_p)^{\top}.$$

Nun lassen sich die Gleichungssysteme (2.7) und (2.8) zusammenfassen in

$$\widetilde{Z}(t) = \widetilde{F} * \widetilde{Z}(t) + \widetilde{g}(t).$$

2.2 Matrix-Erneuerungstheoreme

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass es reicht, das asymptotische Verhalten der Funktion $z(x,t) = exp(-t)\int_0^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(xY_1 > y)dy$ zu studieren. $z(x,t)$ ist die Summe von Komponenten der Funktion Z bzw. $\widetilde{Z}$. Letztere Funktionen sind wiederum Lösung einer Matrix-Erneuerungsgleichung. Dieser Abschnitt ist der Herleitung und Formulierung von Matrix-Erneuerungstheoremen gewidmet, die uns später das asymptotische Verhalten der Komponenten von Z bzw. $\widetilde{Z}$ liefern wird.
F bezeichne eine Matrix von Verteilungsfunktionen. Wir definieren die zu F gehörige Matrix-Erneuerungsfunktion durch

$$\mathbb{U}(t) := \sum_{n\geq 0} F^{*(n)}(t).$$

Wir werden die folgende Eigenschaft für $F(\infty)$ benötigen.

Definition 2.4 *Eine reelle, nicht-negative, irreduzible Matrix* $\mathbf{A}$ *mit* $\rho(\mathbf{A}) = 1$ *nennen wir quasi-stochastisch.*

Sei $F(\infty)$ also quasi-stochastisch. Nach dem Theorem von Perron-Frobenius A.5 existieren bis auf skalares Vielfaches eindeutige positive, links- und rechtsseitige Eigenvektoren u und m zum Eigenwert 1, d.h.

$$u^{\top} F(\infty) = u^{\top} \quad \text{und} \quad F(\infty)m = m.$$

Wir normieren u und m, so dass

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{p} u_i m_i = 1. \tag{2.9}$$

Zur Herleitung erneuerungstheoretischer Resultate benötigen wir Theorie über Markov-Random-Walks, da wir beim Studium einer Matrix-Erneuerungsfunktion einen Bezug zu Markov-Erneuerungsfunktionen herstellen werden. Wir beschränken uns auf den Fall diskreter Modulation.

Definition 2.5 *Sei $(\mathcal{S}, \mathcal{P}(\mathcal{S}))$ ein diskreter messbarer Raum mit $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots\}$ und $(M_n, X_n)_{n \geq 0}$ eine zeitlich homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $(\mathcal{S} \times \mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}))$, so dass (M_{n+1}, X_{n+1}) bedingt unter (M_n, X_n) nur von M_n abhängt. Die Matrix Q mit Einträgen q_{ij} ,definiert durch*

$$q_{ij}(t) = \mathbb{P}(M_{n+1} = j, X_{n+1} \leq t | M_n = i), \quad t \in \mathbb{R},$$

heißt Semi-Markov Matrix. Wir bezeichnen die bivariate Folge $(M_n, X_n)_{n \geq 0}$ als Markov-modulierte Folge und $(M_n)_{n \geq 0}$ als deren Steuerkette.
Sei $S_n := \sum_{k=0}^{n} X_k$ für $n \geq 0$. Dann heißt $(M_n, S_n)_{n \geq 0}$ Markov-Random-Walk (MRW).

Bei einer solchen Konstruktion eines stochastischen Prozesses bleibt neben dem Übergangskern die Anfangsverteilung zu spezifizieren. Das Maß definiert durch den Übergangskern und einer Anfangsverteilung ν schreiben wir als $\mathbb{P}_\nu$. Des Weiteren bezeichne

$$\mathbb{P}_i(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot | M_0 = i).$$

Gegeben einen MRW mit positiv rekurrenter Steuerkette bezeichne ξ deren eindeutige stationäre Verteilung. Wir nennen $\mathbb{E}_\xi X_1$ die stationäre Drift des MRWs.
Wie auch in der üblichen Erneuerungstheorie müssen wir nach einem Gittertyp unterscheiden.

Definition 2.6 *Wir nennen eine $p \times p$ Matrix von Verteilungsfunktionen F gitterverteilt mit Spanne $d > 0$, falls d die größte Zahl ist mit:*
(i) Für alle $i \neq j$ ist der Träger von F_{ij} enthalten in einer Menge der Form $\mathfrak{d}_{ij} + d\mathbb{Z}$, $\mathfrak{d}_{ij} \in \mathbb{R}$.
(ii) Für alle $1 \leq i \leq p$ ist der Träger von F_{ii} enthalten in der Menge $d\mathbb{Z}$.
(iii) Seien t_{ij}, t_{jk} und t_{ik} Trägerpunkte von F_{ij}, F_{jk} bzw. F_{ik}, so gilt $t_{ij} + t_{jk} - t_{ik} \in d\mathbb{Z}$.
Andernfalls nennen wir F nicht-gitterverteilt und 0 die Spanne des Gitters von F.

Um diese auf den ersten Blick nicht besonders einsichtige Definition nicht unmotiviert zu geben, sei erwähnt, dass im Fall $p = 1$ und einer Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion F für eine Lösung Z der Gleichung $Z = F * Z$ eine Dichotomie im Verhalten von Z zwischen F gitterverteilt und F nicht-gitterverteilt gilt. Diese Dichotomie bleibt im Fall $p > 1$ für eine Matrix von Verteilungsfunktionen F mit $\rho(F(\infty)) = 1$ mit der obigen Defintion erhalten (siehe Theorem 2.1 aus [7]).
Zur Verkürzung der Formulierung asymptotischer Resultate bei Unterscheidung zwischen $t \in d\mathbb{Z}$ und $t \in \mathbb{R}$ führen wir die Schreibweise

$$d\text{-}\lim_{t \to \infty} f(t) := \begin{cases} \lim_{t \to \infty} f(t), & \text{falls } d = 0 \\ \lim_{n \to \infty} f(nd), & \text{falls } d > 0 \end{cases}$$

ein. Aus [1] formulieren wir unter Vereinfachungen für unsere Situation - aber unter Berücksichtung des gitterverteilten Falls - folgendes Theorem:

Matrix-Erneuerungstheorem I *Sei F eine $p \times p$ Matrix von Verteilungsfunktionen, $F(\infty)$ quasi-stochastisch und*

$$\mu := \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} m_j u_i \int y F_{ij}(dy) > 0. \tag{2.10}$$

Die Spanne des Gitters von F betrage d. Dann gilt

$$d\text{-}\lim_{t\to\infty} (\mathbb{U} * g)_i(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{p} m_i u_j \int g_j(y) \lambda_d(dy)$$

$$\text{und} \quad d\text{-}\lim_{t\to-\infty} (\mathbb{U} * g)_i(t) = 0$$

für jede Funktion $g : \{1,\dots,p\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $g(i,\cdot) =: g_i(\cdot)$ für alle $1 \le i \le p$ direkt Riemann-integrierbar (d.R.i.) ist. In diesem Fall nennen wir auch g d.R.i.

Beweis: Wir setzen $\mathbf{D} := \operatorname{diag}(m_i, 1 \le i \le p)$. Durch

$$\Lambda(t) := \mathbf{D}^{-1} F(t) \mathbf{D}$$

wird dann eine Markov-modulierte Folge $(M_n, X_n)_{n\ge 0}$ mit Zustandsraum

$$(\{1,\dots,p\} \times \mathbb{R}, \mathcal{P}(\{1,\dots,p\}) \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}))$$

definiert, d.h.

$$\mathbb{P}(M_{n+1} = j, X_{n+1} \le t | M_n = i) := \frac{m_j}{m_i} F_{ij}(t) = \Lambda_{ij}(t)$$

für alle $n \ge 0$, $1 \le i, j \le p$ und $t \in \mathbb{R}$. Sei $(M_n, S_n)_{n\ge 0}$ der zugehörige MRW. Weiter definieren wir für $1 \le i, j \le p$ die Erneuerungsfunktionen

$$\mathbb{V}_{ij}(t) := \mathbb{E}_i\left(\sum_{n\ge 0} \mathbb{1}_{\{M_n = j, S_n \le t\}}\right) = \sum_{n\ge 0} \mathbb{P}_i(M_n = j, S_n \le t).$$

Es sei bemerkt, dass das Maß definiert durch

$$\mathbb{V}_i(A) := \mathbb{E}_i\left(\sum_{n\ge 0} \mathbb{1}_A(M_n, S_n)\right), \quad A \in \mathcal{P}(\{1,\dots,p\}) \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}),$$

ein sogenanntes Markov-Erneuerungsmaß ist.
Die Matrixfunktion $\mathbb{V} := (\mathbb{V}_{ij})_{1\le i,j\le p}$ wollen wir in Verbindung mit der Matrix-Erneuerungsfunktion $\mathbb{U}$ setzen. Wegen der speziellen Markov-Eigenschaft von $(M_n, X_n)_{n\ge 0}$ gilt für $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i(M_n = j, (X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \int \mathrm{P}(M_n = j, M_1 = k, (X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n | M_0, M_1, X_0, X_1) \, d\mathbb{P}_i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{p} \int_{\{X_1 \in A_1, M_1 = k\}} \mathbb{P}(M_n = j, (X_2, \ldots, X_n) \in A_2 \times \ldots \times A_n | M_1 = k) d\mathbb{P}_i \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int_{\{X_1 \in A_1, M_1 = k\}} \mathbb{P}(M_{n-1} = j, (X_1, \ldots, X_{n-1}) \in A_2 \times \ldots \times A_n | M_0 = k) d\mathbb{P}_i \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int \mathbb{1}_{A_1 \times \ldots \times A_n}(y, x) \mathbb{P}_k^{M_{n-1} = j, (X_1, \ldots, X_{n-1}) \in \cdot}(dx) \mathbb{P}_i^{M_1 = k, X_1 \in \cdot}(dy).
\end{aligned}
$$

Als leichte Anwendung erhalten wir

$$
\mathbb{P}_i(M_n = j, S_n \leq t) = \sum_{k=1}^{p} \int \mathbb{P}_k(M_{n-1} = j, S_{n-1} \leq t - y) \mathbb{P}_i^{M_1 = k, X_1 \in \cdot}(dy)
$$

und dies liefert induktiv

$$
\mathbb{P}_i(M_n = j, S_n \leq t) = \Lambda_{ij}^{*(n)}(t).
$$

Somit gilt

$$
\mathbb{U}_{ij}(t) = \sum_{n \geq 0} F_{ij}^{*(n)} = \sum_{n \geq 0} \frac{m_i}{m_j} \Lambda_{ij}^{*(n)} = \frac{m_i}{m_j} \mathbb{V}_{ij}(t).
$$

Die Folge $(\sigma_n(i))_{n \geq 0}$, $\sigma_0 := 0$, bezeichne die sukzessiven Eintrittszeiten der Markov-Kette $(M_n)_{n \geq 0}$ in den Zustand i. $(M_n)_{n \geq 0}$ besitzt als Übergangsmatrix $\mathbf{D}^{-1} F(\infty) \mathbf{D}$. Da $F(\infty)$ eine irreduzible endliche Matrix ist, bildet $(M_n)_{n \geq 0}$ eine irreduzible, positiv rekurrente Markov-Kette mit eindeutiger stationärer Verteilung $\xi = (u_i m_i)_{1 \leq i \leq p}$, wie man leicht nachrechnet. Die Rekurrenz induziert fast sichere Endlichkeit der $\sigma_n(i)$. Wir können schreiben:

$$
\mathbb{V}_{ij}(t) = \mathbb{E}_i \left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{M_n = j, S_n \leq t\}} \right) = \begin{cases} \mathbb{E}_i \left(\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{S_{\sigma_n(j)} \leq t\}} \right), & \text{falls } i = j \\ \mathbb{E}_i \left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_{\sigma_n(j)} \leq t\}} \right), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.11}
$$

Nun bilden $(S_{\sigma_n(i)})_{n \geq 0}$ und $(S_{\sigma_n(j)})_{n \geq 1}$, $j \neq i$, gewöhnliche Random Walks unter dem Maß $\mathbb{P}_i$ mit positiver Drift $\frac{\mu}{u_i m_i}$ bzw. $\frac{\mu}{u_j m_j}$ (siehe Korollar 9.6 aus [2]). Deswegen können wir $\mathbb{V}_{ij}$ als gewöhnliches Erneuerungsmaß ansehen. Es sei kurz angemerkt, dass unsere Definition von gitterverteilt mit der etwas anderen Definition aus [2] übereinstimmt. Lemma 9.9 und Satz 9.10 aus [2] ergeben, dass $(S_{\sigma_n(i)})_{n \geq 0}$ und $(S_{\sigma_n(j)})_{n \geq 1}$ dieselbe Gitterspanne wie Λ besitzen. Da Λ denselben Träger wie F besitzt, reicht es also den Gittertyp von F zu kennen. Das "*key renewal theorem*“ liefert dann

$$
\begin{aligned}
d\text{-}\lim_{t \to \infty} \mathbb{V}_{ij} * g_j(t) &= \frac{u_j m_j}{\mu} \int g_j(y) \lambda_d(dy) \\
\text{und} \quad d\text{-}\lim_{t \to -\infty} \mathbb{V}_{ij} * g_j(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Dies liefert die Behauptung:

$$
d\text{-}\lim_{t \to \infty} (\mathbb{U} * g)_i(t) = \sum_{j=1}^{p} d\text{-}\lim_{t \to \infty} \frac{m_i}{m_j} \mathbb{V}_{ij} * g_j(t)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{m_i}{m_j} \frac{u_j m_j}{\mu} \int g_j(y) \boldsymbol{\lambda}_d(dy) \\
&= \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{p} m_i u_j \int g_j(y) \boldsymbol{\lambda}_d(dy).
\end{aligned}
$$

□

Wie wir in Unterabschnitt 3.1.1.3 sehen werden, gilt $Z = \mathbb{U} * g$ und für $\widetilde{Z}$ erfahren wir Ähnliches in Kapitel 4. Daher kommt die Nützlichkeit des gerade bewiesenen Theorems für die Untersuchung der Asymptotik von z.
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$
(F_\alpha)(t) := \int\limits_{(-\infty,t]} \exp(\alpha y) F(dy)
$$

und μ_α als den (2.10) entsprechenden Wert für F_α. u_α und m_α bezeichnen die analog zu (2.9) normierten links- und rechtsseitigen Eigenvektoren zum Eigenwert 1 der Matrix $F_\alpha(\infty)$, falls $\rho(F_\alpha(\infty)) = 1$. Um den Leser im restlichen Teil dieser Arbeit nicht stets mit dieser Art intuitiv verständlichen Variablendefinition für verschiedene Matrizenfunktionen zu langweilen, wird dies in adäquaten Maßen fortan ausgelassen.
Als Folgerung aus dem vorherigen Theorem können wir konstatieren:

Matrix-Erneuerungstheorem II *Sei F eine $p \times p$ Matrix von Verteilungsfunktionen mit Träger enthalten in $\mathbb{R}_>$ und $F(\infty)$ eine reelle, irreduzible Matrix. Existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\rho(F_\alpha(\infty)) = 1$, dann gilt für alle $1 \leq i, j \leq p$, $h > 0$*

$$
\begin{aligned}
& d\text{-}\lim_{t \to \infty} (\mathbb{U}_\alpha)_{ij}\big((t, t+h]\big) = \frac{1}{\mu_\alpha} (m_\alpha)_i (u_\alpha)_j \boldsymbol{\lambda}_d\big((0,h]\big) \\
\textit{und} \quad & d\text{-}\lim_{t \to -\infty} (\mathbb{U}_\alpha)_{ij}\big((t, t+h]\big) = 0.
\end{aligned}
$$

Beweis: F_α ist quasi-stochastisch. Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \mathbb{1}_{[-h,0)}(t)$. Offensichtlich ist g d.R.i. Aufgrund der Bedingung an den Träger von F_α ist $\mu_\alpha > 0$. Die Voraussetzungen von Matrix-Erneuerungstheorem I sind somit erfüllt. Es folgt

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{U}_\alpha)_{ij} * g(t) &= \int g(t-y) (\mathbb{U}_\alpha)_{ij}(dy) = \int \mathbb{1}_{[-h,0)}(t-y) (\mathbb{U}_\alpha)_{ij}(dy) \\
&= \int \mathbb{1}_{(t,t+h]}(y) (\mathbb{U}_\alpha)_{ij}(dy) = (\mathbb{U}_\alpha)_{ij}\big((t,t+h]\big)
\end{aligned}
$$

Aus

$$
(\mathbb{U}_\alpha)_{ij} * g(t) = \frac{(m_\alpha)_i}{(m_\alpha)_j} (\mathbb{V}_\alpha)_{ij} * g(t)
$$

erhalten wir mit (2.12) die Behauptung. □

Als nützliches Kriterium, um die Positivität von μ zu zeigen, wird sich folgende Proposition herausstellen.

Proposition 2.7 *Sei F definiert wie in Matrix-Erneuerungstheorem I. Aus $\mathbb{U}_{ij}(t) < \infty \ \forall t \in \mathbb{R}$ für ein Paar $(i,j) \in \{1,\dots,p\}^2$ folgt $\mu > 0$.*

Beweis: Im Beweis des Matrix-Erneuerungstheorems I haben wir gezeigt, dass

$$\mathbb{U}_{ij}(t) = \frac{m_i}{m_j}\mathbb{V}_{ij}(t). \tag{2.13}$$

$(S_{\sigma_n(j)})_{n\geq 1}$ bildet unter $\mathbb{P}_i$ einen verschobenen Random Walk mit Zuwachsverteilung $\mathbb{P}_j^{S_{\sigma_1(j)}}$ und Drift $\mathbb{E}_j S_{\sigma_1(j)} = \frac{\mu}{u_j m_j}$ (siehe Korollar 9.6 aus [2]). Falls

$$\mathbb{P}_i\big(S_{\sigma_2(j)} - S_{\sigma_1(j)} = 0\big) = 1,$$

gilt offenbar $\mathbb{U}_{ij}(t) = \infty$ für $t > 0$ und alle $1 \leq j \leq p$. Diesen Fall können wir also ausschließen. Deshalb können wir aus der Theorie über Random Walks bei Existenz von μ folgern

$$\begin{aligned}
&\mu = 0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} S_{\sigma_n(j)} = -\infty \text{ und } \limsup_{n\to\infty} S_{\sigma_n(j)} = \infty \ \mathbb{P}_i\text{-f.s.}\\
&\mu < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n(j)} = -\infty \ \mathbb{P}_i\text{-f.s.}\\
&\mu > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{\sigma_n(j)} = \infty \ \mathbb{P}_i\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

Da $\mathscr{E}$ nur endlich viele Elemente enthält, ist die Existenz von μ trivial. Zusammen mit (2.13) und (2.11) ergibt sich, dass die Fälle $\mu = 0$ und $\mu < 0$ jeweils $\mathbb{U}_{ij}(t) = \infty \ \forall t \in \mathbb{R}$ implizieren. Nach Voraussetzung bleibt lediglich $\mu > 0$ übrig. □

2.3 Untersuchung der Funktion ϕ

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ wie aus Theorem I und erfülle die dortigen Eigenschaften (ii) und (iv). Jedoch sei der Zustandsraum $\mathscr{E} = \{e_1,\dots,e_p\} \subset \mathbb{R}^*$.
Von großer Relevanz wird die Funktion

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \log \rho(\mathbf{P}_\alpha)$$

sein, wobei an

$$\mathbf{P}_\alpha = \operatorname{diag}(|e_i|^\alpha, 1 \leq i \leq p)\mathbf{P}^\top.$$

erinnert sei. Speziell interessiert uns die Ableitung der Funktion ϕ an der Stelle 0, denn wie wir sehen werden, beträgt diese $\mathbb{E}\log|a_0|$.
Hilfreich beim Studium der Funktion ϕ wird sein:

Lemma 2.8 *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\rho(\mathbf{P}_\alpha) = \lim_{l\to\infty}\left[\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\right)^\alpha\right]^{1/l}$$

Beweis: Wegen $(\mathbf{P}_\alpha)_{ij} = |e_i|^\alpha p_{ji}$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{\alpha} &= \sum_{(e_{j_0},\dots,e_{j_{l-1}})\in\mathscr{E}^l} \mathbb{P}(a_0 = e_{j_0},\dots,a_{1-l} = e_{j_{l-1}})\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|e_{j_{k-1}}|\Bigg)^{\alpha} \\
&= \sum_{(e_{j_0},\dots,e_{j_{l-1}})\in\mathscr{E}^l} p_{j_1 j_0}\cdot\ldots\cdot p_{j_{l-1}j_{l-2}}\pi(e_{j_{l-1}})\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|e_{j_{k-1}}|\Bigg)^{\alpha} \\
&= \sum_{(e_{j_0},\dots,e_{j_{l-1}})\in\mathscr{E}^l} |e_{j_0}|^\alpha p_{j_1 j_0}\cdot\ldots\cdot |e_{j_{l-2}}|^\alpha p_{j_{l-1}j_{l-2}}\pi(e_{j_{l-1}})|e_{j_{l-1}}|^\alpha \\
&= \sum_{1\le i,j\le p} (\mathbf{P}_\alpha^{l-1})_{ij}\pi(e_j)|e_j|^\alpha = 1^\top \mathbf{P}_\alpha^{l-1} v_\alpha,
\end{aligned}$$

dabei sei $1 := (1,\dots,1)^\top$ und $v_\alpha := (\pi(e_1)|e_1|^\alpha,\dots,\pi(e_p)|e_p|^\alpha)^\top$. Da $\mathbf{P}$ aperiodisch und $|e_i| > 0$ ist, besitzt $\mathbf{P}_\alpha$ ebenso die Eigenschaft der Aperiodizität. Lemma A.8 aus dem Anhang liefert

$$\frac{\mathbf{P}_\alpha^{l-1}}{(\rho(\mathbf{P}_\alpha))^{l-1}} \xrightarrow{l\to\infty} \mathbf{C}_\alpha,$$

wobei $\mathbf{C}_\alpha$ eine positive konstante Matrix darstellt. Damit ergibt sich

$$\lim_{l\to\infty}\left[\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{\alpha}\right]^{1/l} = \lim_{l\to\infty}(1^\top \mathbf{P}_\alpha^{l-1} v_\alpha)^{1/l} = \lim_{l\to\infty}\left[(\rho(\mathbf{P}_\alpha))^{l-1/l}(1^\top \mathbf{C}_\alpha v_\alpha)^{1/l}\right] = \rho(\mathbf{P}_\alpha).$$

□

Mit diesem Resultat lässt sich eine wichtige Eigenschaft von ϕ erkennen.

