WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Mathematische Statistik

Risikotheorie für Lévy-Prozesse

Diplomarbeit

vorgelegt von
Christian Jauer

Thema gestellt von
Prof. Dr. G. Alsmeyer

September 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das wohl bekannteste Modell der Risikotheorie ist das so genannte Cramér-Lundberg-Modell, das wir im Folgenden kurz vorstellen wollen (nach Alsmeyer [2], S. 208f.). Darin wird ein Versicherungsportfolio betrachtet, in dem man sich auf die drei wichtigsten Einflussgrößen Schadensauszahlungen, Prämieneinzahlungen und Anfangsreserve des Versicherers beschränkt. Sei also für $t \geq 0$ der Risikoprozess $R = \{R_t : t \geq 0\}$ definiert durch

$$R_t = u + \gamma\, t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

der die freie Reserve des Versicherers zum Zeitpunkt t angibt. Dabei ist $u \geq 0$ das Startkapital oder die freie Reserve zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\gamma\, t$ die sichere Prämieneinzahlung bis zum Zeitpunkt t bei Prämienrate $\gamma > 0$. Außerdem wird mit $N = \{N_t : t \geq 0\}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ bezeichnet, der die Anzahl der aufgetretenen Schäden bis t angibt. N_t ist also $\mathrm{Poi}(\lambda t)$-verteilt und die Zuwächse sind stochastisch unabhängig und stationär. Die Y_1, Y_2, $Y_3, \dots$ sind stochastisch unabhängige, identisch verteilte und fast sicher positive Zufallsgrößen mit Verteilung F und endlichem Erwartungswert $EY_1 := \mu > 0$. Diese Y_i können als einzelne Schadenshöhen aufgefasst werden und sind stochastisch unabhängig von der Anzahl der Schäden, also vom Prozess N.

Im Rahmen der Risikotheorie interessiert man sich nun unter anderem für die Ruinwahrscheinlichkeit, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reserve R_t in endlicher Zeit aufgebraucht wird. Für

$$\tau(u) := \inf\{t > 0 : \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma\, t > u\}$$

wird also

$$P(\tau(u) < \infty)$$

gesucht. Dazu setzen wir noch

$$\rho := \frac{\lambda\,\mu}{\gamma} < 1$$

voraus, weil nur dann $P(\tau(u) < \infty) < 1$ für alle $u > 0$ gilt (vgl. Asmussen [4], Corollary 1.4, S. 60; dort ist $\gamma = 1$, man kann unseren Fall aber darauf zurückführen, wie weiter unten gezeigt wird). Diese Forderung ist äquivalent dazu, dass die Nettorisikoprämie $E\,(\gamma\,T_1 - Y_1)$ positiv ist. T_1 gibt dabei die Zeit bis zum Auftreten des ersten Schadens an und ist unter obigen Annahmen Exp(λ)-verteilt.

Für die Ruinwahrscheinlichkeit erhalten wir nun

$$\begin{aligned} P(\tau(u) < \infty) &= P(R_t < 0 \text{ für ein } t > 0) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma\,t > u \text{ für ein } t > 0\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \gamma\,T_i) > u \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\right) \\ &= (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\,\overline{F_I^{*(n)}}(u). \end{aligned} \tag{0.1}$$

Dabei sind die $T_1, T_2, T_3, \ldots$ in der dritten Identität die unabhängigen und identisch Exp(λ)-verteilten Zwischeneintrittszeiten der Schäden, $\overline{F_I^{*(n)}} := 1 - F_I^{*(n)}$ ist Tail der n-fachen Faltung von

$$F_I(x) := \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy,\; x \geq 0,$$

und die letzte Zeile von (0.1) folgt mit [4] (S. 61). Dort wird die Formel zwar nur für $\gamma = 1$ angegeben, wir können unseren Fall aber darauf zurückführen, indem wir

$$R_t = u + \gamma\left(t - \sum_{i=1}^{N_t} \frac{Y_i}{\gamma}\right)$$

schreiben, $\rho = \lambda\,E\frac{Y_1}{\gamma} = \frac{\lambda\,\mu}{\gamma}$ setzen und

$$P\left(\sum_{i=1}^{N_t} \frac{Y_i}{\gamma} - t > \frac{u}{\gamma} \text{ für ein } t > 0\right)$$

berechnen. Mit Substitution bekommt man dann

$$\begin{aligned} F_{I,\,Y_i/\gamma}\left(\frac{u}{\gamma}\right) &= \frac{\gamma}{\mu}\int_0^{\frac{u}{\gamma}} P\left(\frac{Y_i}{\gamma} > y\right)\, dy \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^{u} \overline{F}(y)\, dy \\ &= F_I(u). \end{aligned}$$

