

Markus Lebe

Analyse sequentieller Experimente mit Feedback für die Versuchsperson





Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik



Analyse sequentieller Experimente mit Feedback für die Versuchsperson



Diplomarbeit

von

Markus Lebe

Thema gestellt von

Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

18. Juni 2008

«Wer dem Licht entgegen geht, sieht seinen Schatten nicht.»

Markus Lebe
Bismarckallee 47b
48151 Münster

e-mail: m.lebe@gmx.de
Telefon: 0160-1668399

Vorwort

Ich bin ein Mensch, der je nach Situation entweder sehr viel oder sehr wenig redet. Zum Abschluss meines Studiums erlaube ich mir hier noch einmal das erstere. Mathematik hat mich schon immer sehr interessiert und fasziniert, so dass der Entschluss, dieses Fach zu studieren, nicht schwer fiel. Dennoch durchlebte ich nach vier, fünf schönen Semestern zum Auftakt später auch einige schwierigere Phasen. Bei der Wahl des Diplomarbeitthemas musste ich beispielsweise etwas suchen.

Letztlich habe ich mich für die Wahrscheinlichkeitstheorie entschieden. Ich habe ein Thema bearbeitet, mit dem ich mich sehr identifizieren konnte und das mir viel Freude bereitet hat. Die Fragestellung fand ich von Anfang an sehr interessant und mein Vorwissen war ausreichend. Insbesondere finde ich es schön, dass auch Nichtmathematiker aus meinem Bekanntenkreis, die meine Arbeit gelesen haben, zumindestens nachvollziehen konnten, womit ich mich befasst habe.

Nach besten Kräften habe ich meine Diplomarbeit über die Strategien beim Kartenspielen mit Feedback angefertigt. Im Vordergrund stand natürlich eine größtmögliche Vollständigkeit und Korrektheit der inhaltlichen Ergebnisse, doch auch ein gut strukturierter Aufbau und gut lesbarer Text waren mir wichtig.

Der Begriff «einfach» wird in der Literatur, die ich bearbeitet habe, häufig verwendet. Die meisten dieser Textstellen sind in Wahrheit kompliziert, so dass ich sie erweitert habe. Lediglich im Beweis von Satz 1.1.3 konnte ich einige wenige Ergebnisse nicht herleiten.

Vorwort

Ich gebe zu, dass die alte und neue Rechtschreibung gelegentlich durcheinandergehen. Teilweise ist dies aber sogar beabsichtigt. Prinzipiell versuche ich, die neue Rechtschreibung zu verwenden, aber bei Begriffen, deren Bedeutung durch die neue Rechtschreibung verzerrt wird (Beispiel: wohldefiniert und wohl definiert) oder deren neue Schreibweise mir nicht gefällt, bediene ich mich der alten.

Durch eine kurze Biografie des Mathematikers, auf dessen Resultate ich mich im Wesentlichen beziehe, versuche ich am Anfang der Einleitung, sowohl etwas von der Schönheit als auch von der Nützlichkeit der Ergebnisse zu vermitteln.

Ein Glossar schien mir nicht notwendig, dafür habe ich in einem Anhang verwendete Begriffe und Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie wiederholt, die wir eigentlich auch voraussetzen könnten.

Zunächst danke ich natürlich Herrn Alsmeyer für die Vergabe dieses schönen Themas und einige Hinweise beim Anfertigen dieser Diplomarbeit, insbesondere im Hinblick auf den Beweis von Satz 1.1.1.

Donald Knuth und Leslie Lamport danke ich für ihre tolle Software, \TeX und \LaTeX , die das Erstellen dieser Arbeit zu einem Vergnügen gemacht hat.

Ebenso danke ich meiner Familie und meinen Freunden, die mich mental unterstützt und bei Laune gehalten haben.

Ferner danke ich der Friedrich-Ebert-Stiftung für die finanzielle und ideelle Förderung meines Studiums, auf die ich natürlich sehr stolz bin.

Markus Lebe

Inhaltsverzeichnis

. Vorwort	v
. Einleitung	1
1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback	7
1.1. Sequentielle Experimente mit vollständigem Feedback	7
1.2. Beweise für das erste Kapitel	11
2. Analyse sequentieller Experimente mit partielllem Feedback	29
2.1. Sequentielle Experimente mit Ja-Nein-Feedback	29
2.2. Beweise für das zweite Kapitel	36
3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback	45
3.1. Auswertung	45
3.2. Beweise für das dritte Kapitel	51
A. Rekursive Bestimmung maximaler erwarteter Trefferzahlen beim vollständigen Feedback	59
B. Martingale, Gaussprozesse, Brownsche Bewegungen und Brücken	65
B.1. Martingale	65
B.2. Brownsche Bewegung	66
C. Werte von $N(\vec{c}; \vec{p})$ für $n = 9$, $\vec{c} = (3, 3, 3)$	71
D. Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$	73
. Symbol- und Funktionsverzeichnis	75
. Literaturverzeichnis	77

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Bevor wir uns mit dem Thema dieser Arbeit befassen, lohnt es sich, zunächst etwas zu dem Menschen zu sagen, auf dessen Resultate wir uns im Wesentlichen beziehen werden.

Persi Diaconis (geb. 1945), Professor für Mathematik und Statistik in Stanford, sieht man seinen Beruf nicht unbedingt an, wenn man ein Foto von ihm betrachtet. Es fällt nicht schwer, sich vorzustellen, dass dieser Mann einmal ein ganz anderes Leben gelebt hat.

Sein Leben als Wissenschaftler begann im Alter von 18 Jahren, als er in einem Casino in Puerto Rico saß und feststellte, dass die Würfel gezinkt waren. Er konnte es nicht nur fühlen, wenn er sie in seiner Hand gegeneinanderrollte, er konnte auch das minimale Torkeln sehen, das Würfel kennzeichnet, deren Schwerpunkt nicht mehr mittig ist. Ihm drängte sich die Frage auf, wie sich bei einem geschliffenen Würfel die Chancen verändern, dass bestimmte Augen fallen.

Diaconis zog damals als Zauberer durch das Land und versuchte, von den raffinierten Methoden der Falschspieler neue Taschenspielertricks abzuleiten. Ein Freund empfahl ihm die Lektüre von William Fellers «An Introduction to Probability and its Applications», doch Diaconis verstand kein Wort. Er hatte mit 14 Jahren von einem Tag auf den anderen Schule und Familie verlassen, um sich dem Zauberer Dai Vernon anzuschließen.

Eine ungewöhnliche Entscheidung für einen Jungen aus gutbürgerlichem Haus. Diaconis wuchs mit zwei Geschwistern in New York City auf. Sein Vater war Dirigent, seine Mutter Klavierlehrerin, mit 6 Jahren erhielt er Geigenunterricht. Doch Persis Leidenschaft galt der Magie, seit ihm als kleiner Junge ein Buch mit Zaubertricks in die Hände gefallen war. Sein eigentliches Zuhause wurde der legandere New Yorker Zauberclub «Future American Magical Entertainers», wo er sich mit dem weltberühmten Dai Vernon anfreundete. Der 65-Jährige war von dem begabten Jungen so angetan, dass er eines Tages anrief und sagte: «Ich fahre morgen nach Delaware zu einer großen Zauberkonferenz, willst du mitkommen?» Diaconis zögerte nicht; seine Eltern sah er erst 17 Jahre später wieder.

Von dem Tag an genoss er eine Ausbildung der besonderen Art. «Wenn uns zu Ohren gekommen wäre, dass die Eskimos eine neue Methode erfunden hätten, die zweite Karte zu spielen, dann wären wir sofort auf nach Alaska.» Sie tingelten durchs Land, machten Vorführungen in feinen Gesellschaften und auf der Straße, gaben Unterricht in Zauberclubs, trafen die größten Zauberkünstler ihrer Zeit,

Einleitung

fachsimpelten nächtelang.

Als sich dann aber die Unkenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung als ernst zu nehmendes Hindernis herausstellte, beschloss Diaconis im Alter von 24 Jahren, wieder zur Schule zu gehen; er belegte einen Abendkurs in Mathematik. Zwei Jahre später bewarb er sich unerschrocken in Harvard und wurde dank dem Referenzschreiben eines Kolumnisten des «Scientific American» an der Eliteuniversität aufgenommen. Der Kolumnist hatte zwei von Diaconis erfundenen Kartentricks zu den zehn besten der Welt gezählt. Weitere drei Jahre später machte Diaconis seinen Doktor in Statistik und wurde Mitglied der Statistischen Fakultät von Stanford.

Als er dort anfing, erzählte er niemandem, dass er Zauberer ist, weil er sein Leben fortan seriös mit Statistik bestreiten wollte. Als er aber das erste Mal in der Bibliothek war und willkürlich einen der sechs dicken Bände der gesammelten Werke des Mathematikers Paul Pierre Lévy aufschlug, las er: «Perfectly shuffling cards!» 1992 sollten er und sein Kollege David Bayer von der Columbia-Universität herausfinden, wie viele Mischvorgänge beim sogenannten «Riffle Shuffle¹» (der gängigsten Mischmethode, dem ineinanderblättern des in zwei ungefähr gleichgroße Häufchen aufgeteilten Kartenstapels) nötig sind, bis die Reihenfolge der Karten wirklich zufällig ist (und es damit auf die Titelseite der New York Times schaffen - sehr ungewöhnlich für einen Mathematiker): 7 bei einem Pokerblatt mit 52 Karten! Anders gesagt: $1,5 \times \ln(2n)$ mit n als Kartenanzahl. Siebenmal mischen also, damit der Zufall die Regie übernimmt. Bevor der ketzerische Gedanke aufkommt, ob es denn keine wichtigeren Fragen auf der Welt gebe, muss man bedenken, dass solche Arbeiten nicht selten weit über die Ausgangsfrage hinausreichen! Diese Ergebnisse über den Riffle Shuffle stießen beispielsweise bei Informatikern auf große Resonanz, weil sich Teile spekte auf die sogenannte parallele Verarbeitung (die Verteilung einer Rechenaufgabe auf mehrere Prozessoren) übertragen lassen. Außerdem mussten Diaconis und Bayer bei der Analyse des Riffle Shuffles ein neues allgemeineres Zahlensystem analysieren, das wiederum einen Bezug zu einem neuen Feld der Mathematik hat, der sogenannten nichtkommutativen Geometrie.

Ferner griff Diaconis mit seinem neuen Sachverstand auch das Problem der gezinkten Würfel wieder auf. Um Daten zu erheben, ließ er in San Francisco sorgfältig gezinkte Würfel herstellen, bei denen zwei gegenüberliegende Flächen, versehen mit der 1 und der 6, größer waren als die restlichen vier. Nun durften seine Studenten 10.000 Mal würfeln. Doch das bescherte kein brauchbares Datenmaterial, da die menschlichen Fehler beim Ablesen jeglichen Effekt der um Viertelmillimeter geschliffenen Seiten hinwegspülten.

Doch es dauerte nicht lange, bis Diaconis sich dem Problem vor anderem Hintergrund erneut zuwandte. Ihm war aufgefallen, dass oft von Wahrscheinlichkeiten Gebrauch gemacht wurde, wo gar kein Zufall im Spiel war. Er wollte das Ge-

¹(to) riffle (engl.): durchblättern; shuffle (engl.): Mischen, Mischvorgang

genteil zeigen, also ein Beispiel finden, bei dem man irrtümlicherweise von Zufall ausgeht. Deshalb nahm er den Prototyp der Zufallsentscheidung unter die Lupe: den Münzwurf. Kopf oder Zahl? Stehen die Chancen wirklich 50/50?

Zunächst wies Diaconis nach, dass sich eine Münze immer gleich verhält, wenn man sie auf die immer gleiche Weise in die Luft befördert. Dazu ließ er nicht nur eine Münzwurfmaschine bauen, sondern trainierte auch seinen rechten Daumen, mit konstanter Kraft und im immer gleichen Winkel Münzen in die Luft zu schnippen, so dass die Münze in zehn von zehn Fällen auf dem Kopf landet.

Für den Fall, dass ein normaler Mensch die Münze wirft, begann er die Physik der Flugbahn zu analysieren, und siehe da: Die Chancen, dass eine Münze, die mit dem Kopf nach oben startet, auch tatsächlich mit dem Kopf nach oben landet, stehen 51:49. (Die Inhalte finden wir bei Anja Jardine ( [Jar06]).)

In dieser Arbeit beziehe ich mich im Wesentlichen auf den Artikel [PD81] von Persi Diaconis und Ronald Graham.

Es geht dabei um ein Problem, das beim Geschmackstest sowie bei Experimenten der Medizin und Parapsychologie auftaucht und wie folgt modelliert werden kann: Ein Kartendeck mit n Karten beinhaltet c_i mit i nummerierte Karten, $1 \leq i \leq r$, $\sum_{i=1}^r c_i = n$. Eine Versuchsperson rät die Karten hintereinander. Nach jeder Karte wird der Versuchsperson die Karte gezeigt (*vollständiges Feedback*) bzw. ihr gesagt, ob sie richtig oder falsch geraten hat (*partielles Feedback*).

Wir wollen diejenigen Strategien der Versuchsperson bestimmen, die die erwartete Trefferanzahl maximieren bzw. minimieren (Abkürzend sprechen wir auch von der *besten/optimalen* bzw. der *schlechtesten Strategie*.), sowie die Verteilungen der Anzahl der richtig geratenen Karten unter diesen Strategien bestimmen.

Wir zeigen, wie wir «skill scoring²» benutzen, um solche Experimente auf eine Art und Weise auszuwerten, die (asymptotisch) nicht von der Strategie der Versuchsperson abhängt.

In den jetzt folgenden drei Beispielen illustrieren wir unsere Hauptresultate.

Beispiel 0.0.1. Betrachten wir zunächst Fishers berühmte Tea-Tasting-Lady. Acht Tassen Tee sind vorbereitet, vier des einen Typs und vier des zweiten Typs. Die Teetassen werden der Dame in zufälliger Reihenfolge präsentiert, und sie versucht, für jede Tasse den Typ zu erraten. Wenn sie keine besonderen Geschmacksfähigkeiten besitzt und kein Feedback bekommt, erwarten wir, dass die Dame vier von acht Tassen richtig rät.

Wir schlagen folgende Variante vor: Um ihr zu helfen, die Zahl ihrer Treffer zu erhöhen, sagen wir der Dame nach jedem Versuch, ob sie richtig liegt oder nicht. Wenn die Dame keine Geschmacksfähigkeiten hat, aber versuchen möchte, die Anzahl der korrekt geratenen Tassen zu maximieren, besteht ihre optimale Strategie darin (da sie in Versuch i ($1 \leq i \leq 8$) weiß, dass noch genau a_i Tassen von Typ 1 und noch genau b_i Tassen von Typ 2 verbleiben), den Typ zu raten, der

²skill (engl.): Fähigkeit, Fertigkeit; score (engl.): Punktestand, Spielstand

Einleitung

zum Maximum von a_i und b_i gehört. Die erwartete Anzahl der korrekt geratenen Tassen unter der optimalen Strategie ist dann: $\frac{373}{70} = 5,3$.

Beispiel 0.0.2. (Kartenraten) Nehmen wir an, wir haben ein normales ESP-Deck mit $n^2 = 25$ Karten, mit den fünf Symbolen (Wir verwenden für *Symbol* auch den Begriff *Typ.*) $\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit$ und \triangle , von denen jedes fünfmal vorkommt. Das Kartenspiel wird gemischt. Jemand nimmt die Karten nacheinander auf und schaut sie sich an, und die Versuchsperson rät bei jeder Karte, was der andere auf der Hand hat.

Wir diskutieren drei Arten von Feedback:

Fall 1 - Kein Feedback: Falls kein Feedback geliefert wird, hat jede beliebige Ratestrategie fünf Treffer als Erwartungswert. Die Verteilung der Trefferanzahl hängt allerdings von der Ratestrategie ab. Man kann zeigen, dass die Varianz am größten ist, wenn die Ratestrategie irgendeine Permutation der 25 Karten ist. Sie beträgt dann: $\sigma^2 = \frac{n^2}{n+1} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$ ( [Gre38]).

Wir konzentrieren uns in dieser Arbeit auf die beiden folgenden Fälle, da sie interessantere Resultate zur Folge haben.

Fall 2 - Vollständiges Feedback: Wenn der Versuchsperson die geratene Karte jedesmal gezeigt wird, bevor mit der nächsten Karte fortgefahrene wird, besteht die optimale Ratestrategie darin, immer als nächstes das Symbol zu raten, das noch am häufigsten im Kartendeck vertreten ist.

Die erwartete Anzahl der Treffer unter dieser optimalen Strategie beträgt für obiges Kartenspiel mit 25 Karten genau 8,65.

Wir werden im ersten Kapitel dieses Resultat mittels einer expliziten Formel erhalten, doch zuerst wurde es von Read ( [Rea62]) rekursiv hergeleitet, und auch diese rekursive Berechnung ist in dieser Arbeit zu finden ( Anhang A).

Im ersten Kapitel ( Kapitel 1) werden wir also geschlossene Ausdrücke für die erwarteten Trefferzahlen bei den optimalen und schlechtesten Strategien für beliebige Kartenstapel bei vollständigem Feedback herleiten.

Fall 3 - Partielles Feedback: Die Situation wird komplex beim partiellen Feedback, wenn der Versuchsperson jedesmal nur gesagt wird, ob sie richtig oder falsch geraten hat. Eine einfache Beschreibung der optimalen Strategie ist nicht bekannt. Beispiel 2.1.7 im zweiten Kapitel wird uns (intuitiv vielleicht etwas überraschend) zeigen, dass der «greedy algorithm³», der in jedem Schritt das wahrscheinlichste Symbol rät, nicht optimal ist. Die optimale Strategie und die erwartete Trefferzahl unter dieser kann bestimmt werden durch numerisches Lösen einer rekursiven Beziehung. Für unser 25-Karten-Deck erhalten wir dann 6,63 Treffer.

³greedy (engl.): gierig, gefräßig; algorithm (engl.): Algorithmus, Rechenvorschrift

Einleitung

Wir werden im zweiten Kapitel (☞ Kapitel 2) aber sehen, dass der greedy algorithm optimal ist für Experimente mit partiellem Feedback, wenn keine Werte mehrfach vorkommen, also das Kartendeck mit den Werten 1 bis n durchnummieriert werden kann.

Wie sollen nun Feedback-Experimente ausgewertet werden? Betrachten wir dazu noch folgendes drittes Beispiel:

Beispiel 0.0.3. Bei diesem nummerischen Beispiel betrachten wir ein gut gemischtes Kartenspiel mit 20 Karten, 10 roten und 10 schwarzen. (Wer gerne Tee trinkt, kann sich aber auch wieder vorstellen, dass 20 Tassen Tee vorbereitet sind, 10 von Sorte a und 10 von Sorte b.) Jemand führt das Experiment durch und schaut sich dabei nacheinander die Karten der Reihe nach an. Nach jedem Versuch wird dem Ratenden gesagt, ob er richtig liegt mit seinem Tipp oder nicht. In dem Beispiel von Tabelle 0.1 auf Seite 6 gab es 14 Treffer. Wenn dieses Experiment naiv ohne Feedback-Information ausgewertet würde, würde man jeden Versuch als unabhängiges Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ ansehen. Entsprechende Tabellen für Binomialverteilungen zeigen, dass gilt: $\mathbb{P}(14 \text{ oder mehr Treffer in } 20 \text{ Versuchen}) = 0.058$. Die Auswahlfolge, die der Ratende tatsächlich gewählt hat, liegt dicht an der optimalen Strategie. Siebenmal war die Anzahl der noch verbliebenen roten gleich der Anzahl der noch verbliebenen schwarzen Karten. In diesen Versuchen haben rot und schwarz dieselbe Trefferwahrscheinlichkeit und jede Wahl ist optimal. In den anderen 13 Versuchen wählte der Ratende neunmal die optimale Strategie.

Vielleicht sollten wir die 14 Treffer mit 12,30 vergleichen, der erwarteten Trefferzahl unter der optimalen Strategie. Wenn wir das Vorhandensein von Feedback-Information vernachlässigen, kann das dazu führen, dass wir einer Versuchsperson, die eine (nahezu) optimale Strategie verfolgt, «Talent» zusprechen. Wenn andererseits eine Versuchsperson die erwartete Trefferanzahl unter der optimalen Strategie deutlich übertrifft, kann das dazu führen, dass wir eine «talentierte» Versuchsperson finden, die keine Feedback-Information benutzt. (In diesem Versuch hätte die Versuchsperson nur zwölf Treffer erzielt, wenn sie die optimale Strategie benutzt hätte.)

Im dritten Kapitel (☞ Kapitel 3) beschreiben wir eine Auswertungsmethode, die wir skill scoring nennen. Der Skillscore vergleicht dabei die Trefferanzahl zu einem Basisscore, der sich aus der bedingten Erwartung des i -ten ($1 \leq i \leq 2n$) Versuchs gegeben die Feedback-Information ableitet.

Die Statistik ist besonders einfach im gegenwärtigen Beispiel. Wenn zum Zeitpunkt des i -ten Versuchs r_i rote Karten und s_i schwarze Karten im Deck sind, wäre die Wahrscheinlichkeit, dass die nächste Karte rot ist, $\frac{r_i}{2n-i+1}$. Die Werte p_i - Wahrscheinlichkeit für einen Treffer in Versuch i - sind gegeben in der vierten Spalte von Tabelle 0.1. Falls Z_i eins oder null ist, wenn der i -te Tipp richtig ist oder falsch, dann ist die Skillscore-Statistik S definiert als: $S = \sum_{i=1}^{2n} (Z_i - p_i)$.

Einleitung

- Versuchsnummer gibt an, die wievielte Karte als nächste aufgenommen wird.
- optim. Strategie: Symbol, das gegenwärtig die höhere Trefferwahrscheinlichkeit hat.
- Geratenes Symbol ist das durch die Versuchsperson gewählte Symbol.
- p_i in Spalte 4 ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Tipp des Ratenden korrekt ist.
- Karte sagt, welches Symbol tatsächlich aufgedeckt wird.
- Feedback sagt, ob richtig oder falsch geraten wurde.

Versuchsnr.	optim. Strategie	geratenes Symbol	p_i	Karte	Feedback
1	gleich	schwarz	1/2	schwarz	richtig
2	rot	schwarz	9/19	rot	falsch
3	gleich	schwarz	1/2	rot	falsch
4	schwarz	schwarz	9/17	schwarz	richtig
5	gleich	rot	1/2	schwarz	falsch
6	rot	schwarz	7/15	schwarz	richtig
7	rot	rot	8/14	rot	richtig
8	rot	schwarz	6/13	schwarz	richtig
9	rot	rot	7/12	rot	richtig
10	rot	rot	6/11	rot	richtig
11	gleich	rot	1/2	schwarz	falsch
12	rot	rot	5/9	rot	richtig
13	gleich	schwarz	1/2	rot	falsch
14	schwarz	rot	3/7	rot	richtig
15	schwarz	schwarz	4/6	schwarz	richtig
16	schwarz	schwarz	3/5	schwarz	richtig
17	gleich	schwarz	1/2	rot	falsch
18	schwarz	schwarz	2/3	schwarz	richtig
19	gleich	rot	1/2	rot	richtig
20	schwarz	schwarz	1	schwarz	richtig
				11,049	14 Treffer

Tabelle 0.1.: Beispiel für skill scoring in einem Experiment mit zehn roten und zehn schwarzen Karten und Feedback für die ratende Person

In diesem Beispiel gilt also: $S = 14 - 11,049 = 2,95$.

Wir werden im dritten Kapitel (☞ Kapitel 3) sehen, dass für jede Ratestrategie $\frac{S}{\sqrt{\frac{2n}{4}}}$ im Grenzwert standard-normalverteilt ist. In diesem Beispiel ist $\frac{S}{\sqrt{5}} = 1,32$.

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback für die Versuchsperson

1.1. Sequentielle Experimente mit vollständigem Feedback

In diesem Kapitel betrachten wir Experimente mit einem n Karten umfassenden Kartenspiel, die vom Typ $1, \dots, r$ für ein $r > 1$ sein können, wobei c_i für $1 \leq i \leq r$ die Anzahl der Karten vom Typ i angebe. Es ist also $\sum_{i=1}^r c_i = n$.

Die n Karten umfassen also r verschiedene Symbole, die unterschiedlich oft vorkommen dürfen. Wir drücken dies aus durch den Vektor $\vec{c} = (c_1, \dots, c_r)$, wobei wir ohne Einschränkung $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_r$ annehmen.

Eine Versuchsperson versucht, die Kartenfolge zu erraten. Die optimale Strategie für die Versuchsperson, die ja die totale Trefferanzahl maximieren möchte, ist es, in jedem Versuch das gegenwärtig wahrscheinlichste Symbol zu wählen, also das Symbol, das momentan noch am häufigsten im Kartendeck verblieben ist, wobei wir bei Gleichstand mehrerer Typen zufällig unter diesen randomisieren.

Dies ist intuitiv klar und folgt (wirklich) direkt mit Rückwärtsinduktion.

Sei nun $H(\vec{c})$ die Trefferanzahl unter der optimalen Strategie.

Wir können die Verteilung von H für den Fall $r = 2$ ableiten. Wir liefern hier den Grenzwert der Verteilung von H für $n \rightarrow \infty$; die exakte Verteilung wird im Beweis gegeben.