Korollar 2.9 *Die Funktion ϕ ist konvex.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass für alle $0 < \vartheta < 1$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi(\vartheta\alpha_1 + (1-\vartheta)\alpha_2) \le \vartheta\phi(\alpha_1) + (1-\vartheta)\phi(\alpha_2).$$

Mit Lemma 2.8 und der Hölder-Ungleichung für $p = \frac{1}{\vartheta} > 1$ und $q = \frac{1}{1-\vartheta} > 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\phi\big(\vartheta\alpha_1 + (1-\vartheta)\alpha_2\big) \\
=&\log\left[\lim_{l\to\infty}\left(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{\vartheta\alpha_1+(1-\vartheta)\alpha_2}\right)^{1/l}\right] \\
=&\lim_{l\to\infty}\log\left(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{\vartheta\alpha_1+(1-\vartheta)\alpha_2}\right)^{1/l} \\
\le&\lim_{l\to\infty}\log\left[\left(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{\vartheta\alpha_1/\vartheta}\right)^{\vartheta/l}\cdot\left(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{(1-\vartheta)\alpha_2/1-\vartheta}\right)^{1-\vartheta/l}\right] \\
=&\vartheta\lim_{l\to\infty}\log\left(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{\alpha_1}\right)^{1/l} + (1-\vartheta)\lim_{l\to\infty}\log\left(\mathbb{E}\Bigg(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\Bigg)^{\alpha_2}\right)^{1/l}
\end{aligned}$$

$$=\vartheta\phi(\alpha_1)+(1-\vartheta)\phi(\alpha_2).$$

□

Für $e\in\mathscr{E}$ bezeichnen wir $\mathbb{E}_e(\cdot):=\mathbb{E}(\cdot|a_0=e)$ und $\mathbb{P}_e(\cdot):=\mathbb{P}(\cdot|a_0=e)$. Im weiteren Verlauf benötigen wir die Funktion

$$\mathfrak{h}_l:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\alpha\mapsto\max_{e\in\mathscr{E}}\mathbb{E}_e\left(\prod_{k=2}^{l}|a_{1-k}|\right)^{\alpha},\quad l\geq 2.$$

Lemma 2.10 *Die Folge $(\mathfrak{h}_l)_{l\geq 2}$ ist submultiplikativ, d.h. $\mathfrak{h}_{l+m}\leq\mathfrak{h}_l\mathfrak{h}_m$ für $l,m\geq 2$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{e}_{l+m}^{(\alpha)}\in\mathscr{E}$ so gewählt, dass $\mathfrak{h}_{l+m}(\alpha)=\mathbb{E}_{\mathfrak{e}_{l+m}^{(\alpha)}}\left(\prod_{k=2}^{l+m}|a_{1-k}|\right)^{\alpha}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre Markov-Kette ist, bildet die Rückwärtskette $(a_{-n},b_{-n})_{n\geq 1}$ ebenfalls einen solchen Prozess. Dann ergibt sich unter Verwendung der Markov-Eigenschaft der zuletzt genannten Kette

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathfrak{e}_{l+m}^{(\alpha)}}\left(\prod_{k=2}^{l+m}|a_{1-k}|\right)^{\alpha} &= \sum_{(x_1,\dots,x_{l+m-1})\in\mathscr{E}^{l+m-1}}\left(\prod_{k=1}^{l+m-1}|x_k|\right)^{\alpha}\mathbb{P}_{\mathfrak{e}_{l+m}^{(\alpha)}}\left(a_{-1:-(l+m-1)}=x_{1:l+m-1}\right)\\
&\overset{\text{M.E.}}{=}\sum_{(x_1,\dots,x_{l+m-1})\in\mathscr{E}^{l+m-1}}\left(\prod_{k=1}^{l-1}|x_k|\right)^{\alpha}\mathbb{P}_{\mathfrak{e}_{l+m}^{(\alpha)}}\left(a_{-1:-(l-1)}=x_{1:l-1}\right)\\
&\quad\cdot\left(\prod_{k=l}^{l+m-1}|x_k|\right)^{\alpha}\mathbb{P}\left(a_{-l:-(l+m-1)}=x_{l:l+m-1}|a_{-(l-1)}=x_{l-1}\right)\\
&=\sum_{(x_1,\dots,x_{l-1})\in\mathscr{E}^{l-1}}\left(\prod_{k=1}^{l-1}|x_k|\right)^{\alpha}\mathbb{P}_{\mathfrak{e}_{l+m}^{(\alpha)}}\left(a_{-1:-(l-1)}=x_{1:l-1}\right)\\
&\quad\cdot\sum_{(x_l,\dots,x_{l+m-1})\in\mathscr{E}^{m}}\Bigg[\left(\prod_{k=l}^{l+m-1}|x_k|\right)^{\alpha}\\
&\quad\cdot\mathbb{P}\left(a_{-l:-(l+m-1)}=x_{l:l+m-1}|a_{-(l-1)}=x_{l-1}\right)\Bigg]\\
&\leq\mathbb{E}_{\mathfrak{e}_{l+m}^{(\alpha)}}\left[\left(\prod_{k=2}^{l}|a_{1-k}|\right)^{\alpha}\max_{e\in\mathscr{E}}\mathbb{E}\left(\left(\prod_{k=l+1}^{l+m}|a_{1-k}|\right)^{\alpha}\Big|a_{1-l}=e\right)\right]\\
&\leq\mathfrak{h}_l(\alpha)\mathfrak{h}_m(\alpha).
\end{aligned}$$

□

Wir benötigen noch eine weitere Identität für $\rho(\mathbf{P}_\alpha)$.

Lemma 2.11 *Es gilt $\rho(\mathbf{P}_\alpha)=\inf_{l\geq 2}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l}=\lim_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l}$*

Beweis: Seien $l\geq 2$, $m\geq 1$ beliebig und $n\in\{0,\dots,l-1\}$. Aufgrund des vorherigen Lemmas gilt

$$(\mathfrak{h}_{n+lm}(\alpha))^{\frac{1}{n+lm}}\leq\left[\mathfrak{h}_n(\alpha)(\mathfrak{h}_m(\alpha))^l\right]^{\frac{1}{n+lm}}=(\mathfrak{h}_n(\alpha))^{\frac{1}{n+lm}}(\mathfrak{h}_m(\alpha))^{\frac{1}{\frac{n}{l}+m}}.$$

Damit ergibt sich

$$\limsup_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_{n+lm}(\alpha))^{\frac{1}{n+lm}} \leq (\mathfrak{h}_m(\alpha))^{\frac{1}{m}}.$$

Da die Aussage für alle $n \in \{0,\ldots,l-1\}$ wahr ist, gilt schon

$$\limsup_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l} \leq (\mathfrak{h}_m(\alpha))^{\frac{1}{m}}.$$

Weil außerdem $m \geq 1$ beliebig war, erhalten wir die Ungleichung

$$\limsup_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l} \leq \inf_{l\geq 2}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l}.$$

Die triviale Ungleichung

$$\inf_{l\geq 2}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l} \leq \liminf_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l}$$

induziert dann $\lim_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l} = \inf_{l\geq 2}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l}$.
Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\right)^{\alpha} &= \sum_{e\in\mathscr{E}}\mathbb{E}_e\left(\prod_{k=2}^{l}|a_{1-k}|\right)^{\alpha}|e|^{\alpha}\pi(e) \\ &\leq \mathfrak{h}_l(\alpha)\sum_{e\in\mathscr{E}}|e|^{\alpha}\pi(e),\end{aligned} \tag{2.14}$$

$\sum_{e\in\mathscr{E}}|e|^{\alpha}\pi(e) > 0$ und Proposition 2.8 ergibt sich

$$\rho(\mathbf{P}_\alpha) \leq \lim_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l}.$$

Die andere Ungleichung erschließt sich ähnlich:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\right)^{\alpha} &= \sum_{e\in\mathscr{E}}\mathbb{E}_e\left(\prod_{k=2}^{l}|a_{1-k}|\right)^{\alpha}|e|^{\alpha}\pi(e) \\ &\geq \mathfrak{h}_l(\alpha)\left|\mathfrak{e}_l^{(\alpha)}\right|^{\alpha}\pi\left(\mathfrak{e}_l^{(\alpha)}\right).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathfrak{e}_l^{(\alpha)}$ dasjenige Element aus $\mathscr{E}$ mit $h_l(\alpha) = \mathbb{E}_{\mathfrak{e}_l^{(\alpha)}}\left(\prod_{k=2}^{l}|a_{1-k}|\right)^{\alpha}$. Weiter leiten wir ab

$$\rho(\mathbf{P}_\alpha) \geq \lim_{l\to\infty}(\mathfrak{h}_l(\alpha))^{1/l}.$$

□

Nun haben wir genug Vorarbeit geleistet und können uns dem angekündigten Resultat über die Ableitung von ϕ widmen.

Proposition 2.12 *Die Ableitung der Funktion ϕ an der Stelle* 0 *beträgt* $\mathbb{E}\log|a_0|$.

Beweis: Wir werden über die einseitigen Ableitungen von $\log \mathfrak{h}_l$ an der Stelle 0 auf die Behauptung schließen. Da $\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|$ positiv ist, existieren Elemente $\mathfrak{e}_l^+$, $\mathfrak{e}_l^- \in \mathscr{E}$, so dass der Erwartungswert von $\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|$ bedingt unter $a_0 = \mathfrak{e}_l^+$ bzw. $a_0 = \mathfrak{e}_l^-$ mit $h_l(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq}$ bzw. für $\alpha \in \mathbb{R}_{\leq}$ übereinstimmt. Außerdem ist $\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|$ für festes l beschränkt, weswegen beim folgenden Term die Reihenfolge von Differentation und Integration vertauscht werden kann. Für $\alpha > 0$ ist

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathfrak{h}_l(\alpha) = \mathbb{E}_{\mathfrak{e}_l^+}\left[\left(\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|\right)^{\alpha} \log\left(\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|\right)\right].$$

Ferner ergibt die Stetigkeit der Ableitung für $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathfrak{h}_l(\alpha) &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{l} \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathfrak{h}_l(\alpha)}{\mathfrak{h}_l(\alpha)} \\ &= \frac{1}{l} \mathbb{E}_{\mathfrak{e}_l^+}\left[\log\left(\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Mit Lemma 2.11 sehen wir

$$\begin{aligned} \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\log \rho(\mathbf{P}_h) - \log \rho(\mathbf{P}_0)}{h} &= \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\log\left(\inf_{l \geq 2} (\mathfrak{h}_l(h))^{1/l}\right)}{h} \\ &\leq \limsup_{h \downarrow 0} \frac{\frac{1}{l} \log \mathfrak{h}_l(h)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathfrak{h}_l(\alpha) \Big|_{\alpha = h} \\ &\overset{(2.15)}{=} \frac{1}{l} \mathbb{E}_{\mathfrak{e}_l^+}\left[\log\left(\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|\right)\right]. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist für beliebiges $l \geq 2$ gültig. Der Ergodensatz für aperiodische, positiv rekurrente, irreduzible Markov-Ketten angewendet auf die auf $\mathscr{E}$ beschränkte Funktion $x \mapsto \log |x|$ liefert für beliebiges $e \in \mathscr{E}$:

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \mathbb{E}_e \log\left(\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|\right) = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \mathbb{E}_e \left(\sum_{k=2}^{l} \log |a_{1-k}|\right) = \mathbb{E} \log |a_0| < 0.$$

Die Endlichkeit des Zustandsraumes $\mathscr{E}$ impliziert, dass diese Konvergenz sogar gleichmäßig in $\mathscr{E}$ ist und daher gilt

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \mathbb{E}_{\mathfrak{e}_l^+} \log\left(\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|\right) = \mathbb{E} \log |a_0|. \tag{2.16}$$

Damit erhalten wir

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{\log \rho(\mathbf{P}_h) - \log \rho(\mathbf{P}_0)}{h} \leq \lim_{l \to \infty} \mathbb{E}_{\mathfrak{e}_l^+} \log\left(\prod_{k=2}^{l} |a_{1-k}|\right) = \mathbb{E} \log |a_0|.$$

Ebenfalls mit dem Ergodensatz jedoch mit Anfangsverteilung π erschließt sich die andere Ungleichung. Unter zusätzlicher Verwendung der Jensenschen Ungleichung (h hinreichend klein) und Lemma 2.8 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\downarrow 0} \frac{\log\rho(\mathbf{P}_h) - \log\rho(\mathbf{P}_0)}{h} &= \liminf_{h\downarrow 0} \frac{\lim_{l\to\infty}\left[\frac{1}{l}\log\left(\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\right)^h\right)\right]}{h} \\
&\geq \liminf_{h\downarrow 0} \frac{\lim_{l\to\infty}\left[\frac{1}{l}h\cdot\mathbb{E}\log\left(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\right)\right]}{h} \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\mathbb{E}\log\left(\prod_{k=1}^{l}|a_{1-k}|\right) = \mathbb{E}\log|a_0|.
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit insgesamt

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\log\rho(\mathbf{P}_h) - \log\rho(\mathbf{P}_0)}{h} = \mathbb{E}\log|a_0| < 0.$$

All diese Schritte laufen analog für die linksseitige Ableitung ab, so dass sich die Behauptung ergibt. $\square$

Aufgrund der Konvexität von ϕ, $\rho(\mathbf{P}_0) = 1 = \rho(\mathbf{P}_\lambda)$ und der eben bewiesenen Proposition folgt:

Korollar 2.13 *Für* $0 < \alpha < \lambda$ *ist* $\rho(\mathbf{P}_\alpha) < 1$ *und für* $\alpha > \lambda$ *ist* $\rho(\mathbf{P}_\alpha) > 1$.

3 Beweis von Theorem I

Zunächst leiten wir in Abschnitt 3.1 eine explizite Gestalt der Grenzwerte der Funktionswerte $Z_i(x,t)$, $1 \leq i \leq p$, und $z(x,t)$, die wir in (2.1) definiert haben, für $t \to \infty$ her. In Proposition 2.1 haben wir gezeigt, dass die Grenzwerte von $z(x,t)$ und $t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t)$ für $t \to \infty$ übereinstimmen. Durch das Resultat aus Abschnitt 3.1 wird sich der Fall eines b_0 mit konstantem Vorzeichen in Kürze erledigen (siehe Abschnitt 3.2).
Falls b_0 einen einseitig unbeschränkten Träger besitzt, nutzen wir einen Ansatz von Goldie [14] und passen diesen an die gegebene Situation mit einer Markov-Kette $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ an (siehe Abschnitt 3.3).

3.1 Asymptotik der Funktion z

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass es für diesen Abschnitt ausreicht, dass $b_{-(n+1)}$ nur unabhängig von $\mathcal{G}_n = \sigma(a_0,\dots,a_{-n})$ für alle $n \geq 0$ ist.
Wir beginnen damit zu zeigen, dass F und g, definiert in (2.5) und (2.3), die Voraussetzungen des Matrix-Erneuerungstheorems I erfüllen und außerdem $Z = \mathbb{U} * g$ gilt, denn dann folgt für alle $1 \leq i \leq p$ und $(x,t) \in \{-1,1\} \times \mathbb{R}$

$$Z_i(x,t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{p} m_i u_j \int g_j(x,y)dy.$$

Weiter ergibt sich dann aus der Normierung $\sum_{i=1}^{p} m_i = 1$

$$z(x,t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{p} u_j \int g_j(x,y)dy.$$

3.1.1 Anwendbarkeit des Matrix-Erneuerungstheorems I

Betreffend den Voraussetzungen von Matrix-Erneuerungstheorem I lässt sich der Gittertyp von F schnell erschließen. F ist nicht gitterverteilt, da die $\log e_i$ keine ganzzahligen Vielfachen derselben Zahl sind und F_{ii} nur Masse in $\log e_i$ trägt.
Weil $F(\infty) = \mathbf{P}_\lambda$ ist, gibt $\mathbf{P}$ die Eigenschaft der Irreduzibilität an $F(\infty)$ weiter. Außerdem ist $\rho(F(\infty)) = \rho(\mathbf{P}_\lambda) = 1$ nach Voraussetzung, womit folgt, dass $F(\infty)$ quasi-stochastisch ist.
Die anderen Voraussetzungen werden in den folgenden Unterabschnitten nachgerechnet.

3.1.1.1 g ist d.R.i.

Es sei vorab bemerkt, dass dieser Beweis für $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}^*$, $\mathscr{E} \cap \mathbb{R}_< \neq \emptyset$ und $\mathscr{E} \cap \mathbb{R}_> \neq \emptyset$, komplett übernommen werden kann.
Für den Beweis, dass g_i d.R.i. ist, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.1 *Für alle* $0 \leq \alpha < \lambda$ *gilt* $\mathbb{E}|Y_1|^\alpha < \infty$.

Beweis: Sei zunächst $\alpha < \min\{1, \lambda\}$. Dann erhält man beispielsweise mit der Minkowski-Ungleichung, dass die Abbildung $(x,y) \mapsto |x+y|^\alpha$ konvex ist. Zusammen mit der Unabhängigkeit von $b_{-(n+1)}$ von $\mathcal{G}_n$ für $n \geq 0$ liefert nun die Jensensche Ungleichung

$$\mathbb{E}|Y_1|^\alpha \leq \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{1-k}|\right)^\alpha \mathbb{E}|b_{-l}|^\alpha.$$

Falls $1 \leq \alpha < \lambda$, liefert die Minkowski-Ungleichung

$$(\mathbb{E}|Y_1|^\alpha)^{1/\alpha} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \left[\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{1-k}|\right)^\alpha\right]^{1/\alpha} (\mathbb{E}|b_{-l}|^\alpha)^{1/\alpha}.$$

Durch Anwendung der Jensenschen Ungleichung mit der konvexen Funktion $x \mapsto x^{\lambda+\delta/\alpha}$ erhalten wir

$$\mathbb{E}|b_{-l}|^\alpha \leq (\mathbb{E}|b_0|^{\lambda+\delta})^{\alpha/\lambda+\delta} < \infty,$$

wobei die Endlichkeit aus Voraussetzung (v) des Theorems I resultiert. Nach Lemma 2.8 ist $\lim_{l\to\infty}\left[\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{1-k}|\right)^\alpha\right]^{1/l} = \rho(\mathbf{P}_\alpha)$ und nach Korollar 2.13 ist $\rho(\mathbf{P}_\alpha) < 1$. Daraus folgt für $\varepsilon > 0$ mit $\rho(\mathbf{P}_\alpha) + \varepsilon =: c < 1$ die Existenz eines $N \geq 1$, so dass für alle $l \geq N$

$$\left[\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{1-k}|\right)^\alpha\right]^{1/l} < c$$

gilt. Daher erhalten wir durch Abschätzung gegen eine geometrische Reihe die Beschränktheit von $\sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{1-k}|\right)^\alpha$ bzw. $\sum_{l=0}^{\infty}\left[\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{l} |a_{1-k}|\right)^\alpha\right]^{1/\alpha}$. Insgesamt folgt somit die Behauptung. $\square$

Wir können konstatieren, dass für alle $0 \leq \alpha < \lambda$ ein $0 < \varepsilon < \lambda - \alpha$ existiert, so dass vermöge der Markov-Ungleichung

$$t^\alpha \mathbb{P}(|Y_1| > t) \leq t^\alpha \frac{\mathbb{E}|Y_1|^{\alpha+\varepsilon}}{t^{\alpha+\varepsilon}} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

gilt. Um ein Potenzgesetz-Verhalten zu attestieren, muss deshalb zwingend $\mathbb{E}|Y_1|^\lambda = \infty$ gelten. Widmen wir uns nun der direkten Riemann-Integrierbarkeit von g. Der folgende Beweis stammt bis auf Korrekturen mancher Ungenauigkeiten aus [16].

Proposition 3.2 *Für* $1 \leq i \leq p$ *und* $x \in \{-1, 1\}$ *ist die Funktion* $t \mapsto g_i(x,t)$ *d.R.i. auf* $\mathbb{R}$.

Beweis: Da g_i stetig in t ist, reicht es, eine Minorante und eine Majorante für g_i zu finden, die d.R.i. sind. Wir betrachten die Funktion getrennt auf $\mathbb{R}_{\geq}$ und $\mathbb{R}_{\leq}$.
Sei

$$
\begin{aligned}
g_i^1(x,t) &:= exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(y - xb_0 < xa_0Y_0 \leq y, a_0 = e_i)dy \\
g_i^2(x,t) &:= exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(y < xa_0Y_0 \leq y - xb_0, a_0 = e_i)dy.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Dann ist $g_i(x,t) = g_i^1(x,t) - g_i^2(x,t)$. Es gilt offenbar

$$
\begin{aligned}
-\frac{\exp(t\lambda)}{\lambda+1} = -exp(-t) \int_0^{\exp(t)} y^\lambda dy &\leq -g_i^2(x,t) \leq g_i(x,t) \leq g_i^1(x,t) \\
&\leq exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda dy = \frac{\exp(t\lambda)}{\lambda+1}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Da die Funktion $t \mapsto \exp(t\lambda)$ auf $\mathbb{R}_{\leq}$ monoton fallend und integrierbar ist, haben wir in (3.2) eine auf $\mathbb{R}_{\leq}$ d.R.i. Majorante und Minorante für g_i konstruiert. Bleibt also nur noch die direkte Riemann-Integrierbarkeit auf $\mathbb{R}_{\geq}$ zu zeigen.
Abermals ist unser Vorgehen die Konstruktion von d.R.i. Majoranten für g_i^1 und g_i^2. Da beide Funktionen vom selben Typ sind, untersuchen wir nur g_i^1. Dazu wählen wir $0 < \varepsilon < 1$, so dass

$$
-1 < \lambda - (\lambda + \delta)\varepsilon < 0. \tag{3.3}
$$

Aus

$$
\{xb_0 \leq y^\varepsilon\} \cap \{y - xb_0 < xa_0Y_0 \leq y\} \subset \{y - y^\varepsilon < xa_0Y_0 \leq y\}
$$

ergibt sich

$$
0 \leq g_i^1(x,t) \leq exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(xb_0 > y^\varepsilon)dy + exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(y - y^\varepsilon < xe_iY_0 \leq y)dy.
$$

Vermöge der Markov-Ungleichung schätzen wir den ersten Summanden ab durch

$$
\begin{aligned}
0 \leq exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(xb_0 > y^\varepsilon)dy &\leq exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda y^{-(\lambda+\delta)\varepsilon} \mathbb{E}|b_0|^{\lambda+\delta} dy \\
&\leq \frac{\mathbb{E}|b_0|^{\lambda+\delta}}{\lambda - (\lambda+\delta)\varepsilon + 1} exp(-t) \exp\left([\lambda - (\lambda+\delta)\varepsilon + 1]t\right) \\
&= \frac{\mathbb{E}|b_0|^{\lambda+\delta}}{\lambda - (\lambda+\delta)\varepsilon + 1} \exp([\lambda - (\lambda+\delta)\varepsilon]t)
\end{aligned}
$$

Nach Voraussetzung (v) aus Theorem I ist $\mathbb{E}|b_0|^{\lambda+\delta} < \infty$. Die dadurch definierbare Majorante für den ersten Summanden ist nach (3.3) monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\geq}$ und integrierbar über $\mathbb{R}_{\geq}$. Die Konstruktion einer d.R.i. Majorante des zweiten Summanden ist schwieriger und sehr technisch. Zur Vereinfachung werden wir konstante Terme in offensichtlicher Weise durch Konstanten ersetzen. Sei a eine Lösung der Gleichung $y - y^{\varepsilon} = 2$. Da der zweite Summand auf $[0, \log a]$ beschränkt ist, reicht es, eine integrierbare, monoton fallende Majorante für $t \geq \log a > \log 2$ zu finden:

$$
\begin{aligned}
0 \leq & exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(y - y^{\varepsilon} < xe_i Y_0 \leq y) dy \\
\leq & exp(-t) \int_0^2 y^{\lambda} dy + exp(-t) \int_2^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(y - y^{\varepsilon} < xe_i Y_0 \leq y) dy \\
= & exp(-t) C_1 + exp(-t) \int_2^a y^{\lambda} \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y - y^{\varepsilon}) dy + exp(-t) \int_a^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y - y^{\varepsilon}) dy \\
& - exp(-t) \int_2^{exp(t) - \exp(\varepsilon t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y) dy - exp(-t) \int_{exp(t) - \exp(\varepsilon t)}^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y) dy \\
\leq & exp(-t) C_2 + exp(-t) \int_a^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y - y^{\varepsilon}) dy - exp(-t) \int_2^{exp(t) - \exp(\varepsilon t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y) dy \\
\leq & exp(-t) C_2 + exp(-t) \int_a^{exp(t)} \left[y^{\lambda} - (y - y^{\varepsilon})^{\lambda} (1 - \varepsilon y^{\varepsilon - 1}) \right] \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y - y^{\varepsilon}) dy.
\end{aligned}
$$