Bei der weiteren Untersuchung von (0.1) kann man nun zwei Fälle unterscheiden. Falls ein $\nu > 0$ mit

$$\rho \int_0^\infty e^{\nu x}\, F_I(dx) = 1$$

existiert, so bezeichnet man dieses ν als Lundberg-Koeffizient und man erhält mit Embrechts et al. [16] (Theorem 1.2.2, S. 29) eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit der Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\tau(u) < \infty)}{e^{-\nu u}} = 1.$$

Für einen Lévy-Prozess X wird diese Aussage unter der Cramér-Bedingung (es existiere ein $\nu > 0$ mit $Ee^{\nu X_1} = 1$) von Bertoin und Doney [7] gezeigt.

Wir wollen in dieser Arbeit den anderen Fall betrachten und obige Überlegungen auf allgemeine Lévy-Prozesse übertragen, für die die Cramér-Bedingung nicht gilt, d.h. es soll kein $\nu > 0$ mit $Ee^{\nu X_1} = 1$ existieren. Dafür werden wir eine hinreichende Bedingung aufstellen (vgl. (2.12) und Bemerkung 3.2). Eine Aufwärtsbewegung des Lévy-Prozesses werden wir als Schadensauszahlung, eine Abwärtsbewegung als Prämieneinzahlung und $u \geq 0$ als freie Reserve zum Zeitpunkt $t = 0$ interpretieren. Wenn wir noch $X_0 = 0$ annehmen, so entspricht

$$-\,(X_t - u)$$

der freien Reserve des Versicherers zum Zeitpunkt t, und Ruin tritt in endlicher Zeit ein, falls die Ersteintrittszeit

$$\tau(u) := \inf\{t \geq 0 : X_t > u\}$$

endlich ist. Von dem Lévy-Prozess X wollen wir noch fordern, dass er fast sicher nach $-\infty$ driftet, d.h. Prämieneinzahlungen sollen langfristig die Schadensauszahlungen überwiegen. Wenn dies nicht erfüllt wäre, so würde kein Versicherer eine Versicherung anbieten. Unsere Hauptresultate geben uns dann unter anderem Auskunft darüber, wie sich die

Ruinwahrscheinlichkeit und die bedingten Verteilungen des Overshoots, der letzten Leiterhöhe und der letzten Leiterzeit vor Ruin asymptotisch für $u \to \infty$ verhalten. Wir zeigen diese für den Nicht-Cramér-Fall und supexponentielle bzw. faltungsäquivalente Verteilungen, bei denen große positive Werte relativ hohe Wahrscheinlichkeiten aufweisen, was beispielsweise der aktuellen Bedeutung von Großschadensereignissen (Naturkatastrophen, Terroranschläge etc.) Rechnung trägt. Wir betrachten dennoch einen sehr allgemeinen Fall, denn wir setzen nicht die Existenz des Erwartungswertes EX_1 voraus.

Als Vorlage dieser Arbeit dient ein Aufsatz von Klüppelberg, Kyprianou und Maller [20], dem unter anderem unsere Hauptresultate entstammen und dem wir im Aufbau weitestgehend folgen. Im ersten Kapitel soll in die (Erneuerungs- und Fluktuations-) Theorie von allgemeinen Lévy-Prozessen mit Drift nach $-\infty$ eingeführt werden, wobei hier sonst noch keine weiteren Annahmen getroffen werden. Kapitel 2 befasst sich dann zunächst mit subexponentiellen und faltungsäquivalenten Verteilungen, bevor wir Aussagen über das asymptotische Verhalten (Startkapital $u \to \infty$) der Ruinwahrscheinlichkeit, des Overshoots, der letzten Leiterhöhe und der letzten Leiterzeit vor Ruin formulieren. Das dritte Kapitel steht abschließend ganz im Zeichen der Anwendung unserer Ergebnisse. Als Beispiel soll der klassische Risikoprozess aus dem oben diskutierten Cramér-Lundberg-Modell ergänzt um einen Brownschen Störterm betrachtet werden.