SATZ 1.1.1. *In obiger Situation habe das n Karten umfassende Kartenspiel c_1 Karten, die das erste Symbol zeigen, und $c_2 = (n - c_1)$ Karten, die das zweite Symbol zeigen.*

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

(1) Für c_1 und c_2 gegen unendlich mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{c_1}{c_1 + c_2}) = p$, $p \in (0, 1)$, $p \neq \frac{1}{2}$, $q = (1 - p)$, gilt:

$$\mathbb{E}[H] = c_1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{|p - q|} - 1 \right) + o(1) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[H - c_1 = k] &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma \cdot (1 - \gamma)^k \text{ für } k \in \mathbb{N}_0, \\ \text{wobei } \gamma &= \frac{2 \cdot |p - q|}{1 + |p - q|} \end{aligned} \quad (1.2)$$

(2) Wenn $c_1 = c_2 = k$ (also $p = \frac{1}{2}$) und k gegen unendlich strebt, so gilt:

$$\mathbb{E}[H] = k + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} - 1 \right) = k + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi k} - \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad (1.3)$$

$$\mathbb{P}\left[\frac{H - k}{\sqrt{\frac{k}{4}}} \leq x\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 2 \cdot \Phi(x) - 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Dabei bezeichnet $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung.

Satz 1.1.1 zeigt uns, dass es einen großen Unterschied gibt zwischen balancierten Kartenspielen, bei denen $c_1 = c_2$ gilt, also beide Symbole gleich oft vorkommen, und unbalancierten Kartendecks, was wir direkt an (1.1) und (1.3) ablesen können.

In der unbalancierten Situation ist die optimale Strategie nicht viel besser als die Strategie, die konstant das öfter vorkommende Symbol rät. Eine intuitive Erklärung ist die folgende: Wenn $c_1 \gg c_2$ gilt, so wird die optimale Strategie fast immer Typ 1 wählen.

Für den Fall $r > 2$ ist die Verteilung von H noch nicht bekannt, aber wir können den Erwartungswert von H bestimmen.

Wenn wir definieren, dass $h(\vec{c}) := \mathbb{E}[H(\vec{c})]$, so zeigen elementare Überlegungen bzw. die Ausführungen im Anhang A, dass h der folgenden Rekursion genügt:

$$h(\vec{c}) = \left(\sum_{l=1}^r \frac{c_l}{c_1 + \dots + c_r} h(\vec{c} - \vec{\delta}_l) \right) + \frac{\max(\vec{c})}{c_1 + \dots + c_r}, \quad h(\vec{0}) = 0 \quad (1.5)$$

Dabei hat $\vec{\delta}_l$ eine 1 an der Position l und sonst überall eine 0. Wir werden zeigen, dass wir $h(\vec{c})$ in folgender geschlossener Form angeben können:

SATZ 1.1.2. Die Lösung der Rekursion (1.5) ist:

$$h(\vec{c}) = \max(\vec{c}) + \sum_{\vec{0} \neq \vec{i} \leq \vec{c}} \left\{ \binom{c_1}{i_1} \dots \binom{c_r}{i_r} / \binom{c_1 + \dots + c_r}{i_1 + \dots + i_r} \right\} \cdot \frac{\max^*(\vec{i})}{i_1 + \dots + i_r}, \quad (1.6)$$

1.1. Sequentielle Experimente mit vollständigem Feedback

$$\text{wobei } \max^*(\vec{i}) = \begin{cases} 0 & \text{es existiert ein eindeutig bestimmtes } j, 1 \leq j \leq r, \\ & \text{so dass } i_j = \max(\vec{i}) \\ \max(\vec{i}) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Summe in (1.6) geht über den nichtnegativen Orthanten von \mathbb{Z}^r .

Die Rekursion (1.5) wurde von Read benutzt, um bestimmte Werte von h numerisch zu bestimmen. Wir finden seine Berechnungen im Anhang A.

Mit dem Satz 1.1.2 kann man Reads Ergebnisse bestätigen, beispielsweise ist $h((3, 3, 3)) = 4,787$, $h((5, 5, 5, 5, 5)) = 8,64675$.

Eine direkte wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der rechten Seite von (1.6) geben wir nach dem Beweis.

Betrachten wir ein Kartendeck, bei dem r verschiedene Typen jeweils k -mal auftreten, also $\vec{c} = k \cdot \vec{1}$ mit $\vec{1}$ als Vektor von r Einsen. Für große k kann schwache Konvergenz benutzt werden, um die rechte Seite von (1.6) zu beschränken:

SATZ 1.1.3. *Für k gegen unendlich gilt:*

$$h(k \cdot \vec{1}) = k + \frac{\pi}{2} \cdot M_r \cdot \sqrt{k} + o_r(\sqrt{k}) \quad (1.7)$$

Dabei bezeichnet M_r den Erwartungswert des Maximums von r unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallsvariablen. (Der Index r bedeutet, dass die Konstante von r abhängt.)

Die Zahlen M_r findet man bei Teichroew (☞ [Tei56]) und Harter (☞ [Har61]). Zum Beispiel gilt:

r	2	3	4	5
M_r	0,564	0,863	1,029	1,163

Tabelle 1.1.: Werte der Konstanten M_r

Natürlich stimmt Satz 1.1.3 mit (1.3) überein, wenn $r = 2$ gilt.

Für $k = r = 5$ liefert uns der Satz 1.1.3 als Approximation den Wert 9,08 im Vergleich zu dem exakten Wert 8,65.

Beim Kartenraten mit vollständigem Feedback kann die Versuchsperson auch versuchen, die erwartete Trefferzahl zu minimieren, indem sie bei jedem Versuch das am wenigsten wahrscheinliche Symbol rät.

Diese schlechtesten Strategien können ein seltsames Aussehen haben. Wenn wir zum Beispiel n von 1 bis n durchnummelierte Karten haben, besteht die schlechteste Strategie darin, im ersten Versuch irgendeine Karte und ab der zweiten nur

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

noch nicht mehr im Deck vorhandene Karten zu raten. Dies führt uns zu einer erwarteten Trefferzahl von $\frac{1}{n}$.

Die Analyse der schlechtesten Strategien ist insofern wertvoll, als dass man dabei bestimmt, wie sehr die Verteilungen der korrekten Trefferzahlen aufgrund der gewählten Strategie variieren können.

Die Beweise sind analog zu denen der besten Strategien, weshalb wir hier auf sie verzichten.

Hier sind einige Resultate:

SATZ 1.1.4. *Sei $d(\vec{c})$ die erwartete Trefferzahl, wenn beim vollständigen Feedback die schlechteste Strategie benutzt wird. Es gilt:*

$$d(\vec{c}) = \min(\vec{c}) - \sum_{\vec{0} \neq \vec{i} \leq \vec{c}} \left\{ \binom{c_1}{i_1} \cdots \binom{c_r}{i_r} / \binom{c_1 + \cdots + c_r}{i_1 + \cdots + i_r} \right\} \cdot \frac{\min^*(\vec{i})}{i_1 + \cdots + i_r} \quad (1.8)$$

wobei $\min^*(\vec{i}) = \min(\vec{i}) \cdot (\text{mul}(\vec{i}) - 1)$. Dabei ist $\text{mul}(\vec{i})$ die Anzahl der j , $1 \leq j \leq r$, für welche $i_j = \min(\vec{i})$.

Für k gegen unendlich gilt:

$$d(k \cdot \vec{1}) = k - \frac{\pi}{2} \cdot M_r \cdot \sqrt{k} + o_r(\sqrt{k}) \quad (1.9)$$

Dabei definieren wir M_r wie im Satz 1.1.3.

Einige numerische Werte für d sind:

$$d((3, 3, 3)) = 1,487 \text{ und } d((5, 5, 5, 5, 5)) = 2,296.$$

Für $r = 2$ gilt:

$$\min(c_1, c_2) - d = h - \max(c_1, c_2).$$

Die Sätze 1.1.3 und 1.1.4 zeigen uns für eine beschränkte Anzahl r verschiedener Symbole, dass die Abweichungen sowohl der besten als auch der schlechtesten Strategien beim vollständigen Feedback vom Wert, den man beim Kartenraten ohne Feedback erhält, von der Größenordnung \sqrt{k} sind. Das wird entscheidend sein für die Resultate im dritten Kapitel, wenn wir die SkillScore-Statistik betrachten.

1.2. Beweise für das erste Kapitel

BEWEIS von Satz 1.1.1: Um die Verteilung von H zu bestimmen, folgen wir Blackwell und Hodges (☞ [DB57]) und betrachten einen Random Walk. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $c_1 \geq c_2$. Wir betrachten einen Zufallspfad, der aus Linien besteht, die die Steigung 1 oder -1 haben. Der Pfad hat Sprunghöhe 1, wenn eine Karte vom Typ 1 aufgedeckt wird, und Sprunghöhe -1, wenn eine Karte vom Typ 2 aufgedeckt wird. Der Pfad beginnt bei $(0,0)$ und endet bei $(c_1 + c_2, c_1 - c_2)$. Die optimale Strategie besteht jetzt darin, Typ 1 zu raten, wenn der Pfad unterhalb der Linie $y = c_1 - c_2$ ist, und Typ 2, wenn der Pfad oberhalb dieser Linie ist. An Punkten, wo der Pfad die Linie berührt, kann beliebig geraten werden, denn genau dann ist die Anzahl der Karten vom Typ 1, die noch im Kartenstapel verblieben sind, gleich der Anzahl der Karten vom Typ 2, die noch im Kartenstapel verblieben sind.

Sei nun T die Anzahl der Zeitpunkte, an denen unser Pfad die Linie $y = c_1 - c_2$ berührt. Mit Induktion kann man zeigen, dass für einen beliebigen Pfad die Anzahl der insgesamt richtig geratenen Karten, die unter der optimalen Strategie bis zum Zeitpunkt $n = c_1 + c_2$ erzielt wird, gleich $c_1 + Z$ ist, wobei Z eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $\frac{1}{2}$ und T ist.

Intuitiv ist das klar: Wenn zu keinem Zeitpunkt «Symbolgleichstand» herrscht, rät unsere Strategie immer Typ 1, und wir erzielen genau c_1 Treffer.

In allen anderen Fällen seien $t = 1, \dots, n$ die Zeitpunkte, an denen die n Karten gezogen werden, und X_1 der Zeitpunkt, an dem erstmals «Symbolgleichstand» herrscht, X_2 der zweite Zeitpunkt, \dots , und X_T mit $T \in \{1, \dots, c_2\}$ der T -te und letzte Zeitpunkt, an dem beide Symbole gleich oft im Deck vertreten sind.

Dann raten wir im Intervall $[1, X_1]$ genau x_1 -oft falsch mit $x_1 = \frac{(X_1-1)-(c_1-c_2)}{2}$ (da unser Pfad in diesem Intervall exakt $(c_1 - c_2)$ Aufwärtssprünge zurücklegt, und jeder weitere Aufwärtssprung einen Abwärtssprung zur Folge hat), im zweiten Intervall $(X_1, X_2]$ genau x_2 -mal mit $x_2 = \frac{(X_2-1)-(X_1+1)}{2}$ (da jeder Aufwärtssprung einen Abwärtssprung zur Folge hat), usw., und letztlich raten wir im Intervall $(X_T, n]$ genau x_{T+1} -mal falsch mit $x_{T+1} = \frac{(c_1+c_2)-(X_T+1)}{2}$.

Daher gilt: $\sum_{i=1}^{T+1} x_i = x_1 + \sum_{i=2}^T x_i + x_{T+1} = \frac{(X_1-1)-(c_1-c_2)}{2} + \sum_{i=2}^T \frac{(X_i-1)-(X_{i-1}+1)}{2} + \frac{(c_1+c_2)-(X_T+1)}{2} = \frac{2c_2-2T}{2} = c_2 - T$.

Bei den $n - T = c_1 + c_2 - T$ Versuchen, bei denen ein Symbol häufiger vorkommt als das andere, erreicht man bei jedem Pfad unter der optimalen Strategie also stets genau $(n - T) - (c_2 - T) = c_1$ Treffer, so dass nur noch die Treffer hinzugezählt werden müssen, die in den T Zeitpunkten erzielt werden, an denen beide Symbole gleich oft im Deck vertreten sind. Dies sind aber gerade T unabhängige Bernoulli-Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$, und ihre Summe Z ist dementsprechend eine $Bin(T, \frac{1}{2})$ -verteilte Zufallsgröße.

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

Somit hängt also die Trefferanzahl, die man erreicht, wenn man beim Durchlaufen des Kartenstapels die optimale Strategie benutzt, allein davon ab, wieviele Treffer man zu den Zeitpunkten erzielt, an denen beide Symbole gleich oft im Deck vertreten sind.

Die Zufallsvariable T , die die Anzahl solcher Zeitpunkte angibt, kann die Werte $0, \dots, c_2$ annehmen. Die Verteilung von T wurde genauer von Feller ( [Fel68]) studiert; er berechnet:

$$\mathbb{P}(T = t) = 2^t \frac{(c_1 - c_2 + t)}{(c_1 + c_2 - t)} \binom{c_1 + c_2 - t}{c_2 - t} / \binom{c_1 + c_2}{c_1} \text{ für } t = 0, \dots, c_2 \quad (1.10)$$

Wir können diese Verteilung von T kombinatorisch begründen, indem wir für eine feste Trefferanzahl $T = t$ die zugehörigen Pfade zählen und durch die Anzahl aller Pfade dividieren:

$\binom{c_1 + c_2}{c_1}$, der Term im Nenner, entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, die c_1 Karten vom Typ 1 auf die $c_1 + c_2$ Positionen zu verteilen.

Wenn X_1, \dots, X_T wie oben die T Zeitpunkte bezeichnen, an denen beide Symbole gleich oft im Deck vertreten sind, so machen wir in jedem Intervall $[X_i, X_{i+1}), i \in \{1, \dots, T-1\}$, sowie auch im Intervall $[X_T, n]$ gleich viele Aufwärts- wie Abwärtsprünge. Ferner befinden wir uns in jedem dieser Intervalle stets komplett oberhalb oder unterhalb der Linie $y = (c_1 - c_2)$. Aus Symmetriegründen entsprechen damit bei festen Zeitpunkten X_1, \dots, X_T jedem Pfad exakt 2^T Pfade, die im Intervall $[1, X_1]$ gleich verlaufen und in jedem anderen der durch die X_i festgelegten Intervalle durch Spiegelungen an der Achse $y = c_1 - c_2$ auseinander hervorgehen.

Wie viele Möglichkeiten haben wir nun, die T Zeitpunkte auszuwählen, an denen beide Symbole gleich oft im Deck vertreten sind? Wir wiederholen zunächst unsere obige Schlüsselbeobachtung: Wenn $T = t$ ist, so wird an den $n - T$ Zeitpunkten, an denen ein Symbol häufiger vorkommt als das andere, exakt $c_2 - T$ -oft das weniger wahrscheinliche Symbol aufgedeckt. Nun überlegen wir uns, dass die Zeitpunkte dieser $c_2 - T$ Versuche aber eindeutig die Zeitpunkte X_1, \dots, X_T und auch die in den Zeitpunkten, an denen kein Symbolgleichstand herrscht, aufgedeckten Symbole festlegen.

Wie viele Möglichkeiten haben wir also, aus den $n - T$ Versuchen $c_2 - T$ Versuche auszuwählen? Genau $\binom{n-T}{c_2-T}$. Wir überlegen uns an einigen Beispielen aber sehr schnell, dass in den letzten beiden dieser $n - T$ Versuche nie das weniger wahrscheinliche Symbol aufgedeckt werden kann, da wir sonst bis zum Ende des Kartenstapels die Linie $y = c_1 - c_2$ nicht mehr erreichen können. Also bleiben nur noch $\binom{n-T-2}{c_2-T}$ Möglichkeiten, $c_2 - T$ Versuche auszuwählen, an denen das weniger wahrscheinliche Symbol aufgedeckt wird. An Beispielen kann man, wenn wir zwei geeignete Positionen festhalten, nun wieder erkennen, dass von diesen Möglichkeiten noch exakt $\binom{n-T-2}{c_2-T-2}$ ausscheiden.

Wir berechnen also insgesamt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T = t) &= 2^t \left[\binom{n-t-2}{c_2-t} - \binom{n-t-2}{c_2-t-2} \right] / \binom{n}{c_1} \\
 &= 2^t \left[\frac{(c_1+c_2-t-2)!}{(c_1-2)!(c_2-t)!} - \frac{(c_1+c_2-t-2)!}{c_1!(c_2-t-2)!} \right] / \binom{c_1+c_2}{c_1} \\
 &= 2^t \left[\{c_1(c_1-1) - (c_2-t-1)(c_2-t)\} \frac{(c_1+c_2-t-2)!}{c_1!(c_2-t)!} \right] / \binom{c_1+c_2}{c_1} \\
 &= 2^t \left[\{c_1^2 - c_1 - c_2^2 + 2tc_2 - t^2 + c_2 - t\} \frac{(c_1+c_2-t-2)!}{c_1!(c_2-t)!} \right] / \binom{c_1+c_2}{c_1} \\
 &= 2^t \left[\{(c_1 - c_2 + t)(c_1 + c_2 - t - 1)\} \frac{(c_1+c_2-t-2)!}{c_1!(c_2-t)!} \right] / \binom{c_1+c_2}{c_1} \\
 &= 2^t \frac{(c_1 - c_2 + t)}{(c_1 + c_2 - t)} (c_1 + c_2 - t)(c_1 + c_2 - t - 1) \frac{(c_1+c_2-t-2)!}{c_1!(c_2-t)!} / \binom{c_1+c_2}{c_1} \\
 &= 2^t \frac{(c_1 - c_2 + t)}{(c_1 + c_2 - t)} \binom{c_1+c_2-t}{c_2-t} / \binom{c_1+c_2}{c_1},
 \end{aligned}$$

wir bekommen also in der Tat das Ergebnis (1.10) von Feller.

Wenn $c_1 = c_2$ ist, kann T nicht den Wert 0 annehmen, und man bekommt für (1.10) mit $n = c_1 = c_2$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(T = t) &= 2^t \frac{t}{(2n-t)} \binom{2n-t}{n-t} / \binom{2n}{n} \\
 &= 2^t \left[\binom{2n-t-2}{n-t} - \binom{2n-t-2}{n-t-2} \right] / \binom{2n}{n}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Fassen wir noch einmal kurz zusammen, was wir bislang gemacht haben.

Im ersten Beweisschritt haben wir die charakteristische Eigenschaft aller Zufallspfade hergeleitet, die besagt, dass die gesamte Trefferanzahl unter der optimalen Strategie alleine durch die Treffer bestimmt wird, die zu den T Zeitpunkten erzielt werden, an denen beide Symbole gleich oft im Deck vertreten sind.

Im zweiten Beweisschritt haben wir die Verteilung von T bestimmt.

Im dritten Beweisschritt wird es nun darum gehen, aus der Verteilung von T die Aussagen des Satzes herzuleiten.

Wir beginnen zunächst damit, für den symmetrischen Fall die Grenzverteilung von T zu bestimmen, um daraus die in (1.4) angegebene Grenzverteilung von H für den symmetrischen Fall herzuleiten.

Anschließend werden wir für den Fall, dass das erste Symbol häufiger vorkommt als das zweite, ebenfalls die Grenzverteilung von T bestimmen, um daraus die in (1.2) angegebene Grenzverteilung von H für den asymmetrischen Fall herzuleiten.

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

Zuletzt werden wir die in (1.3) und (1.1) angegebenen Erwartungswerte von H bestimmen.

Zur Herleitung von (1.4) betrachtet Feller (☞ [Fel68]) die uns bekannte symmetrische Irrfahrt:

$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$ mit unabhängig und identisch verteilten $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Zunächst behauptet er:

SATZ 1.2.1. Für $x > 0$ und $y > 0$ ist die Zahl der Pfade vom Ursprung zum Punkt (x, y) mit $S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_x > 0$ gleich

$$N_{xy} = \frac{y}{x} \binom{x}{\frac{x+y}{2}} \quad (1.12)$$

BEWEIS: Für jeden der zugehörigen Pfade muss $S_1 = 1$ gelten. Wir müssen also die positiven Pfade von $(1, 1)$ nach (x, y) bestimmen. Aus Symmetriegründen (Reflektionsprinzip) ergibt sich diese Anzahl zu:

$$N_{xy} = \binom{x-1}{y + \frac{x-y}{2} - 1} - \binom{x-1}{\frac{x-y}{2} - 1} = \frac{y}{x} \binom{x}{\frac{x+y}{2}} \quad (1.13)$$

Mit dem Dualitätsprinzip folgt daraus direkt:

SATZ 1.2.2. Die Anzahl der Pfade von $(0, 0)$ nach (x, y) mit $S_1 < S_2 < \dots < S_x = y > 0$, die Pfade also, die zum Zeitpunkt x erstmals die Höhe y erreichen, ist ebenfalls gleich

$$N_{xy} = \frac{y}{x} \binom{x}{\frac{x+y}{2}} \quad (1.14)$$

Dieser Satz wiederum impliziert direkt den folgenden

SATZ 1.2.3. Die Wahrscheinlichkeit, dass S_n zum Zeitpunkt $2n - y$ erstmals durch $y > 0$ läuft, beträgt

$$f_{2n}^{(y)} = \frac{y}{2n-y} \binom{2n-y}{n} 2^{-(2n-y)} \quad (1.15)$$

1.2. Beweise für das erste Kapitel

SATZ 1.2.4. *Die Wahrscheinlichkeit, dass S_n zum Zeitpunkt $2n$ zum y -ten Mal nach 0 zurückkehrt, beträgt*

$$f_{2n}^{(y)} = \frac{y}{2n-y} \binom{2n-y}{n} 2^{-(2n-y)} \quad (1.16)$$

BEWEIS: Wir betrachten einen Pfad, der zum Zeitpunkt $(2n - y)$ erstmals die Höhe y erreicht. Wir konstruieren aus diesem einen neuen Pfad, indem wir am Ursprung und den $(y - 1)$ Zeitpunkten, an denen der Pfad erstmals die Höhe $1, 2, \dots, (y - 1)$ erreicht, einen zusätzlichen Abwärtsschritt einfügen. Der neue Pfad hat die Länge $2n$, verläuft nie oberhalb der x -Achse, und kehrt zum Zeitpunkt $2n$ zum y -ten Mal nach 0 zurück. Es gibt genau $2^{2n-y} f_{2n}^{(y)}$ solche Pfade, und aus Symmetriegründen entsprechen jedem dieser Pfade 2^y Pfade mit denselben Nullstellen. Dies beweist diesen Satz.

Mit Satz 1.2.4 haben wir auf einem anderen Wege nochmals die Verteilung von T hergeleitet, denn wir erhalten erneut (1.10):

$$\mathbb{P}(T = t) = \frac{f_{2n}^{(t)}}{\mathbb{P}(S_{2n} = 0)} = 2^t \frac{t}{(2n-t)} \binom{2n-t}{n-t} / \binom{2n}{n}$$

Erinnern wir uns, dass wir die Grenzverteilung von T bestimmen wollen. Wichtig in unserer symmetrischen Situation, bei der wir ja jeweils n Karten von zwei Kartentypen haben, werden Pfade sein, die zum Zeitpunkt $2n$ nach 0 zurückkehren. Satz 1.2.4 wird sich da sicherlich als nützlich erweisen, doch wir wollen uns auch noch einige weitere Sätze bereitstellen.

Zunächst setzen wir abkürzend: $L_{2n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Ferner setzen wir: $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Außerdem: $f_0 = 0$, $f_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_{2n} &= \frac{1}{2n} u_{2n-2} = \left(1 - \frac{4n^2 - 2n}{4n^2}\right) u_{2n-2} \\ &= u_{2n-2} - \frac{2n(2n-1)}{4n^2} u_{2n-2} = u_{2n-2} - u_{2n} \end{aligned}$$

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

SATZ 1.2.5. Unter den $\binom{2n}{n}$ Pfaden, die zum Zeitpunkt $2n$ nach 0 zurückkehren, gibt es

$$\text{genau } L_{2n-2} \text{ Pfade mit } S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0. \quad (1.17)$$

$$\text{genau } L_{2n} \text{ Pfade, so dass } S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0. \quad (1.18)$$

BEWEIS: Jeder Pfad, der (1.17) erfüllt, läuft durch den Punkt $N_1 = (2n-1, 1)$. Nach Satz 1.2.1 ist die Zahl der Pfade mit $S_1 > 0, \dots, S_{2n-2} > 0$, die zu N_1 laufen, gleich

$$\frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{\frac{2n-1+1}{2}} = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} = L_{2(n-1)} \quad (1.19)$$

Dies beweist (1.17).

Zum Nachweis von (1.18) betrachten wir wieder einen Pfad, der (1.17) erfüllt. Dieser Pfad läuft durch $O_1 = (1, 1)$ und $N_1 = (2n-1, 1)$. Alle seine Knoten liegen auf oder oberhalb der Linie $y = 1$. Wenn wir den Ursprung nach O_1 verschieben, läuft unser neuer Pfad von O_1 nach N_1 (der Knoten N_1 hat die neuen Koordinaten $(2n-2, 0)$), und kein Knoten liegt unterhalb der x -Achse. Wir haben also das Problem (1.18) auf (1.17) übertragen, und der Satz ist bewiesen.