Beim letzten Gleichheitszeichen haben wir $\check{y} = y - y^{\varepsilon}$ substituiert. Wir wählen nun ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$
0 < \alpha < \lambda \quad \text{und} \quad -1 < \lambda - \alpha + \varepsilon - 1 < 0. \tag{3.4}
$$

Wiederum nutzt uns die Markov-Ungleichung für

$$
\mathbb{P}(xe_i Y_0 > y - y^{\varepsilon}) \leq (y - y^{\varepsilon})^{-\alpha} \mathbb{E}|e_i Y_0|^{\alpha} = (y - y^{\varepsilon})^{-\alpha} C_3
$$

mit $C_3 := \mathbb{E}|e_i Y_0|^{\alpha} < \infty$ nach Lemma 3.1. Damit schätzen wir weiter ab:

$$
\begin{aligned}
& exp(-t) C_2 + exp(-t) \int_a^{exp(t)} \left[y^{\lambda} - (y - y^{\varepsilon})^{\lambda} (1 - \varepsilon y^{\varepsilon - 1}) \right] \mathbb{P}(xe_i Y_0 > y - y^{\varepsilon}) dy \\
\leq & exp(-t) C_2 + exp(-t) C_3 \int_a^{exp(t)} \left[y^{\lambda} - (y - y^{\varepsilon})^{\lambda} (1 - \varepsilon y^{\varepsilon - 1}) \right] (y - y^{\varepsilon})^{-\alpha} dy.
\end{aligned}
$$

Setze $h(y) := \left[y^{\lambda} - (y - y^{\varepsilon})^{\lambda} (1 - \varepsilon y^{\varepsilon - 1}) \right] (y - y^{\varepsilon})^{-\alpha}$. Wir behaupten, dass es eine positive Konstante C_4 gibt mit $h(y) \leq C_4 y^{\lambda - \alpha + \varepsilon - 1}$ für $y \geq a$. Wegen der Stetigkeit und Positivität beider

Funktionen auf dem betrachteten Intervall reicht es, $h(y) \in \mathcal{O}(y^{\lambda-\alpha+\varepsilon-1})$ für $y \to \infty$ nachzuvollziehen:

$$\begin{aligned}&\limsup_{y\to\infty} \frac{\left[y^\lambda - (y-y^\varepsilon)^\lambda(1-\varepsilon y^{\varepsilon-1})\right](y-y^\varepsilon)^{-\alpha}}{y^{\lambda-\alpha+\varepsilon-1}}\\ =&\limsup_{y\to\infty} \frac{y^{\lambda-\alpha}\left[(1-y^{\varepsilon-1})^{-\alpha} - (1-y^{\varepsilon-1})^{\lambda-\alpha}(1-\varepsilon y^{\varepsilon-1})\right]}{y^{\lambda-\alpha}y^{\varepsilon-1}}.\end{aligned}$$

Wir wollen die Bernoullische Ungleichung $(1+rs) \geq (1+s)^r$ für $0 \leq r \leq 1$ und $s > -1$ benutzen. Es gilt $0 < \varepsilon < 1$ und wegen $1-\varepsilon < 1$ ist $-y^{\varepsilon-1} > -1$ für $y \geq a$. Dann liefert die eben genannte Ungleichung $(1-\varepsilon y^{\varepsilon-1}) \geq (1-y^{\varepsilon-1})^\varepsilon$. Das ergibt

$$\begin{aligned}&\limsup_{y\to\infty} \frac{(1-y^{\varepsilon-1})^{-\alpha} - (1-y^{\varepsilon-1})^{\lambda-\alpha}(1-\varepsilon y^{\varepsilon-1})}{y^{\varepsilon-1}}\\ \leq&\lim_{y\to\infty} \frac{(1-y^{\varepsilon-1})^{-\alpha} - (1-y^{\varepsilon-1})^{\lambda-\alpha+\varepsilon}}{y^{\varepsilon-1}}\\ \overset{\text{l'Hospital}}{=}&\lim_{y\to\infty} \frac{(\varepsilon-1)y^{\varepsilon-2}\alpha(1-y^{\varepsilon-1})^{-\alpha-1} + (\varepsilon-1)y^{\varepsilon-2}(\lambda-\alpha+\varepsilon)(1-y^{\varepsilon-1})^{\lambda-\alpha+\varepsilon-1}}{(\varepsilon-1)y^{\varepsilon-2}}\\ =&\lim_{y\to\infty}\left[\alpha(1-y^{\varepsilon-1})^{-\alpha-1} + (\lambda-\alpha+\varepsilon)(1-y^{\varepsilon-1})^{\lambda-\alpha+\varepsilon-1}\right]\\ =&\lambda+\varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Diese obere Schranke für $h(y)$ wird genutzt für

$$\begin{aligned}&exp(-t)C_2 + exp(-t)C_3 \int_a^{exp(t)} \left[y^\lambda - (y-y^\varepsilon)^\lambda(1-\varepsilon y^{\varepsilon-1})\right](y-y^\varepsilon)^{-\alpha} dy\\ \leq&exp(-t)C_2 + exp(-t)C_3C_4 \int_a^{exp(t)} y^{\lambda-\alpha+\varepsilon-1} dy\\ =&exp(-t)C_5 + \frac{C_6}{\lambda-\alpha-\varepsilon}\exp\left((\lambda-\alpha+\varepsilon-1)t\right)\\ \leq&C_7\exp([\lambda-\alpha+\varepsilon-1]t).\end{aligned}$$

Die Funktion $t \mapsto C_7\exp([\lambda-\alpha+\varepsilon-1]t)$ ist nach (3.4) auf $\mathbb{R}_{\geq}$ integrierbar und monoton fallend. Zusammenfassend haben wir durch

$$g_i^1(x,t) \leq C_0\exp([\lambda-(\lambda+\delta)\varepsilon]t) + C_7\exp([\lambda-\alpha+\varepsilon-1]t)$$

eine d.R.i. Majorante für $t \mapsto g_i^1(x,t)$ für $t \geq \log a$ gefunden. $\square$

3.1.1.2 $\mu > 0$

Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^\infty (\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^n)_{ij}$ für $1 \leq i,j \leq p$ und $0 < \alpha < \lambda$. Aus der Konvergenz dieser Reihe werden wir auf die Endlichkeit von $\mathbb{U}_{ij}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ schließen können.

Korollar 2.13 ergibt $\rho(\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}) =: \theta_\alpha < 1$. Da $\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}$ eine nicht-negative, irreduzible Matrix ist, liefert das Perron-Frobenius Theorem A.5 einen positiven, rechtsseitigen Eigenvektor v_α von $\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}$ zum Eigenwert θ_α. Dann ist v_α auch ein rechtsseitiger Eigenvektor der Matrix $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^n$ zum Eigenwert $(1-\theta_\alpha)^{-1}$. Wegen $(v_\alpha)_j > 0$ für alle $1 \le j \le p$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^n)_{ij} < \infty$$

für alle $1 \le i \le p$.
Nun zeigen wir

$$\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^n = \int \exp(-\alpha y) F^{*(n)}(dy) \tag{3.5}$$

per Induktion über $n \ge 0$, wobei wie vorher

$$F(t) = \left(e_i^\lambda p_{ji} \mathbb{1}_{[\log e_i, \infty)}(t)\right)_{1 \le i,j \le p}.$$

Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial, ebenso leicht sieht man die Behauptung für $n = 1$. Wir entnehmen aus der Definition der Faltung für beliebiges $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$

$$(F * F^{*(n)})_{ij}(A) = \sum_{k=1}^{p} \int \int \mathbb{1}_A(x+y) F_{kj}^{*(n)}(dx) F_{ik}(dy)$$

Per Funktionserweiterungsargument lässt sich dies auf nicht-negative Funktionen fortsetzen. Damit und durch Verwendung der Identität für $n = 1$ folgt unter Annahme der Geltung der Identität (3.5) für festes beliebiges $n \ge 1$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^{n+1})_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} (\mathbf{P}_{\lambda-\alpha})_{ik} (\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^n)_{kj} \\
&\overset{I.V.}{=} \sum_{k=1}^{p} \int \exp(-\alpha y) F_{ik}(dy) \int \exp(-\alpha x) F_{kj}^{*(n)}(dx) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int \int \exp(-\alpha(x+y)) F_{kj}^{*(n)}(dx) F_{ik}(dy) \\
&= \int \exp(-\alpha y) F_{ij}^{*(n+1)}(dy).
\end{aligned}$$

Wir können nun folgern, dass

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^n)_{ij} &\ge \int_{(-\infty,t]} \exp(-\alpha y) F_{ij}^{*(n)}(dy) \\
&\ge \exp(-\alpha t) \int_{(-\infty,t]} F_{ij}^{*(n)}(dy) = \exp(-\alpha t) F_{ij}^{*(n)}(t).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $1 \le i, j \le p$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{U}_{ij}(t) = \sum_{n \ge 0} F_{ij}^{*(n)}(t) \le \exp(\alpha t) \sum_{n \ge 0} (\mathbf{P}_{\lambda-\alpha}^n)_{ij} < \infty,$$

was mittels Proposition 2.7 $\mu > 0$ liefert.

3.1.1.3 $Z = \mathbb{U} * g$

Wir benötigen eine Vorüberlegung über den Träger von $F_{ij}^{*(n)}$. Der Träger von $F_{ij}^{*(n)}$ enthält nur Elemente der Form $\sum_{k=1}^{n} \log(x_k)$, $x_k \in \mathscr{E}$ für $1 \leq k \leq n$. Somit ist für $n \geq 0$ sowohl der Träger als auch die Gesamtmasse von $F_{ij}^{*(n)}$ beschränkt.
Da $F * Z$ und g komponentenweise lokal beschränkt sind, existieren nach Vorüberlegung $F * (F * Z)$ und $F * g$. Unter Verwendung der Assoziativität des Faltungsproduktes ergibt sich daraus

$$F * (F * Z + g) = F * (F * Z) + F * g = F^{*(2)} * Z + F * g.$$

Mit demselben Argument erhalten wir nach n-facher Iteration von (2.6) für beliebiges $n \geq 1$

$$Z = \sum_{k=0}^{n-1} (F^{*(k)} * g) + F^{*(n)} * Z.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass $F^{*(n)} * Z \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Dazu dient:

Lemma 3.3 *Für $n \geq 0$ und $(x,t) \in \{-1,1\} \times \mathbb{R}$ gilt*

$$(F^{*(n)} * Z)_i(x,t) = exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}\left(x\left(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}\right) Y_{1-n} > y, a_0 = e_i\right) dy.$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung per Induktion über n. Im Fall $n = 0$ ergibt sich die Behauptung direkt aus $\prod_{k=1}^{0} a_{1-k} := 1$.
Sei die Behauptung für beliebiges $n \geq 0$ wahr. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(F^{(n+1)} * Z)_i(x,t) &= (F * (F^{*(n)} * Z))_i(x,t) = \sum_{j=1}^{p} F_{ij} * (F^{*(n)} * Z)_j(x,t) \\
&= \sum_{j=1}^{p} e_i^\lambda p_{ji} (F^{*(n)} * Z)_j(x, t - \log e_i) \\
&\overset{I.V.}{=} e_i^\lambda exp(-(t - \log e_i)) \sum_{j=1}^{p} p_{ji} \int_0^{exp(t - \log e_i)} y^\lambda \mathbb{P}\left(x\left(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}\right) Y_{1-n} > y, a_0 = e_j\right) dy \\
&\overset{\text{Lemma 2.3}}{=} e_i^\lambda exp(-(t - \log e_i)) \int_0^{exp(t - \log e_i)} y^\lambda \mathbb{P}\left(x\left(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\right) Y_{-n} > y, a_0 = e_i\right) dy \\
&= exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}\left(x\left(\prod_{k=2}^{n+1} a_{1-k}\right) Y_{-n} > \frac{y}{e_i}, a_0 = e_i\right) dy \\
&= exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}\left(x\left(\prod_{k=1}^{n+1} a_{1-k}\right) Y_{-n} > y, a_0 = e_i\right) dy.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir beim vorletzten Gleichheitszeichen $\breve{y} = \frac{y}{e_i} = y \cdot \exp(-\log e_i)$ substituiert. $\square$

Dadurch erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{p} (F^{*(n)} * Z)_i(x,t) = exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}\left(x\left(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}\right) Y_{1-n} > y\right) dy.$$

Wie in (1.7) gesehen gilt $\prod_{k=1}^{n} |a_{1-k}||Y_{1-n}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, daraus resultiert für alle $y > 0$

$$\mathbb{P}\left(x\left(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}\right) Y_{1-n} > y\right) \leq \mathbb{P}\left(\prod_{k=1}^{n} |a_{1-k}||Y_{1-n}| > y\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d.h. $\sum_{i=1}^{p} (F^{*(n)} * Z)_i(x,t) \to 0$. Da die Summanden nicht-negativ sind, folgt wie gewünscht $F^{*(n)} * Z \to 0$.
Damit ist $Z = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (F^{*(k)} * g)$ gültig. Dass letzterer Term identisch mit $\mathbb{U} * g$ ist, ist nicht trivial, da $g_i(x,\cdot)$ möglicherweise ein nicht konstantes Vorzeichen besitzt. Wir werden beweisen, dass dies trotzdem gilt. Dazu zeigen wir die Existenz von $\mathbb{U} * g^1$ und $\mathbb{U} * g^2$, wobei g^1 und g^2 die nicht-negativen Funktionen aus (3.1) sind.
Für beliebiges $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int \mathbb{1}_A dF_{ij}^{*(k)} &= \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A \left(d \sum_{k=0}^{n} F_{ij}^{*(k)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} F^{*(k)}(A) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F^{*(k)}(A) = \int \mathbb{1}_A d\mathbb{U}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Mit dem Funktionserweiterungsargument lässt sich obige Identität in gewohnter Weise auf nicht-negative Funktionen erweitern.
Wir haben im Unterabschnitt 3.1.1.1 gesehen, dass es für g_i^1 Majoranten der Form $t \mapsto C \cdot \exp(t\alpha)$ gibt. Diese können wie folgt gewählt werden:

$$\begin{aligned} & g_i^1(x,t) \leq C_1 \exp(\alpha_1 t) \text{ für } t \in \mathbb{R}_{\geq} \text{ und } -1 < \alpha_1 < 0 \\ \text{und} \quad & g_i^1(x,t) \leq C_2 \exp(\alpha_2 t) \text{ für } t \in \mathbb{R}_{\leq} \text{ und } 0 < \alpha_2 < \lambda. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int g_j^1(x,t-y) F_{ij}^{*(n)}(dy) \leq & \int_{(-\infty,t)} C_1 \exp(\alpha_1(t-y)) F_{ij}^{*(n)}(dy) + \int_{[t,\infty)} C_2 \exp(\alpha_2(t-y)) F_{ij}^{*(n)}(dy) \\ =& C_1 \exp(\alpha_1 t) \int_{(-\infty,t)} \exp(-\alpha_1 y) F_{ij}^{*(n)}(dy) \\ & + C_2 \exp(\alpha_2 t) \int_{[t,\infty)} \exp(-\alpha_2 y) F_{ij}^{*(n)}(dy) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Das Ziel ist es beide Summanden jeweils gegen einen Summanden einer konvergierenden Reihe abzuschätzen. Mittels (3.5) erhalten wir

$$\int\limits_{[t,\infty)} \exp(-\alpha_2 y) F_{ij}^{*(n)}(dy) \leq (\mathbf{P}^n_{\lambda-\alpha_2})_{ij}.$$

Außerdem gilt

$$\int\limits_{(-\infty,t)} \exp(-\alpha_1 y) F_{ij}^{*(n)}(dy) \leq \exp(-\alpha_1 t) F_{ij}^{*(n)}(t).$$

Nach Unterabschnitt 3.1.1.2 konvergieren sowohl $\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbf{P}^n_{\lambda-\alpha_2})_{ij}$ als auch $\sum_{n=0}^{\infty} F_{ij}^{*(n)}(t)$. Das liefert zusammen mit der Erweiterung von (3.6) für $(x,t) \in \{-1,1\} \times \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$

$$(\mathbb{U} * g^1)_i(x,t) = \sum_{j=1}^{p} \int g_j^1(x,t-y) \mathbb{U}_{ij}(dy) < \infty.$$

Analog zeigt man $(\mathbb{U} * g^2)_i(x,t) < \infty$. Diese beiden Existenzen erlauben uns

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (F^{*(k)} * g)(x,t) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} [F^{*(k)} * (g^1 - g^2)](x,t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (F^{*(k)} * g^1)(x,t) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (F^{*(k)} * g^2)(x,t) \\
&= (\mathbb{U} * g_1)(x,t) - (\mathbb{U} * g_2)(x,t) \\
&= (\mathbb{U} * g)(x,t)
\end{aligned}$$

zu folgern.
Insgesamt ist nun Matrix-Erneuerungstheorem I anwendbar.

3.2 Fall: b_0 besitzt f.s. ein konstantes Vorzeichen

Am Anfang des vorherigen Abschnittes haben wir mittels des Matrix-Erneuerungstheorems I bewiesen, dass

$$z(x,t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{p} \left(u_j \int g_j(x,y) dy \right). \tag{3.8}$$

Nun ist zu zeigen, dass die Summe der Grenzwerte für $t \to \infty$ von $z(\pm 1,t)$ positiv ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
g_i(x,t) = &\exp(-t) \int\limits_0^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(y - xb_0 < xa_0 Y_0 \leq y, a_0 = e_i) dy \\
&- \exp(-t) \int\limits_0^{exp(t)} y^{\lambda} \mathbb{P}(y < xa_0 Y_0 \leq y - xb_0, a_0 = e_i) dy.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

b_0 habe also f.s. ein konstantes Vorzeichen. Dann gilt für fixiertes $x \in \{-1,1\}$ entweder $xb_0 \geq 0$ f.s., der Subtrahend auf der rechten Seite von (3.9) verschwindet und wir erhalten

$$g_i(x,t) = exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(y - xb_0 < xa_0Y_0 \leq y, a_0 = e_i)dy \geq 0$$

oder es gilt $xb_0 \leq 0$ f.s., der Minuend verschwindet und folglich

$$g_i(x,t) = -exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}(y < xa_0Y_0 \leq y - xb_0, a_0 = e_i)dy \leq 0.$$

Die uns interessierende Konsequenz ist, dass mit xb_0 auch $g_i(x,t)$ für alle $1 \leq i \leq p$ ein konstantes und zwar dasselbe Vorzeichen wie xb_0 besitzt.
Nehmen wir nun an, dass $z(x,t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ für alle $x \in \{-1,1\}$. Aus (3.8) ergibt sich

$$\frac{1}{\mu}\sum_{j=1}^{p}\left(u_j \int g_j(x,y)dy\right) = 0.$$

Da μ, u_j und $g_j(x,y)$ konstantes Vorzeichen besitzen, muss $g_j(x,y) = 0$ für alle $(x,y) \in \{-1,1\} \times \mathbb{R}$ und $1 \leq j \leq p$ gelten. Dann ist auch schon $Z_i = (\mathbb{U} * g)_i = 0$ und $z = 0$ als deren Summe. Weiter resultiert aus der Definition von z, dass $\mathbb{P}(xY_1 > y) = 0$ für $y > 0$ und $x \in \{-1,1\}$. Diese Aussage führen wir zum Widerspruch.
Falls $b_0 \geq 0$, gilt wegen $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}_>$, dass $Y_1 \geq 0$ f.s. Da nach Voraussetzung b_0 nicht-degeneriert in 0 ist, kann $\mathbb{P}(xY_1 > y) = 0$ im Fall $x = 1$ nicht gelten. Das ergibt $\lim_{t\to\infty} z(1,t) > 0$ und $\lim_{t\to\infty} z(-1,t) = 0$
Analog erhält man einen Widerspruch für $b_0 \leq 0$ und $x = -1$. In diesem Fall gilt $\lim_{t\to\infty} z(1,t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} z(-1,t) > 0$.

3.3 Fall: b_0 besitzt einen einseitig unbeschränkten Träger

Der Beweis dieses Falles beruht auf einer Methode von Goldie [14].

3.3.1 Abschätzung der Tail-Wahrscheinlichkeit

Das Ziel ist es eine Konstante $C > 0$ zu finden mit $t^\lambda \mathbb{P}(|Y_1| > t) \geq C$ für hinreichend großes t. Offenbar hat die Gültigkeit dieser Ungleichung ein Potenzgesetz-Verhalten zur Folge.
Die erste Etappe besteht aus der Verifizierung von:

Proposition 3.4 *Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Konstante $C_1 > 0$, so dass für $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\mathbb{P}(|Y_1| > t) \geq C_1 \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1}\prod_{k=1}^{n} a_{1-k} > \frac{2t}{\varepsilon}\right)$$

Wir werden eine Ungleichung von Grincevičius, die im Falle einer unabhängigen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ zum Potenzgesetz-Verhalten der Tail-Wahrscheinlichkeiten führt, auf unsere Situation mit Markovschen Koeffizienten anpassen.
Wir definieren für $n \geq 1$

$$Y_1^n := \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\prod_{k=1}^{l} a_{1-k} \Big) b_{-l} \quad \text{und} \quad \Pi_n := \prod_{k=1}^{n} a_{1-k}.$$

Für eine Zufallsgröße X, $j \geq 1$ und $1 \leq i \leq p$ führen wir spezielle Mediane ein:

$$\text{med}_i^{(j)}(X) := \inf\Big\{ x \in \mathbb{R} \Big| \mathbb{P}(X \leq x | a_{-j} = e_i) \geq \frac{1}{2} \Big\}, \quad \text{med}_{\min}^{(j)}(X) := \min_{1\leq i\leq p} \text{med}_i^{(j)}(X)$$
$$\text{und} \quad \text{med}_{\max}^{(j)}(X) := \max_{1\leq i\leq p} \text{med}_i^{(j)}(X).$$

Lemma 3.5 *Für $t \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ gilt*

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}\bigg(\max_{1\leq j\leq n} \Big\{ Y_1^j + \Pi_j \,\text{med}_{min}^{(j)} \Big(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \Big) \Big\} > t \bigg) \leq \mathbb{P}(Y_1^n > t)$$

Beweis: Wir definieren

$$T := \begin{cases} \inf\Big\{ 1 \leq j \leq n \Big| Y_1^j + \Pi_j \,\text{med}_{\min}^{(j)} \Big(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \Big) > t \Big\}, & \text{falls die Menge nicht leer ist} \\ n+1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\{T = j\} \in \sigma(a_0, \dots, a_{1-j}, b_0, \dots, b_{1-j})$ für $1 \leq j \leq n$. Für $j \geq 1$ sei

$$B_j := \Big\{ \text{med}_{\min}^{(j)} \Big(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \Big) \leq \frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \Big\},$$

welches in $\sigma(a_{-j}, \dots, a_{1-n}, b_{-j}, \dots, b_{1-n})$ enthalten ist. Da die Rückwärtskette $(a_{-n}, b_{-n})_{n\geq 0}$ eine stationäre Markov-Kette bildet, sind $(a_{-k}, b_{-k})_{0:j-1}$ und $(a_{-k}, b_{-k})_{k\geq j}$ bedingt unter (a_{-j}, b_{-j}) stochastisch unabhängig. Zusammen mit der Unabhängigkeit der b_{-n}, $n \geq 0$, voneinander als auch von $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ induziert dies die stochastische Unabhängigkeit von $(a_{-k}, b_{-k})_{0:j-1}$ und $(a_{-k}, b_{-k})_{k\geq j}$ bedingt unter a_{-j}. Demnach sind die Ereignisse $\{T = j\}$ und B_j bedingt unter a_{-j} unabhängig.
Ferner gilt

$$\mathbb{P}(B_j | a_{-j} = e_k) \geq \mathbb{P}\bigg(\text{med}_k^{(j)} \Big(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \Big) \leq \frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \Big| a_{-j} = e_k \bigg) \geq \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Da $\Pi_j > 0$ ergibt sich $B_j \cap \{T = j\} \subset \{Y_1^n > t\}$ für $1 \leq j \leq n$. Damit können wir abschätzen

$$\mathbb{P}(Y_1^n > t) \geq \mathbb{P}\bigg(\sum_{j=1}^{n} (B_j \cap \{T = j\}) \bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(B_j, T = j | a_{-j} = e_k)\pi(e_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(B_j | a_{-j} = e_k)\mathbb{P}(T = j | a_{-j} = e_k)\pi(e_k) \\
&\overset{(3.10)}{\geq} \frac{1}{2}\mathbb{P}(T \leq n) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq n} \left\{ Y_1^j + \Pi_j \operatorname{med}_{\min}^{(j)} \left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \right) \right\} > t \right)
\end{aligned}
$$

□

Unser vorgegebenes Ziel ist eine untere Abschätzung von $\mathbb{P}(|Y_1| > t)$. Lemma 3.5 liefert eine Abschätzung für $\mathbb{P}(Y_1^n > t)$. Es gilt $Y_1^n \xrightarrow{n\to\infty} Y_1$ f.s., also insbesondere in Verteilung, weswegen $\mathbb{P}(Y_1^n > t) \to \mathbb{P}(Y_1 > t)$ für alle $t \in \mathcal{C}(F_{Y_1})$ konvergiert. Wir werden zeigen, dass die linke Seite in Lemma 3.5 für t aus einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ konvergiert. Wegen $\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j} \overset{d}{=} Y_1^{n-j}$ folgt schon mal, dass diese Zufallsgröße f.s. für festes j gegen ein $\overline{Y}_j$ mit $\overline{Y}_j \overset{d}{=} Y_1$ konvergiert. Weiteres ergibt sich mit dem anschließenden Lemma.