Herrn Prof. Dr. G. Alsmeyer danke ich herzlich für die Vergabe und die umfassende Betreuung dieser Diplomarbeit, durch die mein Interesse an der Versicherungsmathematik geweckt wurde. Darüber hinaus möchte ich allen, die auf ihre Art und Weise zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, meinen Dank aussprechen. Besonders erwähnt seien Marina Meyer und meine Familie für ihre Geduld und Rücksicht.

1 Lévy-Prozesse

Dieses Kapitel soll einer gezielten Einführung in die Theorie der Lévy-Prozesse dienen, wobei in erster Linie das mathematische Rüstzeug für die Hauptresultate dieser Arbeit bereitgestellt wird. Im ersten Abschnitt werden wir Lévy-Prozesse definieren und die berühmte Lévy-Khintchine-Formel angeben. Der Leiterhöhenprozess steht im Mittelpunkt des zweiten Abschnittes und bildet die Grundlage für die darauf aufbauende Erneuerungstheorie. Erneuerungsmaße, Ersteintrittszeiten und die damit zusammenhängende Ruinwahrscheinlichkeit werden dann im dritten Abschnitt behandelt, wobei dort schon ein wichtiger Satz (Satz 1.24) für spätere Resultate gezeigt wird. Auf die Wiener-Hopf Faktorisierung des charakteristischen Exponenten werden wir im vierten Teil dieses Kapitels eingehen, und im fünften Abschnitt wollen wir unter anderem den Laplace-Exponenten des nichtdefekten aufsteigenden Leiterhöhenprozesses $\mathscr{H}$ berechnen, „Aufwärtskriechen" näher erläutern und schon erste Aussagen über die Verteilungen von Overshoot, letzter Leiterhöhe und letzter Leiterzeit vor Ruin (vgl. Satz 1.43) formulieren.

1.1 Grundlagen

Wir betrachten in dieser Arbeit einen eindimensionalen Lévy-Prozess $X = \{X_t : t \geq 0\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_0 = 0$ und Pfaden, die auf $[0, \infty)$ rechtsseitig stetig sind und linksseitige Limiten besitzen. Dazu sei zunächst folgende Definition bereitgestellt, in der wir den Ausführungen von Bertoin [6] folgen:

Definition 1.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, δ ein von $\mathbb{R}$ isolierter Punkt und X ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Zustandsraum $\mathbb{R} \cup \{\delta\}$. Außerdem besitze X P-fast-sicher unendliche Lebenszeit, d.h. $P(\zeta = \infty) = 1$, wobei $\zeta = \inf\{t \geq 0 : X_t = \delta\}$ und der Prozess verharrt nach seiner Lebenszeit ζ in δ. X ist dann ein *Lévy-Prozess* auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wenn die Zuwächse $X_{t+s} - X_t$ für $s, t \geq 0$ unabhängig vom

Prozess $\{X_l, 0 \leq l \leq t\}$ sind und die gleiche Verteilung wie X_s besitzen. Nimmt der Lévy-Prozess nur nichtnegative Werte an, so bezeichnet man ihn als *Subordinator.*

Hierzu sind zunächst einige Bemerkungen zu formulieren:

Bemerkungen 1.2. (i) Die oben beschriebenen Eigenschaften werden auch oft als *Stationarität* und *Unabhängigkeit der Zuwächse* bezeichnet.

(ii) Lévy-Prozesse sind das Analogon zu Random Walks in stetiger Zeit.

(iii) Wir beschränken uns mit obiger Wahl des Zustandsraumes auf den eindimensionalen Fall.

(iv) Falls X nicht P-f.s. unendliche Lebenszeit besitzt, so sprechen wir später von einem defekten oder gekillten Prozess.

(v) Aus der Definition folgt, dass ein Subordinator nur monoton wachsende Pfade besitzt.