SATZ 1.2.6. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \quad (1.20)$$

$$u_{2n} = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) \quad (1.21)$$

$$u_{2n} = \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) \quad (1.22)$$

Ferner:

$$f_{2n} = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0) \quad (1.23)$$

$$f_{2n} = \mathbb{P}(S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} < 0) \quad (1.24)$$

BEWEIS: (1.20) ist klar. Es gibt exakt $\binom{2n}{n}$ Pfade, die zum Zeitpunkt $2n$ durch 0 laufen, und die Gesamtanzahl aller Pfade ist 2^{2n} .

Wenn wir auf (1.17) zurückblicken, sehen wir: Es gibt L_{2n-2} Pfade, die zum Zeitpunkt $2n$ nach 0 zurückkehren mit $S_1 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0$. Die Pfade, die zur Wahrscheinlichkeit in (1.23) gehören, sind also genau doppelt so viele, und ihre Wahrscheinlichkeit ist $2 \cdot L_{2n-2} \cdot 2^{-2n} = 2 \cdot \frac{1}{n} \binom{2(n-1)}{n-1} \cdot 2^{-2n} = \frac{1}{2n} \binom{2(n-1)}{n-1} 2^{-(2n-2)} = \frac{1}{2n} u_{2n-2} = f_{2n}$. (1.18) impliziert auf dieselbe Weise (1.24).

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine 0 bis zum Zeitpunkt $2n$ erscheint, ist gleich 1

1.2. Beweise für das erste Kapitel

minus der Wahrscheinlichkeit, dass die erste Rückkehr zum Ursprung zu einem Zeitpunkt $\leq 2n$ stattfindet. Mit (1.23) bekommen wir also:

$$1 - f_2 - f_4 - \cdots - f_{2n} = 1 - (1 - u_2) - (u_2 - u_4) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n}) = u_{2n} \quad (1.25)$$

Damit ist (1.21) bewiesen.

Auf die gleiche Weise ist die rechte Seite von (1.22) gleich 1 minus der Wahrscheinlichkeit, dass das erste Antreffen von -1 bis zum Zeitpunkt $2n$ stattfindet, und mit (1.24) bekommen wir dieselbe Differenz wie in (1.25).

SATZ 1.2.7. *Sei $z_{2n}^{(r)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass bis einschließlich zum Zeitpunkt $2n$ S_n exakt r Besuche in 0 vorweist. Dann gilt:*

$$z_{2n}^{(r)} = \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2n-r}{n} \text{ für } n \in \mathbb{N} \quad (1.26)$$

BEWEIS: Nach den Formeln (1.20) und (1.21) gibt es exakt gleich viele Pfade der Länge 2ν , die nie durch 0 laufen, wie es Pfade gibt, die zum Zeitpunkt 2ν in 0 sind.

Wir betrachten nun Pfade der Länge $2n$, bei denen der r -te und letzte Besuch in 0 zum Zeitpunkt $2n - 2\nu < 2n$ erfolgte.

Für den Pfad der Länge 2ν , der in diesem letzten Besuch in 0 startet, gibt es genauso viele Möglichkeiten, wie es Pfade von $(2n - 2\nu, 0)$ nach $(2n, 0)$ gibt.

Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt $2n$ (einschließlich) S_n exakt r -mal nach 0 zurückkommt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass S_n bis zum Zeitpunkt $2n$ (einschließlich) mindestens r -mal nach 0 zurückkommt und $S_{2n} = 0$ gilt.

Das bedeutet also aufgrund von Satz 1.2.4:

$$z_{2n}^{(r)} = f_{2n}^{(r)} + f_{2n}^{(r+1)} + f_{2n}^{(r+2)} + \cdots \quad (1.27)$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} f_{2n}^{(y)} &= \frac{y}{2n-y} \binom{2n-y}{n} 2^{-2n+y} \\ &= \frac{(2n-y)-2(n-y)}{2n-y} \binom{2n-y}{n} 2^{-2n+y} \\ &= \frac{1}{2^{2n-y}} \binom{2n-y}{n} - 2 \frac{n-y}{2n-y} \binom{2n-y}{n} \frac{1}{2^{2n-y}} \\ &= \frac{1}{2^{2n-y}} \binom{2n-y}{n} - \frac{1}{2^{2n-y-1}} \binom{2n-y-1}{n} \end{aligned}$$

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

Wir müssen also nur für $y = r, r + 1, r + 2, \dots$ aufsummieren, und der Satz ist bewiesen.

Wir ersetzen nun die exakte Formel aus Satz 1.2.7 durch eine Approximation:

$$z_{2n}^{(r)} = u_{2n} \frac{(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{r-1}{n})}{(1 - \frac{1}{2n})(1 - \frac{2}{2n}) \cdots (1 - \frac{r-1}{2n})} \quad (1.28)$$

Mit Blick auf die Stirling-Formel konvergiert $u_{2n}(\pi n)^{\frac{1}{2}}$ gegen 1, wenn $n \rightarrow \infty$. Ferner können wir mittels der Taylor-Entwicklung des Logarithmus $\log(1 - \frac{\nu}{n})$ durch $-\frac{\nu}{n}$ approximieren.

Wir bekommen damit:

$$z_{2n}^{(r)} \approx \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{4n}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für weniger als k Besuche in 0 ist also eine Riemannsumme für ein bekanntes Integral. Wir bekommen:

SATZ 1.2.8. Für festes $\alpha > 0$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die symmetrische Irrfahrt bis zum Zeitpunkt $2n$ (einschließlich) weniger als $\alpha\sqrt{2n}$ Besuche in 0 hat, im Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ zu

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = 2 \cdot \Phi(\alpha) - 1 \quad (1.29)$$

Aus Satz 1.2.8 folgt nun für unser symmetrisches Kartenexperiment direkt, dass $\frac{T}{\sqrt{2n}}$ für große n asymptotisch die Verteilung des Absolutbetrags einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen hat,

$$\text{d. h. mit } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \text{ ergibt sich: } \mathbb{P}\left(\frac{T}{\sqrt{2n}} \leq x\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 2\Phi(x) - 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}.$$

Daraus folgt dann (1.4).

Wenn wir nun den unsymmetrischen Fall betrachten und dafür in (1.10) c_1 und c_2 gegen unendlich laufen lassen mit $\frac{c_1}{c_1+c_2} \rightarrow p$, $\frac{1}{2} < p < 1$, so sehen wir mit vollständiger Induktion, dass T im Grenzwert geometrisch verteilt ist; genauer:

$$\mathbb{P}(T = t) = \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad \text{mit } \bar{\gamma} = (p - q)$$

1.2. Beweise für das erste Kapitel

BEWEIS:

Induktionsanfang: $t = 0$: $\mathbb{P}(T = 0) = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \rightarrow (p - q) = \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^0$

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein festes, beliebiges $t \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt: Gilt die Aussage für ein $t \in \mathbb{N}_0$, so gilt sie auch für $t + 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = (t + 1)) &= 2^{t+1} \frac{(c_1 - c_2 + (t + 1))}{(c_1 + c_2 - (t + 1))} \binom{c_1 + c_2 - (t + 1)}{c_2 - (t + 1)} / \binom{c_1 + c_2}{c_1} \\
&= 2 \cdot 2^t \left[\frac{(c_1 - c_2 + t)}{(c_1 + c_2 - t - 1)} + \frac{1}{c_1 + c_2 - t - 1} \right] \\
&\quad \frac{(c_2 - t)}{(c_1 + c_2 - t)} \binom{c_1 + c_2 - t}{c_2 - t} / \binom{c_1 + c_2}{c_1} \\
&\stackrel{\text{IV}}{\rightarrow} 2 \cdot \left[\frac{(c_1 - c_2 + t)}{(c_1 + c_2 - t - 1)} \cdot \frac{(c_2 - t)}{(c_1 + c_2 - t)} \cdot \frac{(c_1 + c_2 - t)}{(c_1 - c_2 + t)} \right] \cdot \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t \\
&\rightarrow 2 \cdot q \cdot \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t \\
&= (q + q) \cdot \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t \\
&= (1 - (p - q)) \cdot \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t \\
&= \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^{t+1}
\end{aligned}$$

Die Grenzverteilung von H erhalten wir jetzt aus der Grenzverteilung von T . Wenn Z gegeben $T = t$ binomialverteilt ist zu den Parametern t und $\frac{1}{2}$, so bekommen wir in diesem diskreten Fall für $a \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(Z = a) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = a, T = t) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = a | T = t) \mathbb{P}(T = t) = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{a} \left(\frac{1}{2}\right)^t \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t.$$

Zum Nachweis von (1.2) setzen wir nun $\gamma = \frac{2\bar{\gamma}}{1+\bar{\gamma}} \Leftrightarrow \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{2-\gamma}$ und zeigen mit vollständiger Induktion:

$$\mathbb{P}(Z = a) = \frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}} \left(1 - \frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}}\right)^a = \gamma(1 - \gamma)^a, \quad a \in \mathbb{N}_0$$

BEWEIS:

Induktionsanfang: $a = 0, a = 1$:

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^t \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t = \bar{\gamma} \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t$$

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

$$\begin{aligned}
&= \bar{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{1-\bar{\gamma}}{2}} = \frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}} = \gamma = \gamma(1 - \gamma)^0 \\
\mathbb{P}(Z = 1) &= \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^t \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t = \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right) (-2) \sum_{t=1}^{\infty} t \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^{t-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma}) \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \right] = -\bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma}) \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}} \left[\frac{1}{1 - \frac{1-\bar{\gamma}}{2}} \right] \\
&= -\bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma}) \frac{-2}{(1 + \bar{\gamma})^2} = \gamma \frac{1 - \bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}} = \gamma \frac{1 - \frac{\gamma}{2-\gamma}}{1 + \frac{\gamma}{2-\gamma}} = \gamma(1 - \gamma)
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein festes, beliebiges $a \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Gilt die Aussage für ein $a \in \mathbb{N}$, so gilt sie auch für $a + 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = a + 1) &= \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{a+1} \left(\frac{1}{2}\right)^t \bar{\gamma}(1 - \bar{\gamma})^t = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{t-a}{a+1} \binom{t}{a} \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \\
&= \left\{ \frac{1}{a+1} \sum_{t=0}^{\infty} t \binom{t}{a} \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \right\} - \left\{ \frac{a}{a+1} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{a} \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \right\} \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \left\{ \frac{1}{a+1} (-2) \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right) \sum_{t=1}^{\infty} t \binom{t}{a} \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^{t-1} \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} - \left\{ \frac{a}{a+1} \gamma(1 - \gamma)^a \right\} \\
&= \left\{ \frac{\bar{\gamma} - 1}{a+1} \sum_{t=1}^{\infty} \left[t \binom{t}{a} \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^{t-1} \left(-\frac{1}{2}\right) + \binom{t}{a} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t - \binom{t}{a} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \right] \right\} - \\
&\quad \left\{ \frac{a}{a+1} \gamma(1 - \gamma)^a \right\} \\
&= \left\{ \frac{\bar{\gamma} - 1}{a+1} \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}} \left[\sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{a} \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \right] - \frac{\bar{\gamma} - 1}{a+1} \sum_{t=1}^{\infty} \binom{t}{a} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \right\} - \\
&\quad \left\{ \frac{a}{a+1} \gamma(1 - \gamma)^a \right\} \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \left\{ \frac{\bar{\gamma} - 1}{a+1} \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}} \left[\frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}} \left(1 - \frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}}\right)^a \right] - \left[\frac{\bar{\gamma} - 1}{\bar{\gamma}(a+1)} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t}{a} \bar{\gamma} \left(\frac{1 - \bar{\gamma}}{2}\right)^t \right] \right\} - \\
&\quad \left\{ \frac{a}{a+1} \gamma(1 - \gamma)^a \right\} \quad (\text{wobei wir } a \in \mathbb{N} \text{ benutzt haben}) \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{\bar{\gamma} - 1}{a+1} \left[\frac{2(1 + \bar{\gamma}) - 2\bar{\gamma}}{(1 + \bar{\gamma})^2} \left(1 - \frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}}\right)^a - \frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}} a \left(1 - \frac{2\bar{\gamma}}{1 + \bar{\gamma}}\right)^{a-1} \frac{2(1 + \bar{\gamma}) - 2\bar{\gamma}}{(1 + \bar{\gamma})^2} \right] - \\
&\quad \frac{\bar{\gamma} - 1}{\bar{\gamma}(a+1)} \gamma(1 - \gamma)^a - \frac{a}{a+1} \gamma(1 - \gamma)^a
\end{aligned}$$

1.2. Beweise für das erste Kapitel

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\gamma - 2}{(2-\gamma)(a+1)} \left[\left\{ \frac{2(2-\gamma) - \gamma(2-\gamma)}{2} \right\} (1-\gamma)^a - \gamma a (1-\gamma)^{a-1} \left\{ \frac{(2-\gamma)^2}{2} \right\} \right] - \\
&\quad \frac{2\gamma - 2}{\gamma(a+1)} \gamma (1-\gamma)^a - \frac{a}{a+1} \gamma (1-\gamma)^a \\
&= \frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{a+1} (1-\gamma)^a - \gamma \frac{a}{a+1} (1-\gamma)^{a-1} (\gamma-1)(2-\gamma) - \\
&\quad \frac{2(\gamma-1)}{a+1} (1-\gamma)^a - \frac{a}{a+1} \gamma (1-\gamma)^a \\
&= \gamma (1-\gamma)^{a+1} \left[\frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{(a+1)\gamma(1-\gamma)} - \frac{a(\gamma-1)(2-\gamma)}{(a+1)(1-\gamma)^2} - \frac{2(\gamma-1)}{(a+1)(1-\gamma)\gamma} - \right. \\
&\quad \left. \frac{a}{(a+1)(1-\gamma)} \right] \\
&= \gamma (1-\gamma)^{a+1} \left[\frac{(\gamma-1)(2-\gamma) + a(2-\gamma)\gamma - 2(\gamma-1) - a\gamma}{(a+1)\gamma(1-\gamma)} \right] \\
&= \gamma (1-\gamma)^{a+1} \left[\frac{2\gamma - \gamma^2 - 2 + \gamma + 2a\gamma - a\gamma^2 - 2\gamma + 2 - a\gamma}{(a+1)\gamma(1-\gamma)} \right] \\
&= \gamma (1-\gamma)^{a+1} \left[\frac{-(a+1)\gamma^2 + (a+1)\gamma}{(a+1)\gamma(1-\gamma)} \right] \\
&= \gamma (1-\gamma)^{a+1} \cdot 1 = \gamma (1-\gamma)^{a+1}
\end{aligned}$$

Damit ist (1.2) bewiesen.

Die Gleichung für den Erwartungswert von H können wir ableiten als Spezialfall von (1.6). Für den Fall $r = 2$ gilt nämlich: $\max^*(i_1, i_2) = 0$, falls nicht $i_1 = i_2$ ist. (1.6) wird dann zu:

$$\mathbb{E}(H) = \max(c_1, c_2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \binom{c_1}{i} \binom{c_2}{i} / \binom{c_1 + c_2}{2i} \quad (1.30)$$

Für $c_1 = c_2 = k$ bekommen wir also mit $\sum_{i=0}^k \binom{2i}{i} \binom{2k-2i}{k-i} = 2^{2k}$ ([K&F](#) [Chu74], S.290) und der Stirlingformel:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H) &= k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \binom{k}{i}^2 / \binom{2k}{2i} \\
&= k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{k! \cdot k! \cdot (2k-2i)! \cdot (2i)!}{i! \cdot i! \cdot (k-i)! \cdot (k-i)! \cdot (2k)!} \\
&= k + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{\binom{2i}{i} \binom{2k-2i}{k-i}}{\binom{2k}{k}}
\end{aligned}$$

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

$$\begin{aligned}
&= k + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} - 1 \right) \\
&\approx k + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^{2k}(\sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k)^2}{\sqrt{2\pi 2k}(\frac{2k}{e})^{2k}} - 1 \right) \\
&= k + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi k} - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

woraus (1.3) direkt folgt.

Wenn wir in (1.30) den Grenzwert für $\frac{c_1}{c_1+c_2} \rightarrow p \neq \frac{1}{2}$ betrachten, bekommen wir mit $\frac{\binom{c_1}{i}\binom{c_2}{i}}{\binom{c_1+c_2}{2i}} = \frac{c_1 \cdots (c_1-i+1) \cdot c_2 \cdots (c_2-i+1) \cdot (2i)!}{(c_1+c_2) \cdots (c_1+c_2-2i+1) \cdot i! \cdot i!} = \binom{2i}{i} (pq)^i + o(1)$ und unter Verwendung des bekannten Resultats $\sum_{i=1}^{\infty} \binom{2i}{i} (pq)^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4pq}} - 1 \right)$ (☞ [Chu74], S.290):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H) &= \max(c_1, c_2) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \binom{2i}{i} (pq)^i + o(1) \\
&= \max(c_1, c_2) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-4pq}} - 1 \right) + o(1) \\
&= \max(c_1, c_2) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-p(1-p)-2pq-q(1-q)}} - 1 \right) + o(1) \\
&= \max(c_1, c_2) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{p^2-2pq+q^2}} - 1 \right) + o(1) \\
&= \max(c_1, c_2) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{|p-q|} - 1 \right) + o(1)
\end{aligned}$$

Damit ist (1.1) gezeigt.

Um die insgesamt erzielte Trefferanzahl unter der optimalen Strategie zu bestimmen, haben wir also zunächst die charakteristische Eigenschaft aller Zufallspfade hergeleitet, die besagt, dass die gesamte Trefferanzahl unter der optimalen Strategie alleine durch die Treffer bestimmt wird, die zu den T Zeitpunkten erzielt werden, an denen beide Symbole gleich oft im Deck vertreten sind.

Wir haben anschließend die Verteilung von T bestimmt, um aus dieser (1.1)-(1.4) herzuleiten.

□

1.2. Beweise für das erste Kapitel

BEWEIS von Satz 1.1.2: Sei $f(\vec{c}) := h(\vec{c}) - \max(\vec{c})$. Die Rekursion (1.5) führt uns zu

$$f(\vec{c}) = \sum_{l=1}^r \frac{c_l}{c_1 + \cdots + c_r} \cdot \left\{ f(\vec{c} - \vec{\delta}_l) + \max(\vec{c} - \vec{\delta}_l) \right\} + \frac{\max(\vec{c})}{c_1 + \cdots + c_r} - \max(\vec{c}),$$

oder auch anders ausgedrückt:

$$(c_1 + \cdots + c_r) f(\vec{c}) = \sum_{l=1}^r c_l \cdot f(\vec{c} - \vec{\delta}_l) + \left[\left(\sum_{l=1}^r c_l \cdot \max(\vec{c} - \vec{\delta}_l) \right) + \max(\vec{c}) - (c_1 + \cdots + c_r) \max(\vec{c}) \right].$$

Man kann leicht erkennen, dass der Ausdruck in den eckigen Klammern gleich $\max^*(\vec{c})$ ist, wenn wir $\max^*(\vec{c})$ so definieren wie im Satz 1.1.2.

Nun definieren wir $g(\vec{c}) := \frac{(c_1 + \cdots + c_r)!}{c_1! \cdots c_r!} f(\vec{c})$, und unsere Rekursion wird zu:

$$g(\vec{c}) = \left(\sum_{l=1}^r g(\vec{c} - \vec{\delta}_l) \right) + \frac{(c_1 + \cdots + c_r)!}{c_1! \cdots c_r!} \cdot \frac{\max^*(\vec{c})}{c_1 + \cdots + c_r} \quad (1.31)$$

Mit (1.31) sehen wir, dass wir $g(\vec{c})$ ausdrücken können als Summe über den nicht-negativen Orthanten von \mathbb{Z}^r (d. h. $\vec{0} \neq \vec{i} \leq \vec{c}$) mittels der Funktion

$$\lambda(\vec{i}) = \frac{(i_1 + \cdots + i_r)!}{i_1! \cdots i_r!} \cdot \frac{\max^*(\vec{i})}{i_1 + \cdots + i_r}.$$

An jedem Gitterpunkt \vec{i} muss die Funktion $\lambda(\vec{i})$ multipliziert werden mit der Zahl der Pfade von \vec{c} zu \vec{i} . Diese Zahl ist:

$$\frac{((c_1 - i_1) + \cdots + (c_r - i_r))!}{(c_1 - i_1)! \cdots (c_r - i_r)!},$$

da bis zu dem Zeitpunkt, an dem ein Pfad durch \vec{i} läuft, genau $(c_1 + \cdots + c_r) - (i_1 + \cdots + i_r) = (c_1 - i_1) + \cdots + (c_r - i_r)$ Karten gezogen werden, von denen $(c_1 - i_1)$ das erste, $(c_2 - i_2)$ das zweite, \dots , und $(c_r - i_r)$ das r -te Symbol zeigen. Wir bekommen also:

$$g(\vec{c}) = \sum_{\vec{0} \neq \vec{i} \leq \vec{c}} \frac{((c_1 - i_1) + \cdots + (c_r - i_r))!}{(c_1 - i_1)! \cdots (c_r - i_r)!} \cdot \lambda(\vec{i}).$$

Die Rücktransformationen von g nach f und von f nach h liefern:

$$f(\vec{c}) = \sum_{\vec{0} \neq \vec{i} \leq \vec{c}} \frac{c_1! \cdots c_r!}{(c_1 + \cdots + c_r)!} \cdot \frac{((c_1 - i_1) + \cdots + (c_r - i_r))!}{(c_1 - i_1)! \cdots (c_r - i_r)!} \cdot \lambda(\vec{i}),$$

$$h(\vec{c}) = \max(\vec{c}) + \sum_{\vec{0} \neq \vec{i} \leq \vec{c}} \frac{c_1! \cdots c_r!}{(c_1 + \cdots + c_r)!} \cdot \frac{((c_1 - i_1) + \cdots + (c_r - i_r))!}{(c_1 - i_1)! \cdots (c_r - i_r)!} \cdot \lambda(\vec{i})$$

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

$$= \max(\vec{c}) + \sum_{\vec{i} \neq \vec{c}} \left\{ \binom{c_1}{i_1} \cdots \binom{c_r}{i_r} / \binom{c_1 + \cdots + c_r}{i_1 + \cdots + i_r} \right\} \cdot \frac{\max^*(\vec{i})}{i_1 + \cdots + i_r}.$$

Damit ist Satz 1.1.2 bewiesen. □

Bemerkung: Wir können eine direkte wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation von Satz 1.1.2 geben, wenn wir einen multidimensionalen Random Walk betrachten, bei dem wir einen Schritt in Richtung der i -ten Koordinate machen, wenn eine Karte vom Typ i aufgedeckt wird.

Die Anzahl der korrekt geratenen Karten unter der optimalen Strategie hängt nur von Gitterpunkten \vec{i} ab, bei denen $\max^*(\vec{i}) > 0$. Die Anzahl der korrekt geratenen Karten bei Gitterpunkten mit $\max^*(\vec{i}) = 0$ beträgt insgesamt genau $\max(\vec{c})$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer bei einem Gitterpunkt mit $\max^*(\vec{i}) > 0$ ist $\frac{\max^*(\vec{i})}{i_1 + \cdots + i_r}$, und die Summe in (1.6) ist einfach die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass der Pfad durch den entsprechenden Gitterpunkt \vec{i} geht.

BEWEIS von Satz 1.1.3: Zu gewissen in diesem Beweis verwendeten Begriffen, wie z. B. schwache Konvergenz, Gaussprozess und Brownsche Brücke, sei auf Anhang B verwiesen.

Wir betrachten ein Kartendeck mit $n = r \cdot k$ Karten. Für $i = 1, \dots, r$ seien also genau $k \in \mathbb{N}$ Karten mit i markiert. Für $j = 1, \dots, (n+1)$ sei \vec{V}_j ein r -dimensionaler Zufallsvektor, der angibt, wie viele Karten von jedem Typ vor Zeitpunkt j aufgedeckt worden sind. Somit ist $\vec{V}_1 = \vec{0}$. $\vec{V}_j(i)$ bezeichne die Anzahl der mit i , $1 \leq i \leq r$, markierten Karten, die vor Zeitpunkt j erschienen sind. Es ist $\sum_{i=1}^r \vec{V}_j(i) = (j-1)$. Im j -ten Versuch besteht die optimale Strategie darin, einen Wert l , $1 \leq l \leq r$, zu wählen, so dass gilt: $\vec{V}_j(l) = \min_{1 \leq i \leq r} \vec{V}_j(i)$.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer beträgt dann:

$$\frac{k - \min_{1 \leq i \leq r} \vec{V}_j(i)}{(n-j+1)} \quad \text{für } j = 1, \dots, n \tag{1.32}$$

Um nun mit (1.32) zu arbeiten, benutzen wir schwache Konvergenz-Techniken. Der erste Schritt ist es, die Zufallsvektoren $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{n+1}$ in eine Funktion zu transformieren, von der wir zeigen werden, dass sie gegen eine Brownsche Brücke konvergiert. Es sei dazu

$$\vec{X}_j = \sqrt{\frac{r}{k(r-1)}} \left\{ \vec{V}_j - \frac{(j-1)}{r} \vec{1} \right\} \quad \text{für } j = 1, \dots, (n+1).$$

1.2. Beweise für das erste Kapitel

Für die Komponenten von \vec{X}_j gilt: $\mathbb{E}[\vec{X}_j(i)] = 0$, $\sum_{i=1}^r \vec{X}_j(i) \equiv 0$, $\vec{X}_j(i) \stackrel{d}{=} -\vec{X}_{(n+1)-(j-1)}(i)$ für $j = 1, \dots, (n+1)$.