Lemma 3.6 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsgrößen auf Ω mit $X_n \xrightarrow{d} X$. Dann gilt für $\mathfrak{m} := \operatorname{med} X$ und $\mathfrak{m}_n := \operatorname{med} X_n$*

$$\mathfrak{m}_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathfrak{m}.$$

Beweis: Angenommen $\mathfrak{m}_n \not\to \mathfrak{m}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(\mathfrak{m}_{n_k})_{k\geq 1}$ mit

$$|\mathfrak{m}_{n_k} - \mathfrak{m}| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq 1.$$

Ferner können wir eine weitere Teilfolge auswählen, deren Folgenglieder entweder immer größer als $\mathfrak{m}$ oder immer kleiner als $\mathfrak{m}$ sind. Wegen $-X_n \xrightarrow{d} -X$ betrachten wir o.E. den Fall

$$\mathfrak{m}_{n_{k_l}} - \mathfrak{m} \geq \varepsilon \quad \text{für alle } l \geq 1.$$

Sei t ein Stetigkeitskeitpunkt der Verteilungsfunktion von X im Intervall $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m} + \varepsilon)$. Es gilt

$$\mu\left(X_{n_{k_l}} \leq \mathfrak{m}\right) \leq \mu\left(X_{n_{k_l}} \leq t\right) \leq \mu\left(X_{n_{k_l}} \leq \mathfrak{m}_{n_{k_l}}\right).$$

Da $\mathfrak{m}_{n_{k_l}}$ das Infimum über alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\mu\left(X_{n_{k_l}} \leq x\right) \geq \frac{1}{2}$ ist, folgt für alle $l \geq 1$

$$\mu\left(X_{n_{k_l}} \leq t\right) < \frac{1}{2}.$$

Damit ergibt sich ein Widerspruch:

$$\frac{1}{2} \leq \mu(X \leq \mathfrak{m}) \leq \mu(X \leq t) = \lim_{l\to\infty} \mu(X_{n_{k_l}} \leq t) < \frac{1}{2}.$$

$\square$

Dieses Lemma angewendet auf die Zufallsvariablen $\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}$, $\overline{Y}_j$ und das Maß $\mathbb{P}(\cdot | a_{-j} = e_i)$ ergibt $\operatorname{med}_i^{(j)} \left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}\right) \to \operatorname{med}_i^{(j)} \overline{Y}_j$. Aufgrund der Stationarität von $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt $\operatorname{med}_i^{(j)} \overline{Y}_j = \operatorname{med}_i^{(0)} Y_1$. Da $\mathscr{E}$ endlich ist, folgt schon

$$m_n^{(j)} := \operatorname{med}_{\min}^{(j)} \left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}\right) \to \operatorname{med}_{\min}^{(0)} Y_1 =: m_*.$$

Proposition 3.7 *Für $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\sup_{j \geq 1}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} > t\right) \leq \mathbb{P}(Y_1 > t).$$

Beweis: Wir schreiben zur Abkürzung und Vereinfachung von Notationen

$$Z := \sup_{j \geq 1}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\}.$$

Zuerst wird gezeigt, dass $\max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_n^{(j)}\} \to Z$ f.s., denn damit und mit Lemma 3.5 folgt

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\sup_{j \geq 1}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} > t\right) \leq \mathbb{P}(Y_1 > t) \quad \forall t \in \mathcal{C}(F_Z) \cap \mathcal{C}(F_{Y_1}). \tag{3.11}$$

Offenbar gilt

$$\max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} \to \sup_{j \geq 1}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} \quad \text{f.s.} \tag{3.12}$$

Außerdem stellen wir fest:

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} + \max_{1 \leq j \leq n} \Pi_j (m_n^{(j)} - m_*) \geq \max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_n^{(j)}\} \text{ f.s.} \\ \Rightarrow &\left| \max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_n^{(j)}\} - \max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\}\right| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \Pi_j |m_n^{(j)} - m_*| \to 0 \text{ f.s.} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Im letzten Schritt wurde neben Lemma 3.6 verwendet, dass aus $\Pi_j \to 0$ f.s. $\sup_{j \geq 1} \Pi_j < \infty$ f.s. resultiert. Die gewünschte Konvergenz ergibt sich nun mit (3.12), (3.13) und folgender Abschätzung

$$\begin{aligned} &\left| \max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_n^{(j)}\} - Z\right| \\ \leq &\left| \max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_n^{(j)}\} - \max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\}\right| + \left| \max_{1 \leq j \leq n}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} - Z\right|. \end{aligned}$$

Damit ist (3.11) gezeigt.
Angenommen die Behauptung gilt nicht für alle $t \in \mathbb{R}$, so existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(Z > t_0) > \mathbb{P}(Y_1 > t_0) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z > t_0) - \mathbb{P}(Y > t_0) =: \varepsilon > 0.$$

$\mathbb{P}(Z > t_0)$ ist positiv. Da die Funktion $t \mapsto \mathbb{P}(Z > t)$ rechtsseitig stetig und $\mathcal{C}(F_Z)$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, existiert ein $a \in \mathcal{C}(F_Z) \cap (t_0, \infty)$ mit

$$\mathbb{P}(Z > t_0) - \mathbb{P}(Z > a) < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Weiter folgt aufgrund von Monotonie

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(Z > t_0) > \mathbb{P}(Y_1 > t_0) \geq \mathbb{P}(Y_1 > a) \overset{(3.11)}{\geq} \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z > a).$$

Aus (3.14) ergibt sich dann jedoch ein Widerspruch in $\mathbb{P}(Z > t_0) - \mathbb{P}(Y_1 > t_0) = \varepsilon$, wodurch insgesamt die Behauptung folgt. □

Analog erhalten wir durch Ersetzen von Y_1^j durch $-Y_1^j$ und $\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}$ durch $\frac{-Y_1^n + Y_1^j}{\Pi_j}$ wegen

$$\mathrm{med}_{\min}^{(j)}\left(\frac{-Y_1^n + Y_1^j}{\Pi_j}\right) = -\,\mathrm{med}_{\max}^{(j)}\left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}\right),$$

dass

$$\mathbb{P}\left(\sup_{j \geq 1}\{-Y_1^j - \Pi_j m^*\} > t\right) \leq \mathbb{P}(-Y_1 > t), \quad t \in \mathbb{R},$$

gilt, wobei $m^* := \mathrm{med}_{\max}^{(0)} Y_1$.
Die so erhaltene Abschätzung für $\mathbb{P}(|Y_1| > t)$ wollen wir weiter verschärfen.

Lemma 3.8 *Für alle $\varepsilon > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{j \geq 1}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} > t\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{j \geq 1}\{-Y_1^j - \Pi_j m^*\} > t\right)\\ \geq &\mathbb{P}\left(\exists n \geq 1 \,\middle|\, \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ und } \max\left\{b_{-n} + a_{-n} m_* - m^*, -b_{-n} - a_{-n} m^* + m_*\right\} > \varepsilon\right).\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{j \geq 1}\{Y_1^j + \Pi_j m_*\} > t\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{j \geq 1}\{-Y_1^j - \Pi_j m^*\} > t\right)\\ \geq &\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 1}\{Y_1^n + \Pi_n m_*, -Y_1^n - \Pi_n m^*\} > t\right).\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Ungleichung

$$-(Y_1^{n+1} + \Pi_{n+1} m^*) + (Y_1^n + \Pi_n m_*) > 2t.$$

Dann gibt es zwei Fälle. Entweder ist $Y_1^n + \Pi_n m_* > t$, dann folgt $\sup_{n \geq 1}\{Y_1^n + \Pi_n m_*\} > t$, oder $Y_1^n + \Pi_n m_* \leq t$. Im letzteren Fall ergibt sich

$$-Y_1^{n+1} - \Pi_{n+1} m^* > 2t - (Y_1^n + \Pi_n m_*) \geq t,$$

woraus $\sup_{n\geq 1}\{-Y_1^n - \Pi_n m^*\} > t$ folgt. Analoge Schlüsse zieht man aus $(Y_1^{n+1} + \Pi_{n+1}m_*) - (Y_1^n + \Pi_n m^*) > 2t$. Zur Abkürzung definieren wir für $n \geq 1$

$$N_n := \max\big\{ -(Y_1^{n+1} + \Pi_{n+1}m^*) + (Y_1^n + \Pi_n m_*), (Y_1^{n+1} + \Pi_{n+1}m_*) - (Y_1^n + \Pi_n m^*)\big\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq 1}\{Y_1^n + \Pi_n m_*, -Y_1^n - \Pi_n m^*\} > t\Big)\\ \geq &\mathbb{P}\Big(\exists n \geq 1 | N_n > 2t\Big).\end{aligned}$$

Ferner bemerken wir

$$\begin{aligned}-(Y_1^{n+1} + \Pi_{n+1}m^*) + (Y_1^n + \Pi_n m_*) &= -\Pi_n b_{-n} - \Pi_n a_{-n} m^* + \Pi_n m_*\\ &= \Pi_n(-b_{-n} - a_{-n}m^* + m_*).\end{aligned}$$

Damit und mit einem analogen Schluss aus der anderen Ungleichung folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\exists n \geq 1 \Big| N_n > 2t\Big)\\ \geq &\mathbb{P}\Big(\exists n \geq 1 \Big| \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ und } \max\big\{b_{-n} + a_{-n}m_* - m^*, -b_{-n} - a_{-n}m^* + m_*\big\} > \varepsilon\Big)\end{aligned}$$

und dadurch insgesamt die Behauptung. □

Der nächste Schritt lautet:

Lemma 3.9 *Für $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\exists n \geq 1 \Big| \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ und } \max\big\{b_{-n} + a_{-n}m_* - m^*, -b_{-n} - a_{-n}m^* + m_*\big\} > \varepsilon\Big)\\ \geq &\min_{1\leq k\leq p} \mathbb{P}\big(\max\big\{b_0 + e_k m_* - m^*, -b_0 - e_k m^* + m_*\big\} > \varepsilon\big)\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geq 1}\Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\Big)\end{aligned}$$

Beweis: Wir definieren für $n \geq 1$ die Ereignisse

$$\begin{aligned}A_0 := \emptyset, \quad A_n := \Big\{\Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\Big\}, \quad B_0 := \emptyset\\ \text{und} \quad B_n := \Big\{\max\big\{b_{-n} + a_{-n}m_* - m^*, -b_{-n} - a_{-n}m^* + m_*\big\} > \varepsilon\Big\}.\end{aligned}$$

B_n ist offenbar bedingt unter a_{-n} unabhängig von den Ereignissen $A_0, \ldots, A_n$. Deshalb folgt

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\exists n \geq 1 \Big| \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon} \text{ und } \max\big\{b_{-n} + a_{-n}m_* - m^*, -b_{-n} - a_{-n}m^* + m_*\big\} > \varepsilon\Big)\\ = &\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 1}(A_n \cap B_n)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} (B_j \cap A_j)^c \cap A_n \cap B_n\right) \\
&\geq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c \cap A_n \cap B_n\right) \\
&= \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(B_n | a_{-n} = e_k) \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c \cap A_n \middle| a_{-n} = e_k\right) \pi(e_k) \\
&= \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(B_n | a_{-n} = e_k) \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c \cap A_n, a_{-n} = e_k\right).
\end{aligned}
$$

Aus der Stationarität von $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und der Unabhängigkeit von a_{-n} und b_{-n} ergibt sich

$$
\mathbb{P}(B_n | a_{-n} = e_k) = \mathbb{P}(\max\left\{b_0 + e_k m_* - m^*, -b_0 - e_k m^* + m_*\right\} > \varepsilon).
$$

Mit dieser Identität folgt dann weiter

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(B_n | a_{-n} = e_k) \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j^c \cap A_n, a_{-n} = e_k\right) \\
&\geq \min_{1\leq k\leq p} \mathbb{P}(\max\left\{b_0 + e_k m_* - m^*, -b_0 - e_k m^* + m_*\right\} > \varepsilon) \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)
\end{aligned}
$$

□

Schließlich kommen wir zum Beweis von Proposition 3.4.

Beweis (Proposition 3.4): Nach Voraussetzung besitzt b_0 einen einseitig unbeschränkten Träger. Aus diesem Grund existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$
\frac{1}{2} \min_{1\leq k\leq p} \mathbb{P}\Big(\max\left\{b_0 + e_k m_* - m^*, -b_0 - e_k m^* + m_*\right\} > \varepsilon\Big) =: C_1 > 0.
$$

Die Lemmata 3.7, 3.8 und 3.9 ergeben zusammen für $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y_1| > t) &\geq \frac{1}{2} \min_{1\leq k\leq p} \mathbb{P}\Big(\max\left\{b_0 + e_k m_* - m^*, -b_0 - e_k m^* + m_*\right\} > \varepsilon\Big) \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\right) \\
&= C_1 \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}
$$

□

3.3.2 Untersuchung von $\prod_{k=1}^{n} a_{1-k}$

Im vorherigen Unterabschnitt haben wir $\mathbb{P}(|Y_1| > t) \geq C_1 \mathbb{P}\big(\sup_{n\geq 1} \Pi_n > \frac{2t}{\varepsilon}\big)$ gezeigt, wobei $\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} a_{1-k}$. Wir definieren $M := \sup_{n\geq 1} \log(\Pi_n)$. Unser Ziel ist es die folgende Proposition zu zeigen.

Proposition 3.10 *Für hinreichend großes $t > 0$ existiert eine Konstante $C_2 > 0$ mit*

$$\exp(\lambda t)\mathbb{P}(M > t) \geq C_2.$$

Mit diesem Resultat ausgestattet ergibt sich das gewünschte Potenzgesetz-Verhalten:

Theorem 3.11 *Für hinreichend großes t existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$t^{\lambda}\mathbb{P}(|Y_1| > t) \geq C.$$

Insbesondere ist dann $L(-1) + L(1) > 0$.

Beweis: Nach Proposition 3.4 gilt

$$\mathbb{P}(|Y_1| > t) \geq C_1\mathbb{P}\left(\exp(M) > \frac{2t}{\varepsilon}\right) = C_1\mathbb{P}\left(M > \log\frac{2t}{\varepsilon}\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^{\lambda}\mathbb{P}(|Y_1| > t) &\geq \lim_{t\to\infty} C_1 t^{\lambda}\mathbb{P}\left(M > \log\frac{2t}{\varepsilon}\right) \\
&= \lim_{s\to\infty} C_1\left(\exp(s)\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\lambda}\mathbb{P}(M > s) \\
&\overset{\text{Prop. 3.10}}{\geq} C_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\lambda} C_2 =: C > 0.
\end{aligned}$$

□

Der Beweis von Proposition 3.10 streckt sich über mehrere Seiten.
Wir beginnen mit der Konstruktion eines MRWs. Sei

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n}\log(a_{1-k}) = \log(\Pi_n), \quad n \geq 1.$$

Die bivariate Folge $(a_{1-n}, S_n)_{n\geq 0}$ bildet offensichtlich einen MRW mit Semi-Markov Matrix $Q = (q_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$, erklärt durch

$$q_{ij}(t) = \mathbb{P}(a_{-n} = e_j, \log a_{-n} \leq t | a_{1-n} = e_i) = \mathbb{1}_{[\log e_j,\infty)}(t)\frac{\pi(e_j)}{\pi(e_i)}p_{ji}. \tag{3.15}$$

Es gilt $M = \sup_{n\geq 1} S_n$. Wir werden mittels dieser Charakterisierung $\mathbb{P}(M > t)$ abschätzen. Dazu erledigen wir noch weitere Vorbereitungen.
Es bezeichne $\tau_1^{>}$ den ersten streng aufsteigenden Leiterindex von $(S_n)_{n\geq 0}$, d.h.

$$\tau_1^{>} := \inf\{k \geq 1 | S_k > 0\} \tag{3.16}$$

und induktiv für $n \geq 2$

$$\tau_n^{>} := \begin{cases} \inf\{k \geq 1 | S_{\sigma_{n-1}^{>},k} > 0\}, & \text{falls } \sigma_{n-1}^{>} < \infty \\ \infty, & \text{falls } \sigma_{n-1}^{>} = \infty, \end{cases}$$

wobei $\sigma_0^> := 0$, $\sigma_n^> := \sum_{k=1}^n \tau_k^>$ und $S_{n,k} := S_{n+k} - S_n$.
Für $n \geq 0$ setzen wir

$$\mathcal{F}_n := \sigma(a_1, \dots, a_{1-n}).$$

$(\tau_{n+1}^>, S_{\sigma_n^>, \tau_{n+1}^>}, a_{1-\sigma_{n+1}^>})$ hängt bedingt unter $\mathcal{F}_{\sigma_n^>}$ wegen der starken Markov-Eigenschaft (st. M.E.) nur von $a_{1-\sigma_n^>}$ ab. Für $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ und $1 \leq j \leq p$ gilt daher

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\tau_{n+1}^> < \infty, S_{\sigma_n^>, \tau_{n+1}^>} \in A, a_{1-\sigma_{n+1}^>} = e_j | \mathcal{F}_{\sigma_n^>}) \\
\overset{\text{st. M.E.}}{=} &\mathrm{P}(\tau_{n+1}^> < \infty, S_{\sigma_n^>, \tau_{n+1}^>} \in A, a_{1-\sigma_{n+1}^>} = e_j | a_{1-\sigma_n^>}) \\
= &\mathrm{P}(\tau_1^> < \infty, S_{\tau_1^>} \in A, a_{1-\tau_1^>} = e_j | a_1).
\end{aligned}$$

Die Matrix H der Verteilungen H_{ij}, definiert durch

$$H_{ij}(t) := \mathbb{P}(\tau_1^> < \infty, S_{\tau_1^>} \leq t, a_{1-\tau_1^>} = e_j | a_1 = e_i),$$

bezeichnen wir als Semi-Markov Matrix des streng aufsteigenden Leiterprozesses von $(S_n)_{n \geq 0}$. Für $H \neq 0$ wird wegen $S_{\tau_1^> - 1} \leq 0$ und $S_{\tau_1^>} > 0$ gefordert, dass $\log(a_{1-\tau_1^>}) > 0 \Leftrightarrow a_{1-\tau_1^>} > 1$. Die Existenz eines Zustandes größer 1 ist a priori nicht klar. Wären nun alle Zustände kleiner oder gleich 1, so liefert Lemma A.6 für alle $\alpha > 0$

$$\rho(\mathbf{P}_\alpha) \leq \rho\left(\operatorname{diag}\left(\max_{1 \leq i \leq p} e_i^\alpha\right) \mathbf{P}^\top\right) = \max_{1 \leq i \leq p} e_i^\alpha \leq 1.$$

Jedoch besagt Korollar 2.13, dass $\rho(\mathbf{P}_\alpha) > 1$ für $\alpha > \lambda$. Deswegen seien nun o.E. $e_1, \dots, e_r > 1$ und $e_{r+1}, \dots, e_p \leq 1$. Dadurch ist

$$H_{ij}(t) = 0 \quad \text{für } j > r. \tag{3.17}$$

Als nächstes definieren wir die zu H gehörige Matrix-Erneuerungsfunktion

$$\mathbb{V}(t) := \sum_{n \geq 0} H^{*(n)}(t).$$

Über $H^{*(n)}$ lässt sich aussagen:

Proposition 3.12 *Für die n-fache Faltung von H, $n \geq 0$, gilt*

$$H_{ij}^{*(n)}(t) = \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i)$$

Beweis: Wir beweisen zuerst ein Hilfsmittel. Dazu setzen wir $Z_l := S_{\sigma_{l-1}^>, \tau_l^>} \mathbb{1}_{\{\sigma_{l-1}^> < \infty\}}$ für $l \geq 1$. Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Zur Abkürzung führen wir für $1 \leq k \leq p$

$$B_k := \{Z_1 \in A_1, \tau_1^> < \infty, a_{1-\tau_1^>} = e_k, a_1 = e_i\}$$

ein. Dann gilt

$$\int \mathbb{1}_{A_1 \times \ldots \times A_n} d\mathbb{P}^{(Z_1, \ldots, Z_n) \in \cdot, \sigma_n^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi(e_i)} \mathbb{P}((Z_1,\dots,Z_n) \in A_1 \times \dots \times A_n, \sigma_n^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i) \\
&= \frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{k=1}^{p} \int \mathrm{P}((Z_2,\dots,Z_n) \in A_2 \times \dots \times A_n, \sigma_n^> - \tau_1^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, B_k | \mathcal{F}_{\sigma_1^>}) d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{k=1}^{p} \int_{B_k} \mathrm{P}((Z_2,\dots,Z_n) \in A_2 \times \dots \times A_n, \sigma_n^> - \tau_1^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | \mathcal{F}_{\sigma_1^>}) d\mathbb{P} \\
&\overset{\text{st. M.E.}}{=} \frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{k=1}^{p} \int_{B_k} \mathbb{P}((Z_2,\dots,Z_n) \in A_2 \times \dots \times A_n, \sigma_n^> - \tau_1^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_{1-\sigma_1^>} = e_k) d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{k=1}^{p} \int_{B_k} \mathbb{P}((Z_1,\dots,Z_{n-1}) \in A_2 \times \dots \times A_n, \sigma_{n-1}^> < \infty, a_{1-\sigma_{n-1}^>} = e_j | a_1 = e_k) d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int \int \mathbb{1}_{A_1 \times \dots \times A_n}(y,x) d\mathbb{P}^{(Z_1,\dots,Z_{n-1}) \in \cdot, \sigma_{n-1}^> < \infty, a_{1-\sigma_{n-1}^>} = e_j | a_1 = e_k}(dx) \\
&\quad d\mathbb{P}^{Z_1 \in \cdot, \tau_1^> < \infty, a_{1-\tau_1^>} = e_k | a_1 = e_i}(dy).
\end{aligned}
$$