Wir kommen zu diesen Bemerkungen nach einem kurzen Exkurs über unendliche Teilbarkeit und die daraus resultierende Lévy-Khintchine-Formel zurück. Zu diesem Zweck definieren wir nach Alsmeyer [1] (S. 249):

Definition 1.3. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{R}$ heißt *unendlich teilbar*, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Maß μ_n existiert mit

$$\mu = \mu_n^{*(n)} = \mu_n * \cdots * \mu_n \text{ (n-mal)}.$$

Diese Definition ist äquivalent dazu, dass für μ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Wahscheinlichkeitsmaß μ_n existiert, so dass für die charakteristischen Funktionen $\varphi_\mu(\vartheta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\vartheta x}\, \mu(dx)$ und $\varphi_{\mu_n}(\vartheta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\vartheta x}\, \mu_n(dx)$ die Identität $(\varphi_{\mu_n})^n = \varphi_\mu$ gilt. Unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaße besitzen eine besondere Darstellung ihrer charakteristischen Funktion φ_μ. Es sei

$$\varphi_\mu(\vartheta) = e^{-\Psi(\vartheta)},\ \vartheta \in \mathbb{R},$$

wobei die berühmte Lévy-Khintchine-Formel Auskunft über die Gestalt des charakteristischen Exponenten Ψ von μ gibt. Auch hier formulieren wie diese sofort für den eindimensionalen Fall:

Satz 1.4. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}$ ist genau dann unendlich teilbar, wenn $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ und ein Maß Π auf $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $\Pi(\{0\}) = 0$ und*

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\, \Pi(dx) < \infty$$

existieren, so dass

$$\Psi(\vartheta) = ia\vartheta + \frac{1}{2}\sigma^2\,\vartheta^2 + \int_{(-\infty,\infty)} \left(1 - e^{i\vartheta x} + i\vartheta x \boldsymbol{1}_{\{|x|<1\}}\right) \Pi(dx),\ \vartheta \in \mathbb{R}$$

gilt. Das Maß Π heißt das zu Q gehörende Lévy-Maß.

Beweis. Sato [25], S. 37. □

Kommen wir nun wieder zurück zu Lévy-Prozessen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} (X_{i/n} - X_{(i-1)/n}),$$

und wegen der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse

$$\begin{aligned} P^{X_1} &= P^{X_{1/n}} * P^{X_{2/n} - X_{1/n}} * \cdots * P^{X_1 - X_{(n-1)/n}} \\ &= (P^{X_{1/n}})^{*(n)}, \end{aligned}$$

d.h. P^{X_1} ist unendlich teilbar. Deshalb gilt

$$\varphi_{X_1}(\vartheta) := Ee^{i\vartheta X_1} = e^{-\Psi(\vartheta)} \tag{1.1}$$

mit Ψ wie in Satz 1.4. Es gilt aber auch

$$X_n = X_1 + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1})$$

und mit der Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse

$$\begin{aligned} \varphi_{X_n}(\vartheta) &= Ee^{i\vartheta \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{i-1})} = \prod_{i=1}^{n} Ee^{i\vartheta(X_i - X_{i-1})} \\ &= (Ee^{i\vartheta X_1})^n = e^{-\Psi(\vartheta)n}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ bekommen wir

$$X_{p/q} = X_{1/q} + (X_{2/q} - X_{1/q}) + \cdots + (X_{p/q} - X_{(p-1)/q})$$

und damit

$$Ee^{i\vartheta X_{p/q}} = (Ee^{i\vartheta X_{1/q}})^p, \tag{1.2}$$

woraus mit $p = q$

$$Ee^{i\vartheta X_1} = (Ee^{i\vartheta X_{1/q}})^q$$

und somit

$$(Ee^{i\vartheta X_1})^{1/q} = Ee^{i\vartheta X_{1/q}} \tag{1.3}$$

folgt (zu Wurzeln von Fouriertransformierten von unendlich teilbaren Verteilungen siehe Bauer [5] (S. 249)). Mit (1.1), (1.2) und (1.3) erhalten wir schließlich

$$Ee^{i\vartheta X_t} = e^{-\Psi(\vartheta)t}, t \in \mathbb{Q}^+, \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Diese Darstellung gilt sogar für $t \geq 0$, da X rechtsseitig stetige Pfade besitzt und somit $t \mapsto Ee^{i\vartheta X_t}$ rechtsseitig stetig ist. Wir können also festhalten, dass man für die charakteristische Funktion eines Lévy-Prozesses $X = \{X_t : t \geq 0\}$ ebenfalls die Lévy-Khintchine-Darstellung angeben kann:

$$Ee^{i\vartheta X_t} = e^{-\Psi(\vartheta)\,t}, \vartheta \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

wobei $\Psi(\vartheta)$ als *charakteristischer Exponent von* X bezeichnet wird und eine Darstellung wie in Satz 1.4 besitzt.