Wir bilden eine vektorwertige, stetige Funktion ${}_n\vec{X}_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^r$, indem wir wie in [Bil68] die Komponenten $\vec{X}_j(i)$ durch gerade Linien verbinden. Dabei gelte: ${}_n\vec{X}_{\frac{(j-1)}{n}} = \vec{X}_j$ für $j = 1, \dots, (n+1)$.

Aus Rosens (☞ [Ros67]) Resultaten für vektorwertige, abhängige Zufallsvariablen folgt jetzt, dass Satz 24.1 von Billingsley (☞ [Bil68]) gilt. Auf unsere Situation übertragen besagt dieser, dass ${}_n\vec{X}_t$ in Verteilung gegen \vec{W}_t^0 konvergiert, wobei \vec{W}_t^0 ein r -dimensionaler Gaussprozess mit Erwartungswertvektor $\vec{0}$ und folgender Kovarianz ist:

$$\text{Für } s < t \text{ gilt: } \text{Cov}(\vec{W}_s^0(i), \vec{W}_t^0(j)) = \mathbb{E}[\vec{W}_s^0(i)\vec{W}_t^0(j)] = \begin{cases} \frac{-s(1-t)}{(r-1)} & \text{für } i \neq j \\ s(1-t) & \text{für } i = j \end{cases}.$$

Also ist jeder Komponentenprozess $\vec{W}_t^0(i)$ eine Brownsche Brücke, und für festes t gilt: $\text{Cov}(\vec{W}_t^0) = t(1-t)\Lambda$ mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\frac{1}{(r-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{(r-1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Das impliziert: $\sum_{i=1}^r \vec{W}_t^0(i) = 0$. Wenn wir zu (1.32) zurückkehren und aufsummieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \frac{k - \frac{(j-1)}{r}}{(n-j+1)} - \sqrt{\frac{k(r-1)}{r}} \sum_{j=1}^n \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)}{(n-j+1)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\frac{kr}{r} - \frac{(j-1)}{r}}{(n-j+1)} - \sqrt{\frac{k(r-1)}{r}} \sum_{j=1}^n \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)}{(n-j+1)} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^n \frac{(n-j+1)}{(n-j+1)} - \sqrt{\frac{k(r-1)}{r}} \sum_{j=1}^n \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)}{(n-j+1)} \\ &= k - \sqrt{\frac{k(r-1)}{r}} \sum_{j=1}^n \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)}{(n-j+1)} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Wir werden zeigen, dass wir in (1.33) den Erwartungswert bilden und den Grenzwert für k gegen unendlich bestimmen dürfen. Dann gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mathbb{E} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)}{(n-j+1)} \right\} \right] = \int_0^1 \frac{\mathbb{E} \left(\min_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i) \right)}{(1-t)} dt \tag{1.34}$$

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

Wenn wir die Gültigkeit von (1.34) für den Augenblick annehmen, haben wir gezeigt, dass für die erwartete Trefferanzahl gilt:

$$k = \overline{M_r} \cdot \sqrt{k} + o_r(\sqrt{k})$$

$$\text{mit } \overline{M_r} = \sqrt{\frac{(r-1)}{r}} \int_0^1 \frac{\mathbb{E} \left(\min_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i) \right)}{(1-t)} dt.$$

Wir zeigen nun, dass $\overline{M_r} = -\frac{\pi}{2} \cdot M_r$ gilt, wenn wir M_r so definieren wie in Satz 1.1.3.

Um dies zu beweisen, bemerken wir, dass es folgende Möglichkeit gibt, \vec{W}_t^0 mit r unabhängigen, eindimensionalen Brownschen Brücken $\vec{W}_t^{(1)}, \dots, \vec{W}_t^{(r)}$ zu konstruieren: Sei $\overline{W}_t = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r W_t^{(j)}$, und sei $\vec{W}_t^0(i) = \sqrt{\frac{r}{(r-1)}} (W_t^{(i)} - \overline{W}_t)$ für $1 \leq i \leq r$.

Dann hat \vec{W}_t^0 die korrekte Kovarianz $t(1-t)\Lambda$. Ferner impliziert für festes t die Symmetrie unserer Gaussvariablen zum Erwartungswert 0:

$$\mathbb{E}[\min_{1 \leq i \leq r} W_t^{(i)}] = -\mathbb{E}[\max_{1 \leq i \leq r} W_t^{(i)}]; \mathbb{E}[\min_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i)] = -\mathbb{E}[\max_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i)]$$

Mehr noch:

$$\mathbb{E}[\max_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i)] = \sqrt{\frac{r}{(r-1)}} \mathbb{E}[\max_{1 \leq i \leq r} W_t^{(i)}]$$

Für festes t sind die Zufallsvariablen $W_t^{(i)}$ unabhängige Gaussvariablen mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz $t(1-t)$. Damit bekommen wir wie gewünscht $\overline{M_r} = -M_r \cdot \left(\int_0^1 \left(\frac{t}{(1-t)} \right)^{\frac{1}{2}} dt \right) = -\frac{\pi}{2} \cdot M_r$, wenn wir bei dem Integral zunächst t durch $\sin^2(x)$ substituieren und anschließend partielle Integration anwenden.

Nun bleibt nur noch (1.34) zu zeigen. Dazu werden wir den Funktionenraum $\mathcal{C}[0, 1]$ heranziehen. Zunächst impliziert ${}_n\vec{X}_t \rightarrow_D \vec{W}_t^0$, dass $\min_{1 \leq i \leq r} ({}_n\vec{X}_t(i)) \rightarrow \min_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i)$ in $\mathcal{C}[0, 1]$.

Als nächstes betrachten wir das stetige Funktional $T_\varepsilon : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $T_\varepsilon(f) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{f(t)}{(1-t)} dt$. Da $\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_t(i)$ stückweise konstant ist und gleich

1.2. Beweise für das erste Kapitel

$\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)$ auf dem Intervall $\frac{(j-1)}{n} \leq t \leq \frac{j}{n}$, haben wir:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(\min_{1 \leq i \leq r} (\vec{X}_t(i))) &= \sum_{\varepsilon n \leq j \leq (1-\varepsilon)n} \min_{1 \leq i \leq r} (\vec{X}_{\frac{(j-1)}{n}}(i)) \int_{\frac{(j-1)}{n}}^{\frac{j}{n}} \frac{1}{(1-t)} dt \\ &= \sum_{\varepsilon n \leq j \leq (1-\varepsilon)n} \min_{1 \leq i \leq r} (\vec{X}_j(i)) \ln \left(1 + \frac{1}{(n-j)} \right) \\ &= \sum_{\varepsilon n \leq j \leq (1-\varepsilon)n} \frac{\min_{1 \leq i \leq r} (\vec{X}_j(i))}{(n-j+1)} + O_\varepsilon \left(\sum_j \frac{\min_{1 \leq i \leq r} (\vec{X}_j(i))}{(n-j)^2} \right) \end{aligned}$$

Um die Markovungleichung anwenden zu können, müssen wir $\mathbb{E}(|\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)|)$ beschränken:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)|) &\leq r \cdot \mathbb{E}[|\vec{X}_j(1)|] \\ &\leq r \cdot (\mathbb{E}[\vec{X}_j^2(1)])^{\frac{1}{2}} = r \sqrt{\frac{r}{k(r-1)}} \left(j \frac{(n-j)}{(n-1)} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Somit bekommen wir für jedes $\gamma > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_j \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)}{(n-j)^2} \right| > \gamma \right) \leq \frac{1}{\gamma} \cdot r \sqrt{\frac{r}{k(r-1)}} \cdot \sum_j \frac{j^{\frac{1}{2}}}{(n-j)^{\frac{3}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{c}{\gamma \sqrt{k}},$$

wobei die positive Konstante c unabhängig von k und γ ist.

Damit haben wir gezeigt, dass der Fehler in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, und wir bekommen:

$$\sum_{\varepsilon n \leq j \leq (1-\varepsilon)n} \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)}{(n-j+1)} \xrightarrow{D} \int_{\varepsilon}^{(1-\varepsilon)} \frac{\min_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i)}{(1-t)} dt \quad (1.36)$$

Um nun in (1.36) den Erwartungswert bilden zu dürfen, müssen wir zunächst zeigen, dass die linke Seite gleichmäßig integrierbar ist.

Wir schreiben $M_j = \min_{1 \leq i \leq r} \vec{X}_j(i)$ und betrachten

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_i \frac{M_j}{(n-j+1)} \right)^2 \right] \leq \sum_{i,j} \frac{\mathbb{E}(|M_i| | M_j|)}{(n-i+1)(n-j+1)} \quad (1.37)$$

Für $i \neq j$ gilt: $\mathbb{E}(|M_i| | M_j|) \leq \{\mathbb{E}(M_i^2) \mathbb{E}(M_j^2)\}^{\frac{1}{2}}$, und

$$\mathbb{E}(M_j^2) \leq r \cdot \mathbb{E}(\vec{X}_j^2(1)) = \frac{r}{k(r-1)} \cdot \frac{j}{r} \left(1 - \frac{1}{r} \right) \frac{(n-j)}{(n-1)} \quad (1.38)$$

1. Analyse sequentieller Experimente mit vollständigem Feedback

Wenn wir (1.37) im Hinblick auf (1.38) betrachten, bekommen wir im Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum \frac{M_j}{(n-j+1)} \right)^2 \right] \leq \frac{1}{k(n-1)} \sum_{i,j} \sqrt{\frac{i}{(n-i+1)} \cdot \frac{j}{(n-j+1)}} < \infty.$$

Dies impliziert gleichmäßige Integrierbarkeit, und wir bekommen:

$$\sum_{\varepsilon n \leq j \leq (1-\varepsilon)n} \frac{\mathbb{E}(M_j)}{(n-j+1)} \xrightarrow{D} \int_{\varepsilon}^{(1-\varepsilon)} \frac{(1-\varepsilon)\mathbb{E}(\min_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i))}{(1-t)} dt \quad (1.39)$$

Zum Beweis von (1.34) bemerken wir, dass $\int_0^1 \frac{\mathbb{E}(\min_{1 \leq i \leq r} \vec{W}_t^0(i))}{(1-t)} dt$ konvergiert, also die rechte Seite von (1.39) approximiert dieses Integral beliebig genau für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$.

Ferner existiert ein $c > 0$, so dass

$$\left| \sum_{j \leq \varepsilon n} \frac{\mathbb{E}(M_j)}{(n-j+1)} \right| \leq \sum_{j \leq \varepsilon n} \frac{\mathbb{E}(|M_j|)}{(n-j+1)} \leq c \cdot \sum_{j \leq \varepsilon n} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{j}{(n-j)}}.$$

Dabei ist die letzte Summe die Riemannsumme für $\int_0^\varepsilon \sqrt{\frac{x}{(1-x)}} dx$, sie konvergiert gegen 0, wenn $\varepsilon \rightarrow 0$. Dasselbe Argument haben wir für $\sum_{(1-\varepsilon)n \leq j} \frac{\mathbb{E}(M_j)}{(n-j+1)}$. Dies beweist (1.34) und vervollständigt den Beweis von Satz 1.1.3.

Wir haben also eine unser Kartenexperiment beschreibende Funktion definiert, die im Grenzwert gegen die uns bekannte Brownsche Brücke konvergiert, um aus deren Eigenschaften die Behauptung des Satzes herzuleiten.

□

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback für die Versuchsperson

2.1. Sequentielle Experimente mit Ja-Nein-Feedback

In diesem Kapitel betrachten wir wie im ersten Kapitel Experimente mit einem n Karten umfassenden Kartenspiel, die vom Typ $1, \dots, r$ für ein $r > 1$ sein können, wobei c_i für $1 \leq i \leq r$ die Anzahl der Karten vom Typ i angebe. Es ist also $\sum_{i=1}^r c_i = n$.

Die n Karten umfassen also wieder r verschiedene Symbole, die unterschiedlich oft vorkommen dürfen. Wir drücken dies erneut aus durch den Vektor $\vec{c} = (c_1, \dots, c_r)$, wobei wir ohne Einschränkung $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_r$ annehmen.

In jedem Versuch wird der Versuchsperson gesagt, ob sie richtig oder falsch geraten hat, aber nicht die wahre Identität einer falsch geratenen Karte. Wir nennen diese Situation «Ja-Nein-Feedback» oder auch «partielles Feedback».

Das Problem wird kompliziert, wenn $\max(\vec{c}) > 1$, weshalb wir zunächst Resultate für den einfacheren Fall von n mit 1 bis n durchnummerierten Karten angeben. Wir blicken kurz zurück auf Experimente ohne Feedback und Experimente mit vollständigem Feedback, und vergleichen diese dann mit partiellem Feedback.

Kein Feedback: Wenn kein Feedback geliefert wird, hat jede Ratestrategie einen Treffer als Erwartungswert. Man kann zeigen, dass die Varianz der Anzahl richtig geratener Karten am größten ist, wenn die Ratefolge eine Permutation von 1 bis n ist (☞ [Gre38]).

Vollständiges Feedback: Wenn der Versuchsperson die gerade geratene Karte jedesmal gezeigt wird, besteht die optimale Strategie darin, immer eine Karte zu raten, die noch im Kartendeck verblieben ist. Die Anzahl erwarteter Tref-

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback

fer hat dieselbe Verteilung wie eine Summe S_n von n unabhängigen Zufallsvariablen $X_i, 1 \leq i \leq n$, wobei $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{i} = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$. Da alle X_i genau die Werte 0 und 1 annehmen, ist die Lindeberg-Bedingung erfüllt, und $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = \frac{S_n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(1 - \frac{1}{i}\right)}}$ konvergiert nach dem zentralen Grenzwertsatz damit in Verteilung gegen eine standard-normalverteilte Zufallsvariable.

Daher ist S_n für große n normalverteilt mit dem Erwartungswert $\ln n$ und der Standardabweichung $\sqrt{\ln n}$. (Denn es ist bekannt, dass $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln n$ und dass $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert.)

Für den Fall, dass der Versuchsperson ein Ja-Nein-Feedback geliefert wird, beschreiben die folgenden beiden Sätze die optimale und die schlechteste Strategie:

SATZ 2.1.1. *Für ein Kartendeck mit n von 1 bis n durchnummerten Karten besteht beim Ja-Nein-Feedback die optimale Ratestrategie (also die Ratestrategie, die die erwartete Trefferanzahl maximiert) darin, solange Typ 1 zu raten, bis man die Karte richtig geraten hat, dann Typ 2, bis man die Karte richtig geraten hat oder das Ende des Kartendecks erreicht ist, und so weiter. Wenn G die Anzahl der Treffer unter dieser Strategie bestimmt, so gilt:*

$$\mathbb{P}(G \geq k) = \frac{1}{k!} \quad \text{für } k = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$\mathbb{E}[G] = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = e - 1 + O\left(\frac{1}{n!}\right) \quad (2.2)$$

SATZ 2.1.2. *Für ein Kartenspiel mit n von 1 bis n durchnummerten Karten besteht beim Ja-Nein-Feedback die schlechteste Ratestrategie (also die Ratestrategie, die die erwartete Trefferzahl minimiert) darin, Typ i im i -ten Versuch zu raten, bis man richtig rät oder das Ende des Kartendecks erreicht ist, und gegebenenfalls anschließend den korrekten Typ in den verbleibenden Versuchen zu wiederholen.*

Wenn g die Anzahl der Treffer unter dieser Strategie angibt, so nimmt g die Werte 0 und 1 an, und zwar mit folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(g = 0) = \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n!}\right) = 1 - \mathbb{P}(g = 1) \quad (2.3)$$

$$\mathbb{E}[g] = 1 - \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n!}\right) \quad (2.4)$$

Die Sätze 2.1.1 und 2.1.2 befassen sich mit dem einzigen Kartenspieltyp, für den eine einfache Beschreibung der optimalen bzw. der schlechtesten Strategie möglich ist.

2.1. Sequentielle Experimente mit Ja-Nein-Feedback

Wenn bei dem Kartenspiel keine Symbole mehrfach vorkommen, ist sowohl die optimale als auch die schlechteste Strategie die «greedy»-Strategie, die bei jeder Karte den wahrscheinlichsten bzw. den am wenigsten wahrscheinlichen Typ rät.

Wenn wir nun den Fall betrachten, dass Symbole mehrfach auftreten dürfen, wird es komplizierter. Wir wissen nicht, ob die «greedy»-Strategie optimal ist für ein Kartendeck mit $2n$ Karten, wenn der Kompositionsvektor $\vec{2} = (2, \dots, 2)$ ist. Wir werden aber sehen, dass die «greedy»-Strategie nicht optimal ist für ein Kartenspiel mit dem Kompositionsvektor $\vec{c} = (3, 3, 3)$.

Zunächst müssen wir noch einige Notationen einführen: Sei $\vec{p} = (p_1, \dots, p_r)$ ein Vektor mit $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren:

Definition 2.1.3. $N(\vec{c}; \vec{p})$ bezeichne die Anzahl der Permutationen von genau $(c_1 + \dots + c_r)$ Symbolen, so dass Symbol 1 nicht bei den ersten p_1 Positionen vorkommt, Symbol 2 nicht bei den folgenden p_2 Positionen $p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2$, usw.

Erläuterungen:

$N(c_1, \dots, c_r; p_1, \dots, p_r)$ ist definiert als die Anzahl der Anordnungen eines Kartenspiels mit $c_1 + \dots + c_r = n$ Karten (wobei c_i Karten vom Typ i sind für $i = 1, \dots, r$), so dass das erste Symbol nicht in den ersten p_1 Positionen auftritt, das zweite nicht in den folgenden p_2 Positionen $p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2$, usw. Dabei kürzen wir die Vektoren (c_1, \dots, c_r) und (p_1, \dots, p_r) mit \vec{c} und \vec{p} ab.

$N(\vec{c}; \vec{p})$ ist also die Anzahl der Permutationen eines Kartenspiels, bei denen es für die Versuchsperson möglich ist, zunächst p_1 -mal Typ 1 zu raten und dabei keinen Treffer zu erzielen, dann p_2 -mal Typ 2 ohne dabei auch nur einmal erfolgreich zu sein, usw.

Wenn $p_1 + \dots + p_r = n$, ist $\frac{N(\vec{c}; \vec{p})}{n!}$ die Wahrscheinlichkeit für keine Übereinstimmung in folgendem Kartenexperiment: Für alle $i = 1, \dots, r$ beinhaltet Deck 1 c_i Karten vom Typ i , und Deck 2 beinhaltet p_i Karten vom Typ i . Beide Decks werden gemischt und die Karten gleichzeitig in Paaren aufgedeckt.

Die Zahlen $N(\vec{c}; \vec{p})$ werden uns die Bestimmung des wahrscheinlichsten Typs bei den einzelnen Karten eines Ja-Nein-Feedback-Experiments ermöglichen. Zuvor werden wir aber noch einige Interpretationen, Eigenschaften und Resultate zusammenstellen, um uns wichtiges Rüstzeug für den Beweis von Satz 2.1.1 bereitzustellen.

Interpretationen von $N(\vec{c}; \vec{p})$:

- Es sei $M(\vec{a}; \vec{b})$ die Matrix aus der Abbildung 2.1. $M(\vec{a}; \vec{b})$ hat also disjunkte Blöcke von Nullen der Größe $a_i \cdot b_i$, und ansonsten sind alle anderen Komponenten

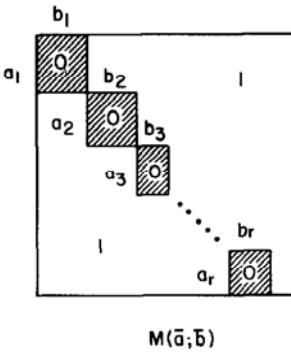


Abbildung 2.1.: Matrix $M(\vec{a}; \vec{b})$

1. Wir identifizieren die ersten a_1 Zeilen von $M(\vec{a}; \vec{b})$ mit den a_1 Karten vom Typ 1, die nächsten a_2 Reihen mit den a_2 Karten vom Typ 2, usw. Wir identifizieren die Spalten von $M(\vec{a}; \vec{b})$ mit den n geratenen Karten. Dann entspricht jede Anordnung des Kartenspiels einer Permutationsauswahl von $M(\vec{a}; \vec{b}) = (m_{ij})$, d. h. einer Auswahl von n Einträgen, so dass keine zwei in derselben Zeile oder Spalte sind: Wenn die Karte s des Kartendecks sich an der Position t unserer Anordnung befindet, so gehört der Eintrag m_{st} zu unserer Permutationsauswahl. Damit nun unter den ersten b_1 Karten unseres Kartendecks keine vom Typ 1 sind, unter den nächsten b_2 Karten keine vom Typ 2, usw., ist es notwendig und hinreichend, dass sich unter der korrespondierenden Permutationsauswahl keine 0 befindet. Für eine solche Permutationsauswahl $m_{i,\pi(i)}$, $1 \leq i \leq n$, von $M(\vec{a}; \vec{b})$ gilt also: $\prod_{i=1}^n m_{i,\pi(i)} = 1 \neq 0$.

Die Anzahl der konsistenten Anordnungen ergibt sich also zu:

$$\sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^n m_{i,\pi(i)} \quad (2.5)$$

Der Ausdruck in (2.5) ist exakt die Definition der Permanente von $M(\vec{a}; \vec{b})$. Wir haben also:

Feststellung 2.1.4. $N(\vec{c}; \vec{p}) = \text{Per } M(\vec{c}; \vec{p})$

Wir bemerken, dass wir dies auch als Definition von $N(\vec{c}; \vec{p})$ nehmen könnten.

b) Es sei für $m \leq n$ S_1, \dots, S_m eine Familie \mathcal{S} von Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Ein SDR (System of distinct representatives) von \mathcal{S} ist eine injektive Abbildung $\lambda : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, so dass $\lambda(i) \in S_i$ für $i = 1, \dots, m$.

Für $m = n$ definieren wir:

$$S_i := \{p_1 + 1, \dots, p_1 + \dots + p_r\} \text{ für } i \leq c_1.$$

$$S_i := \{1, 2, \dots, p_1 + \dots + p_k\} \cup \{p_1 + \dots + p_k + p_{k+1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_r\}$$

für $c_1 + \dots + c_k + 1 \leq i \leq c_1 + \dots + c_k + c_{k+1}$.

Dies definiert eine Familie $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\vec{c}; \vec{p})$ von n Mengen S_i mit folgender Eigenschaft: jedes SDR von \mathcal{S} korrespondiert zu einer eindeutig bestimmten Permutationsauswahl von $M(\vec{c}; \vec{p})$. Wir haben:

Feststellung 2.1.5. $N(\vec{c}; \vec{p})$ ist die Anzahl der SDR zur Familie $\mathcal{S}(\vec{c}; \vec{p})$.

2.1. Sequentielle Experimente mit Ja-Nein-Feedback

Elementare Eigenschaften von $N(\vec{c}; \vec{p})$:

Für $p_1 = \dots = p_r = 0$ ist $M(\vec{c}; \vec{0})$ die Matrix, deren sämtliche Komponenten 1 sind. Nach Feststellung 2.1.4 bekommen wir dann: $N(\vec{c}; \vec{0}) = n!$.

Allgemein gilt natürlich: $N(\vec{c}; \vec{p}) \leq n!$.

Wenn für ein i $c_i + p_i > n$ gilt, folgt natürlich: $N(\vec{c}; \vec{p}) = 0$. Wir stellen fest, dass es nur $n - c_i$ Karten gibt, die nicht vom Typ i sind. Wenn also in $p_i > n - c_i$ Versuchen Typ i gewählt wird, müssen mindestens $p_i - (n - c_i) > 0$ Treffer dabei sein. Insbesondere können nicht alle Symbole falsch gewählt sein, so dass es keine konsistenten Anordnungen des Kartenspiels gibt.

Das nächste Resultat zeigt, dass auch die Rückrichtung gilt:

SATZ 2.1.6. $N(\vec{c}; \vec{p}) = 0 \Leftrightarrow$ Es gibt ein i , $1 \leq i \leq r$: $c_i + p_i > n$.

BEWEIS: Wir haben schon « \Leftarrow » gesehen.

« \Rightarrow » Gelte $c_i + p_i \leq n$ für alle i , $1 \leq i \leq r$. Wir zeigen $N(\vec{c}; \vec{p}) > 0$ mittels der SDR-Interpretation. Mit Feststellung 2.1.5 genügt es, ein SDR von $\mathcal{S}(\vec{c}; \vec{p})$ anzugeben, was äquivalent dazu ist zu zeigen, dass für k beliebige, verschiedene Mengen S_{i_1}, \dots, S_{i_k} von $\mathcal{S}(\vec{c}; \vec{p})$ gilt: $|\cup_{j=1}^k S_{i_j}| \geq k$. Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) Falls nicht alle S_{i_j} gleich sind, sagen wir o. E. $S_{i_1} \neq S_{i_2}$, folgt aus der Definition der S_i : $S_{i_1} \cup S_{i_2} = \{1, \dots, n\}$ und $|\cup_{j=1}^k S_{i_j}| = n \geq k$, wie verlangt.

b) Falls alle S_{i_j} gleich sind, gelte ohne Einschränkung:

$$S = \{1, \dots, n\} \setminus \{p_1 + \dots + p_m + 1, \dots, p_1 + \dots + p_m + p_{m+1}\}.$$

Es gilt: $|S| = n - p_{m+1}$ und $k \leq c_{m+1}$.