Da die Mengen der Form $A_1 \times \dots \times A_n$ einen schnittstabiler Erzeuger von $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ bilden, gilt

$$
\begin{aligned}
&\int \mathbb{1}_A d\mathbb{P}^{(Z_1,\dots,Z_n) \in \cdot, \sigma_n^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int \int \mathbb{1}_A d\mathbb{P}^{(Z_1,\dots,Z_{n-1}) \in \cdot, \sigma_{n-1}^> < \infty, a_{1-\sigma_{n-1}^>} = e_j | a_1 = e_k} d\mathbb{P}^{Z_1 \in \cdot, \tau_1^> < \infty, a_1 = e_k | a_1 = e_i}
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

für beliebiges $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$.
Damit können wir die Behauptung per Induktion über n zeigen. Für $n = 0$ ist die Behauptung klar.
Wir bezeichnen mit $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion $f_n((x_1,\dots,x_n)^\top) = \sum_{k=1}^n x_k$. Der Induktionsschritt ergibt sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \le t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i) \\
&= \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, f_n(Z_1,\dots,Z_n) \le t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i) \\
&= \int \mathbb{1}_{f_n^{-1}((0,t])} d\mathbb{P}^{(Z_1,\dots,Z_n) \in \cdot, \sigma_n^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i)} \\
&\overset{(3.18)}{=} \sum_{k=1}^{p} \int \int \mathbb{1}_{f_n^{-1}((0,t])} d\mathbb{P}^{(Z_1,\dots,Z_{n-1}) \in \cdot, \sigma_{n-1}^> < \infty, a_{1-\sigma_{n-1}^>} = e_j | a_1 = e_k} d\mathbb{P}^{Z_1 \in \cdot, \tau_1^> < \infty, a_1 = e_k | a_1 = e_i} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int \mathbb{P}(\sigma_{n-1}^> < \infty, S_{\sigma_{n-1}^>} \le t - y, a_{1-\sigma_{n-1}^>} = e_j | a_1 = e_k) \mathbb{P}^{S_{\tau_1^>} \in \cdot, \tau_1^> < \infty, a_{1-\tau_1^>} = e_k | a_1 = e_i}(dy) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k=1}^{p} \int H_{kj}^{*(n-1)}(t-y) H_{ik}(dy).
\end{aligned}
$$

$\square$

Um die Proposition 3.10 zu zeigen, ersetzen wir

$$\mathbb{P}(M > t) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(M > t | a_1 = e_i)\pi(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \left[1 - \mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i)\right]\pi(e_i). \tag{3.19}$$

Ferner gilt wegen $M = \sup_{n\geq 1} S_n = \sup_{n\geq 1} S_{\sigma_n^>}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i) + \mathbb{P}(\sigma_1 = \infty, S_0 \leq t | a_1 = e_i)\\
=&\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 1} S_{\sigma_n^>} \leq t \middle| a_1 = e_i\right) + \mathbb{P}(\sigma_1 = \infty, S_0 \leq t | a_1 = e_i)\\
=&\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, \sigma_{n+1}^> = \infty | a_1 = e_i)\\
=&\frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{n\geq 0} \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, \sigma_{n+1}^> = \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i)\\
=&\frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{n\geq 0} \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\{\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i\}} \mathrm{P}(\sigma_{n+1}^> = \infty | \mathcal{F}_{\sigma_n^>}) d\mathbb{P}\\
=&\frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{n\geq 0} \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\{\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i\}} \mathbb{P}(\sigma_{n+1}^> = \infty | a_{1-\sigma_n^>} = e_j) d\mathbb{P}\\
=&\frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{n\geq 0} \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{\{\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i\}} \mathbb{P}(\sigma_1^> = \infty | a_1 = e_j) d\mathbb{P}\\
=&\sum_{n\geq 0} \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i) \mathbb{P}(\sigma_1^> = \infty | a_1 = e_j)\\
=&\sum_{j=1}^{p} \left\{ \left(\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, S_{\sigma_n^>} \leq t, a_{1-\sigma_n^>} = e_j | a_1 = e_i) \right) \cdot [1 - \mathbb{P}(\sigma_1^> < \infty | a_1 = e_j)] \right\}\\
=&\sum_{j=1}^{p} \left[\mathbb{V}_{ij}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(\sigma_1^> < \infty, a_{1-\sigma_1^>} = e_k | a_1 = e_j) \right) \right]\\
=&\sum_{j=1}^{p} \left[\mathbb{V}_{ij}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^{p} H_{jk}(\infty) \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Sei

$$\overline{H} := (H_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$$

mit $\overline{H}^{*(n)} = \overline{H^{*(n)}}$ und $\overline{\mathbb{V}}$ bezeichne die Matrix-Erneuerungsfunktion von $\overline{H}$. Da $\mathbb{V}_{ij} = 0$ für $j > r$, $H_{jk} = 0$ für $k > r$ und $\mathbb{V}_{ij} = \overline{\mathbb{V}}_{ij}$ für $1 \leq j \leq r$, reduziert sich (3.20) im Fall $1 \leq i \leq r$ zu

$$\mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i) + \mathbb{P}(\sigma_1 = \infty, S_0 \leq t | a_1 = e_i) = \sum_{j=1}^{r} \overline{\mathbb{V}}_{ij}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^{r} \overline{H}_{jk}(\infty) \right). \tag{3.21}$$

Aus $\mathbb{E} \log a_0 < 0$ folgt $S_n \to -\infty$ f.s. Letztere Aussage ergibt sich beispielsweise mit (2.16). Demnach existiert ein $n \geq 1$ mit $\sigma_n^> = \infty$ f.s. Somit folgt ähnlich wie in der Herleitung von

(3.20) für $1 \leq i \leq r$

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, \sigma_{n+1}^> = \infty | a_1 = e_i) \\
&= \frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{j=1}^{r} \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(\sigma_n^> < \infty, \sigma_{n+1}^> = \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i) \\
&= \frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{j=1}^{r} \sum_{n\geq 0} \int\limits_{\{\sigma_n^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i\}} \mathrm{P}(\sigma_{n+1}^> = \infty | \mathcal{F}_{\sigma_n^>}) d\mathbb{P} \\
&= \frac{1}{\pi(e_i)} \sum_{j=1}^{r} \sum_{n\geq 0} \int\limits_{\{\sigma_n^> < \infty, a_{1-\sigma_n^>} = e_j, a_1 = e_i\}} \mathbb{P}(\sigma_1^> = \infty | a_1 = e_j) d\mathbb{P} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left[\overline{\mathbb{V}}_{ij}(\infty) \left(1 - \sum_{k=1}^{r} \overline{H}_{jk}(\infty) \right) \right].
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Wir schätzen ab

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(M > t) &\geq \sum_{i=1}^{r} \left[1 - \mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i) \right] \pi(e_i) \\
&\geq \sum_{i=1}^{r} \left[1 - \left(\mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i) + \mathbb{P}(\sigma_1 = \infty, S_0 \leq t | a_1 = e_i) \right) \right] \pi(e_i).
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Vermöge (3.21) und (3.22) schreiben wir

$$
\begin{aligned}
&1 - \left[\mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i) + \mathbb{P}(\sigma_1 = \infty, S_0 \leq t | a_1 = e_i) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left[\overline{\mathbb{V}}_{ij}(\infty) \left(1 - \sum_{k=1}^{r} \overline{H}_{jk}(\infty) \right) \right] - \sum_{j=1}^{r} \left[\overline{\mathbb{V}}_{ij}(t) \left(1 - \sum_{k=1}^{r} \overline{H}_{jk}(\infty) \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{r} \overline{H}_{jk}(\infty) \right) \left(\overline{\mathbb{V}}_{ij}(\infty) - \overline{\mathbb{V}}_{ij}(t) \right) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{r} \overline{H}_{jk}(\infty) \right) \int\limits_{(t,\infty)} \exp(-\lambda y) \exp(\lambda y) \overline{\mathbb{V}}_{ij}(dy) \right]
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Wir stellen einen Zusammenhang der Abschätzung dieses Terms zu dem Matrix-Erneuerungstheorem II her. Sei $d > 0$ und bezeichne $\overline{\mathbb{V}}_\lambda$ die zu $\overline{H}_\lambda$ gehörige Matrix-Erneuerungsfunktion mit $(\overline{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}(dy) = \exp(\lambda y)\overline{\mathbb{V}}_{ij}(dy)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{(t,\infty)} \exp(-\lambda y) \exp(\lambda y) \overline{\mathbb{V}}_{ij}(dy) \\
&= \int\limits_{(t,\infty)} \exp(-\lambda y) (\overline{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}(dy) \\
&\geq \int \sum_{k\geq 0} \exp(-\lambda[t + 2(k+1)d]) \mathbb{1}_{(t+2kd, t+2(k+1)d]}(y) (\overline{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}(dy)
\end{aligned}
$$

$$=\exp(-\lambda t)\exp(-2\lambda d)\sum_{k\geq 0}\big(\exp(-2\lambda d)\big)^k(\overline{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}\Big(\big(t+2kd,t+2(k+1)d\big]\Big). \tag{3.25}$$

Wäre nun das Matrix-Erneuerungstheorem II auf $\overline{H}$ und λ anwendbar, so konvergiert $(\overline{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}\Big(\big(t+2kd,t+2(k+1)d\big]\Big)$ für alle $1 \leq i,j \leq r$ gegen eine positive Konstante, falls wir d passend wählen. Näheres dazu gibt es im nächsten Unterabschnitt. Es wird sich herausstellen, dass wir eine Teilmatrix von $\overline{H}$ finden, die die Voraussetzungen von Matrix-Erneuerungstheorem II erfüllt.

3.3.3 Anwendbarkeit des Matrix-Erneuerungstheorems II

Zunächst sei an

$$\overline{H}_\lambda(t) := \int\limits_{(0,t]} \exp(\lambda y)\overline{H}(dy)$$

erinnert.
Wir haben die Intention zu zeigen, dass das Matrix-Erneuerungstheorem II auf $\overline{H}$ und λ anwendbar ist. Der Träger von H ist offenbar enthalten in $\mathbb{R}_>$. Außerdem benötigen wir, dass $\overline{H}_\lambda$ irreduzibel ist. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall (siehe Kapitel Anmerkungen des Autors). Deshalb suchen wir nach einer irreduziblen Teilmatrix von $\overline{H}_\lambda$ und prüfen für diese die Voraussetzungen von Matrix-Erneuerungstheorem II nach, denn (3.23) und (3.24) können entsprechend angepasst werden.
Der Ansatz wird sein, dass wir einen neuen MRW konstruieren, der in gewisser Weise assoziiert ist zu $(a_{1-n},S_n)_{n\geq 0}$. Des Weiteren werden wir sehen, dass die stationäre Drift des neuen MRWs das gegenteilige Vorzeichen der Drift des alten MRWs besitzt, so dass die zu $H(\infty)$ analoge Matrix des neuen MRWs stochastisch ist. Aufgrund der noch zu zeigenden Assoziiertheit werden wir Eigenschaften dieses MRWs mit positiver stationärer Drift in Eigenschaften über $(a_{1-n},S_n)_{n\geq 0}$ übersetzen können.
Wir führen die Matrixfunktion $\widehat{Q}$ ein, deren Einträge die momenterzeugenden Funktionen der q_{ij} sind, d.h.

$$\widehat{q}_{ij}(\alpha) = \int \exp(\alpha y)q_{ij}(y) \overset{(3.15)}{=} e_j^\alpha \frac{\pi(e_j)}{\pi(e_i)}p_{ji}. \tag{3.26}$$

Sei $\mathbf{D}_1 := \operatorname{diag}(e_i^\alpha \pi(e_i), 1 \leq i \leq p)$, dann ist

$$\widehat{Q}(\alpha) = \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{P}_\alpha \mathbf{D}_1. \tag{3.27}$$

Mit ein wenig linearer Algebra erhalten wir für $\widehat{Q}(\alpha)$ und $\mathbf{P}_\alpha$ denselben Spektralradius:

$$\det(X\mathbf{E}-\mathbf{P}_\alpha) = (\det \mathbf{D}_1)^{-1}\det(X\mathbf{E}-\mathbf{P}_\alpha)\det \mathbf{D}_1 = \det(X\mathbf{E}-\widehat{Q}(\alpha)). \tag{3.28}$$

Insbesondere erfolgt $1 = \rho(\mathbf{P}_\lambda) = \rho(\widehat{Q}(\lambda))$. Anhand von (3.26) erkennt man, dass $\widehat{Q}(\lambda)$ eine nicht-negative, irreduzible Matrix ist, weswegen uns das Perron-Frobenius Theorem A.5 die Existenz eines positiven rechtsseitigen Eigenvektors $v = (v_1,\dots,v_p)$ zum Eigenwert 1 liefert. Sei $\mathbf{D}_2 := \operatorname{diag}(v_i, 1 \leq i \leq p)$. Dann erhalten wir durch

$$Q^{(\lambda)}(\infty) := \mathbf{D}_2^{-1}\Big(\int \exp(\lambda y)Q(dy)\Big)\mathbf{D}_2$$

eine stochastische Matrix. Dadurch können wir einen Markov-modulierten Prozess konstruieren. Wir definieren einen Prozess $\left(a_n^{(\lambda)}, X_n^{(\lambda)}\right)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $(\mathscr{E}\times\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathscr{E})\otimes\mathbb{B}(\mathbb{R}))$ vermöge des Satzes von Ionescu Tulcea durch

$$\overline{\mathrm{P}}^{\left(a_{n+1}^{(\lambda)}, X_{n+1}^{(\lambda)}\right)\left|a_{0:n}^{(\lambda)}, X_{0:n}^{(\lambda)}\right.} := \overline{\mathrm{P}}^{\left(a_{n+1}^{(\lambda)}, X_{n+1}^{(\lambda)}\right)\left|a_n^{(\lambda)}\right.},$$

festgelegt durch

$$q_{ij}^{(\lambda)}(t) := \overline{\mathbb{P}}\left(a_{n+1}^{(\lambda)} = e_j, X_{n+1}^{(\lambda)} \leq t \middle| a_n^{(\lambda)} = e_i\right) := \int\limits_{(-\infty,t]} \exp(\lambda y) v_i^{-1} v_j q_{ij}(dy) \tag{3.29}$$

für $1 \leq i, j \leq p$, und eine Anfangsverteilung.
Die Matrixfunktion definiert durch

$$Q^{(\lambda)}(t) = \left(q_{ij}^{(\lambda)}(t)\right)_{1\leq i,j\leq p} := \mathbf{D}_2^{-1}\left(\int\limits_{(-\infty,t]} \exp(\lambda y) Q(dy)\right)\mathbf{D}_2$$

ist die zugehörige Semi-Markov Matrix. Nach Definition von q_{ij} in (3.15) gilt offenbar $X_n^{(\lambda)} = \log a_n^{(\lambda)}$. Aufgrund der Gestalt von $Q^{(\lambda)}(\infty)$ und (3.15) ist $\left(a_n^{(\lambda)}\right)_{n\geq 0}$ positiv rekurrent, irreduzibel und aperiodisch. Wir bezeichnen mit ζ die eindeutige stationäre Verteilung der Steuerkette.
Ferner nennen wir $\left(a_n^{(\lambda)}, S_n^{(\lambda)}\right)_{n\geq 0}$ den zu $(a_{1-n}, S_n)_{n\geq 0}$ assoziierten MRW.
Nun kommen wir zu dem angekündigten Resultat über die Drift des assoziierten MRWs.

Proposition 3.13 *Die Ableitung der Funktion ϕ an der Stelle λ beträgt $\overline{\mathbb{E}}_\zeta \log a_0^{(\lambda)}$. Insbesondere ist $\overline{\mathbb{E}}_\zeta \log a_0^{(\lambda)}$>0.*

Beweis: Proposition 2.12 angewendet auf $\left(a_n^{(\lambda)}\right)_{n\geq 0}$ liefert, dass die Ableitung an der Stelle 0 der Funktion

$$\phi^{(\lambda)}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \alpha\mapsto \log\left[\rho\left(\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)(Q^{(\lambda)}(\infty))^\top\right)\right]$$

$\overline{\mathbb{E}}_\zeta \log a_0^{(\lambda)}$ beträgt. Ferner ist identisch:

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)(Q^{(\lambda)}(\infty))^\top\right)\\
=&\rho\left(\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)\mathbf{D}_2(\widehat{Q}(\lambda))^\top\mathbf{D}_2^{-1}\right)\\
\overset{(3.27)}{=}&\rho\left(\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\mathbf{P}_\lambda^\top\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{D}_2^{-1}\right)\\
=&\rho\left(\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)\mathbf{P}_\lambda^\top\right)\\
=&\rho\left(\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)^{-1}\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)\mathbf{P}_\lambda^\top\operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1\leq i\leq p)\right)\\
=&\rho(\mathbf{P}_{\lambda+\alpha}^\top) = \rho(\mathbf{P}_{\lambda+\alpha}).
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\phi^{(\lambda)}(\alpha) = \phi(\lambda + \alpha). \tag{3.30}$$

Da die Funktion ϕ konvex ist, eine negative Ableitung an der Stelle 0 besitzt und $\log \rho(\mathbf{P}_0) = 1 = \log \rho(\mathbf{P}_\lambda)$ ist, folgt, dass die Ableitung der Funktion $\phi^{(\lambda)}$ an der Stelle 0 positiv ist. Also ist $\overline{\mathbb{E}}_\zeta \log a_0^{(\lambda)} > 0$. □

Das folgende Lemma wird uns Aufschluss über den Spektralradius der irreduziblen Teilmatrix von $\overline{H}(\infty)$ geben.

Lemma 3.14 *Sei $(M_n, X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-modulierte Folge mit Zustandsraum $\Big(\mathcal{S} \times \mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathcal{S}) \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R})\Big)$, $\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots, p\}$. Die Steuerkette $(M_n)_{n\geq 0}$ sei positiv rekurrent mit eindeutiger stationärer Verteilung ξ. Bezeichne $\tau_1^<$ den streng absteigenden Leiterindex von $(S_n)_{n\geq 0}$. Seien $\mathbf{H}^>$ und $\mathbf{H}^<$ die Matrizen bestehend aus den Einträgen $\mathbf{H}_{ij}^> := \mathbb{P}_i(\tau_1^> < \infty, M_{\tau_1^>} = j)$ bzw. $\mathbf{H}_{ij}^< := \mathbb{P}_i(\tau_1^< < \infty, M_{\tau_1^<} = j)$. Es gelte $\nu := \mathbb{E}_\xi X_1 \neq 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
(i)\ \nu > 0 \Rightarrow \quad & \mathbf{H}^> \textit{ ist stochastisch und } \mathbf{H}^< \textit{ substochastisch,}\\
& \textit{insbesondere gilt } \rho(\mathbf{H}^>) = 1 > \rho(\mathbf{H}^<)\\
(ii)\ \nu < 0 \Rightarrow \quad & \mathbf{H}^< \textit{ ist stochastisch und } \mathbf{H}^> \textit{ substochastisch,}\\
& \textit{insbesondere gilt } \rho(\mathbf{H}^<) = 1 > \rho(\mathbf{H}^>).
\end{aligned}$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den Beweis von (i). Nach Korollar 9.6 aus [2] gilt unter den gemachten Voraussetzungen

$$\frac{S_n}{n} \to \nu \quad \mathbb{P}_i\text{-f.s. für alle } i \in \mathcal{S}.$$

Ferner folgt $S_n \to \infty$ $\mathbb{P}_i$-f.s. für alle $i \in \mathcal{S}$, d.h. $\mathbb{P}_i(\tau_1^> < \infty) = 1$ und es existiert ein $i_0 \in \mathcal{S}$ mit $\mathbb{P}_{i_0}(\tau_1^< < \infty) < 1$. Demnach ist die Matrix $\mathbf{H}^>$ stochastisch und $\mathbf{H}^<$ substochastisch.
$\rho(\mathbf{H}^>) = 1$ ist trivial. Falls $\mathbf{H}^<$ irreduzibel ist, folgt $\rho(\mathbf{H}^<) < 1$ aus Lemma A.7. Ansonsten sei o.E.

$$\mathbf{H}^< = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{A}_2 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{A}_n & \\ * & \ldots & & * & \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{H}^< = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{0} \\ * & \mathbf{A}_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ * & \ldots & * & \mathbf{A}_n \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{A}_j$ für $1 \leq j \leq n$ eine irreduzible und $\mathbf{B}$ eine reduzible Matrix, die keine irreduzible Teilmatrix enthält, darstellt. $\mathbf{B}$ ist substochastisch, denn ansonsten gäbe es eine irreduzible Teilmatrix von $\mathbf{B}$.
Alle $\mathbf{A}_j$ sind substochastisch, da sonst $S_n \to -\infty$ $\mathbb{P}_i$-f.s. für ein $i \in \mathcal{S}$. Mit Lemma A.7 folgt $\rho(\mathbf{A}_j) < 1$ für alle $1 \leq j \leq n$.
$\mathbf{B}$ ist substochastisch, aber nicht irreduzibel. Wir definieren eine Matrix $\mathbf{B}'$ dadurch, dass wir in

den Zeilen von $\mathbf{B}$, deren Summe kleiner als 1 ist, die Null-Einträge so auffüllen, dass in dieser Zeile jeder Eintrag positiv und die Zeilensumme immer noch kleiner 1 ist. Man überlege sich, dass damit $\mathbf{B}'$ irreduzibel ist. Mit den Lemmata A.6 und A.7 folgt dann $\rho(\mathbf{B}) \le \rho(\mathbf{B}') < 1$, weil $\mathbf{B}'$ substochastisch ist.
Insgesamt erhalten wir

$$\rho(\mathbf{H}^<) = \max\left\{\max_{1\le j\le n} \rho(\mathbf{A}_j), \rho(\mathbf{B}')\right\} < 1 \text{ bzw. } \rho(\mathbf{H}^<) = \max_{1\le j\le n} \rho(\mathbf{A}_j) < 1.$$

□

Es bezeichne $H^{(\lambda)}$ die Semi-Markov Matrix des streng aufsteigenden Leiterprozesses von $\left(S_n^{(\lambda)}\right)_{n\ge 0}$. Nach den vorherigen beiden Lemmata wissen wir nun, dass $H^{(\lambda)}(\infty)$ stochastisch ist.
Die nachfolgende Proposition setzt H mit $H^{(\lambda)}$ in Verbindung.

Proposition 3.15 $\mathbf{D}_2^{-1} H_\lambda \mathbf{D}_2$ *ist die Semi-Markov Matrix des streng aufsteigenden Leiterprozesses von* $\left(S_n^{(\lambda)}\right)_{n\ge 0}$.

Wir haben in (3.29) gesehen, dass

$$q_{ij}^{(\lambda)}(dy) = \exp(\lambda y) v_i^{-1} v_j q_{ij}(dy) \tag{3.31}$$

gilt. Die Beweisidee ist, dass sich aus der Äquivalenz dieser Übergangsmaße, die gemeinsam mit den Anfangsverteilungen die MRWs eindeutig bestimmen, schon die Äquivalenz der Maße, die durch $H_{ij}(\cdot)$ bzw. $H_{ij}^{(\lambda)}(\cdot)$ induziert werden, folgen sollte, da diese unter demselben Anfangszustand der Steuerkette bedingen.
Zuerst beweisen wir zwei Lemmata vermöge derer wir die Einträge der Semi-Markov Matrix des streng aufsteigenden Leiterprozesses eines beliebigen MRWs in anderer Form schreiben können.

Lemma 3.16 *Sei* $(M_n, X_n)_{n\ge 0}$ *eine Markov-modulierte Folge mit diskreter Steuerkette auf einem abzählbaren Zustandsraum* $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots\}$ *und Semi-Markov Matrix* $Q = (q_{ij})_{i,j\in\mathcal{S}}$*. Für* $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, $i, j \in \mathcal{S}$ *und* $n \ge 1$ *sei*

$$\begin{aligned}
(\Psi_0)_{ij} &:= E_{ij}^{(*)} \quad (\textit{siehe Definition nach } (2.2)) \\
(\Psi_n)_{ij}(A) &:= \mathbb{P}_i(S_1 \le 0, \dots, S_{n-1} \le 0, S_n \in A \cap (-\infty, 0], M_n = j) \\
(\Phi_n)_{ij}(A) &:= \mathbb{P}_i(S_1 \le 0, \dots, S_{n-1} \le 0, S_n \in A \cap (0, \infty), M_n = j).
\end{aligned}$$

Dann gilt für $n \ge 1$

$$\begin{aligned}
(\Psi_n)_{ij}(A) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_{A\cap(-\infty,0]}(x+y)(\Psi_{n-1})_{ik}(dx) q_{kj}(dy) \\
\textit{und} \quad (\Phi_n)_{ij}(A) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_{A\cap(0,\infty)}(x+y)(\Psi_{n-1})_{ik}(dx) q_{kj}(dy) \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen nur die Identität (3.32), denn die andere ergibt sich analog. Sei o.E. $A \in \mathbb{B}((0,\infty))$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi_n)_{ij}(A) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_i(S_1 \le 0,\dots,S_{n-1} \le 0, S_n \in A, M_n = j, M_{n-1} = k)\\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1+\ldots+x_{n-1})\mathbb{1}_A(x_1+\ldots+x_n)\mathbb{1}_{\{j\}}(m_n)\\
&\quad \cdot\mathbb{1}_{\{k\}}(m_{n-1})\mathbb{P}^{M_n,X_n|X_{1:n-1}=x_{1:n-1},M_{1:n-1}=m_{1:n-1}}(dx_n,dm_n)\\
&\quad \mathbb{P}_i^{X_{1:n-1},M_{1:n-1}}(dx_1,\dots,dm_{n-1})\\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1+\ldots+x_{n-1})\mathbb{1}_A(x_1+\ldots+x_n)\mathbb{1}_{\{j\}}(m_n)\\
&\quad \cdot\mathbb{1}_{\{k\}}(m_{n-1})\mathbb{P}^{M_n,X_n|M_{n-1}=m_{n-1}}(dx_n,dm_n)\mathbb{P}_i^{X_{1:n-1},M_{1:n-1}}(dx_1,\dots,dm_{n-1})\\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1+\ldots+x_{n-1})\mathbb{1}_A(x_1+\ldots+x_n)\\
&\quad \mathbb{P}^{X_n\in\cdot,M_n=j|M_{n-1}=k}(dx_n)\mathbb{P}_i^{X_{1:n-1},M_{n-1}=k}(dx_1,\dots,dx_{n-1})\\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x_1+\ldots+x_{n-1})\mathbb{1}_A(x_1+\ldots+x_{n-1}+y)\\
&\quad \mathbb{P}_i^{X_{1:n-1},M_{n-1}=k}(dx_1,\dots,dx_{n-1})q_{kj}(dy)\\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_A(x+y)\mathbb{P}^{S_{n-1}\in\cdot,S_1\le 0,\dots,S_{n-1}\le 0,M_{n-1}=k|M_0=i}(dx)q_{kj}(dy)\\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int \mathbb{1}_A(x+y)(\Psi_{n-1})_{ik}(dx)q_{kj}(dy)
\end{aligned}
$$

□

Per Funktionserweiterungsargument lässt sich aus Lemma 3.16 folgern, dass für bzgl. $(\Psi_n)_{ij}$ bzw. $(\Phi_n)_{ij}$ quasi-integrierbare Funktionen f gilt

$$
\begin{aligned}
\int f(x)(\Psi_n)_{ij}(dx) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int f(x+y)\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x+y)(\Psi_{n-1})_{ik}(dx)q_{kj}(dy)\\
\int f(x)(\Phi_n)_{ij}(dx) &= \sum_{k\in\mathcal{S}} \int\int f(x+y)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x+y)(\Psi_{n-1})_{ik}(dx)q_{kj}(dy). \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Wir bezeichnen mit $(\Psi_n)_{ij}$, $(\Phi_n)_{ij}$, $(\Psi_n^{(\lambda)})_{ij}$ und $(\Phi_n^{(\lambda)})_{ij}$ die entsprechenden Maße aus Lemma 3.16 für $(a_{1-n}, S_n)_{n\ge 0}$ und $\left(a_n^{(\lambda)}, S_n^{(\lambda)}\right)_{n\ge 0}$. Dann können wir festhalten:

Lemma 3.17 *Für $n \ge 0$ und $1 \le i, j \le p$ gilt*

$$(\Phi_n^{(\lambda)})_{ij}(dy) = \exp(\lambda y)v_i^{-1}v_j(\Phi_n)_{ij}(dy).$$

Beweis: Die Behauptung folgt per Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Für den Induktionsschritt nehmen wir o.E. ein $A \in \mathbb{B}((0,\infty))$. Unter Verwendung von (3.33) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_A \exp(\lambda y) v_i^{-1} v_j (\Phi_n)_{ij}(dy) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int\int \mathbb{1}_A(x+y) \exp(\lambda(x+y)) v_i^{-1} (\Psi_{n-1})_{ik}(dx) v_j q_{kj}(dy) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \int\int \mathbb{1}_A(x+y) \exp(\lambda x) v_i^{-1} v_k (\Psi_{n-1})_{ik}(dx) v_k^{-1} v_j \exp(\lambda y) q_{kj}(dy) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \sum_{k=1}^{p} \int\int \mathbb{1}_A(x+y) (\Psi_{n-1}^{(\lambda)})_{ik}(dx) q_{kj}^{(\lambda)}(dy) \\
&\overset{\text{Lemma 3.16}}{=} \int_A 1 (\Phi_n^{(\lambda)})_{ij}(dy).
\end{aligned}$$

□

Mit diesen Werkzeugen ausgestattet beweisen wir Proposition 3.15.

Beweis (Proposition 3.15): Für $A \in \mathbb{B}((0,\infty))$ gilt

$$\begin{aligned}
H_{ij}(A) &= \mathbb{P}(\tau_1^{>} < \infty, S_{\tau_1^{>}} \in A, a_{1-\tau_1^{>}} = e_j | a_1 = e_i) \\
&= \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \ldots, S_{n-1} \leq 0, S_n \in A, a_{1-n} = e_j | a_1 = e_i) \\
&= \sum_{n \geq 1} (\Phi_n)_{ij}(A) \overset{(3.33)}{=} \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{p} \int\int \mathbb{1}_A(x+y) (\Psi_{n-1})_{ik}(dx) q_{kj}(dy).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Per Funktionserweiterungsargument folgt für bzgl. H_{ij} quasi-integrierbare Funktionen f

$$\int f(y) H_{ij}(dy) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{p} \int\int f(x+y) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x+y) (\Psi_{n-1})_{ik}(dx) q_{kj}(dy).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_A \exp(\lambda y) v_i^{-1} v_j H_{ij}(dy) &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{p} \int\int \mathbb{1}_A(x+y) \exp(\lambda(x+y)) v_i^{-1} v_k (\Psi_{n-1})_{ik}(dx) v_k^{-1} v_j q_{kj}(dy) \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{p} \int\int \mathbb{1}_A(x+y) (\Psi_{n-1}^{(\lambda)})_{ik}(dx) q_{kj}^{(\lambda)}(dy) \\
&= H_{ij}^{(\lambda)}(A).
\end{aligned}$$

In dem letzten Schritt haben wir benutzt, dass (3.34) entsprechend angepasst für $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$ gilt.□

$\big(a^{(\lambda}_{\sigma_n^>}\big)_{n\geq 0}$ bildet eine endliche Markov-Kette, da $H^{(\lambda)}(\infty)$ stochastisch ist. Deshalb existiert ein positiv rekurrenter Zustand. Die mit diesem Zustand kommunizierende Klasse ist irreduzibel und positiv rekurrent. O.E. sei $\{e_1,\dots,e_s\}$ diese Klasse. Dann ist $(\mathbf{D}_2^{-1}H_\lambda(\infty)\mathbf{D}_2)_{1\leq i,j\leq s}$ eine irreduzible Matrix. Da

$$(\mathbf{D}_2^{-1}H_\lambda(\infty)\mathbf{D}_2)_{ij} = \int \exp(\lambda y)v_i^{-1}v_jH_{ij}(dy)$$

ergibt sich, dass auch $\hat{H}(\infty)$,

$$\hat{H} := (H_{ij})_{1\leq i,j\leq s},$$

irreduzibel ist. Zur Veranschaulichung betrachte man

$$H = \begin{pmatrix} \overline{H} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{H} = \begin{pmatrix} \hat{H} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Sei $\hat{\mathbf{D}}_2 := (\mathbf{D}_2)_{1\leq i,j\leq s}$. Weil $\hat{\mathbf{D}}_2\hat{H}_\lambda(\infty)\hat{\mathbf{D}}_2^{-1}$ stochastisch ist, gilt $\rho\big(\hat{H}_\lambda(\infty)\big) = 1$. Insgesamt ist damit gezeigt, dass $\hat{H}_\lambda(\infty)$ quasi-stochastisch ist.
Wir haben jetzt alle Voraussetzungen für die Anwendbarkeit des Matrix-Erneuerungstheorems II auf $\hat{H}$ und λ verifiziert. Nun gilt mit Verweis auf (3.24) und (3.25) für $1 \leq i \leq s$

$$\begin{aligned}
&1-\big[\mathbb{P}(M\leq t|a_1=e_i)+\mathbb{P}(\sigma_1=\infty,S_0\leq t|a_1=e_i)\big]\\
&\geq \sum_{j=1}^{s}\Bigg[\Bigg(1-\sum_{k=1}^{s}\hat{H}_{jk}(\infty)\Bigg)\exp(-\lambda t)\exp(-2\lambda d)\\
&\quad\cdot\sum_{k\geq 0}\big(\exp(-2\lambda d)\big)^k\,(\hat{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}\Big(\big(t+2kd,t+2(k+1)d\big]\Big)\Bigg]
\end{aligned}$$

Falls $\hat{H}_\lambda$ gitterverteilt ist, wählen wir d als die zugehörige Spanne, andernfalls als eine beliebige positive Zahl. Wir haben die Länge des Intervalls als $2d$ für den möglichen gitterverteilten Fall gewählt, da somit für alle $t\in\mathbb{R}$ stets ein $t_d\in d\mathbb{Z}$ existiert, so dass

$$(t_d+2kd,t_d+2kd+d]\subset(t+2kd,t+2(k+1)d].$$

Daher liefert das Matrix-Erneuerungstheorem II

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}\Big(\big(t+2kd,t+2(k+1)d\big]\Big)\geq\frac{1}{\hat{\mu}_\lambda}(\hat{m}_\lambda)_i(\hat{u}_\lambda)_j\boldsymbol{\lambda}_d\big((0,d]\big)>0.$$

Somit existiert eine Konstante $C_{ij}>0$ mit

$$(\hat{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}\Big(\big(t+2kd,t+2(k+1)d\big]\Big)\geq C_{ij}$$

für hinreichend großes t. Für ein solches t gilt ferner

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 0}\big(\exp(-2\lambda d)\big)^k\,(\hat{\mathbb{V}}_\lambda)_{ij}\Big(\big(t+2kd,t+2(k+1)d\big]\Big)\\
&\geq\frac{1}{1-\exp(-2\lambda d)}C_{ij}>0.
\end{aligned}\tag{3.35}$$

Nun ist t so wählbar, dass (3.35) für alle $1 \leq i, j \leq s$ gilt. Deshalb existiert für hinreichend großes t eine Konstante C^* mit

$$\begin{aligned} &1 - \left[\mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i) + \mathbb{P}(\sigma_1 = \infty, S_0 \leq t | a_1 = e_i)\right] \\ &\geq \exp(-\lambda t) \sum_{j=1}^{s} \left(1 - \sum_{k=1}^{s} \hat{H}_{jk}(\infty)\right) C^*. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Es bleibt zu zeigen, dass ein $1 \leq j \leq s$ existiert mit $\left(1 - \sum_{k=1}^{s} \hat{H}_{jk}(\infty)\right) > 0$. Der Schlüssel dazu liegt in einer erneuten Verwendung von Lemma 3.14, aber diesmal angewendet auf $H(\infty)$. Wegen $\mathbb{E} \log a_0 < 0$ gilt

$$1 > \rho(H(\infty)) = \rho\left(\overline{H}(\infty)\right) \geq \rho\left(\hat{H}(\infty)\right).$$

Also ist $\hat{H}$ substochastisch, so dass die Positivität eines Summanden aus (3.36) folgt. Dies liefert eine Konstante $C_2 > 0$ mit

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t)\mathbb{P}(M > t) &\geq \exp(\lambda t) \sum_{i=1}^{s} \left[1 - \mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i)\right] \pi(e_i) \\ &\geq \exp(\lambda t) \sum_{i=1}^{s} \left[1 - \left[\mathbb{P}(M \leq t | a_1 = e_i) + \mathbb{P}(\sigma_1 = \infty, S_0 \leq t | a_1 = e_i)\right]\right] \pi(e_i) \\ &\geq C_2. \end{aligned}$$

Damit ist Proposition 3.10 bewiesen und Theorem 3.11 liefert die Behauptung.

4 Beweis von Theorem II

Das Vorgehen ist dasselbe wie im ersten Teil des Beweis von Theorem I (siehe Abschnitt 3.1): Wir haben in Abschnitt 2.1

$$\widetilde{Z} = \widetilde{Z} * \widetilde{F} + \widetilde{g}$$

gezeigt und wollen mit dem Matrix-Erneuerungstheorem I eine explizite Gestalt der Limiten von $\widetilde{Z}_i(t)$, $1 \leq i \leq 2p$, für $t \to \infty$ herleiten und werden damit eine des Grenzwertes von $z(x,t)$ bzw. von $t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t)$ für $t \to \infty$ und $x \in \{-1,1\}$ konstruieren.
Als erstes müssen wir die Anwendbarkeit des erwähnten Theorems prüfen. Es folgt schon mal, dass $\widetilde{F}$ nicht-gitterverteilt ist, da die $\log|e_i|$ keine ganzzahligen Vielfachen derselben Zahl sind. Außerdem benötigen wir die Irreduzibilität von $\widetilde{F}$. Wir wissen, dass

$$\check{F}(\infty) = \left(|e_i|^\lambda p_{ij} \mathbb{1}_{[\log|e_i|,\infty)}(t)\right)_{1\leq i,j\leq p}$$

irreduzibel ist. Daraus folgt jedoch i.A. nicht, dass

$$\widetilde{F}(\infty) = \begin{pmatrix} (\check{F}_{ij}(\infty))_{1\leq i\leq l,\ 1\leq j\leq p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\check{F}_{ij}(\infty))_{l+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} \\ \mathbf{0} & (\check{F}_{ij}(\infty))_{1\leq i\leq l,\ 1\leq j\leq p} \\ (\check{F}_{ij}(\infty))_{l+1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq p} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

irreduzibel ist.
Zum Beispiel ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

irreduzibel und

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

($l = 1$) ist reduzibel mit Partition $I = \{1,3,5\}$ und $J = \{2,4,6\}$.
Das Matrix-Erneuerungstheorem I werden wir in einer anderen Art bzw. auf andere Matrizen anwenden, falls $\widetilde{F}(\infty)$ reduzibel ist.
Die folgende Definition dient dazu, die Irreduziblität einer solchen Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}$ in eine Eigenschaft der zugehörigen Matrix $\mathbf{A}$ zu übersetzen.

Definition 4.1 *Sei* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le p}$ *eine nicht-negative Matrix und* $0 \le l \le p-1$. $\mathbf{A}$ *heißt* l*-reduzibel, falls eine möglicherweise triviale Partition* (I,J) *von* $\{1,\dots,p\}$ *existiert, so dass für* $1 \le i \le l$

$$\begin{aligned} i \in I &\Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall j \in J \\ i \in J &\Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall j \in I \end{aligned}$$

und für $l+1 \le i \le p$

$$\begin{aligned} i \in I &\Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall j \in I \\ i \in J &\Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall j \in J. \end{aligned}$$

gilt. Andernfalls heißt $\mathbf{A}$ l*-irreduzibel.*

Proposition 4.2 *Sei* $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le p}$ *eine nicht-negative irreduzible Matrix und* $0 \le l \le p-1$. *Dann ist die Matrix*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} (a_{ij})_{1\le i\le l,\ 1\le j\le p} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (a_{ij})_{l+1\le i\le p,\ 1\le j\le p} \\ \mathbf{0} & (a_{ij})_{1\le i\le l,\ 1\le j\le p} \\ (a_{ij})_{l+1\le i\le p,\ 1\le j\le p} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

irreduzibel genau dann, wenn $\mathbf{A}$ l*-irreduzibel ist.*

Beweis: Für eine Menge $M = \{m_1,\dots,m_n\}$ definieren wir $M+p := \{m_1+p,\dots,m_n+p\}$ und entsprechend $M-p$. Für ein besseres Verständnis schreiben wir in manchen Fällen für Matrixeinträge a_{ij} auch $a_{i,j}$.
"$\Rightarrow$" $\mathbf{A}$ sei l-reduzibel mit zugehöriger Partition (I,J). Aus (I,J) erhalten wir eine nicht-triviale Partition von $\{1,\dots,2p\}$ durch

$$\widetilde{I} := I \cup (J+p) \quad \text{und} \quad \widetilde{J} := J \cup (I+p).$$

Wir behaupten, dass $\widetilde{\mathbf{A}} =: (\widetilde{a}_{ij})_{1\le i,j\le 2p}$ mit der eben definierten Partition reduzibel ist. Dazu ist zu zeigen, dass $\widetilde{a}_{ij} = 0$ für $i \in \widetilde{I}$, $j \in \widetilde{J}$ gilt. Falls $i \in \{1,\dots,l\}$ und $j \in J$, folgt dies aus der l-Reduzibilität von $\mathbf{A}$. Falls $i \in \{1,\dots,l\}$ und $j \in I+p$ oder $i \in \{l+1,\dots,p\}$ und $j \in J$, ergibt sich $\widetilde{a}_{ij} = 0$ aus der Struktur von $\widetilde{\mathbf{A}}$. Ist $i \in \{l+1,\dots,p\}$ und $j \in I+p$, so folgt $\widetilde{a}_{ij} = a_{i,j-p} = 0$ aus der l-Reduzibilität von $\mathbf{A}$. Entsprechend läuft die Argumentation für $i \in (J+p)$ ab.
"$\Leftarrow$" Angenommen $\widetilde{\mathbf{A}}$ ist reduzibel, dann existiert eine nicht-triviale Partition $(\widetilde{I},\widetilde{J})$ von $\{1,\dots,2p\}$ mit $\widetilde{a}_{ij} = 0$ für alle $i \in \widetilde{I}$, $j \in \widetilde{J}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} I_1 &:= \widetilde{I} \cap \{1,\dots,p\}, \quad & I_2 &:= \widetilde{I} \cap \{p+1,\dots,2p\} \\ J_1 &:= \widetilde{J} \cap \{1,\dots,p\}, \quad \text{und} & J_2 &:= \widetilde{J} \cap \{p+1,\dots,2p\}. \end{aligned}$$

Zunächst zeigen wir $I_1 = J_2 - p$ und $J_1 = I_2 - p$. Dazu definieren wir

$$\mathcal{I} := I_1 \cap (I_2 - p), \quad \mathcal{J} := J_1 \cap (J_2 - p) \quad \text{und} \quad \mathcal{K} := \{1,\dots,p\} \setminus (\mathcal{I} \cup \mathcal{J}).$$

Angenommen $\mathcal{I}$ ist nicht leer. Dann bildet $(\mathcal{I},(\mathcal{J}\cup\mathcal{K}))$ eine nicht-triviale Partition von $\{1,\dots,p\}$.
Wir wollen die Annahme zum Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität von $\mathbf{A}$ führen. Sei $(i,j)\in(\mathcal{I},\mathcal{J})\subset(\widetilde{I},\widetilde{J})$ beliebig. Dann ist $(i,j+p)\in(\widetilde{I},\widetilde{J})$. Falls $1\le i\le l$, ist $a_{ij}=\widetilde{a}_{ij}=0$, und aus $l+1\le i\le p$ folgt $a_{ij}=\widetilde{a}_{i,j+p}=0$.
Sei nun $(i,k)\in(\mathcal{I},\mathcal{K})$ beliebig. Es gilt $K=[(J_2-p)\cap I_1]\cup[(I_2-p)\cap J_1]$. Zuerst sei $k\in I_1$, dann ist $k+p\in J_2$. Falls $1\le i\le l$ gilt, ist $a_{ik}=\widetilde{a}_{i+p,k+p}=0$, denn $i+p\in I_2$ nach Definition von $\mathcal{I}$. Ist andernfalls $l+1\le i\le p$ erfüllt, so ist $a_{ik}=\widetilde{a}_{i,k+p}=0$.
Dieses Mal sei $k\in J_1$. Für $1\le i\le l$ ist $a_{ik}=\widetilde{a}_{ik}=0$ und für $l+1\le i\le p$ ist $a_{ik}=\widetilde{a}_{i+p,k}=0$. Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass $\mathbf{A}$ reduzibel ist mit zugehöriger nicht-trivialer Partition $(\mathcal{I},(\mathcal{J}\cup\mathcal{K}))$. $\mathbf{A}$ ist aber als irreduzibel vorausgesetzt, weswegen $\mathcal{I}$ leer ist. Analog ergibt sich, dass $\mathcal{J}$ leer ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbf{A}$ mit der Partition (I_1,J_1) von $\{1,\dots,p\}$ l-reduzibel ist. Sei nun $1\le i\le l$. Wenn $i\in I_1$ ist, gilt $a_{ij}=\widetilde{a}_{ij}=0$ für alle $j\in J_1$, da $\widetilde{\mathbf{A}}$ reduzibel ist mit zugehöriger Partition $(\widetilde{I},\widetilde{J})$. Andernfalls ist $i\in J_1$, also $i+p\in I_2$. Dann gilt $a_{ij}=\widetilde{a}_{i+p,j+p}=0$ für alle $j\in I_1$, da $j+p\in J_2$.
Nun gelte $l+1\le i\le p$. Wenn $i\in I_1$ gilt, dann induziert dies $a_{ij}=\widetilde{a}_{i,j+p}=0$ für alle $j\in I_1$, da $j+p\in J_2$ gilt. Falls $i\in J_1$ ist, folgt mit analoger Begründung $a_{ij}=\widetilde{a}_{i+p,j}=0$ für $j\in J_1$. □

4.1 $\mathbf{P}^\top$ ist l-irreduzibel

In diesem Fall ist auch $\check{F}(\infty)$ l-irreduzibel und deshalb liefert Lemma 4.2 die Irreduzibilität von $\widetilde{F}(\infty)$. Das folgende Lemma gibt uns Auskunft über den Spektralradius von $\widetilde{F}(\infty)$.