Nach Voraussetzung bekommen wir: $|\cup_{j=1}^k S_{i_j}| = n - p_{m+1} \geq c_{m+1} \geq k$

□

Die rekursive Beziehung:

Für ein beliebiges, aber festes $k \in \{1, \dots, r\}$ sei $\vec{\delta}_k$ der Vektor, der eine 1 an der k -ten Position und sonst überall eine 0 hat. Gehen wir davon aus, dass unsere Versuchsperson während des bisherigen Experiments immer falsch geraten hat, was wir durch $\vec{p} = (p_1, \dots, p_r)$ zum Ausdruck bringen. Für die nächste Karte gibt es dann zwei Möglichkeiten:

(a) Sie ist nicht vom Typ k . Wenn die Versuchsperson also als nächstes Typ k raten würde, würde sie falsch liegen. Die Anzahl der Anordnungen, für die dies eintreten kann, ist $N(\vec{c}; \vec{p} + \vec{\delta}_k)$.

(b) Sie ist vom Typ k . In diesem Fall, da es gegenwärtig c_k Karten vom Typ k im Deck gibt, ist die Anzahl der Anordnungen, für die dies eintreten kann, $c_k \cdot N(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{p})$. Aus (a) und (b) ergibt sich für $N(\vec{c}; \vec{p})$:

$$N(\vec{c}; \vec{p}) = N(\vec{c}; \vec{p} + \vec{\delta}_k) + c_k \cdot N(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{p}) \quad \text{für } k \in \{1, \dots, r\}, \quad (2.6)$$

wenn $p_1 + \dots + p_r < n$

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback

Die Rekursion kann gelöst werden, der geschlossene Ausdruck für N ist dann:

$$N(\vec{c}; \vec{p}) = \sum_{\vec{0} \leq \vec{i} \leq \vec{c}} (-1)^{i_1 + \dots + i_r} \binom{p_1}{i_1} \dots \binom{p_r}{i_r} \frac{((c_1 - i_1) + \dots + (c_r - i_r))!}{(c_1 - i_1)! \dots (c_r - i_r)!} \prod_{i=1}^r c_i! \quad (2.7)$$

Der Beweis von (2.7) wird innerhalb des Beweises von Satz 2.1.1 erfolgen. Für die tatsächliche Bestimmung von Werten ist aber (2.6) effizienter. Einige kleine Werte listen wir im Anhang C auf, allgemein ergibt sich, wenn wir zu unseren Kartenexperimenten zurückkommen, aus der Rekursion folgender

Algorithmus zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten beim Ja-Nein-Feedback:

Wir betrachten ein Experiment, das mit dem Kompositionsvektor \vec{c}_0 beginnt. Nach der j -ten Karte haben wir $Y_j(i)$ Ja-Antworten für Typ i und $p_j(i)$ Nein-Antworten für Typ i , $1 \leq i \leq r$. Das Kartendeck hat nun den Kompositionsvektor $\vec{c} = \vec{c}_0 - \vec{Y}_j$. Wir nennen \vec{c} den reduzierten Kompositionsvektor. Wenn wir $\vec{\delta}_i$ schreiben für den Vektor, der an der i -ten Position eine 1 hat und sonst überall eine 0, ergeben sich die bedingten Wahrscheinlichkeiten für eine richtig bzw. eine falsch geratene Karte für Typ i im $(j+1)$ -ten Versuch gegeben \vec{Y}_j und \vec{p}_j zu:

$$\mathbb{P}(\text{Ja zu Typ } i | \vec{Y}_j, \vec{p}_j) = \frac{c_i N(\vec{c} - \vec{\delta}_i; \vec{p}_j)}{N(\vec{c}; \vec{p}_j)} \quad (2.8)$$

$$\mathbb{P}(\text{Nein zu Typ } i | \vec{Y}_j, \vec{p}_j) = \frac{N(\vec{c}; \vec{p}_j + \vec{\delta}_i)}{N(\vec{c}; \vec{p}_j)} \quad (2.9)$$

für $1 \leq i \leq r$.

Sei nun $\mathbb{E}(\vec{c}; \vec{p})$ die erwartete Trefferzahl unter der optimalen Strategie. $\mathbb{E}(\vec{c}; \vec{p})$ ist wohldefiniert, denn es gibt nur endlich viele Strategien, und eine oder mehrere von diesen maximieren die erwartete Trefferanzahl. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\vec{c}; \vec{p}) N(\vec{c}; \vec{p}) &= \max_{1 \leq k \leq r} \{ \mathbb{E}(\vec{c}; \vec{p} + \vec{\delta}_k) N(\vec{c}; \vec{p} + \vec{\delta}_k) + \\ &\quad \mathbb{E}(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{p}) c_k N(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{p}) + c_k N(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{p}) \} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Obwohl N durch (2.7) bekannt ist, können wir keinen geschlossenen Ausdruck für $\mathbb{E}(\vec{c}; \vec{0})$ angeben. Wir können (2.10) aber numerisch lösen. Zum Beispiel leitete Mary Ann Gatto ( [Gat78]) Werte für die Kompositionsvektoren bis

2.1. Sequentielle Experimente mit Ja-Nein-Feedback

$(5, 5, 5, 5, 5)$ her. Einige ihrer Resultate sind:

$$\mathbb{E}((3, 3, 3); \vec{0}) = 4,26, \quad \mathbb{E}((4, 4, 4, 4); \vec{0}) = 5,47, \quad \mathbb{E}((5, 5, 5, 5, 5); \vec{0}) = 6,63.$$

Die Bestimmung dieser Resultate ist schwierig. Diaconis und Graham mussten Anfang der 1980er Jahre einen Computer mehrere Stunden rechnen lassen und dabei die beiden Rekursionen (2.6) und (2.10) benutzen.

Um zur optimalen Strategie zu gelangen, müssen wir bei jeder Karte dasjenige k finden, das die rechte Seite von (2.10) maximiert. (2.8) impliziert, dass die greedy-Strategie bei jeder Karte den Typ k wählt, der $c_k N(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{p})$ maximiert. Wir geben nun ein Beispiel, das uns zeigt, dass die «greedy»-Strategie nicht immer optimal ist.

Beispiel 2.1.7. Betrachten wir ein Kartendeck mit neun Karten, bei dem drei Symbole jeweils dreimal auftreten. Die Situation, die durch $((2,3,1);(0,0,3))$ zusammengefasst wird, kann unter der optimalen Strategie mit Startposition $((3,3,3); (0,0,0))$ wie folgt auftreten: Zuerst wird Typ 1 geraten, und das stimmt. Bei den folgenden drei Karten wird jeweils Typ 3 getippt, aber der Tipp ist immer falsch. Der nächste Versuch mit Typ 3 bei der fünften Karte ist erfolgreich. Wir haben jetzt die Situation $((2,3,2);(0,0,3))$ mit Typ 3 als nächster geratener Karte unter der optimalen Strategie. Wenn dies ein Treffer wird, haben wir die Situation $((2,3,1);(0,0,3))$. Bei der siebten Karte haben wir nun unser Gegenbeispiel gefunden: Die optimale Strategie würde nun Typ 3 raten. Die Wahrscheinlichkeit für Typ 3 bei noch genau einer verbliebenen Karte diesen Typs unter den letzten drei Karten ist aber $\mathbb{P}(\text{Ja zu Typ } 3 \mid \vec{Y}_6, \vec{p}_6) = \frac{1}{3}$, während sich die Wahrscheinlichkeit für Typ 2 zu $\mathbb{P}(\text{Ja zu Typ } 2 \mid \vec{Y}_6, \vec{p}_6) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} \cdot 0 + \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{30} = 0,4$ ergibt.

In diesem Beispiel ist also Typ 3 der optimale Tipp bei der siebten Karte, während die greedy-Strategie Typ 2 wählen würde.

Obwohl die greedy-Strategie nicht optimal ist, zeigen Berechnungen ([FC80]), dass sie für $\vec{c} = (3, 3, 3)$ und $\vec{c} = (5, 5, 5, 5, 5)$ dicht an der optimalen Strategie liegt.

Die optimale Strategie scheint extrem komplex zu sein. Vermutlich gilt aber: Wenn in irgendeinem Experiment mit partiellem Feedback ein bestimmtes Symbol der optimale Tipp in Versuch i ist und mit Nein beantwortet wird, so ist dieses Symbol auch der optimale Tipp in Versuch $(i + 1)$.

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback

2.2. Beweise für das zweite Kapitel

BEWEIS von Satz 2.1.1: Wenn die in Satz 2.1.1 angegebene Strategie benutzt wird, sind die Permutationen mit k oder mehr Treffern die Elemente der Menge $A_k = \{\pi : \pi^{-1}(1) < \pi^{-1}(2) < \dots < \pi^{-1}(k)\}$. Daher bekommen wir:

$$\mathbb{P}(G \geq k) = \mathbb{P}(\pi \in A_k) = \frac{1}{k!}$$

Dies beweist (2.1) und impliziert (2.2):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G] &= \sum_{k=0}^n k \cdot \mathbb{P}(G = k) = \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(G = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n 1_{\{1,\dots,k\}}(i) \cdot \mathbb{P}(G = k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n 1_{\{1,\dots,k\}}(i) \cdot \mathbb{P}(G = k) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \mathbb{P}(G = k) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(G \geq i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}\end{aligned}$$

Es bleibt nachzuweisen, dass unsere Strategie optimal ist.

Dazu betrachten wir eine Strategie S als eine Folge von n Funktionen $S = (S_1, \dots, S_n)$ mit $S_i : \{0, 1\}^{i-1} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Die Interpretation ist, dass ein Punkt $\{0, 1\}^{i-1}$ eine Folge von $(i-1)$ Ja- oder Nein-Antworten repräsentiert. Daher stehe 0 für «Nein» und 1 für «Ja».

Der Erwartungswert einer Strategie ist: $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\delta_{\pi(i)S_i})$. Dabei gilt:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Wir sagen, eine Strategie S dominiere eine Strategie S' , falls $\mathbb{E}(S) \geq \mathbb{E}(S')$.

Wir nennen zwei Strategien S und S' äquivalent genau dann, wenn $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(S')$.

Wir wollen zunächst zeigen, dass die angegebene Strategie in jedem Schritt das wahrscheinlichste Symbol wählt. Da dies durch eine Monotonieeigenschaft der Funktion N impliziert wird, müssen wir kurz auf N zurückkommen. Wir wiederholen

Definition 2.2.1. $N(\vec{c}; \vec{p})$ bezeichne die Anzahl der Permutationen von genau $(c_1 + \dots + c_r)$ Symbolen, so dass Symbol 1 nicht bei den ersten p_1 Positionen vorkommt, Symbol 2 nicht bei den folgenden p_2 Positionen $p_1 + 1, \dots, p_1 + p_2$, usw.

2.2. Beweise für das zweite Kapitel

Mittels der Rekursion (2.6) wollen wir den expliziten Ausdruck (2.7) für $N(\vec{c}; \vec{p})$ herleiten.

Wir definieren zunächst:

$$Q(\vec{c}; \vec{p}) = \frac{N(\vec{c}; \vec{p})}{c_1! \cdots c_r!}$$

Für Q gilt also:

$$\begin{aligned} Q(\vec{c}; \vec{p} + \vec{\delta}_k) &= Q(\vec{c}; \vec{p}) - Q(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{p}), \quad 1 \leq k \leq r, \\ \text{und } Q(\vec{c}; \vec{0}) &= \frac{n!}{c_1! \cdots c_r!} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Mit (2.11) erhalten wir für alle $j \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

$$Q(\vec{c}; j\vec{\delta}_k) = Q(\vec{c}; \vec{0}) - \sum_{i=0}^{j-1} Q(\vec{c} - \vec{\delta}_k; i\vec{\delta}_k), \quad 1 \leq k \leq r \tag{2.12}$$

BEWEIS:

Induktionsanfang: $j = 1$:

$$Q(\vec{c}; \vec{\delta}_k) = Q(\vec{c}; \vec{0} + \vec{\delta}_k) \stackrel{\text{def}}{=} Q(\vec{c}; \vec{0}) - Q(\vec{c} - \vec{\delta}_k; \vec{0})$$

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gelte für ein festes, beliebiges $j \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Gilt die Aussage für ein $j \in \mathbb{N}$, so gilt sie auch für $j + 1$:

$$\begin{aligned} Q(\vec{c}; (j+1)\vec{\delta}_k) &= Q(\vec{c}; j\vec{\delta}_k + \vec{\delta}_k) \stackrel{\text{def}}{=} Q(\vec{c}; j\vec{\delta}_k) - Q(\vec{c} - \vec{\delta}_k; j\vec{\delta}_k) \stackrel{\text{IV}}{=} \\ Q(\vec{c}; \vec{0}) - \sum_{i=0}^{j-1} Q(\vec{c} - \vec{\delta}_k; i\vec{\delta}_k) &- Q(\vec{c} - \vec{\delta}_k; j\vec{\delta}_k) = Q(\vec{c}; \vec{0}) - \sum_{i=0}^j Q(\vec{c} - \vec{\delta}_k; i\vec{\delta}_k) \end{aligned}$$

Dies beweist den Induktionsschritt.

Zur Vereinfachung unserer Notation betrachten wir die Funktion $Y(a; b)$, $a, b \in \mathbb{N}_0$, für die gilt:

$$Y(a; b) = Y(a; 0) - \sum_{i=0}^{b-1} Y(a-1; i) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{N}_0 \tag{2.13}$$

$$\text{mit } Y(x, y) = 0 \text{ für } x < 0.$$

Elementare Überlegungen liefern für (2.13) die Lösung

$$Y(a; b) = \sum_{i=0}^a (-1)^i \binom{b}{i} Y(a-i; 0) \tag{2.14}$$

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback

Wenn wir jetzt (2.14) in (2.11) für $k = 1, \dots, r$ benutzen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} Q(\vec{c}; \vec{p}) &= \sum_{\vec{0} \leq \vec{i} \leq \vec{c}} (-1)^{|\vec{i}|} \binom{p_1}{i_1} \cdots \binom{p_r}{i_r} Q(\vec{c} - \vec{i}; \vec{0}) \\ &= \sum_{\vec{0} \leq \vec{i} \leq \vec{c}} (-1)^{|\vec{i}|} \binom{p_1}{i_1} \cdots \binom{p_r}{i_r} \cdot \frac{((c_1 - i_1) + \cdots + (c_r - i_r))!}{(c_1 - i_1)! \cdots (c_r - i_r)!}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei $\vec{x} \leq \vec{y}$ bedeutet, dass $x_k \leq y_k$ für alle k Komponenten und $|\vec{i}| = i_1 + \cdots + i_r$.

Durch Substitution bekommen wir für $N(\vec{c}; \vec{p})$:

SATZ 2.2.2. (Kaplansky)

$$N(\vec{c}; \vec{p}) = \sum_{\vec{0} \leq \vec{i} \leq \vec{c}} (-1)^{|\vec{i}|} (n - |\vec{i}|)! \prod_{k=1}^r \binom{c_k}{i_k} \binom{p_k}{i_k} \cdot i_k! \quad (2.16)$$

Aus dem Satz resultieren einige interessante Folgerungen:

- (a) Für $|\vec{p}| = n$ ist N symmetrisch in \vec{c} und \vec{p} : $N(\vec{c}; \vec{p}) = N(\vec{p}; \vec{c})$.
- (b) $N(\vec{c}; \vec{p})$ ist sowohl durch $c_1!, \dots, c_r!$, als auch durch $p_1!, \dots, p_r!$ teilbar.
- (c) Für $\vec{c} = \vec{1}$, also für $r = n$, impliziert (2.16):

$$\begin{aligned} N(\vec{1}; \vec{p}) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k S_k(\vec{p}) (n - k)!, \\ \text{mit } S_0 &\equiv 1, \quad S_1(\vec{p}) = \sum_{i=1}^n p_i, \quad S_2(\vec{p}) = \sum_{i < j} p_i p_j, \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Für den Spezialfall $\vec{p} = \vec{1}$ reduziert sich (2.17) zu dem wohlbekannten Ausdruck:

$$N(\vec{1}; \vec{1}) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Dies liefert die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von n Elementen.

Erinnern wir uns kurz daran, dass wir beweisen wollen, dass die angegebene Strategie optimal ist. Im ersten Beweisschritt wollen wir nachweisen, dass unsere Strategie in jedem Schritt das wahrscheinlichste Symbol wählt. Dies wird durch die folgende Monotonieeigenschaft der Funktion N impliziert:

SATZ 2.2.3.

$$p_i \geq p_j \Leftrightarrow N(\vec{1}; \vec{p} + \vec{\delta}_i) \leq N(\vec{1}; \vec{p} + \vec{\delta}_j) \quad (2.18)$$

In (2.18) gelten strikte Ungleichungen, wenn $n \geq 4$ und $\vec{p} + \vec{\delta}_j = \vec{1}$ ist. Ebenfalls gelten strikte Ungleichungen, wenn $n \geq 4$ und bei $\vec{p} + \vec{\delta}_i$ alle Komponenten 0 sind bis auf eine. Es ist aber z. B. $N((1, 1, 1); (0, 1, 2)) = N((1, 1, 1); (1, 1, 1)) = 2$, $N(\vec{1}; (0, 0, 0, 2, 3)) = N(\vec{1}; (0, 0, 1, 1, 3)) = 36$.

BEWEIS:

Sei $p_1 \geq p_2 + 2$ und sei

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= (p'_1, \dots, p'_n) = (p_1 - 1, p_2 + 1, p_3, \dots, p_n), \\ \vec{p}^* &= (p_3, \dots, p_n)\end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit (2.17) und $p'_1 + p'_2 = p_1 + p_2$:

$$\begin{aligned}N(\vec{1}; \vec{p}') - N(\vec{1}; \vec{p}) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (\mathcal{S}_k(\vec{p}') - \mathcal{S}_k(\vec{p}))(n-k)! \\ &= \sum_{k=2}^n (-1)^k (\mathcal{S}_k(\vec{p}') - \mathcal{S}_k(\vec{p}))(n-k)! \\ &= (p'_1 p'_2 - p_1 p_2) \sum_{k=2}^n (-1)^k \mathcal{S}_{k-2}(\vec{p}^*)(n-k)! \\ &= (p'_1 p'_2 - p_1 p_2) N(\vec{1}; \vec{p}^*) \geq 0,\end{aligned} \quad (2.19)$$

weil für festes $x+y$ das Produkt $x \cdot y$ wächst, wenn x und y näher zusammenrücken.

Für $n \geq 4$ und $\vec{p}' = \vec{1}$ sind die Ungleichungen strikt.

Für $n \geq 4$ und $\vec{p}^* = \vec{0}$ sind die Ungleichungen strikt.

Damit ist der Hilfssatz Satz 2.2.3 bewiesen.

(2.18) beweist direkt die intuitiv einleuchtende Tatsache, dass die in Satz 2.1.1 angegebene Strategie in jedem Versuch das wahrscheinlichste Symbol wählt, ferner resultiert auch folgende kombinatorische Tatsache, die auf Efron zurückgeht, daraus:

SATZ 2.2.4. (Lemma von Efron) *Zwei Kartenspiele zu jeweils n Karten seien vorbereitet. Das erste Deck trage die Nummern $1, \dots, n$, das zweite Deck trage die Nummern a_1, \dots, a_n mit $a_i \in \{1, \dots, n\}$ für alle $1 \leq i \leq n$. Die beiden Kartenspiele werden gemischt und in Paaren gleichzeitig jeweils eine Karte von jedem Kartenspiel aufgedeckt. Die Wahrscheinlichkeit, keine Übereinstimmung zu*

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback

erzielen, ist am größten, wenn (für $n \geq 4$: genau dann, wenn) unter den a_i keine Symbole mehrfach vorkommen, d. h. wenn $\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$.

Wir wollen nun zeigen, dass jede Strategie, die die erwartete Trefferanzahl maximiert, in jedem Schritt das wahrscheinlichste Symbol wählt. Dass so eine maximierende Strategie existieren muss, folgt aus der Tatsache, dass es nur endlich viele Strategien gibt.

Wir wollen unsere Aufmerksamkeit allein auf Strategien richten, die keine Symbole auswählen, von denen bekannt ist, dass sie nicht mehr im Deck vertreten sind, da solche Strategien leicht verbessert werden können, indem man sie dahingehend modifiziert, dass nur noch Symbole geraten werden, die noch nicht definitiv eliminiert sind.

Mit Rückwärtsinduktion begründen wir, dass jede Strategie, die nicht in jedem Versuch das wahrscheinlichste Symbol wählt, echt verbessert werden kann, wenn sie so modifiziert wird, dass sie in jedem Versuch das wahrscheinlichste Symbol wählt:

Induktionsanfang: Bei der letzten Karte ist das klar. Wenn man eine Strategie S , die im letzten Versuch nicht das wahrscheinlichste Symbol wählt, so zu einer Strategie S' modifiziert, dass S' im n -ten Versuch das wahrscheinlichste Symbol wählt, so ist $\mathbb{E}(S') > \mathbb{E}(S)$.

Induktionsvoraussetzung: Die Strategie S wähle immer das wahrscheinlichste Symbol in den Versuchen $n - k, n - k + 1, \dots, n$, für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt: $k \rightarrow (k+1)$: Sei $h \in \{0, 1\}^{n-k-2}$ unsere Vorgeschichte, so dass $S_{n-k-1}(h) = a$; es sei jedoch $b \neq a$ das wahrscheinlichste Symbol im $(n - k - 1)$ -ten Versuch, so dass b echt wahrscheinlicher ist als a . Aus (2.10) folgt $p_b > p_a$, d.h. $p_b \geq p_a + 1$. Egal ob $S_{n-k-1}(h) = a$ eine Ja- oder eine Nein-Antwort liefert, ist kein Symbol wahrscheinlicher als b vor dem $(n - k)$ -ten Versuch. Nach Induktionsvoraussetzung können wir also annehmen, dass $S(h, 0) = S(h, 1) = b$ (d.h. wir können S so in Richtung dieser Eigenschaft modifizieren, dass $\mathbb{E}(S)$ dabei nicht kleiner wird). Betrachten wir den «Strategiebaum» zu S in Abb. 2.2: Wir leiten die Strategie S' aus S ab, indem wir definieren $S'_{n-k-1}(h) = b, S'_{n-k}(h, 0) = S'_{n-k}(h, 1) = a$ und die beiden Teilbäume T_{01} und T_{10} von S , die auf $(h, 0, 1)$ und auf $(h, 1, 0)$ folgen, vertauschen.

Wir behaupten, dass zu jeder Permutation π des Kartendecks eine eindeutig bestimmte Permutation π' des Kartendecks existiert, so dass die Trefferzahl von S unter π gleich der Trefferzahl von S' unter π' ist. Diese Permutation bekommen wir, indem wir die Koordinaten $(n - (k + 1))$ und $(n - k)$ vertauschen, d. h. es gilt:

$$\pi'(i) = \begin{cases} \pi(n - k) & \text{für } i = n - (k + 1) \\ \pi(n - (k + 1)) & \text{für } i = n - k \\ \pi(i) & \text{sonst} \end{cases}$$

2.2. Beweise für das zweite Kapitel

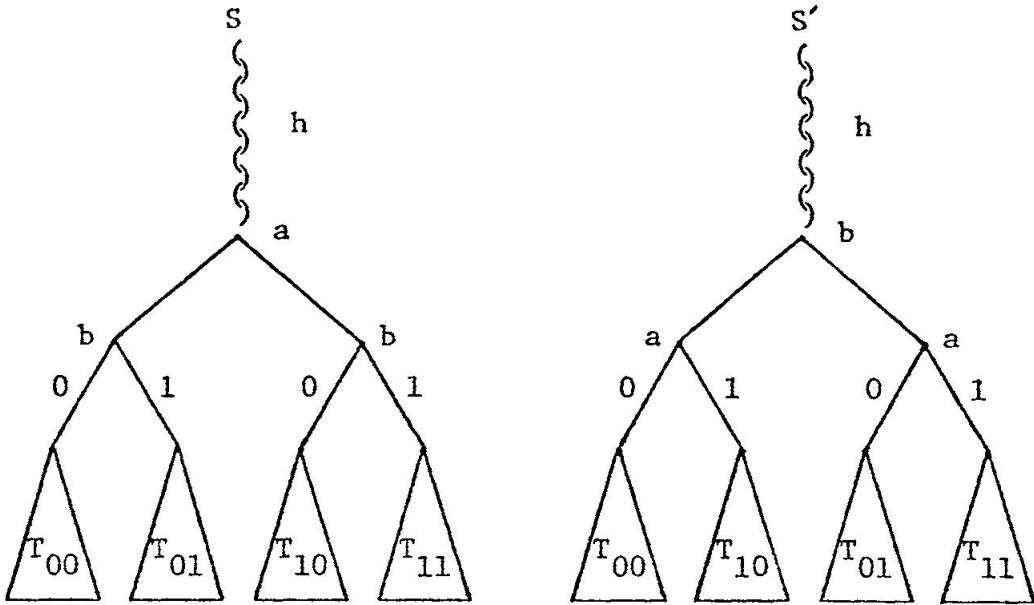


Abbildung 2.2.: Strategiebaum

Es ist nun einfach, für die vier Fälle $\pi(n - (k + 1)) \begin{cases} = a \\ \neq a \end{cases}, \pi(n - k) \begin{cases} = b \\ \neq b \end{cases}$ zu sehen, dass S' die geforderte Eigenschaft für π' hat. Erfüllt z. B. eine Permutation π die Vorgeschichte h unter S , so dass auch noch $\pi(n - (k + 1)) = a, \pi(n - k) \neq b$ gilt, so erfüllt π den Verlauf $(h, 1, 0)$, sammelt also einen weiteren Treffer, und endet in T_{10} . π' erfüllt dann ebenfalls die Vorgeschichte h unter S' , $S'_{n-k-1}(h) = b$ liefert ein Nein, $S'_{n-k}(h, 0) = a$ liefert ein Ja, so dass auch π' einen weiteren Treffer sammelt, um danach in T_{10} zu enden. Daher gilt: $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(S')$.