Lemma 4.3 *Sei* $\mathbf{A}$ *eine nicht-negative Matrix. Der Spektralradius der Matrix* $\widetilde{\mathbf{A}}$ *aus* (4.1) *stimmt mit dem von* $\mathbf{A}$ *überein.*

Beweis: Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}$. Addiert man die letzten p Spalten der Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}-X\mathbf{E}_{2p}$ zu den ersten p hinzu und subtrahiert anschließend die ersten p Zeilen von den letzten p Zeilen, so bleibt die Determinante unverändert. Dadurch erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix. Deswegen gilt

$$\det(\widetilde{\mathbf{A}}-X\mathbf{E}_{2p})=\det(\mathbf{A}-X\mathbf{E}_p)\det(\mathbf{A}'-X\mathbf{E}_p),$$

wobei

$$\mathbf{A}':=\begin{pmatrix}(a_{ij})_{1\le i\le l,\ 1\le j\le p}\\(-a_{ij})_{l+1\le i\le p,\ 1\le j\le p}\end{pmatrix}.$$

Weil $|\mathbf{A}'|=\mathbf{A}$, liefert Lemma A.6 $\rho(\mathbf{A}')\le\rho(\mathbf{A})$ und somit $\rho(\widetilde{\mathbf{A}})=\rho(\mathbf{A})$. □

Folglich ist $\rho(\widetilde{F}(\infty))=\rho(\check{F}(\infty))=1$ und $\widetilde{F}(\infty)$ quasi-stochastisch. Weiter können wir konstatieren, dass wenn v ein Eigenvektor zu einem Eigenwert α der Matrix $\mathbf{A}$ ist, dann ist $(v^\top,v^\top)^\top$ ein Eigenvektor zum Eigenwert α der Matrix $\widetilde{\mathbf{A}}$. Bezeichnen $\check{u}$ und $\check{m}$ die analog zu (2.9) normierten links- und rechtsseitigen Eigenvektoren zum Eigenwert 1 der Matrix $\check{F}(\infty)$, so ist $\widetilde{u} := (\check{u}^\top, \check{u}^\top)^\top$ ein linksseitiger und $\widetilde{m} := \frac{1}{2}(\check{m}^\top, \check{m}^\top)^\top$ ein rechtsseitiger Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix $\widetilde{F}(\infty)$. Es gilt $\sum_{i=1}^{2p} \widetilde{m}_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{2p} \widetilde{u}_i \widetilde{m}_i = 1$. Unter Berücksichtigung der Gestalt von $\widetilde{F}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu} &:= \sum_{j=1}^{2p} \sum_{i=1}^{2p} \widetilde{m}_j \widetilde{u}_i \int y \widetilde{F}_{ij}(dy) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i \in \{1,\dots,l,p+l+1,\dots,2p\}} \widetilde{m}_j \widetilde{u}_i \int y \widetilde{F}_{ij}(dy) + \sum_{j=p+1}^{2p} \sum_{i \in \{l+1,\dots,l+p\}} \widetilde{m}_j \widetilde{u}_i \int y \widetilde{F}_{ij}(dy) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2} \check{m}_j \check{u}_i \int y \check{F}_{ij}(dy) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2} \check{m}_j \check{u}_i \int y \check{F}_{ij}(dy) \\
&= \check{\mu}.
\end{aligned}$$

Die Positivität von $\check{\mu}$ folgt komplett analog zu Unterabschnitt 3.1.1.2.
Die direkte Riemann-Integrierbarkeit von $\widetilde{g}$ folgt aus Unterabschnitt 3.1.1.1 und $\widetilde{g}_i(t) = g_{\bar{i}}(\pm 1, t)$. Dabei bezeichnet wieder $\bar{i} := i \mod p$.
Um $\widetilde{Z} = \widetilde{\mathbb{U}} * \widetilde{g}$ zu zeigen, benutzen wir

$$(\widetilde{F}^{*(n)} * \widetilde{Z})_i(t) = exp(-t) \int_0^{exp(t)} y^\lambda \mathbb{P}\left(\mathfrak{x}(i) \left(\prod_{k=1}^{n} a_{1-k} \right) Y_{1-n} > y \right) dy,$$

wobei

$$\mathfrak{x}(i) := \begin{cases} 1, & 1 \le i \le l \text{ oder } p+l+1 \le i \le 2p \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Aussage ist das Analogon zu Lemma 3.3 und wird genauso bewiesen. Weiter folgt mit $\prod_{k=1}^{n} |a_{1-k}| \to 0$ f.s. wie im Fall $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}_>$, dass $\widetilde{F}^{*(n)} * \widetilde{Z} \to 0$.
Es gilt $\widetilde{F}_{ij}^{*(n)}(t) \le \check{F}_{\bar{i}\bar{j}}^{*(n)}(t)$, denn für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich und der allgemeine Fall folgt per Induktion aus

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_{ij}^{*(n)}(t) &= \sum_{k=1}^{2p} \int \widetilde{F}_{kj}^{*(n-1)}(t-y) \widetilde{F}_{ik}(dy) \\
&= \begin{cases} \sum_{k=1}^{p} \int \widetilde{F}_{kj}^{*(n-1)}(t-y) \widetilde{F}_{ik}(dy), & \text{falls } 1 \le i \le l \text{ oder } p+l+1 \le i \le 2p \\ \sum_{k=p+1}^{2p} \int \widetilde{F}_{kj}^{*(n-1)}(t-y) \widetilde{F}_{ik}(dy), & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Hiermit kann man $\widetilde{Z} = \widetilde{\mathbb{U}} * \widetilde{g}$ wie in bzw. unter Verwendung von Unterabschnitt 3.1.1.3 beweisen. Damit sind alle Voraussetzungen des Matrix-Erneuerungstheorems I gültig. Dessen Anwendung liefert für $1 \le i \le 2p$

$$\widetilde{Z}_i(t) \xrightarrow{t \to \infty} \frac{1}{\widetilde{\mu}} \sum_{j=1}^{2p} \widetilde{m}_i \widetilde{u}_j \int \widetilde{g}_j(y) dy.$$

Weiter ergeben vorige Überlegungen und Summation der jeweiligen Komponenten von $\widetilde{Z}$

$$z(x,t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{2\check{\mu}} \sum_{j=1}^{p} \left[\check{u}_j \int g_j(1,y) + g_j(-1,y)dy\right] \quad \text{für } x \in \{-1,1\}.$$

Mit Proposition 2.1 gilt $\lim_{t\to\infty} z(x,t) = \lim_{t\to\infty} t^\lambda \mathbb{P}(xY_1 > t) = L(x)$ für $x \in \{-1,1\}$. Daher folgt $L(-1) = L(1)$.

4.2 $\mathbf{P}^\top$ ist l-reduzibel

Die l-Reduzibilität von $\mathbf{P}^\top$ induziert l-Reduzibilität für $\check{F}(\infty)$. Seien I, J, $\widetilde{I}$ und $\widetilde{J}$ die Indexmengen aus dem Beweis der Hinrichtung von Lemma 4.2 für die Matrizen $\check{F}(\infty)$ und $\widetilde{F}(\infty)$. Durch Vertauschung der Rollen von $\widetilde{I}$ und $\widetilde{J}$ in dem genannten Beweis sehen wir, dass sogar $\widetilde{F}_{ij} = \widetilde{F}_{ji} = 0$ für alle $i \in \widetilde{I}$, $j \in \widetilde{J}$. Das induziert

$$i \in \widetilde{I} \Rightarrow \ \widetilde{Z}_i = \sum_{k=1}^{2p} \widetilde{F}_{ik} * \widetilde{Z}_i + \widetilde{g}_i = \sum_{k\in\widetilde{I}} \widetilde{F}_{ik} * \widetilde{Z}_i + \widetilde{g}_i$$
$$i \in \widetilde{J} \Rightarrow \ \widetilde{Z}_i = \sum_{k=1}^{2p} \widetilde{F}_{ik} * \widetilde{Z}_i + \widetilde{g}_i = \sum_{k\in\widetilde{J}} \widetilde{F}_{ik} * \widetilde{Z}_i + \widetilde{g}_i$$

Wir setzen

$$F^{(\widetilde{I})} := (\widetilde{F}_{ij})_{i,j\in\widetilde{I}}, \quad F^{(\widetilde{J})} := (\widetilde{F}_{ij})_{i,j\in\widetilde{J}}$$

und bezeichnen mit $\mathbb{U}^{(\widetilde{I})}$ bzw. $\mathbb{U}^{(\widetilde{J})}$ die zugehörigen Matrix-Erneuerungsfunktionen. Wir erinnern uns, dass $\widetilde{I} = I \cup (J+p)$ und $\widetilde{J} = J \cup (I+p)$. Sei $i \in \{1,\dots,l\} \cap \widetilde{I}$. Falls $j \in \{1,\dots,p\} \cap \widetilde{I}$ ist, gilt $F^{(\widetilde{I})}_{ij} = \check{F}_{ij}$. Ist andernfalls $j \in \{p+1,\dots,2p\} \cap \widetilde{I} = J+p$, so gilt $F^{(\widetilde{I})}_{ij} = 0 = \check{F}_{i\bar{j}}$. Letztere Gleichheit gilt aufgrund der l-Reduzibilität von $\check{F}(\infty)$. Sei nun $i \in \{l+1,\dots,p\} \cap \widetilde{I}$. Für $j \in \{1,\dots,p\} \cap \widetilde{I}$ ist $F^{(\widetilde{I})}_{ij} = 0 = \check{F}_{ij}$ und für $j \in \{p+1,\dots,2p\} \cap \widetilde{I}$ gilt $F^{(\widetilde{I})}_{ij} = \check{F}_{i\bar{j}}$. Analog erhält man $F^{(\widetilde{I})}_{ij} = \check{F}_{\bar{i}\bar{j}}$ für $i \in \{p+1,\dots,2p\} \cap \widetilde{I}$, $j \in \widetilde{I}$ und das ganze entsprechend für $F^{(\widetilde{J})}$. Folglich gibt es Permutationsmatrizen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ mit

$$\mathbf{P}_1^\top F^{(\widetilde{I})} \mathbf{P}_1 = \check{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_2^\top F^{(\widetilde{J})} \mathbf{P}_2 = \check{F}.$$

Damit ist klar, dass $F^{(\widetilde{I})}$ und $F^{(\widetilde{J})}$ irreduzibel und nicht-gitterverteilt sind. Da für Permutationsmatrizen gilt, dass die transponierte Matrix identisch mit der Inversen ist, ergibt sich

$$\rho\left(F^{(\widetilde{I})}(\infty)\right) = \rho\left(F^{(\widetilde{J})}(\infty)\right) = 1.$$

Wir definieren links- und rechtsseitige Eigenvektoren der Matrizen $F^{(\widetilde{I})}(\infty)$ und $F^{(\widetilde{I})}(\infty)$ zum Eigenwert 1. Seien $u^{(\widetilde{I})} := (u^{(\widetilde{I})}_i)_{i\in\widetilde{I}}$ und $m^{(\widetilde{I})} := (m^{(\widetilde{I})})_{i\in\widetilde{I}}$ gegeben durch

$$u^{(\widetilde{I})}_i = \check{u}_{\bar{i}} \quad \text{und} \quad m^{(\widetilde{I})}_i = \check{m}_{\bar{i}}.$$

Analog definieren wir für $u^{(\widetilde{J})}$ und $m^{(\widetilde{J})}$. Die definierten Paare von Vektoren erfüllen jeweils (2.9). Daraus ergibt sich $\mu^{(\widetilde{I})} = \mu^{(\widetilde{J})} = \check{\mu} > 0$.
Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, dass $\widetilde{g}$ d.R.i. ist. Wir setzen $g^{(\widetilde{I})} := (\widetilde{g}_i)_{i\in\widetilde{I}}$, $g^{(\widetilde{J})} := (\widetilde{g}_i)_{i\in\widetilde{J}}$ und entsprechend $Z^{(\widetilde{I})}$ und $Z^{(\widetilde{J})}$. Dann gilt

$$Z^{(\widetilde{I})} = F^{(\widetilde{I})} * Z^{(\widetilde{I})} + g^{(\widetilde{I})} \quad \text{und} \quad Z^{(\widetilde{J})} = F^{(\widetilde{J})} * Z^{(\widetilde{J})} + g^{(\widetilde{J})}.$$

Ferner ist ${F_{ij}^{(\widetilde{I})}}^{*(n)} = \check{F}_{sr}^{*(n)}$, wobei s und r dadurch bestimmt sind, dass die Funktion $v \mapsto \mathbf{P}_1 v$, $v \in \mathbb{R}^p$, die s-te Komponente auf die i-te und die r-te auf die j-te schickt. Ein entsprechendes Resultat gilt auch für ${F_{ij}^{(\widetilde{J})}}^{*(n)}$. Damit kann man wie in Unterabschnitt 3.1.1.3 gefolgert werden, dass

$$Z^{(\widetilde{I})} = \mathbb{U}^{(\widetilde{I})} * g^{(\widetilde{I})} \quad \text{und} \quad Z^{(\widetilde{J})} = \mathbb{U}^{(\widetilde{J})} * g^{(\widetilde{J})}.$$

Mittels der Definition der Eigenvektoren liefert Matrix-Erneuerungstheorem I

$$i \in \widetilde{I} \xrightarrow{t\to\infty} \widetilde{Z}_i(t) \to \frac{1}{\check{\mu}} \sum_{j\in\widetilde{I}} \check{m}_{\bar{i}} \check{u}_{\bar{j}} \int \widetilde{g}_j(y)dy$$
$$i \in \widetilde{J} \xrightarrow{t\to\infty} \widetilde{Z}_i(t) \to \frac{1}{\check{\mu}} \sum_{j\in\widetilde{J}} \check{m}_{\bar{i}} \check{u}_{\bar{j}} \int \widetilde{g}_j(y)dy$$

Unter Verwendung der Gestalt von $\widetilde{I}$ und $\widetilde{J}$ induziert dies

$$\begin{aligned}
z(1,t) =& \sum_{i=1}^{p} {}^{+}Z_i(t) = \sum_{i=1}^{p} \widetilde{Z}_i(t) \\
\xrightarrow{t\to\infty} & \frac{1}{\check{\mu}} \sum_{i=1}^{p} \check{m}_i \left\{ \mathbb{1}_{\widetilde{I}}(i) \left[\sum_{j\in\widetilde{I}} \check{u}_{\bar{j}} \int \widetilde{g}_j(y)dy \right] + \mathbb{1}_{\widetilde{J}}(i) \left[\sum_{j\in\widetilde{J}} \check{u}_{\bar{j}} \int \widetilde{g}_j(y)dy \right] \right\} \\
=& \frac{1}{\check{\mu}} \sum_{i=1}^{p} \check{m}_i \left\{ \mathbb{1}_I(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{\widetilde{I}}(j) \left(\check{u}_j \int g_j(1,y)dy \right) + \sum_{j=p+1}^{2p} \mathbb{1}_{\widetilde{I}}(j) \left(\check{u}_{\bar{j}} \int g_j(-1,y)dy \right) \right] \right. \\
& \left. + \mathbb{1}_J(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_{\widetilde{J}}(j) \left(\check{u}_j \int g_j(1,y)dy \right) + \sum_{j=p+1}^{2p} \mathbb{1}_{\widetilde{J}}(j) \left(\check{u}_{\bar{j}} \int g_j(-1,y)dy \right) \right] \right\} \\
=& \frac{1}{\check{\mu}} \sum_{i=1}^{p} \check{m}_i \left\{ \mathbb{1}_I(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_I(j) \left(\check{u}_j \int g_j(1,y)dy \right) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_J(j) \left(\check{u}_j \int g_j(-1,y)dy \right) \right] \right. \\
& \left. + \mathbb{1}_J(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_J(j) \left(\check{u}_j \int g_j(1,y)dy \right) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{1}_I(j) \left(\check{u}_j \int g_j(-1,y)dy \right) \right] \right\} \\
=& \frac{1}{\check{\mu}} \sum_{i=1}^{p} \check{m}_i \left\{ \mathbb{1}_I(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \check{u}_j \int \left(\mathbb{1}_I(j) g_j(1,y) + \mathbb{1}_J(j) g_j(-1,y) \right) dy \right] \right. \\
& \left. + \mathbb{1}_J(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \check{u}_j \int \left(\mathbb{1}_J(j) g_j(1,y) + \mathbb{1}_I(j) g_j(-1,y) \right) dy \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$=L(1)$$

und entsprechend

$$\begin{aligned}
z(-1,t) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{\check{\mu}} \sum_{i=1}^{p} \check{m}_i \Bigg\{ & \mathbb{1}_J(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \check{u}_j \int \big(\mathbb{1}_I(j) g_j(1,y) + \mathbb{1}_J(j) g_j(-1,y) \big) dy \right] \\
& + \mathbb{1}_I(i) \left[\sum_{j=1}^{p} \check{u}_j \int \big(\mathbb{1}_J(j) g_j(1,y) + \mathbb{1}_I(j) g_j(-1,y) \big) dy \right] \Bigg\} \\
=& L(-1).
\end{aligned}$$

A Anhang

A.1 Stationarität und Ergodizität

Lemma A.1 *Seien $(X_n)_{n\geq 0}$ und $(Y_n)_{n\geq 0}$ stationäre Folgen von Zufallsgrößen. Dann ist auch $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ stationär.*

Beweis: Zunächst sehen wir, dass für beliebiges $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int \mathrm{P}(X_{1:n} \in A | Y_{1:n}) d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X_{1:n} \in A) = \mathbb{P}(X_{2:n+1} \in A) = \int \mathrm{P}(X_{2:n+1} \in A | Y_{2:n+1}) d\mathbb{P}$$

Wir erhalten daraus

$$\mathrm{P}^{X_{1:n}|Y_{1:n}} = \mathrm{P}^{X_{2:n+1}|Y_{2:n+1}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Dies benutzen wir um die Stationarität von $(X_n, Y_n)_{n\geq 0}$ zu zeigen. Es reicht, die Eigenschaft für einen schnittstabilen Erzeuger nachzurechnen. Seien A, $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{1:n} \in A, Y_{1:n} \in B) &= \int \mathbb{1}_{A\times B} d\mathbb{P}^{(X_{1:n}, Y_{1:n})} \\
&= \int \int \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(y) \mathbb{P}^{X_{1:n}|Y_{1:n}=y}(dx) \mathbb{P}^{Y_{1:n}}(dy) \\
&= \int \int \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(y) \mathbb{P}^{X_{2:n+1}|Y_{2:n+1}=y}(dx) \mathbb{P}^{Y_{2:n+1}}(dy) \\
&= \mathbb{P}(X_{2:n+1} \in A, Y_{2:n+1} \in B).
\end{aligned}$$

□

Theorem A.2 (Birkhoffscher Ergodensatz) *Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine stationäre, ergodische Folge von Zufallsgrößen und $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}X_1 \quad \textit{f.s.}$$

Beweis: Siehe Theorem 6.28 aus [9]. □

Korollar A.3 *Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine stationäre, ergodische Folge von Zufallsgrößen und $\mathbb{E}|X_1| = \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{E}X_1 \quad \textit{f.s.}$$

Beweis: Aus der Stationarität und Ergodizität von $(X_n)_{n\geq 1}$ folgt auch selbige Eigenschaft für die Folgen $(X_n^+)_{n\geq 1}$ und $(X_n^-)_{n\geq 1}$. Deswegen sei o.E. $(X_n)_{n\geq 1}$ nicht-negativ und $\mathbb{E}X_1 = \infty$. Die Folge $(X_n^{(c)})_{n\geq 1}$, $X_n^{(c)} := X_n \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}}$, ist stationär und ergodisch. Ferner ergibt $\mathbb{E}X^{(c)} < \infty$ und Theorem A.2

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^{(c)} = \mathbb{E}X_1^{(c)} \quad \text{f.s.}$$

für alle $c > 0$. $\mathbb{E}X_1^{(c)} \uparrow \mathbb{E}X_1 = \infty$ liefert die Behauptung. □

A.2 Perron-Frobenius Theorie

Aus [4] entnehmen wir die folgende Defintion.

Definition A.4 *Eine nicht-negative $p \times p$ Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ heißt*
(i) nicht degeneriert, wenn sie keine Nullzeile besitzt, wenn also $a_{i,\Sigma} := \sum_{j=1}^{p} a_{ij} > 0$ für alle $1 \leq i \leq p$. Setze in diesem Fall $\mathbf{A}^* := (a_{ij} \cdot a_{i,\Sigma}^{-1})_{1\leq i,j\leq p}$.
(ii) irreduzibel, wenn sie nicht degeneriert und $\mathbf{A}^*$ irreduzibel ist.
(iii) aperiodisch, wenn sie irreduzibel und $\mathbf{A}^*$ aperiodisch ist.
(iv) primitiv, wenn $\mathbf{A}^n > 0$ für ein $n \geq 1$ gilt.

Theorem A.5 (Perron Frobenius) *Sei $\mathbf{A}$ eine nicht-negative, irreduzible $p \times p$-Matrix. Dann besitzt $\mathbf{A}$ einen einfachen, betrügsmäßig größten, reellen Eigenwert $\rho(\mathbf{A})$ und es existieren bis auf skalares Vielfaches eindeutige, positive, links- und rechtsseitige Eigenvektoren u und m zum Eigenwert $\rho(\mathbf{A})$.*

Beweis: Theorem 8.4.4 aus [15] beweist die Aussage bis auf die Existenz von u, die folgt aber wegen $\rho(\mathbf{A}^\top) = \rho(\mathbf{A})$ aus Anwendung des Theorems auf $\mathbf{A}^\top$. □

Lemma A.6 *Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ $p \times p$ Matrizen. Falls $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$, d.h. $a_{ij} \leq b_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq p$, gilt $\rho(\mathbf{A}) \leq \rho(|\mathbf{A}|) \leq \rho(\mathbf{B})$.*

Beweis: Siehe Theorem 8.1.18 aus [15]. □

Lemma A.7 *Seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ irreduzible, nicht-negative $p \times p$ Matrizen mit $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Dann gilt $\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{B})$ genau dann, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ gilt.*

Beweis: Siehe Korollar 15.7 aus [4]. □

Lemma A.8 *Sei $\mathbf{A}$ eine aperiodische, nicht-negative $p \times p$ Matrix. Dann existiert eine positive Matrix $\mathbf{C}$, so dass*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\mathbf{A}^l}{(\rho(\mathbf{A}))^l} = \mathbf{C}.$$

Beweis: Theorem 8.5.1 aus [15] beinhaltet die Aussage für eine primitive, nicht-negative Matrix. Lemma 15.3 aus [4] zeigt die Äquivalenz von primitiv und aperiodisch für nicht-negative Matrizen. □

Anmerkungen des Autors

Diese Arbeit basiert hauptsächlich auf dem Artikel [12] von Benoîte de Saporta, der Teile aus ihrer Dissertation [11] präsentiert. Bei dem Studium der Beweise sind mir neben kleineren Ungenauigkeiten auch solche aufgefallen, die mich gezwungen haben, die Hauptresultate abzuschwächen oder in Teilen komplett wegzulassen. Dieses Kapitel dient dazu, letztere aufzuzeigen.
Nach Erledigung des Falles, dass b_0 f.s. ein konstantes Vorzeichen besitzt, widmet sie sich dem Fall eines b_0 mit f.s. wechselndem Vorzeichen. Ihr Beweis dazu entspricht bis auf Anpassungen dem Abschnitt 3.3 dieser Arbeit. Sie folgert aus der Ungleichung 3.7 und aus entsprechender Ungleichung im Beweis ihres Theorems 2, dass diese Ungleichung beim Vertauschen der Vorzeichen richtig bleibt. Es gilt jedoch im Allgemeinen

$$-\max_{1\le i\le p} \operatorname{med}_i^{(j)}\left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}\right) = \min_{1\le i\le p} \operatorname{med}_i^{(j)}\left(\frac{-Y_1^n + Y_1^j}{\Pi_j}\right) \neq -\min_{1\le i\le p} \operatorname{med}_i^{(j)}\left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}\right).$$

Da die Limiten

$$m^* = \lim_{n\to\infty}\left[\max_{1\le i\le p} \operatorname{med}_i^{(j)}\left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}\right)\right]$$

und

$$m_* = \lim_{n\to\infty}\left[\min_{1\le i\le p} \operatorname{med}_i^{(j)}\left(\frac{Y_1^n - Y_1^j}{\Pi_j}\right)\right]$$

ggfs. nicht identisch sind, erhält man somit keine Abschätzung mit Faktor

$$\min_{1\le k\le p} \mathbb{P}(|b_0 + (e_k - 1)m_*| > \varepsilon),$$

der sonst bei hinreichend klein gewählten $\varepsilon > 0$ positiv wäre für nicht konstantes b_0.
Man erhält stattdessen den Faktor

$$\min_{1\le k\le p} \mathbb{P}(\max\left\{b_0 + e_k m_* - m^*, -b_0 - e_k m^* + m_*\right\} > \varepsilon). \tag{1}$$

Für $m^* \neq m_*$ nimmt b_0 möglicherweise f.s. nur Werte in einem Intervall der Form $[m_* - e_k m^*, m^* - e_k m_*]$, $1 \le k \le p$, an. Dieses Intervall kann ggfs. sowohl negative als auch positive Zahlen enthalten, so dass der Fall eines b_0 mit f.s. konstantem Vorzeichen nicht anwendbar ist. In dieser Situation kann man $\varepsilon > 0$ nicht so wählen, dass der Faktor aus (1) positiv ist. Daher kommt die unbefriedigende, neu gesetzte Voraussetzung, dass b_0 einen einseitig unbeschränkten Träger besitzt.
De Saporta erwähnt nach der Formulierung ihrer Hauptresultate, dass diese gültig bleiben, wenn man bzgl. der Korrelation von $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ nur fordert, dass $b_{-(n+1)}$ unabhängig von

$\sigma(a_0,\ldots,a_{-n})$ ist und eine zusätzliche Bedingung für die Positivität eines Faktors bei der Abschätzung von $\mathbb{P}(|Y_1|>t)$ gilt, die hier nicht weiter relevant ist. Diese Unabhängigkeitsbedingung reicht zwar aus für die Gültigkeit der Resultate der Abschnitte 3.1 und 3.2, jedoch nicht mehr für die des Abschnittes 3.3. Der Beweis der Ungleichung 3.5 ist dann nicht mehr richtig. Dort wird benötigt, dass $(a_{-k},b_{-k})_{(0:j-1)}$ und $(a_{-k},b_{-k})_{k\geq j}$ bedingt unter a_{-j} unabhängig sind. Das ist unter der schwächeren Unabhängigkeitsbedingung nicht mehr gegeben, da nicht folgt, dass $(b_{-k})_{(0:j-1)}$ und $(a_{-k})_{k\geq j}$ bedingt unter a_{-j} unabhängig voneinander sind.
Zur Illustrierung dieses Fehlschlusses sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, nicht-degenerierter Zufallsgrößen. Definiere $b_n := a_{n+2}$ für alle $n\geq 0$. Dann ist b_{n+1} unabhängig von $a_0,\ldots,a_n$ für alle $n\geq 0$. Jedoch gilt für geeignete Mengen A und B

$$\mathrm{P}(b_0\in A, a_2\in B|a_1)\overset{\text{st.u.}}{=}\mathbb{P}(b_0\in A,a_2\in B)\neq\mathbb{P}(b_0\in A)\mathbb{P}(a_2\in B)\overset{\text{st.u.}}{=}\mathrm{P}(b_0\in A|a_1)\mathrm{P}(a_2\in B|a_1).$$

Im Beweis ihres Theorems 2 bemerkt de Saporta in [12], dass der Fall eines b_0 mit einem f.s. konstanten Vorzeichen analog zu Theorem 1 folgt (vgl. Abschnitt 3.2). In der Dissertation [11], die ein Jahr eher erschienen ist, hingegen erwähnt sie, dass dieser Fall auf dem aufzeigten Weg zumindest nicht folgt, womit ich übereinstimme.
Leider konnte ich im Fall $\mathscr{E}\subset\mathbb{R}^*$, $\mathscr{E}\cap\mathbb{R}_<\neq\emptyset$ und $\mathscr{E}\cap\mathbb{R}_>\neq\emptyset$, kein Potenzgesetz-Verhalten attestieren, da ein Fehler dies verhinderte. Sie versucht abermals die Ungleichung von Grincevičius anzupassen. Dort benutzt sie gewisse Stoppzeiten T_+, T_- und Ereignisse B_j^+, B_j^- (siehe Definition aus [12]). Analog zu Proposition 3.5 schätzt sie ab

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1^n>t)\geq&\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n\left[(\{T_+=j\}\cap B_j^+)\cup(\{T_-=j\}\cap B_j^-)\right]\right)\\
\geq&\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n(\{T_+=j\}\cap B_j^+)\right)+\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n(\{T_-=j\}\cap B_j^-)\right)\\
=&\sum_{k=1}^p\left[\sum_{j=1}^n\mathbb{P}(T_+=j,B_j^+|a_{-j}=e_k)+\sum_{j=1}^n\mathbb{P}(T_-=j,B_j^-|a_{-j}=e_k)\right]\pi(e_k)\\
\geq&\sum_{k=1}^p\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^n\mathbb{P}(T_+=j|a_{-j}=e_k)+\sum_{j=1}^n\mathbb{P}(T_-=j|a_{-j}=e_k)\right]\pi(e_k)\\
=&\frac{1}{2}\big(\mathbb{P}(T_+\leq n)+\mathbb{P}(T_-\leq n)\big).
\end{aligned}$$

Da $T_+=n$ nicht ausschließt, dass es ein $1\leq j\leq n-1$ gibt mit $T_-=j$ sind die Ereignisse nicht disjunkt und die zweite Abschätzung stimmt so nicht.
Eine Verbesserung ihrer Arbeit besteht darin, dass die Matrix-Erneuerungstheoreme allgemeiner gehalten werden. Zunächst ist die Voraussetzung $\mathbb{U}(t)<\infty$ für alle $t\in\mathbb{R}$ durch die allgemeinere Voraussetzung $\mu>0$ ersetzt worden. Außerdem sind die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit zum anderen dahingehend abgeschwächt, dass die Folge $||F(\infty)^n||_p$ für $p\in[1,\infty]$ nicht mehr beschränkt sein muss, was sie mit einer Aperiodizitätsforderung an die Matrix $F(\infty)$ induziert. Jedoch gilt wegen

$$||F(\infty)^n||_p^{\frac{1}{n}}\xrightarrow{n\to\infty}\rho(F(\infty))=1,\quad p\in[1,\infty],$$

dass diese Folge sowieso beschränkt ist. Zugegebenermaßen hat sie irreführenderweise im Beweis ihres ersten Matrix-Erneuerungstheorems in der zwei Jahre eher erschienenen Arbeit [10] die obere Schlussfolgerung erkannt und keine Aperiodizität gefordert. In dem Artikel [12] hingegen fehlt dieser Gedanke und führt später zu einem Problem bei einer Anwendung des Matrix-Erneuerungstheorems II. Näheres dazu erwähne ich gleich.
Ich komme nun explizit zu weiteren Fehlern im Beweis des Hauptresultats für $\mathscr{E} \subset \mathbb{R}_>$, die ich anschließend durch ein Gegenbeispiel illustriere. De Saporta folgert, dass die Matrix $\overline{H}(\infty)$ aus Unterabschnitt 3.3.2 irreduzibel und aperiodisch ist. Mit der von ihr gezeigten Abschätzung

$$\overline{H}_{ij}(\infty) \geq p_{ji}\pi(e_j)(\pi(e_i))^{-1}, \quad 1 \leq i, j \leq r,$$

lassen sich Irreduzibilität und Aperiodizität nicht folgern. Zwar ist $\mathbf{P}$ als irreduzibel vorausgesetzt, jedoch nicht, dass $p_{ji} > 0$ für alle $1 \leq i, j \leq r$. Glücklicherweise ist nach obiger Bemerkung die Aperiodizität für die Anwendung des Matrix-Erneuerungstheorems irrelevant und außerdem reicht es, eine irreduzible Teilmatrix von $\overline{H}(\infty)$ zu finden.
Ferner folgert sie ohne weitere Kommentare, dass die Voraussetzung, dass die $\log e_i$ keine ganzzahligen Vielfachen derselben Zahl sind, induzieren würde, dass $\overline{H}$ nicht-gitterverteilt ist. Diese Aussage ist nicht richtig. Da jede rekurrente Markov-Kette eine Harris-Kette ist, kann man zwar mit Theorem 1 (ii) aus [3] ableiten, dass H nicht-gitterverteilt ist, jedoch lässt sich davon nicht auf den Gittertyp einer Teilmatrix schließen. Wir werden sehen, dass es unter den Voraussetzungen möglich ist, dass $\overline{H}$ gitterverteilt ist. Da ich nicht von einer nicht-gitterverteilten Teilmatrix von $\overline{H}$ ausgehen konnte, habe ich die Matrix-Erneuerungstheoreme für gitterverteilte Matrizen von Verteilungsfunktionen zusätzlich bewiesen und komme damit zum gewünschten Schluss.

Gegenbeispiel

Sei $(M_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette auf dem endlichen Zustandsraum $\mathscr{E} := \{e_1, \ldots, e_{m+k-1}\} \subset \mathbb{R}_>$ mit Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} := \begin{array}{rc} & m+1\text{-te Spalte} \\ m\text{-te Zeile} & \begin{pmatrix} 0 & p & & & & 1-p & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ 1 & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

mit $p \in (0,1)$. $(M_n)_{n\geq 0}$ ist also irreduzibel. Wir veranschaulichen den Übergangsmechanismus durch den Übergangsgraphen in Abbildung A.1. Nach Konstruktion gilt $p_{11}^{(m)} > 0$ und $p_{11}^{(k)} > 0$. Es gelte $\mathrm{ggT}(m,k) = 1$. Dann ist die Markov-Kette nach Konstruktion aperiodisch und wegen

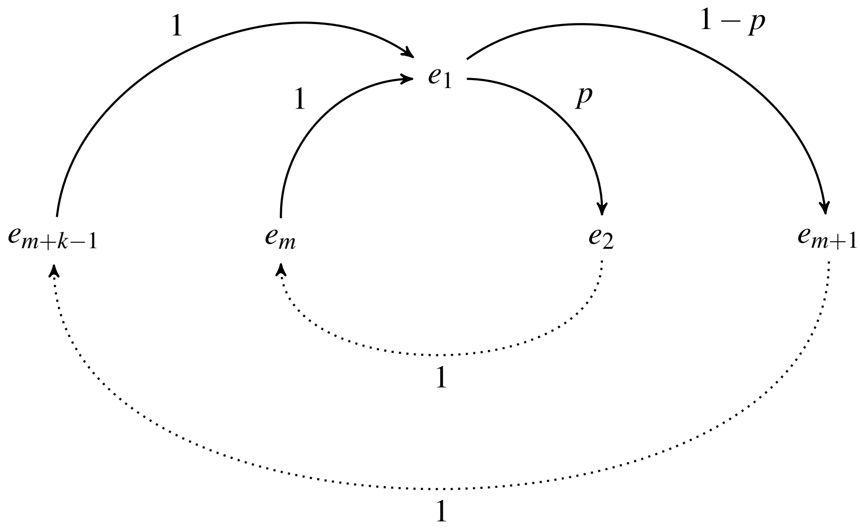

Abbildung A.1: Übergangsmechanismus der Markov-Kette $(M_n)_{n\geq 0}$

der Endlichkeit des Zustandsraumes ergodisch. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n \log M_i$ für $n \geq 1$ und $S_0 := 0$. Des Weiteren seien $\log e_1 + \sum_{i=2}^m \log e_i$ und $\log e_1 + \sum_{i=m+1}^{m+k-1} \log e_i$ bedingt unter dem Anfangszustand e_1 streng aufsteigende Leiterhöhen (LH) der Folge $(S_n)_{n\geq 0}$, insbesondere gilt also $\prod_{i=1}^m e_i > 1$. Definere $v \in \mathbb{R}^{m+k-1}$ durch $v_1 = 1$, $v_2 = \ldots = v_m = p$ und $v_{m+1} = \ldots = v_{m+k-1} = 1-p$. Man kann als stationäre Verteilung

$$\zeta := \frac{1}{||v||_1} \cdot v$$

identifizieren. Nach Konstruktion gilt

$$\mathbb{E}_\zeta \log M_0 = \frac{1}{||v||_1}\left[p\sum_{i=1}^m \log e_i + (1-p)\left(\log e_1 + \sum_{i=m+1}^{m+k-1} \log e_i\right)\right] > 0.$$

Wir haben also eine irreduzible, ergodische Markov-Kette mit positiver Drift konstruiert. Diese besitzt insofern dieselben Eigenschaften wie die Markov-Kette $(a_n^{(\lambda)})_{n\geq 0}$ aus Unterabschnitt 3.3.3. Als nächstes zeigen wir, dass ein $\alpha < 0$ existiert, so dass

$$\mathbf{P}_\alpha := \operatorname{diag}(e_i^\alpha, 1 \leq i \leq m+k-1)\mathbf{P}^\top$$

quasi-stochastisch ist. Dann folgt nämlich mit Korollar 2.9, Proposition 2.12 und (3.30), dass die Drift des dadurch konstruierbaren, sogenannten assozierten MRW negativ ist und nun exakt die Situation aus Unterabschnitt 3.3.3 vorliegt (vgl. Abb. A.2).
Man rechnet nach, dass

$$\det(X\mathbf{E} - \mathbf{P}_\alpha) = X^{m+k-1} - p\left(\prod_{i=1}^m e_i^\alpha\right)X^{k-1} - (1-p)e_1^\alpha\left(\prod_{i=m+1}^{m+k-1} e_i^\alpha\right)X^{m-1}.$$

Wenn man $\alpha < 0$ und $e_1, \ldots, e_{m+k-1}$ so wählen kann, dass 1 eine Nullstelle dieses Polynoms ist, so ist für dieses α der Spektralradius von $\mathbf{P}_\alpha$ größer als 1 und man gelangt aufgrund der

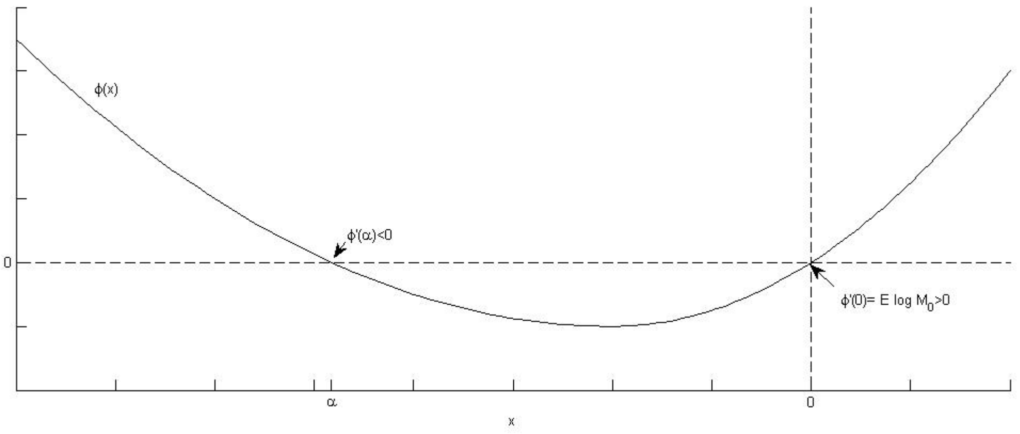

Abbildung A.2: Beispielhafter Graph von ϕ

Konvexität von ϕ und einer positiven Ableitung in 0 zu der Existenz eines $\alpha < 0$ mit $\rho(\mathbf{P}_\alpha) = 1$. Es soll also gelten:

$$1 = p\prod_{i=1}^{m} e_i^\alpha + (1-p)e_1^\alpha \prod_{i=m+1}^{m+k-1} e_i^\alpha.$$

Dazu sei

$$e_1 \prod_{i=m+1}^{m+k-1} e_i = \eta \cdot \prod_{i=1}^{m} e_i$$

für ein $\eta > 0$, welches noch spezifiziert werden kann. Dann ist obige Gleichung äquivalent zu

$$1 = (p + (1-p)\eta^\alpha) \prod_{i=1}^{m} e_i^\alpha$$

$$\Rightarrow \eta = \left(\frac{1 - p\prod_{i=1}^{m} e_i^\alpha}{(1-p)\prod_{i=1}^{m} e_i^\alpha} \right)^{1/\alpha} = \exp\left[\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1 - p\prod_{i=1}^{m} e_i^\alpha}{(1-p)\prod_{i=1}^{m} e_i^\alpha} \right) \right].$$

η ist eine stetige Funktion in $\alpha < 0$. Für festes $\prod_{i=1}^{m} e_i$ kann $\alpha < 0$ so gewählt werden, dass $\eta \in \mathbb{Q}$. Man wähle die Zustände $e_1, \ldots, e_m$ so, dass $\sum_{i=1}^{m} \log e_i \in \mathbb{Z}$.
Bevor ich einzeln die Ungenauigkeiten mancher vor diesem Abschnitt behandelten Aussagen aufzeige, werden noch die dafür nötigen Matrixfunktionen definiert. Seien $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ diejenigen Zustände aus $\mathscr{E}$ größer als 1. $\overline{H}' := (\overline{H}'_{ij})_{i,j \in \{i_1,\ldots,i_r\}}$ bezeichne die Matrixfunktion mit den Einträgen

$$\overline{H}'_{ij}(t) = \mathbb{P}(\log M_{\tau_1^>} \le t, M_{\tau_1^>} = e_j | a_0 = e_i).$$

Ferner sei erwähnt, dass es nach Proposition 3.15 ausreicht zu zeigen, dass die Semi-Markov Matrix des streng aufsteigenden Leiterprozesses des MRWs, d.h. $\overline{H}'$, gitterverteilt ist bzw. dass $\overline{H}'(\infty)$ irreduzibel oder aperiodisch ist, um diese Eigenschaften für die assoziierte Semi-Markov Matrix zu zeigen.
Wir konstruieren aus dem nun gegebenen Rahmen Beispiele, die die oben genannten Ungenauigkeiten aufzeigen.

- **Die $\log e_i$ sind keine ganzzahligen Vielfachen derselben Zahl und $\overline{H}'$ ist gitterverteilt.** Wir können die Markov-Kette so wählen, dass beim Durchlaufen der Kette jedes Mal in den Zuständen $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ bedingt unter einem Anfangszustand aus dieser Menge eine Leiterhöhe erreicht wird. Ausgehend vom Anfangszustand e_1 kann man dies offenbar sukzessiv machen. Sei $\eta := \frac{N}{M}$ mit $N, M \in \mathbb{N}$ und $d := \frac{1}{M}$. Wähle die Zustände $e_1, \ldots, e_m$ und $e_{m+1}, \ldots, e_{m+k-1}$ so, dass bedingt unter dem Anfangszustand e_1 alle LH auf dem Pfad über e_2 zurück zu e_1 in $\mathbb{Z}$ und alle LH auf dem Pfad von e_1 über e_{m+1} zurück zu e_1 in $d\mathbb{Z}$ liegen. Auf dem zuletzt genannten Pfad soll die letzte LH nach Voraussetzung $\eta \sum_{i=1}^{m} \log e_i \in d\mathbb{Z}$ betragen. Wir haben d gerade so definiert, dass $\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$ gilt.
  Somit liegen nach Konstruktion alle LH in $d\mathbb{Z}$. Also ist $\overline{H}'$ gitterverteilt mit Spanne größer gleich d (vgl. Definition 2.6). Die Voraussetzung, dass die $\log e_i$ keine ganzzahligen Vielfachen derselben Zahl sind, hat keinen Einfluss. Beispielsweise wählt man $e_2 := \exp(-\pi)$, $e_3 := \exp(2+\pi)$ und den Rest so, dass obige Annahmen erfüllt sind. Man kann zeigen, dass $\log e_2$ und $\log e_3$ die genannte Voraussetzung erfüllen, da es ist nicht möglich, dass eine irrationale und eine ganzzahlige Zahl ganzzahlige Vielfache derselben Zahl sind.

- **$\overline{H}'(\infty)$ ist nicht irreduzibel.**
  Nach Wahl ist $e_{i_1} > 1$. Dieser Zustand sei nur von e_{j_0} erreichbar. Es gelte $e_{j_0} < 1$ und $\log e_{j_0} + \log e_{i_1} \leq 0$. Es gilt demnach $\overline{H}'(\infty)_{ii_1} = 0$ für alle $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$.

- **$\overline{H}'(\infty)$ ist periodisch.**
  Wir können die Zustände $e_1, \ldots, e_{m+k-1}$ bzw. m und k offenbar so wählen, dass auf dem einen Pfad von e_1 nach e_1 $\mathfrak{m}$ und auf dem anderen $\mathfrak{k}$ LH angenommen werden mit $\text{ggT}(\mathfrak{m}, \mathfrak{k}) = 1$. Daher ist $\overline{H}'(\infty)$ periodisch. Dies widerspricht auch der Aussage aus [6], wo - mit den Bezeichnungen dieses Beispiels formuliert - gefolgert wird, dass sich aus der Ergodizität der Markov-Kette $(M_n)_{n\geq 0}$ die Ergodizität des streng aufsteigenden Leiterprozesses ergibt.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und ausschließlich die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Münster, den Unterschrift:

Literaturverzeichnis

[1] ALSMEYER, G.: *Markov renewal theory for quasi-stochastic matrices*. – unveröffentlicht

[2] ALSMEYER, G.: *Stochastische Prozesse Band 2*. – unveröffentlicht

[3] ALSMEYER, G.: The Ladder Variables of a Markov Random Walk. In: *Probability and Mathematical Statistics* 20 (2000), S. 151–168

[4] ALSMEYER, G.: *Stochastische Prozesse Teil 1*. Universtität Münster, 2005

[5] ALSMEYER, G.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Universtität Münster, 2007

[6] ARJAS, E. ; SPEED, T.P.: An extension of Cramèr´s estimate for the absorption probability of a random walk. In: *Proc. Camb. Phil. Soc.* 73 (1973), S. 355–359

[7] ATHREYA, K.B. ; RAMA MURTHY, K.: Feller´s renewal theorem for systems of renewal equations. In: *Journal of Indian Institute of Science* 58 (1976), S. 437–459

[8] BRANDT, A.: The stochastic equation $Y_{n+1} = A_nY_n + B_n$ with stationary coefficients. In: *Adv. Appl. Prob.* 18 (1986)

[9] BREIMANN, L.: *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass, 1968

[10] DE SAPORTA, B.: Renewal theorem for a system of renewal equations. In: *Ann. Inst. H. Poincare Probab. Statist.* 39 (2003), S. 823–838

[11] DE SAPORTA, B.: *Etude de la solution stationnaire de l'équation $Y_{n+1} = a_nY_n + b_n$ à coefficients aléatoires*, Université de Rennes I, Diss., 2004

[12] DE SAPORTA, B.: Tail of the stationary solution of the stochastic equation $Y_{n+1} = a_nY_n + b_n$ with Markovian coefficients. In: *Stoch. Proc. Appl.* 115 (2005)

[13] FELLER, W.: *Introduction to Probability Theory and its Applications Vol. II*. John Wiley and Sons Inc., New York, 1971

[14] GOLDIE, C.M.: Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. In: *Ann. Appl. Probab.* 1 (1991), S. 26–166

[15] HORN, R. ; JOHNSON, C.: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985

[16] LE PAGE, E.: Théorèmes de renouvellement pour les produites de matrices aléatoires. Equations aux différences aléatoires. In: *Séminaires de probabiltés de Rennes* (1983)