Wenn wir aber unter Berücksichtigung der Induktionsannahme eine Strategie S'' aus S' ableiten, so dass wir $S'_{n-k}(h, 0) = a$ durch $S''_{n-k}(h, 0) = b$ ersetzen, gilt $\mathbb{E}(S'') > \mathbb{E}(S')$, denn b ist wahrscheinlicher als a . Die optimale Strategie muss also im $(n - (k + 1))$ -ten Versuch das wahrscheinlichste Symbol wählen.

Wir haben also im ersten Beweisschritt durch die Monotonieeigenschaft der Zahlen $N(\vec{c}; \vec{p})$ gesehen, dass unsere Strategie immer das wahrscheinlichste Symbol wählt, und damit dann im zweiten induktiv bewiesen, dass sie optimal ist.

□

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback

BEWEIS von Satz 2.1.2: Unter der angegebenen Strategie ist die Trefferzahl g entweder 0 oder 1. Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Permutationen von S_n mindestens eine identische Koordinate haben. Wie können wir diese Wahrscheinlichkeit bestimmen?

Es seien auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum N Ereignisse A_1, \dots, A_N gegeben. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines dieser Ereignisse eintritt, also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Wenn wir mit p_i die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_i ($1 \leq i \leq N$) bezeichnen, mit p_{ij} die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_i \cap A_j$ ($1 \leq i, j \leq N$), mit p_{ijk} die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_i \cap A_j \cap A_k$ ($1 \leq i, j, k \leq N$), usw., und wenn wir ferner setzen: $S_1 = \sum_{i=1}^N p_i$, $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq N} p_{ij}$, $S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} p_{ijk}$, usw. (so dass $S_r \binom{N}{r}$ Terme zusammenfasst), so behaupten wir:

SATZ 2.2.5. *Die Wahrscheinlichkeit \mathbb{P}_1 , dass mindestens eines der Ereignisse A_1, \dots, A_N eintritt, ist gegeben durch:*

$$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots \pm S_N \quad (2.20)$$

BEWEIS: Der Beweis erfolgt in der Stochastik mit dem Einschluss- und Ausschlussprinzip. Um \mathbb{P}_1 zu bestimmen, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen Punkte aufsummieren, die Element von mindestens einer der Mengen A_i ($1 \leq i \leq N$) sind. Um systematisch vorzugehen, betrachten wir zunächst alle Punkte, die in genau einer Menge A_i auftreten, dann die Punkte, die in genau zwei Mengen A_i auftreten, usw. Sei nun E ein zufälliger Punkt, Element von genau n , $1 \leq n \leq N$, der N Ereignissen A_i . Ohne Einschränkung sei E Element von A_1, \dots, A_n , und nicht enthalten in A_{n+1}, \dots, A_N . Dann ergibt sich $\mathbb{P}(E)$ aus allen Werten $p_i, p_{ij}, p_{ijk}, \dots$, deren Indizes alle zwischen 1 und n liegen. Daher erscheint also $\mathbb{P}(E)$ n -mal in S_1 , $\binom{n}{2}$ -mal in S_2 , usw. Wenn damit die rechte Seite von (2.20) ausgedrückt wird in Termen von Wahrscheinlichkeiten einzelner Punkte, haben wir für $\mathbb{P}(E)$ den Vorfaktor

$$n - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots \pm \binom{n}{n} \quad (2.21)$$

Zum Beweis des Satzes müssen wir zeigen, dass dieser Vorfaktor immer 1 ist. Das folgt aber direkt, denn wenn wir (2.21) mit der Summe $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i$ für $(1-1)^n$ aus dem binomischen Lehrsatz vergleichen, beginnt diese Summe mit $\binom{n}{0} (-1)^0 = 1$, und die Terme aus (2.21) folgen mit umgekehrtem Vorzeichen. Daher ist für alle $n \geq 1$ der Ausdruck (2.21) gleich 1. Dies beweist diesen Hilfssatz.

2.2. Beweise für das zweite Kapitel

Wenn wir nun zu unserem Ausgangsproblem zurückkehren, betrachten wir o. E. den Fall, dass das erste Deck in seiner kanonischen Ordnung erscheint und bei dem zweiten Deck jede der $N!$ Permutationen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{N!}$ auftritt. Sei A_k das Ereignis, dass bei der Permutation des zweiten Decks Karte k an Position k auftritt, also eine Übereinstimmung mit Deck 1 vorliegt. Es ist $p_k = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$, denn die anderen $(N-1)$ Karten können beliebige Positionen annehmen.

Wenn wir so weitermachen, bekommen wir für $i, j, 1 \leq i, j \leq N$: $p_{ij} = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}$, usw. Die Summe S_r besteht aus $\binom{N}{r}$ Termen, und jeder ist gleich $\frac{(N-r)!}{N!}$.

Also ist $S_r = \frac{1}{r!}$, und mit (2.20) bekommen wir:

$$\mathbb{P}_1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots \pm \frac{1}{N!}$$

Nun repräsentiert aber $1 - \mathbb{P}_1$ gerade die ersten $(N+1)$ Terme in der Reihendarstellung von $\frac{1}{e}$. Wir bekommen also:

$$\mathbb{P}(g=1) = 1 - \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n!}\right)$$

Dies beweist (2.3) und (2.4).

Es bleibt zu zeigen, dass die Strategie in Satz 2.1.2 die erwartete Trefferanzahl minimiert.

Mit unseren Notationen vom Beweis von Satz 2.1.1 ist eine Strategie S eine Folge von Funktionen, $S = (S_1, \dots, S_n)$, $S_i : \{0, 1\}^{i-1} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Zunächst ist offensichtlich, dass der Erwartungswert jeder Strategie S dadurch verringert werden kann, indem man S so modifiziert, dass gilt:

$$S_{i+k}(\vec{0}_{i-2}, 1, \vec{0}_k) = S_{i-1}(0, \dots, 0) \quad \text{für alle } i = 2, 3, \dots, n, \quad k = 0, \dots, (n-i) \tag{2.22}$$

S erreicht dann niemals mehr als einen Treffer.

Wenn wir unsere Aufmerksamkeit jetzt auf Strategien richten, die (2.22) erfüllen, stellen wir fest, dass eine solche Strategie S durch die n Zahlen $S_1, S_2(\vec{0}), \dots, S_n(\vec{0})$ festgelegt ist. Der Erwartungswert von S ist dann die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Übereinstimmung einer Permutation $\pi \in S_n$ mit den n Symbolen $S_1, S_2(\vec{0}), \dots, S_n(\vec{0})$. Nach dem Lemma von Efron ist diese Wahrscheinlichkeit am kleinsten, wenn gilt: $\{S_1, S_2(\vec{0}), \dots, S_n(\vec{0})\} = \{1, \dots, n\}$.

Dies beweist Satz 2.1.2. \square

2. Analyse sequentieller Experimente mit partiellem Feedback

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback für die Versuchsperson

3.1. Auswertung

Wie sollen wir unsere Feedback-Experimente auswerten?

Die Auswertung von Feedback-Experimenten erscheint zunächst schwierig, weil man nicht vorhersagen kann, wie die Versuchsperson die Feedback-Information verwenden wird.

In diesem Kapitel führen wir als Antwort auf diese Frage eine Auswertungs methode ein, die wir «skill scoring» nennen.

Wir werden eine Statistik S definieren, die die Anzahl der Treffer mit einer Basisrate vergleicht, die von der bedingten erwarteten Trefferanzahl gegeben die Feedback-Information bestimmt wird. S ist ein Maß dafür, wieviel «Talent» die Versuchsperson hat, da der Wert von S angibt, um wie viele Treffer die Versuchsperson die erwartete Trefferzahl übertrifft bzw. unterbietet.

Glücklicherweise wird sich herausstellen, dass S unter gewissen Voraussetzungen und unter geeigneter Normierung *unabhängig von den Strategien der Versuchsperson* im Grenzwert standard-normalverteilt ist. Es ist also möglich, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, mit denen es sich bei den erzielten Treffern der Versuchsperson um Zufall oder «echtes Talent» handelt.

In dieser Diplomarbeit wurde ein Beispiel für skill scoring bereits in Tabelle 0.1 gegeben. Um die abstrakten Definitionen, die folgen werden, zu motivieren, blicken wir noch einmal auf dieses Beispiel zurück. Das betrachtete Problem war «Kartenraten mit zwei Typen» (wir nennen sie Typ 1 und Typ 2), wir hatten k Karten von jedem Typ (also $n = 2k$ Karten insgesamt) und vollständiges Feedback.

Wir können dieses Beispiel modellieren, indem wir als Grundlage den Wahr-

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback

scheinlichkeitsraum S_n betrachten, die Menge aller Permutationen der Menge $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$, und darauf die Gleichverteilung zugrundelegen. Eine Permutation π wird zufällig ausgewählt und der i -te Versuch als «Typ 1» deklariert, wenn $\pi(i)$ ungerade ist, und als «Typ 2», wenn $\pi(i)$ gerade ist. Im i -ten Versuch wird der Versuchsperson ein Feedback gegeben:

$$f_i = \begin{cases} 1 & i\text{-ter Versuch ist korrekt} \\ 2 & i\text{-ter Versuch ist nicht korrekt} \end{cases}$$

Diese bestimmte Feedback-Funktion hängt alleine von der i -ten Koordinate ab. Einige mögliche Variationen sind die folgenden:

- (a) Die Feedback-Funktion hängt von früheren Versuchsausgängen ab. Das kann z. B. so aussehen, dass (wenn wenige Treffer in den ersten Versuchen erzielt wurden) im weiteren Verlauf des Experiments ein größeres Feedback zur Verfügung gestellt wird.
- (b) In Experimenten mit mehr als zwei Symbolen wird zusätzlich zur Information, ob richtig oder falsch geraten wurde, Information darüber gegeben, ob ein inkorrektler Versuch «nahe» am korrekten Ergebnis liegt.
- (c) Nur bei bestimmten Versuchsausgängen wird ein Feedback gegeben. Zum Beispiel könnte das in unserem Beispiel so aussehen, dass die Versuchsperson nur dann ein Feedback bekommt, wenn sie «rot» rät.

Wir formulieren die allgemeine Situation mit Hilfe von S_n , der Menge der Permutationen von $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$. Um einen Kartenstapel zu modellieren, bei dem c_i Karten mit i nummeriert sind, benötigen wir eine Auswertungsfunktion. In unserem Beispiel könnten wir zum Beispiel betrachten:

$$\lambda_i(\pi(i)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi(i) \text{ ungerade ist} \\ 2 & \text{falls } \pi(i) \text{ gerade ist} \end{cases}$$

Definition 3.1.1. Eine *Auswertungsfunktion* $\bar{\lambda}$ ist eine Folge von Funktionen $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i(\pi) = \lambda_i(\pi(i))$ für $\pi \in S_n$.

Das Bild von λ_i ist $R_i = \{\lambda_i(\pi(i)) : \pi \in S_n\}$.

Eine *Auswertungsfunktion* ist vom Typ r , falls gilt: $\lambda_i(\pi) - 1 \equiv \pi(i) \bmod r$.

Sei \mathcal{G}_i die σ -Algebra auf S_n , die von $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ erzeugt wird.

Wir werden unsere Aufmerksamkeit auf Ratestrategien richten, die Werte in R_i annehmen. Für jede Ratefolge und jede Kartenfolge bis zum Zeitpunkt i müssen wir eine Feedback-Funktion f_i definieren. Beim vollständigen Feedback ist dann $f_i = \lambda_i(\pi)$. Beim partiellen Feedback ist $f_i = \delta_{\lambda_i(\pi) G_i}$ mit G_i als i -ter geratener Karte.

3.1. Auswertung

Definition 3.1.2. Eine *Feedback-Funktion* \bar{f} ist eine Folge von Funktionen $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ mit $f_i : R_1 \times R_2 \times \dots \times R_i \times S_n \rightarrow \Omega_n$. Für festes $\bar{r} = (r_1, \dots, r_i)$ sehen wir f_i als eine Funktion $f_i(r_1, \dots, r_i, \cdot)$ von S_n nach Ω_n an. Diese Funktion ist messbar, wenn wir S_n für ein festes \bar{r} mit der σ -Algebra \mathcal{G}_i aus Definition 3.1.1 versehen.

Wir definieren ferner die σ -Algebra $\mathcal{F}(\bar{r}) = \sigma(f_1(r_1; \cdot), f_2(r_1, r_2; \cdot), \dots, f_i(r_1, \dots, r_i; \cdot))$.

Auch diese einzigen verängstigenden Terminologien dieser Diplomarbeit haben eine verständliche Interpretation: Dass \bar{f} messbar ist bedeutet, dass f_i nur von den ersten i gewählten Symbolen und den Werten $\lambda_1(\pi), \dots, \lambda_i(\pi)$ abhängt.

Eine Funktion auf S_n ist $\mathcal{F}(r_1, \dots, r_i)$ -messbar, wenn sie nur von den ersten i Komponenten der Permutation durch die gegebene Feedback-Information abhängt, wenn r_1, \dots, r_i in den Versuchen $1, \dots, i$ gewählt werden.

Definition 3.1.3. Eine Feedback-Funktion heißt *adaptiert*, wenn $\delta_{r_i \lambda_i} \mathcal{F}(r_1, \dots, r_i)$ -messbar ist für alle i , $1 \leq i \leq n$.

Adaptiertheit bedeutet also, dass das Feedback die Information einschließt, ob im letzten Versuch richtig oder falsch geraten wurde.

Definition 3.1.4. Eine *Ratestrategie* \bar{g} ist eine Folge von Funktionen $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$, so dass g_1 eine Konstante ist und $g_i : R_1 \times \dots \times R_{i-1} \times S_n \rightarrow R_i$, so dass $g_i(r_1, \dots, r_{i-1}; \cdot) \mathcal{F}(r_1, \dots, r_{i-1})$ -messbar ist. Den Wert von g_i notieren wir mit G_i .

Definition 3.1.5. Das Paar $(\bar{\lambda}, \bar{f})$ nennen wir ein *Experiment*.

Definition 3.1.6. Wir definieren die *Skillscore-Statistik* für ein Experiment durch

$$S = \sum_{i=1}^n \{\delta_{G_i \lambda_i} - \mathbb{E}\{\delta_{G_i \lambda_i} | \mathcal{F}(G_1, \dots, G_{i-1})\}\} \quad (3.1)$$

S gibt wie oben bereits erwähnt an, wieviel «Talent» eine Versuchsperson hat bzw. nicht hat; S ist die Differenz der erzielten Treffer der Versuchsperson und der aufgrund der Feedback-Information erwarteten Trefferanzahl.

Unsere Hauptmotivation dafür, S zu betrachten, liegt darin, dass bei einer großen Vielzahl von Experimenten S so normiert werden kann, dass S im Grenzwert standard-normalverteilt ist. Wir präzisieren dies:

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback

SATZ 3.1.7. Bei einem wie in 3.1.5 definierten Experiment gilt unter einer beliebigen Ratestrategie \bar{g} für eine wie in (3.1) definierte Skillscore-Statistik S :

$$\mathbb{E}(S) = 0 \quad (3.2)$$

Wenn die Auswertungsfunktion vom Typ r ist wie in 3.1.1 definiert, und wenn die Feedback-Funktion adaptiert ist wie in 3.1.3 definiert, gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{P} \left(\frac{S}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})}} \leq x \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{t^2}{2}\right)} dt \quad (3.3)$$

Die Konvergenz in (3.3) ist gleichmäßig unter allen Ratestrategien \bar{g} .

Wir befassen uns nun mit einigen Motivationen für und einigen Eigenschaften von S :

(a) S wird «groß» sein, wenn mit den geratenen Symbolen deutlich mehr Treffer erzielt werden, als es die Trefferwahrscheinlichkeiten vorhergesagt hätten. Zur Bestimmung von S müssen immer nur die Werte G_1, \dots, G_n bekannt sein, niemals aber die gesamte Ratestrategie.

Betrachten wir noch einmal unser Beispiel aus der Einleitung: Kartenraten mit vollständigem Feedback bei einem Kartendeck mit k roten und k schwarzen Karten. Im ersten Kapitel haben wir in Satz 1.1.1 gesehen, dass eine Versuchsperson, die die optimale Ratestrategie benutzt, erwarten kann, ungefähr $k + \frac{1}{2}\sqrt{\pi k}$ Treffer zu erzielen. Die Statistik S kompensiert das, indem sie einen zufälligen Korrekturfaktor mit dem Erwartungswert $k + \frac{1}{2}\sqrt{\pi k}$ abzieht. Damit können wir erkennen, ob die Versuchsperson mehr Treffer erzielt, als man aufgrund ihrer Chancen bei der gewählten Strategie erwarten würde.

(b) Der bedingte Erwartungswert in (3.1) ist für ein komplexes \bar{f} schwer zu bestimmen. Beim partiellen Feedback werden wir nicht um (2.8) und (2.9) aus dem zweiten Kapitel herumkommen.

(c) Eine Einschränkung, die wir nicht umgehen können, ist die folgende: Wenn die Feedback-Information in einem Versuch den verbliebenen Kartenstapel festlegt, wird der weitere Verlauf der Versuchsreihe keinen Einfluss mehr auf S haben. Wir sehen das beispielsweise beim letzten Versuch in Tabelle 0.1, wo die Feedback-Information festlegt, dass die letzte verbliebene Karte schwarz ist. Genauso werden die Feedback-bedingten möglichen Korrekturen am Beginn des Kartenstapels weniger betont als am Ende.

(d) Wir werden im Beweis für Satz 3.1.7 sehen, dass die Terme in der Summe von S die Differenzen einer Martingalfolge mit passenden Varianzen sind. Der zentrale Grenzwertsatz für Martingale ist anwendbar.

Wir wollen nun die Behauptung von Satz 3.1.7 durch einige Beispiele illustrieren:

3.1. Auswertung

Beispiel 3.1.8. (Notwendigkeit von Adaptiertheitsannahmen) Die Adaptiertheitsannahme 3.1.3 bedeutet einfach, dass das Feedback die Information einschließt, ob im letzten Versuch richtig oder falsch geraten wurde. Um zu sehen, dass es ohne diese Annahme keine Hoffnung gibt, eine Aussage wie im Satz 3.1.7 zu erhalten, betrachten wir ein Experiment ohne Feedback-Information. Sei z. B. $f_i \equiv 1$. Um dies zu spezifizieren, stellen wir uns vor, wir haben von zwei Typen jeweils n Karten, und dass die Ratestrategie immer Typ 1 rät. Dann werden wir logischerweise immer genau n Treffer erzielen, und die bedingte Wahrscheinlichkeit, die in jedem Versuch abgezogen wird, wird immer gleich $\frac{1}{2}$ sein, so dass $S \equiv 0$. Dieses Beispiel zeigt uns ein fundamentales Problem bei der oft benutzten Normalapproximation in klassischen Experimenten beim Kartenraten ohne Feedback.

Wenn in Satz 3.1.7 eine Versuchsperson immer denselben Kartentyp rät, beruht also der Zufall, der im Grenzwert durch die Normalverteilung ausgedrückt wird, auf den Fluktuationen der bedingten Erwartungen in S .

Im nächsten Beispiel zeigen wir die Notwendigkeit der Annahme, dass das Kartendeck vom (festen) Typ r ist, indem wir in Abhängigkeit von der Ratestrategie einige nicht normalverteilte Grenzwerte für ein mit $1, \dots, n$ durchnummieretes Kartendeck zeigen:

Beispiel 3.1.9. (Kartenraten mit partiellem Feedback bei einem mit $1, \dots, n$ durchnummiererten Kartendeck) Bei diesem Problem, wie wir es schon im zweiten Kapitel betrachtet haben, ist unser Kartenspiel mit $1, \dots, n$ durchnummert. Die Versuchsperson rät nacheinander die einzelnen Kartenwerte, und ihr wird gesagt, ob sie damit richtig liegt oder nicht.

Um zu sehen, dass die Verteilung von S von der Ratestrategie abhängt, betrachten wir drei Fälle:

Fall 1: Schlechteste Ratestrategie.

Wenn unsere Ratestrategie die schlechteste Ratestrategie aus Satz 2.1.2 ist, können wir zeigen, dass die Grenzverteilung von S eine Betaverteilung auf dem Intervall $[\frac{1}{2}(1 + e^{-2}), 1]$ ist, mit Masse in $-\frac{1}{2}(1 - e^{-2})$. Präziser:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S \leq t) = G(t)$$

Dabei ist $G(t)$ definiert durch:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^2}) \\ \frac{1}{e} & \text{für } -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{e^2}) \leq t \leq \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{e^2}) \\ \sqrt{2}(t - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} & \text{für } \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{e^2}) \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{für } t > 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback

Fall 2: Konstante Ratestrategie.

Wir werden sehen, dass, wenn wir immer Typ 1 raten, die Verteilung von S gegen eine Exponentialverteilung auf dem Intervall $(-\infty, +1]$ konvergiert. Präziser:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(1 - S \leq x) = 1 - e^{-x} \quad \text{für } 0 \leq x < \infty \quad (3.5)$$

Fall 3: Beste Ratestrategie.

Im zweiten Kapitel haben wir in Satz 2.1.1 gesehen, dass die Strategie zur Maximierung der erwarteten Trefferzahl in jedem Versuch das wahrscheinlichste, noch verbliebene Symbol wählt.

Wenn wir diese Regel benutzen, sehen wir, dass die Statistik S im Grenzwert gegen eine abzählbare «Mischung» stetiger Verteilungen strebt. Präziser:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S \leq t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \cdot F_i(t) \quad (3.6)$$

Dabei setzen wir:

$$p_i = \left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!} \right), \quad F_i(t) = \begin{cases} (e^{(t-i)})^i & \text{falls } t < i \\ 1 & \text{falls } t \geq i \end{cases}$$

3.2. Beweise für das dritte Kapitel

BEWEIS von Satz 3.1.7: Betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum S_n mit der Gleichverteilung. Sei G_1, \dots, G_n unsere Ratefolge.

Sei $\mathcal{B}_0 = \{\{\}, S_n\}$, $\mathcal{B}_i = \mathcal{F}(G_1, \dots, G_{i+1})$ für $i = 1, \dots, (n-1)$, $\mathcal{B}_n = 2^{S_n}$.

Es gilt also: $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \dots \subset \mathcal{B}_n$. Sei nun

$$Z_i = \frac{1}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})}} \{ \delta_{G_i \lambda_i} - \mathbb{E}(\delta_{G_i \lambda_i} | \mathcal{B}_{i-1}) \}$$

$$X_i = \sum_{j=1}^i Z_j$$

Weil nach Voraussetzung \bar{f} adaptiert ist, ist (X_i) ein Martingal bezüglich (\mathcal{B}_i) mit $\mathbb{E}(X_i) = 0$.

Für den Beweis von (3.3) zeigen wir zunächst, dass (3.3) gilt, wenn $f_i = \lambda_i$ und \bar{G}_i das Ergebnis der besten Ratestrategie ist.

Ohne Einschränkung sei $n = r \cdot k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$. M_i sei das Minimum der Kartenanzahlen der einzelnen Typen, die vor dem Zeitpunkt i aufgetreten sind, also ist $M_1 \equiv 0$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer im i -ten Versuch ist dann $p_i = \frac{k-M_i}{(n-i+1)}$, also nimmt Z_i folgende Werte an:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})}} (1 - p_i) \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_i \\ & - \frac{1}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})}} p_i \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1 - p_i) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Bei Brown (☞ [Bro71]) und Scott (☞ [Sco73]) sowie später bei Hall (☞ [Hal77]) finden wir zahlreiche zentrale Grenzwertsätze für Martingale. Wir setzen diese hier als gegeben voraus, da ihre Beweise in der Regel sehr lang und technisch sind. Ein Satz von Scott für den Funktionenraum $C[0, 1]$ schließt folgenden Spezialfall ein:

SATZ 3.2.1. *Sei $\{S_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ ein Martingal auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit $S_0 \equiv 0$ f. s., $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \geq 1$, $\mathbb{E}(S_n^2) = s_n^2 < \infty$, und $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{A}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Unter der Voraussetzung*

$$s_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \rightarrow_p 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$$s_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k| \geq \varepsilon s_n\}} | \mathcal{F}_{k-1}) \rightarrow_p 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback

gilt:

$$s_n^{-1} S_n \rightarrow_d X \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei X standard-normalverteilt ist. Die Indizes p und d bedeuten Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bzw. in Verteilung.

Dieser Satz reduziert Scotts Aussage sehr, ist aber glücklicherweise stark genug für uns: Wegen (3.7) wird uns die in unserer Variante geforderte Lindeberg-Bedingung geschenkt, denn die Z_i konvergieren gegen 0. Aufgrund der anderen benötigten Voraussetzung müssen wir zeigen, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(Z_i) = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{r}(1 - \frac{1}{r})} \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i) \xrightarrow{p} 1 \quad (3.8)$$

Wir zeigen:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \xrightarrow{p} \frac{1}{r} \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^2 \xrightarrow{p} \frac{1}{r^2} \quad (3.10)$$

Für den Beweis von (3.9) schreiben wir:

$$p_i = \frac{k - \frac{i-1}{r} - \bar{M}_i}{n - i + 1} \quad \text{mit} \quad \bar{M}_i = M_i - \frac{i-1}{r}$$

Dann bekommen wir:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\frac{kr}{r} - \frac{i-1}{r} - \bar{M}_i}{(n - i + 1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{M}_i}{(n - i + 1)}$$

Die Ungleichung (1.35) impliziert jetzt, dass es eine positive Konstante c_r gibt, so dass gilt:

$$\mathbb{E}(|\bar{M}_i|) \leq c_r \cdot \sqrt{\frac{i(n-i)}{n}}.$$

Wenn wir dies und die Markov-Ungleichung verwenden, folgt für ein geeignetes, nur von r abhängiges \bar{c}_r für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{M}_i}{(n - i + 1)} > \varepsilon\right) \leq \frac{\bar{c}_r}{\varepsilon \sqrt{n}}$$

Damit ist (3.9) erfüllt, und der Beweis für (3.10) funktioniert analog.

Wir haben damit gezeigt, dass (3.3) gilt, wenn $f_i = \lambda_i$ und \bar{G}_i die beste Ratestrategie ist.

3.2. Beweise für das dritte Kapitel

Ein analoger Beweis zeigt die Behauptung, wenn $f_i = \lambda_i$ und \underline{G}_i die schlechteste Ratestrategie ist.

Wenn nun f_i eine beliebige messbare Feedback-Funktion ist und wenn G_i eine beliebige Ratestrategie ist, so sei $p_i = \mathbb{E}\{\delta_{G_i \lambda_i} | \mathcal{B}_{i-1}\}$. Erinnern wir uns an \mathcal{G}_i , definiert wie in Definition 3.1.1. Sei $\bar{p}_i = \mathbb{E}(\delta_{\overline{G}_i \lambda_i} | \mathcal{G}_{i-1})$, $\underline{p}_i = \mathbb{E}(\delta_{\underline{G}_i \lambda_i} | \mathcal{G}_{i-1})$.

Dann gilt: $\underline{p}_i \leq p_i \leq \bar{p}_i$; und weil (3.9) und (3.10) für \underline{p}_i und \bar{p}_i gelten, gelten sie auch für p_i .

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir haben also zunächst gezeigt, dass unsere Statistik S ein Martingal definiert. Anschließend haben wir nachgewiesen, dass dieses Martingal unter geeigneter Normierung und unter der Voraussetzung, dass unsere Ratestrategie entweder die optimale oder die schlechteste Ratestrategie ist und wir ein vollständiges Feedback liefern, gewisse Zusatzbedingungen erfüllt, die einem zentralen Grenzwertsatz genügen und die Behauptung des Satzes damit direkt implizieren. Die Verallgemeinerung auf beliebige Ratestrategien und beliebige Feedback-Funktionen erweist sich dann nicht mehr als schwierig.

□

BEWEIS für das Beispiel 3.1.9:

BEWEIS von (3.4): Bei der schlechtensten Ratestrategie nimmt S Werte an, die von T abhängen, dem Zeitpunkt des ersten Treffers. Sei $N(i, n)$ die Anzahl der Permutationen $\pi \in S_n$, für die $\pi(j) \neq j$ gilt, $1 \leq j \leq i$.

Gleichung (2.7) impliziert: $N(i, n) = N(\vec{1}; (\vec{1}_i; \vec{0}_{n-i})) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (n-j)!$

Damit sehen wir: $\mathbb{P}(T = k) = \frac{1}{n!} N(k-1, n-1)$,

$\mathbb{P}(\text{Treffer im } i\text{-ten Versuch} \mid \text{kein Treffer in den ersten } (i-1) \text{ Versuchen}) = \frac{N(i-1, n-1)}{N(i-1, n)}$.
Damit nimmt S folgende Werte an:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{n}\right) && \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{n!} N(0, n-1) = \frac{1}{n}, \\ & \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{n-2}{(n-1)^2}\right) && \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{n!} N(1, n-1) = \frac{n-2}{n(n-1)}, \\ & \vdots && \\ & \left(1 - \sum_{i=1}^k \frac{N(i-1, n-1)}{N(i-1, n)}\right) && \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{n!} N(k-1, n-1), \\ & \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{N(i-1, n-1)}{N(i-1, n)}\right) && \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{n!} N(n-1, n-1), \end{aligned}$$

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback

$$-\sum_{i=1}^n \frac{N(i-1, n-1)}{N(i-1, n)} \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{n!} N(n, n)$$

Wir wollen zeigen, dass $\frac{1}{n!} N(i, n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i + O\left(\frac{1}{n}\right)$ gleichmäßig in i :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n!} N(i, n) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \right| &= \left| \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(\frac{(-1)^j (n-j)!}{n!} - \left(-\frac{1}{n}\right)^j \right) \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^j \left(\frac{(n-j)!}{n!} - \frac{1}{n^j} \right) \right| \leq \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left(\frac{(n-j)!}{n!} - \frac{1}{n^j} \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{(n-j)!}{n!} - \frac{1}{n^j} \right) = e + O\left(\frac{1}{n!}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

wobei wir (2.7), $\frac{(n-j)!}{n!} \geq \frac{1}{n^j}$, $\binom{n}{j} \geq \binom{i}{j}$ für $n \geq i$, die Reihendarstellung von e , den binomischen Lehrsatz und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ benutzt haben.

Somit bekommen wir mittels Vollständiger Induktion für $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{N(i-1, n-1)}{N(i-1, n)} &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1 - \frac{1}{n-1}}{1 - \frac{1}{n}} \right)^{i-1} \right\} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\stackrel{\text{v.i.}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Daher nimmt S die Werte

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{k-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

an, wenn $1 \leq k \leq n$, und den Wert

$$-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{mit der Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{e} + O\left(\frac{1}{n!}\right).$$

Wenn wir diese Abschätzungen verwenden, sehen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S \leq t) = G(t) \quad \text{für } t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e^2}\right)$$

3.2. Beweise für das dritte Kapitel

Für $1 \geq t \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}$ bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \leq t) &= \frac{1}{e} + \mathbb{P} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^T + O \left(\frac{1}{n} \right) \leq t \right\} + O \left(\frac{1}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{e} + \mathbb{P} \left\{ \ln \left(1 - \frac{2}{n} \right)^T \leq \ln \left[2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\} + O \left(\frac{1}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{e} + \mathbb{P} \left\{ \ln \left[\left(1 - \frac{2}{n} \right)^n \right]^{\frac{T}{n}} \leq \ln \left[2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\} + O \left(\frac{1}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{e} + \mathbb{P} \left\{ -\frac{2T}{n} \leq \ln \left[2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\} + O \left(\frac{1}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{e} + \left(1 - \mathbb{P} \left\{ \frac{T}{n} \leq -\frac{1}{2} \ln \left[2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right] + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\} \right) + O \left(\frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{e} + 1 - \left(\frac{1}{e} + O \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \sum_{0 \leq j \leq n \cdot f(t)} \left(1 - \frac{1}{n-1} \right)^{j-1} \right) + O \left(\frac{1}{n} \right) \\
&= \sqrt{2} \left(t - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + O \left(\frac{1}{n} \right) \\
\text{mit } f(t) &= -\frac{1}{2} \cdot \ln \left[2 \left(t - \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

Dies beweist (3.4).

BEWEIS von (3.5): $G_i \equiv 1$, d. h. S nimmt die Werte $1 - (H_n - H_T)$ an, wobei T gleichverteilt ist auf $\{0, \dots, n-1\}$ und $H_0 \equiv 0, H_k = 1 + \dots + \frac{1}{k}, k = 1, \dots, n$. Mit $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln n$ bekommen wir für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1 - S > t) &= \mathbb{P} \left(e^{(H_T - H_n)} < e^{-t} \right) \\
&= \mathbb{P} \left\{ e^{(H_T - H_n)} \leq e^{-t} \mid \sqrt{n} \leq T \leq n - \sqrt{n} \right\} \left(1 + O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \mathbb{P} \left\{ e^{(\ln T - \ln n + O(\frac{1}{T}))} \leq e^{-t} \mid \sqrt{n} \leq T \leq n - \sqrt{n} \right\} + O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \mathbb{P} \left\{ \frac{T}{n} \left(1 - O \left(\frac{1}{T} \right) \right) \leq e^{-t} \mid \sqrt{n} \leq T \leq n - \sqrt{n} \right\} + O \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&\rightarrow e^{-t}
\end{aligned}$$

Es folgt (3.5).

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback

BEWEIS von (3.6): Für die optimale Ratestrategie wurde in Satz 2.1.1 gezeigt, dass für $1 \leq i \leq n-1$ die Anzahl G der Treffer den Wert i mit Wahrscheinlichkeit $p_i = \frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!}$ annimmt und dass $p_n = \frac{1}{n!}$.

Wenn $G = i$ ist, sei T_j die Zeit zwischen dem $(j-1)$ -ten und j -ten Treffer, $1 \leq j \leq i$, und $T_{i+1} = n - (T_1 + \dots + T_i)$.

Es ist intuitiv klar, dass die Zufallsvariablen $\frac{1}{n}(T_1, \dots, T_i, n - (T_1 + \dots + T_i))$ im Grenzwert so verteilt sind wie L_1, \dots, L_{i+1} , wenn L_1, \dots, L_{i+1} die Längen der $(i+1)$ Intervalle angeben, in die das Einheitsintervall durch zufällige Auswahl von i Punkten aufgeteilt wird, da $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{i+1} T_k = 1$ und wir eine Gleichverteilung auf der Menge aller Permutationen des Kartendecks zugrundelegen.

Nun behaupten wir mit $f_+ = \max(f, 0)$:

$$\mathbb{P}(L_1 \geq x_1, \dots, L_{i+1} \geq x_{i+1}) = [(1 - (x_1 + \dots + x_{i+1}))_+]^i \quad (3.11)$$

Feller (☞ [Fel68]) überlässt die Verifizierung dem Leser als Rechenaufgabe, verweist jedoch zusätzlich auf de Finetti, der diese Formel geometrisch begründet habe.

Wir folgen diesem Hinweis auf die folgende Weise:

Stellen wir uns einen Würfel der Kantenlänge 1 im i -dimensionalen Raum vor. Wir erhalten die linke Seite von (3.11), indem wir das Volumen der Punkte (a_1, \dots, a_i) des Würfels bestimmen, für die eine Permutation $\pi \in S_i$ existiert, so dass $a_{\pi(1)} \leq a_{\pi(2)} \leq \dots \leq a_{\pi(i)}$ und außerdem

$$a_{\pi(1)} \geq x_1, (a_{\pi(2)} - a_{\pi(1)}) \geq x_2, \dots, 1 - a_{\pi(i)} \geq x_{i+1} \text{ gilt.}$$

Man kann sich überlegen, dass dieses Volumen gerade die rechte Seite von (3.11) ist:

Für $d = 1$ ist die Menge der gesuchten Punkte das Intervall $[x_1, 1 - x_2]$ bzw. das Intervall $[x_2, 1 - x_1]$, und dieses hat die Länge $1 - x_1 - x_2$.

Für $d = 2$ ist die gesuchte Fläche die Summe zweier gleichschenkliger, rechtwinkliger Dreiecke mit der Kathetenlänge $(1 - x_1 - x_2 - x_3)$, also ergibt sich:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - x_1 - x_2 - x_3)^2 = (1 - x_1 - x_2 - x_3)^2.$$

Für $d = 3$ ist das gesuchte Volumen die Summe der Volumina von vier Pyramiden, deren Grundfläche jeweils ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck der Kathetenlänge $(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ ist, und die jeweils die Höhe $(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ haben, sowie von vier weiteren Pyramiden, deren Grundfläche jeweils quadratisch ist mit Kantenlänge $\frac{1}{2}(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ und Höhe $(1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$. Wir berechnen also:

$$A = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)^2 \right) \cdot (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \right)^2 \right) \cdot (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = (1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)^3.$$

3.2. Beweise für das dritte Kapitel

(3.11) gilt auch für höhere Dimensionen: Das Verfahren, mit dem wir das zu berechnende Intervall ($d = 1$) bzw. die zu berechnende Fläche ($d = 2$) bzw. das zu bestimmende Volumen ($d = 3$) ermittelt haben, kann auf den Fall $d > 3$ übertragen werden.

Im Hinblick auf (3.6) gilt nun:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S \leq t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S \leq t, G = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S \leq t | G = i) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G = i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S \leq t | G = i)\end{aligned}$$

Zum Nachweis von (3.6) müssen wir den Grenzwert der bedingten Wahrscheinlichkeit in der Summe berechnen.

Wie im Beweis von (3.5) sei $H_0 \equiv 0, H_k = 1 + \dots + \frac{1}{k}, k = 1, \dots, n$.

Ferner sei $\bar{T} = \sum_{j=1}^i T_j$.

Dann nimmt für festes n $S|G = i$ die Werte $i - (H_n - H_{\bar{T}})$ an.

Mit der Approximation von $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ durch $\ln n$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \leq t | G = i) &= \mathbb{P}(i - (H_n - H_{\bar{T}}) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(H_{\bar{T}} - H_n \leq t - i) \\ &= \mathbb{P}(e^{H_{\bar{T}} - H_n} \leq e^{t-i}) \\ &= \mathbb{P}\left\{e^{(H_{\bar{T}} - H_n)} \leq e^{t-i} | \sqrt{n} \leq \bar{T} \leq n - \sqrt{n}\right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left\{e^{(\ln \bar{T} - \ln n + O(\frac{1}{\bar{T}}))} \leq e^{t-i} | \sqrt{n} \leq \bar{T} \leq n - \sqrt{n}\right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{T}}{n} \left(1 - O\left(\frac{1}{\bar{T}}\right)\right) \leq e^{t-i} | \sqrt{n} \leq \bar{T} \leq n - \sqrt{n}\right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\rightarrow \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^i L_j \leq e^{t-i}\right) \\ &= \begin{cases} \mathbb{P}(L_1 \geq 0, L_2 \geq 0, \dots, L_i \geq 0, L_{i+1} \geq (1 - e^{t-i})) & \text{für } t < i \\ 1 & \text{für } t \geq i \end{cases}\end{aligned}$$

Wegen (3.11) ist damit (3.6) bewiesen. □

3. Auswertung sequentieller Experimente mit Feedback

A. Rekursive Bestimmung maximaler erwarteter Trefferzahlen beim vollständigen Feedback

Die Inhalte dieses Anhangs sind primär dem Artikel [Rea62] von Ronald C. Read entnommen; wir betrachten dabei folgendes Experiment im Kartenraten:

Ein Kartenspiel liegt auf einem Tisch. Es hat n^2 Karten, und *es kommen n verschiedene Symbole jeweils genau n-mal vor.*

Eine Person rät nacheinander die jeweils oberste Karte des Kartendecks, und eine andere schaut sich die Karte anschließend an und zeigt sie auch (*vollständiges Feedback*). Die ratende Person weiß also bei jeder Karte, wie viele Symbole jeder Art noch im Deck übrig sind. Die beste Strategie ist es, als nächstes das Symbol zu wählen, das noch am häufigsten vertreten ist bzw. eines von diesen, wenn es mehrere gibt. Wie viele Treffer kann man durchschnittlich erwarten?

Sagen wir, dass nach r geratenen Karten im verbliebenen Kartenstapel α_1 Karten übrigbleiben, die das erste Symbol zeigen, α_2 Karten, die das zweite Symbol zeigen, usw., so dass $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n^2 - r$. Es sei $\mathbb{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die erwartete Trefferanzahl für die verbliebenen $(n^2 - r)$ Karten.

Gehen wir davon aus, dass $\max(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1$, so dass also die Versuchsperson als nächstes das erste Symbol raten wird. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ist $\frac{\alpha_1}{n^2 - r}$, und man kann dann $1 + \mathbb{E}(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ Treffer erwarten. Wenn die Karte nicht das erste, sondern das i -te Symbol zeigt (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\alpha_i}{n^2 - r}$), ist $\mathbb{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ die erwartete Trefferzahl.

Daher gilt, wenn wir mit \mathbb{E}_j die erwartete Anzahl der Treffer bezeichnen, wenn α_i Karten das i -te Symbol ($i \neq j$) und $\alpha_j - 1$ Karten das j -te Symbol zeigen:

$$\mathbb{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{\alpha_1}{n^2 - r}[1 + \mathbb{E}_1] + \frac{\alpha_2}{n^2 - r}\mathbb{E}_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{n^2 - r}\mathbb{E}_n$$

A. Rekursive Bestimmung maximaler erwarteter Trefferzahlen beim vollständigen Feedback

oder allgemein:

$$\mathbb{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{n^2 - r} \cdot \left[\max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k + \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{E}_j \right] \quad (\text{A.1})$$

Für $n = 3$ haben wir:

$$\mathbb{E}(3, 3, 3) = \frac{1}{9}[3 + 3\mathbb{E}(2, 3, 3) + 3\mathbb{E}(3, 2, 3) + 3\mathbb{E}(3, 3, 2)]$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$\mathbb{E}(2, 3, 3) = \mathbb{E}(3, 2, 3) = \mathbb{E}(3, 3, 2) \quad (\text{A.2})$$

Wir vereinfachen also:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(3, 3, 2) &= \frac{1}{8}[3 + 3\mathbb{E}(2, 3, 2) + 3\mathbb{E}(3, 2, 2) + 2\mathbb{E}(3, 3, 1)] \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\mathbb{E}(3, 2, 2) + \frac{1}{4}\mathbb{E}(3, 3, 1) \end{aligned}$$

usw.

Somit können wir die erwartete Trefferzahl für die letzten $(n^2 - r)$ Karten in Termen für die erwartete Trefferzahl für die letzten $(n^2 - r - 1)$ Karten ausdrücken. Es ist $\mathbb{E}(1, 0, \dots, 0) = 1$, die letzte Karte kann immer richtig geraten werden. $\underbrace{\mathbb{E}(n, \dots, n)}_n$ kann damit Schritt für Schritt bestimmt werden. Dies ist

aber mühsam. Wie kann man sich die Arbeit erleichtern?

Wir ersetzen zunächst jeden Ausdruck $\mathbb{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ durch das Monom $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ mit x_1, \dots, x_n als Unbestimmten. Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{E}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

wird dann ersetzt durch

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_i^{\alpha_i-1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Wenn wir Monome benutzen, kann die rekursive Beziehung (A.1) mit folgender Regel reduziert werden: Wende den Operator $(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n})$ auf das Monom (bzw. das Polynom) an; addiere zu dem Ergebnis den höchsten Exponenten, der in dem Monom vorkommt (bei einem Polynom gewichte die höchsten Exponenten der einzelnen Monome entsprechend ihren Vorfaktoren); teile das Ergebnis schließlich durch $(n^2 - r)$.

Für $n = 3$ beginnen wir mit $x_1^3x_2^3x_3^3$ und leiten zunächst ab:

$$\frac{1}{9}[3x_1^2x_2^3x_3^3 + 3x_1^3x_2^2x_3^3 + 3x_1^3x_2^3x_3^2 + 3] \quad (\text{A.3})$$

Im Hinblick auf (A.2) erkennen wir, dass die Monome $x_1^2x_2^3x_3^3$, $x_1^3x_2^2x_3^3$ und $x_1^3x_2^3x_3^2$ dieselbe Zahl repräsentieren. Wir können also Monome, die sich nur durch eine Permutation ihrer Variablen unterscheiden, zusammenfassen. Diesen Prozess nennen wir *Kondensation*.

Die kondensierte Version von (A.3) ist dann $\frac{1}{9}[9x_1^2x_2^3x_3^3 + 3]$.

Schauen wir uns die vollständige Prozedur für den Fall $n = 3$ einmal an. Auf jeder Stufe erhalten wir einen konstanten Term, der die erwartete, gerade erzielte Trefferanzahl zum Ausdruck bringt. Diese spielt aber für die weitere Rekursion keine Rolle, so dass wir sie auf eine Seite schreiben und am Ende aufaddieren. Wir erhalten folgende Polynome:

$x_1^3x_2^3x_3^3$	
$\frac{1}{9}[3x_1^2x_2^3x_3^3 + 3x_1^3x_2^2x_3^3 + 3x_1^3x_2^3x_3^2] = \frac{1}{9}[9x_1^2x_2^3x_3^3]$	$\frac{1 \cdot 3}{9} = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{9 \cdot 8}[6x_1x_2^3x_3^3 + 6x_1^3x_2x_3^3 + 6x_1^3x_2^3x_3 + 18x_1^2x_2^2x_3^3 + 18x_1^2x_2^3x_3^2 + 18x_1^3x_2^2x_3^2] = \frac{1}{9 \cdot 8}[18x_1x_2^3x_3^3 + 54x_1^2x_2^2x_3^3]$	$\frac{\frac{1}{9}(9 \cdot 3)}{8} = \frac{3}{8}$
$\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7}[6x_2^3x_3^3 + 6x_1^3x_3^3 + 6x_1^3x_2^3 + 162x_1^2x_2^2x_3^2 + 54x_1x_2^2x_3^3 + 54x_1x_2^3x_3^2 + 54x_1^2x_2x_3^3 + 54x_1^2x_2^3x_3 + 54x_1^3x_2^2x_3 + 54x_1^3x_2x_3^2] = \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7}[18x_2^3x_3^3 + 324x_1x_2^2x_3^3 + 162x_1^2x_2^2x_3^2]$	$\frac{\frac{1}{9 \cdot 8}(18 \cdot 3 + 54 \cdot 3)}{7} = \frac{3}{7}$
$\frac{5!}{9!}[432x_2^2x_3^3 + 648x_1x_2x_3^3 + 1944x_1x_2^2x_3^2]$	$\frac{\frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7}(18 \cdot 3 + 324 \cdot 3 + 162 \cdot 2)}{6} = \frac{25}{56}$
$\frac{4!}{9!}[2160x_2x_3^3 + 3240x_2^2x_3^2 + 9720x_1x_2x_3^2]$	$\frac{9}{14} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{5} = \frac{33}{70}$
$\frac{3!}{9!}[2160x_3^3 + 38880x_2x_3^2 + 19440x_1x_2x_3]$	$\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{4} = \frac{15}{28}$
$\frac{2!}{9!}[45360x_3^2 + 136080x_2x_3]$	$\frac{1}{28} \cdot \frac{3}{3} + \frac{18}{28} \cdot \frac{2}{3} + \frac{9}{28} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{7}$
$\frac{1!}{9!}[362880x_3]$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
$\frac{0!}{9!}[362880]$	1

Tabelle A.1.: Rekursive Berechnung für den Fall $n = 3$

Die linke Spalte der letzten Tabellenzeile repräsentiert $\mathbb{E}(0, \dots, 0)$, was sicher 0 ist. Die konstanten Terme in der rechten Spalte sind die erwarteten Trefferzahlen bei den einzelnen Karten, und ihre Summe $4^{\frac{661}{840}}$ ist die erwartete Trefferzahl.

Wir werden sehen, dass die Konstanten $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \dots$ in der rechten Spalte abgeleitet werden können von den Polynomen in der linken. Wenn wir diese Polynome sukzessive mit P_0, P_1, P_2, \dots bezeichnen, gilt:

$$P_r = \frac{(n^2 - r)!}{(n^2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^r x_1^n \cdot x_2^n \cdot \dots \cdot x_n^n, \quad (\text{A.4})$$

A. Rekursive Bestimmung maximaler erwarteter Trefferzahlen beim vollständigen Feedback

folgend aus der oben beschriebenen Kondensation.

Betrachten wir einen typischen Term in P_r , und sagen wir, dass in ihm p_0 Unbestimmte den Exponenten 0 haben, p_1 Unbestimmte den Exponenten 1, p_2 den Exponenten 2, usw. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n &= n \\ 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \cdots + n \cdot p_n &= n^2 - r \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Solch ein Term ist das Ergebnis der Kondensation von $\frac{n!}{p_0! \cdots p_n!}$ Termen von (A.4), in denen die Variablen in verschiedenen Permutationen auftreten.

Wenn eine Variable x_ν den Exponenten i hat, muss $\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{n-i}$ auf x_ν^n angewendet werden sein, und das induziert einen Faktor $n \cdot (n-1) \cdots (n-n+i+1) = \frac{n!}{i!}$. Daher hat ein Term der Form (A.4), der vom Typ (A.5) ist, den Koeffizienten

$$\frac{(n^2 - r)!}{(n^2)!} \cdot \frac{r!}{[n!]^{p_0} [(n-1)!]^{p_1} [(n-2)!]^{p_2} \cdots} \left(\frac{n!}{0!}\right)^{p_0} \left(\frac{n!}{1!}\right)^{p_1} \left(\frac{n!}{2!}\right)^{p_2} \cdots$$

oder

$$\frac{(n^2 - r)! \cdot r!}{(n^2)!} \binom{n}{0}^{p_0} \binom{n}{1}^{p_1} \binom{n}{2}^{p_2} \cdots .$$

Durch Kondensation ergeben die $\frac{n!}{p_0! p_1! \cdots p_n!}$ solchen Terme einen einzigen Term mit dem Koeffizienten

$$\frac{(n^2 - r)! \cdot r!}{(n^2)!} \cdot \frac{n!}{p_0! p_1! \cdots p_n!} \binom{n}{0}^{p_0} \binom{n}{1}^{p_1} \cdots \binom{n}{n}^{p_n}. \quad (\text{A.6})$$

Diese Terme bestimmen die erwarteten Trefferzahlen, die in Tabelle A.1 in der rechten Spalte stehen. Man erhält sie, indem man auf jeder Stufe die Koeffizienten der einzelnen Terme mit dem höchsten in ihnen vorkommenden Exponenten multipliziert, die so erhaltenen Werte aufsummiert und anschließend durch $(n^2 - r)$ dividiert.

Sei bei einem Term k die größte ganze Zahl mit $p_k > 0$. Für festes k summieren wir nun über alle Terme in allen Stufen:

$$\sum_{r=0}^{n^2-1} \left\{ \frac{k(n^2 - r)! \cdot r!}{(n^2)!(n^2 - r)} \sum \frac{n!}{p_0! \cdots p_k!} \binom{n}{0}^{p_0} \binom{n}{1}^{p_1} \cdots \binom{n}{k}^{p_k} \right\}, \quad (\text{A.7})$$

wobei für die zweite Summe gilt:

$$\begin{aligned} p_0 + \cdots + p_k &= n \\ 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \cdots + k \cdot p_k &= n^2 - r \\ p_k &\geq 1 \end{aligned}$$

Die zweite Summation entspricht nun gerade dem Koeffizienten von $t^{(n^2-r)}$ in

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}t + \cdots + \binom{n}{k}t^k \right]^n - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}t + \cdots + \binom{n}{k-1}t^{k-1} \right]^n,$$

wobei mittels des zweiten Ausdrucks die Summanden für $p_k = 0$ eliminiert werden. Wenn wir schreiben

$$\Phi_k(t) = \left\{ \binom{n}{0} + \binom{n}{1}t + \cdots + \binom{n}{k}t^k \right\}^n,$$

so schreibt sich (A.7) als

$$\sum_{r=0}^{n^2-1} \left\{ \frac{k}{n^2 \cdot \binom{n^2-1}{r}} \cdot (\text{Koeffizient von } t^{(n^2-r)} \text{ in } \Phi_k(t) - \Phi_{k-1}(t)) \right\}.$$

Wenn wir nun letztlich über alle Werte von k summieren, bekommen wir

$$\frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{n^2-1} \frac{A_{n^2-r}}{\binom{n^2-1}{r}}.$$

Dabei steht A_m für den Koeffizienten von t^m in

$$\begin{aligned} & n\{\Phi_n(t) - \Phi_{n-1}(t)\} + (n-1)\{\Phi_{n-1}(t) - \Phi_{n-2}(t)\} \\ & + \cdots + 2\{\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\} + \Phi_1(t) - \Phi_0(t) \\ = & n \cdot \Phi_n(t) - \sum_{s=0}^{n-1} \Phi_s(t) \\ \stackrel{\text{Binomischer Lehrsatz}}{=} & n \cdot (1+t)^{n^2} - \sum_{s=0}^{n-1} \Phi_s(t). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Die erwartete Trefferzahl ergibt sich damit zu

$$\frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{n^2} \frac{A_m}{\binom{n^2-1}{m-1}} \quad (m = n^2 - r), \tag{A.9}$$

wobei A_m definiert ist durch (A.8).

Für $n = 3$ ist A_m also der Koeffizient von t^m in

$$\begin{aligned} & 3(1+t)^9 - 1 - (1+3t)^3 - (1+3t+3t^2)^3 \\ & = 9t + 45t^2 + 144t^3 + 270t^4 + 297t^5 + 225t^6 + 108t^7 + 27t^8 + 3t^9 \end{aligned}$$

A. Rekursive Bestimmung maximaler erwarteter Trefferzahlen beim vollständigen Feedback

Daher wird (A.9) zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} \left\{ \frac{9}{1} + \frac{45}{8} + \frac{144}{28} + \frac{270}{56} + \frac{297}{70} + \frac{225}{56} + \frac{108}{28} + \frac{27}{8} + \frac{3}{1} \right\} \\ &= 1 + \frac{5}{8} + \frac{4}{7} + \frac{15}{28} + \frac{33}{70} + \frac{25}{56} + \frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \\ &= 4\frac{661}{840}, \end{aligned}$$

wie vorher.

Auf zwei Nachkommastellen gerundet ergeben sich für $n = 1, \dots, 5$ beim Kartentrennen mit vollständigem Feedback für ein Kartenspiel mit n^2 Karten, bei dem jeweils n verschiedene Symbole je n -mal vorkommen, folgende maximale erwartete Trefferzahlen:

n	1	2	3	4	5
maximale erwartete Trefferanzahl	1	2,83	4,79	6,73	8,65

Tabelle A.2.: erwartete Trefferanzahl unter der optimalen Strategie

B. Martingale, Gaussprozesse, Brownsche Bewegungen und Brücken

In diesem Anhang wiederholen wir einige für diese Diplomarbeit benötigte Begriffe der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie 2 aus dem Wintersemester 2005/06, die ich an der WWU Münster bei Frau Gantert (☞ [Gan06]) belegt habe. Abgesehen von einem Zentralen Grenzwertsatz für Martingale, den wir bei Scott (☞ [Sco73]) finden und hier in geeigneter Abwandlung ergänzen, da wir diese für den Beweis von Satz 3.1.7 benötigen, stammen alle Inhalte dieses Anhangs aus meiner Vorlesungsmitschrift.

B.1. Martingale

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Folge von σ -Algebren mit $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{A}$ für alle i . \mathcal{A}_n wird interpretiert als die Kollektion der Ereignisse, die bis zum Zeitpunkt n beobachtbar sind.

Definition B.1.1. Eine Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt

- (a) *adaptiert* an die Folge (\mathcal{A}_n) , wenn M_n \mathcal{A}_n -messbar ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$
- (b) *previsibel*, falls M_n \mathcal{A}_{n-1} -messbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$
- (c) *innovativ*, falls $M_n \in \mathcal{L}^1$ und $\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n | \mathcal{A}_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Hieraus folgt für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$: $\mathbb{E}(M_{n+k} - M_n | \mathcal{A}_n) = 0$.

Definition B.1.2. Ein *Martingal* $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, die zugleich adaptiert und innovativ ist, d. h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: M_n ist \mathcal{A}_n -messbar, $M_n \in \mathcal{L}^1$ und $\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{A}_n) = M_n$.

Ein Martingal ist ein faires Spiel; ein Beispiel für ein Martingal sind Summen von unabhängigen, zentrierten Zufallsvariablen: seien Y_1, Y_2, \dots unabhängig, $Y_i \in \mathcal{L}^1$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dann bilden die zentrierten Summen $M_n = \sum_{i=1}^n (Y_i - \mathbb{E}(Y_i))$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit $M_0 = 0$ ein Martingal.

B. Martingale, Gaussprozesse, Brownsche Bewegungen und Brücken

Definition B.1.3. Eine *Stoppzeit* ist eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ mit $\{T = n\} \in \mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d. h. die Entscheidung, in einem Zeitpunkt n zu stoppen, darf nur von den bis zu diesem Zeitpunkt beobachtbaren Ereignissen abhängen. Dabei gilt: $\{T = n\} \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow \{T \leq n\} \in \mathcal{A}_n$.

SATZ B.1.4. (Stoppsatz)

(a) Ist $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit, so ist auch der gestoppte Prozess $(M_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Martingal. Insbesondere gilt: $\mathbb{E}(M_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(M_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Falls T beschränkt ist, d. h. falls es eine Konstante $N < \infty$ gibt mit $\mathbb{P}(T \leq N) = 1$ bzw. $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, und falls $(M_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig integrierbar ist, so gilt: $\mathbb{E}(M_T) = \mathbb{E}(M_0)$. Dabei gilt:

(X_n) ist gleichmäßig integrierbar genau dann, wenn $\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|X_n| \geq c} |X_n| d\mathbb{P} = 0$.

SATZ B.1.5. (Zentraler Grenzwertsatz für Martingale nach Scott (1973))

Sei $\{S_n, \mathcal{F}_n; n \geq 0\}$ ein Martingal auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $S_0 \equiv 0$ f. s., $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \geq 1$, $\mathbb{E}(S_n^2) = s_n^2 < \infty$, und $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{A}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Unter der Voraussetzung

$$s_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \rightarrow_p 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$$s_n^{-2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k| \geq \varepsilon s_n\}} | \mathcal{F}_{k-1}) \rightarrow_p 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

gilt:

$$s_n^{-1} S_n \rightarrow_d X \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei X standard-normalverteilt ist. Die Indizes p und d bedeuten Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bzw. in Verteilung.

B.2. Brownsche Bewegung

Seien Y_1, Y_2, Y_3, \dots u. i. v. mit $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$, $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i$, $S_0 = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Reskalierung auf das Zeitintervall $[0, 1]$:

$$X_{\frac{k}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_k, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Dann gilt:

(i) $X_0 \equiv 0$ f. s.

(ii) Für $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$, $t_i = \frac{k_i}{N}$, $k_i \in \{0, \dots, N\}$, sind die Zuwächse $X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_m} - X_{t_{m-1}}$ unabhängig und $\mathbb{E}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) = 0$ für alle i , $\mathbb{V}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) = 1$

B.2. Brownsche Bewegung

$$X_{t_{i-1}}) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} Y_j\right) = \frac{1}{N}(k_i - k_{i-1}) = t_i - t_{i-1}.$$

Wegen dem Zentralen Grenzwertsatz konvergieren die Verteilungen von $(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$ gegen $N(0, t_i - t_{i-1})$.

Aus dieser Heuristik bekommen wir:

Definition B.2.1. Eine *Brownsche Bewegung* ist ein stochastischer Prozess $B_t(\omega)$ ($0 \leq t \leq 1$) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

- (i) $B_0 = 0$ \mathbb{P} -f. s.
- (ii) Für $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq 1$ sind die Zuwächse $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ unabhängig ($1 \leq i \leq m$) mit der Verteilung $N(0, t_i - t_{i-1})$.
- (iii) $t \rightarrow B_t(\omega)$ ist stetig \mathbb{P} -f. s.

Definition B.2.2. Sei $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine Brownsche Bewegung auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt das Bildmaß von \mathbb{P} unter der Abbildung $\Omega \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$, def. durch $\omega \rightarrow (B_t(\omega))_{0 \leq t \leq 1} \in \mathcal{C}[0, 1]$, mit $\mathcal{C}[0, 1] = \{f \mid f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig}\}$, das *Wienermaß* auf $\mathcal{C}[0, 1]$. Das *Wienermaß ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{C}[0, 1], \mathcal{F})$* mit $\mathcal{F} = \sigma(\{g_t : 0 \leq t \leq 1\})$, wobei $g_t : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ def. ist durch $g_t(x) = x(t)$ für $x \in \mathcal{C}[0, 1]$. Wenn wir dabei $\mathcal{C}[0, 1]$ mit der Norm $\|x\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ versehen, so ist \mathcal{F} die Borelsche σ -Algebra auf $\mathcal{C}[0, 1]$.

Interpretationen:

Definition B.2.1: $t \rightarrow B_t(\omega)$ zeitl. Entwicklung

Definition B.2.2: $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ $\mathcal{C}[0, 1]$ -wertige Zufallsvariable

Es gibt verschiedene Konstruktionsmöglichkeiten für eine Brownsche Bewegung. Der Satz von Donsker präzisiert den Grenzübergang von der Irrfahrt zur Brownschen Bewegung.

Seien Y_1, Y_2, \dots u. i. v., $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, $\mathbb{V}(Y_1) = 1$. $S_0 = 0$, $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i$.

Sei $X_t^N = \frac{1}{\sqrt{N}}(S_{[Nt]} + (Nt - [Nt])Y_{[Nt]+1})$.

Wenn wir mit μ_N die Verteilung von $(X_t^N)_{0 \leq t \leq 1}$ bezeichnen, so ist μ_N ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{C}[0, 1], \mathcal{F})$.

SATZ B.2.3. (Donskers Invarianzprinzip)

Die Folge (μ_N) konvergiert für $N \rightarrow \infty$ schwach gegen das Wienermaß μ auf $(\mathcal{C}[0, 1], \mathcal{F})$.

Dabei sagen wir $\mu_N \rightarrow \mu$ schwach, falls $\int f d\mu_N \rightarrow \int f d\mu$ für alle $f \in \mathcal{C}_b(S)$, wobei $\mathcal{C}_b(S) = \{f \mid f : S \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, beschränkt}\}$ mit einem metrischen Raum S .

Bemerkung: Dies gilt für alle u. i. v. Folgen Y_1, Y_2, \dots mit $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, $\mathbb{V}(Y_1) = 1$. Donskers Invarianzprinzip ist ein «Funktionaler Zentraler Grenzwertsatz», d. h. ein Zentraler Grenzwertsatz im Funktionenraum. Der klassische Zentrale Grenzwertsatz entspricht der Aussage für $t = 1$: $X_1^N = \frac{1}{\sqrt{N}}S_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^N Y_i$, und

B. Martingale, Gaussprozesse, Brownsche Bewegungen und Brücken

die Verteilung von $\frac{1}{\sqrt{N}}S_N$ konvergiert nach dem Zentralen Grenzwertsatz gegen $N(0, 1)$, also gegen die Verteilung von B_1 .

Definition B.2.4. Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ heißt *normalverteilt*, wenn für jeden Vektor $z \in \mathbb{R}^d$ die Zufallsvariable $z^t X = \sum_{i=1}^d z_i X_i$ normalverteilt ist. Man sagt dann auch: X_1, \dots, X_d sind *gemeinsam normalverteilt*. Wenn X normalverteilt ist mit Erwartungswertvektor m und Kovarianzmatrix Σ , so schreiben wir: $X \stackrel{d}{=} N(m, \Sigma)$. Insbesondere sind für ein normalverteiltes X die Komponenten X_1, \dots, X_d genau dann unabhängig, wenn sie paarweise unkorreliert sind.

Definition B.2.5. $I \subseteq \mathbb{R}$. Ein stochastischer Prozess $(Z_t)_{t \in I}$ heißt *Gauss-Prozess*, wenn für alle $m \in \mathbb{N}, t_1 \leq \dots \leq t_m$ gilt: $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m})$ ist gemeinsam normalverteilt.

Beispiel B.2.6. Eine Brownsche Bewegung $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ist ein Gauss-Prozess.

BEWEIS: Für $m \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 \leq t_2 \dots \leq t_m \leq 1$ gilt:

$(B_{t_1}, \dots, B_{t_m})$ ist normalverteilt mit Erwartungswertvektor $(0, \dots, 0)$ und der Kovarianzmatrix Σ , wobei für $i < j$ gilt:

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij} &= \text{Cov}(B_{t_i}, B_{t_j}) = \mathbb{E}[(B_{t_i} - m_i)(B_{t_j} - m_j)] = \mathbb{E}(B_{t_i} B_{t_j}) \\ &= \mathbb{E}(B_{t_i}(B_{t_i} + B_{t_j} - B_{t_i})) = \mathbb{E}(B_{t_i}^2) + \mathbb{E}(B_{t_i}(B_{t_j} - B_{t_i})) \\ &= \mathbb{V}(B_{t_i}) + (\mathbb{E}(B_{t_i}))^2 + \mathbb{E}(B_{t_i}) \mathbb{E}(B_{t_j} - B_{t_i}) = t_i = t_i \wedge t_j\end{aligned}$$

Für $z = (z_1, \dots, z_m)$ ist $z^t(B_{t_1}, \dots, B_{t_m}) = \sum_{i=1}^m z_i B_{t_i} = (z_1 + \dots + z_m)B_{t_1} + (z_2 + \dots + z_m)(B_{t_2} - B_{t_1}) + (z_3 + \dots + z_m)(B_{t_3} - B_{t_2}) + \dots + z_m(B_{t_m} - B_{t_{m-1}})$ als Summe unabhängiger, normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt.

□

SATZ B.2.7. Ein Gauss-Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit den Eigenschaften

- (i) $X_0 = 0$ \mathbb{P} -f. s.
- (ii) Für alle $t > 0$ hat X_t die Verteilung $N(0, t)$
- (iii) Für alle $s, t \geq 0$ gilt: $\text{Cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$
- (iv) $t \rightarrow X_t$ ist \mathbb{P} -f. s. stetig
ist eine Brownsche Bewegung.

SATZ B.2.8. Sei $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gelten:

- (a) $\max_{0 \leq t \leq 1} B_t \stackrel{d}{=} |B_1|$
- (b) $\mathbb{P}(\text{der letzte Besuch der B.B. in } 0 \text{ erfolgt bis zum Zeitpunkt } z) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{z}$
- (c) $\mathbb{P}(t \rightarrow X_t \text{ ist nirgendwo differenzierbar}) = 1$

B.2. Brownsche Bewegung

SATZ B.2.9. Sei $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gelten:

(a) Für $a > 0$ ist $(X_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, wenn $X_t = \frac{1}{\sqrt{a}}B_{at}$ für alle $t \geq 0$.

(b) $(W_t)_{t \geq 0}$ ist eine Brownsche Bewegung, wenn $W_t = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t \cdot B_{\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$

(c) $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2 \cdot t \cdot \log \log t}} = 1$ \mathbb{P} - f. s. und $\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2 \cdot t \cdot \log \log t}} = -1$ \mathbb{P} - f. s.

(d) $N(\omega) = \{s \geq 0 : B_s = 0\}$. Dann gelten:

(i) $\lambda(N) = 0$ \mathbb{P} - f. s.

(ii) $\mathbb{P}(0)$ ist Häufungspunkt von N) = 1

Definition B.2.10. Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ist eine *Brownsche Brücke*, falls $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ein Gauss-Prozess ist und

(i) $B_0 = 0$ \mathbb{P} - f. s.

(ii) Für alle $t \in [0, 1]$ hat B_t die Verteilung $N(0, t(1-t))$

(iii) Für alle $s, t \in [0, 1]$ gilt: $\text{Cov}(B_s, B_t) = (s \wedge t) - (s \cdot t)$

(iv) $t \rightarrow B_t$ ist stetig \mathbb{P} - f. s.

Im Gegensatz zur Brownschen Bewegung sind bei einer Brownschen Brücke die Zuwächse also nicht unabhängig.

SATZ B.2.11. Folgende Aussagen für einen stochastischen Prozess $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ sind äquivalent:

(i) $(B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ ist eine Brownsche Brücke.

(ii) Es gibt eine Brownsche Bewegung $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$, so dass gilt: $B_t = X_t - t \cdot X_1$

$(0 \leq t \leq 1)$

B. Martingale, Gaussprozesse, Brownsche Bewegungen und Brücken

C. Werte von $N(\vec{c}; \vec{p})$ für $n = 9$, $\vec{c} = (3, 3, 3)$

Wir entnehmen die Tabelle dieses Anhangs dem Artikel [FC80] von Chung, Diaconis, Graham und Mallows.

\vec{p}	$N(\vec{3}; \vec{p})$	\vec{p}	$N(\vec{3}; \vec{p})$	\vec{p}	$N(\vec{3}; \vec{p})$
000	362880	520	12960	421	20736
100	241920	620	4320	521	10800
200	151200	330	31752	621	4320
300	86400	430	19872	331	23760
400	43200	530	10800	431	15120
500	17280	630	4320	531	8640
600	4320	440	13824	441	10368
110	166320	540	8640	222	37584
210	108000	111	116640	322	25056
310	64800	211	77760	422	15552
410	34560	311	48284	522	8640
510	15120	411	27216	332	17280
610	4320	511	12960	432	11232
220	73440	611	4320	333	12096
320	46656	221	53568		
420	26784	321	34776		

Tabelle C.1.: Werte von $N(\vec{c}; \vec{p})$ für $n = 9, \vec{c} = (3, 3, 3)$

C. Werte von $N(\vec{c}; \vec{p})$ für $n = 9$, $\vec{c} = (3, 3, 3)$

D. Standard-Normalverteilung

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

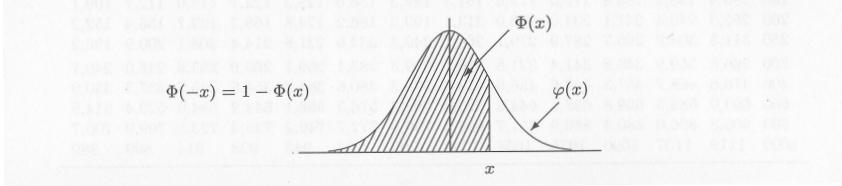


Tabelle D.1.: Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$.
Ablesebeispiel: $\Phi(1,96) = 0,975$

D. Standard-Normalverteilung $N(0, 1)$

Symbol- und Funktionsverzeichnis

Mengensymbole

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	Ring der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	positive reelle Zahlen
$(0, 1)$	offenes Einheitsintervall in \mathbb{R}
$o(g)$	Menge der Funktionen f , die ein kleineres Wachstumsverhalten als g haben
$O(g)$	Menge der Funktionen f , die dasselbe Wachstumsverhalten wie g haben
S_n	Menge der Permutationen der Menge $\{1, \dots, n\}$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$	σ -Algebren

Funktionen

\max	liefert das Maximum der Argumentwerte
\min	liefert das Minimum der Argumentwerte
\sin	Sinusfunktion
\log, \ln	Logarithmusfunktion, natürlicher Logarithmus
$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung
mul, h, N, M, d, f, g, X, T, Per, Q, Y, G, F, P	selbst definierte Funktionen

Symbole der Wahrscheinlichkeitstheorie

\mathbb{E}	Erwartungswert
\mathbb{V}	Varianz
Cov	Kovarianz
\mathbb{P}	Wahrscheinlichkeitsmaß

Binäre Symbole

\cup	Vereinigungsmenge
\cap	Schnittmenge
\wedge	Minimum

Symbol- und Funktionsverzeichnis

Mathematische Zeichen

$\sqrt{\text{Ausdruck}}$	Wurzel aus Ausdruck
$\sum_{\text{unten}}^{\text{oben}}$	Summe von unten bis oben
$\prod_{\text{unten}}^{\text{oben}}$	Produkt von unten bis oben
$\int_{\text{unten}}^{\text{oben}}$	Integral von unten bis oben
\lim_{unten}	Grenzwert für unten

Vergleichssymbole

<	kleiner als
\leq	kleiner gleich als
>	größer als
\geq	größer gleich als
\neq	ungleich
\approx	approximiert

Pfeilsymbole

\Leftrightarrow	äquivalent
\Rightarrow	es folgt

Griechische Buchstaben

α	Alpha
β	Beta
γ	Gamma
δ	Delta
$\epsilon \varepsilon$	Epsilon
$\lambda \Lambda$	Lambda
μ	My
ν	Ny
$\pi \Pi$	Pi
$\sigma \Sigma$	Sigma
τ	Tau
$\phi \Phi$	Phi
$\omega \Omega$	Omega

Literaturverzeichnis

- [Bil68] BILLINGSLEY, P.: *Convergence of Probability Measures*. Wiley, New York, 1968.
- [Bro71] BROWN, B.M.: *Martingale Central Limit Theorems*. The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 42, No. 1, 59-66, 1971.
- [Chu74] CHUNG, K. L.: *Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse*. Springer, 1974.
- [DB57] D. BLACKWELL, J.L. HODGES: *Design for the control of selection bias*. Ann. Math. Statist. 28, 449-460, 1957.
- [FC80] F.R.K. CHUNG, P. DIACONIS, R.L. GRAHAM UND C.L. MALLOWS: *On the permanents of complements of the direct sum of identity matrices*. Stanford Univ. Tech. Report No. 153, 1980.
- [Fel68] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley, New York, 1968.
- [Gan06] GANTERT, N.: *Vorlesungsskript zur Wahrscheinlichkeitstheorie 2*. WWU Münster, Wintersemester 2005/2006.
- [Gat78] GATTO, M.A.: *Statistical experiments involving feedback: An example*. Bell Laboratories Tech. Memorandum 78-1212-7, 1978.
- [Gre38] GREENWOOD, J.A.: *Variance of a general matching problem*. Ann. Math. Statist. 9, 56-59, 1938.
- [Hal77] HALL, P.: *Martingale invariance principles*. Annals of Probability 5, 875-887, 1977.
- [Har61] HARTER, L.: *Expected values of normal order statistics*. Biometrika 48, 151-165, 1961.

Literaturverzeichnis

- [Jar06] JARDINE, A.: *Der Kartenmischer*. NZZ FOLIO, Januar 2006.
- [PD81] P. DIACONIS, R.L. GRAHAM: *The analysis of sequential experiments with feedback to subjects*. Ann. Math. Statist. 9, 3-23, 1981.
- [Rea62] READ, R.C.: *Card-guessing with information - a problem in probability*. Amer. Math. Monthly 69, 506-511, 1962.
- [Ros67] ROSEN, B.: *On asymptotic normality of sums of dependent random vectors*. Probability Theory and Related Fields, 1967.
- [Sco73] SCOTT, D.J.: *Central Limit Theorems for Martingales and for Processes with Stationary Increments Using a Skorokhod Representation Approach*. Advances in Applied Probability, Vol. 5, No. 1, 119-137, 1973.
- [Tei56] TEICHROEW, D.: *Tables of expected values of order statistics for samples of size twenty and less from the normal distribution*. Ann. Math. Statist. 27, 410-426, 1956.

Erklärung zur Selbständigkeit

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt habe. Alle von mir benutzten Quellen und Hilfsmittel habe ich vollständig im Literaturverzeichnis angegeben.

Münster, 18. Juni 2008

Markus Lebe