Umgekehrt wollen wir noch zeigen, dass ein unendlich teilbares Wahrscheinlichkeitsmaß μ (mit charakteristischem Exponenten wie in Satz 1.4) die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^{X_1} eines geeigneten Lévy-Prozesses X ist. Außerdem erhalten wir im folgenden Satz Informationen über das Lévy-Maß Π_X des Prozesses X. Der dort auftretende Sprungprozess $\triangle X$ ist definiert durch $\triangle X_t := X_t - X_{t-} := X_t - \lim_{s \uparrow t} X_s$.

Satz 1.5. *Seien $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ und Π_X ein Maß auf $\mathbb{R} - \{0\}$ mit der Eigenschaft*

$$\int (1 \wedge x^2)\, \Pi_X(dx) < \infty.$$

Für $\vartheta \in \mathbb{R}$ sei ferner

$$\Psi(\vartheta) = ia\vartheta + \frac{1}{2}\,\sigma^2\vartheta^2 + \int_{(-\infty,\infty)} \left(1 - e^{i\vartheta x} + i\vartheta x \boldsymbol{1}_{\{|x|<1\}}\right) \Pi_X(dx).$$

Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum, unter dem X ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Exponenten Ψ ist. Außerdem ist der Sprungprozess $\triangle X$ von X ein Poissonscher Punktprozess mit Intensitätsmaß Π_X.

Beweis. Bertoin [6], Theorem 1, S. 13. □

Auf die allgemeine Theorie der Poissonschen Punktprozesse soll im Weiteren nicht eingegangen werden. Der interessierte Leser sei verwiesen auf die Werke von Revuz und Yor [24] und Bertoin [6]. Wir wollen aber für den Fall, dass das Lévy-Maß Π_X des Lévy-Prozesses X spektral positiv oder negativ ist, d.h. $\Pi_X((-\infty, 0)) = 0$ oder $\Pi_X((0, \infty)) = 0$ gilt, daraus resultierende Eigenschaften für den Sprungprozess $\triangle X$ herleiten:

Satz 1.6. *Sei X ein Lévy-Prozess mit Lévy-Maß Π_X und $\triangle X$ der zu X gehörende Sprungprozess. Dann gilt:*

(i) $\Pi_X((0, \infty)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \triangle X \leq 0$ *P-f.s.;*

(ii) $\Pi_X((-\infty, 0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \triangle X \geq 0$ *P-f.s..*

Beweis. (i) „$\Rightarrow$“ Nach Satz 1.5 ist Π_X das Intensitätsmaß des Punktprozesses $\triangle X$. Nun gilt nach [24] (Definition (1.9), S. 438), dass $\Pi_X((0, \infty))$ dann gerade folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{aligned}\Pi_X((0, \infty)) &= \frac{1}{t} E\left(\sum_{j \in (0,t]} 1_{(0,t] \times (0,\infty)}(j, \triangle X_j) \right) \\ &= \frac{1}{t} \int_\Omega \left(\sum_{j \in (0,t]} 1_{(0,t] \times (0,\infty)}(j, \triangle X_j(\omega)) \right) P(d\omega),\end{aligned}$$

wobei die obige Darstellung für alle $t > 0$ gilt. Da die zu integrierende Summe nur aus nichtnegativen Summanden besteht und nach Voraussetzung $\Pi_X((0, \infty)) = 0$ gilt, folgt, dass alle Summanden P-f.s. gleich 0 sein müssen. Dies impliziert die Behauptung, weil die obige Gleichung für alle $t > 0$ gilt.

„$\Leftarrow$“ folgt aus der obigen Darstellung von $\Pi_X((0, \infty))$.

(ii) Analog zu (i). □

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit werden noch die folgenden Annahmen getroffen:

(1) Die von X erzeugte kanonische Filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ werde P-vervollständigt (d.h. für alle $N \in \mathcal{F}_t$ mit $P(N) = 0$ und für alle $A \subset N$ gilt $A \in \mathcal{F}_t$ und $P(A) = 0$) und ist damit nach Bertoin [6] (Proposition 4, S. 18) rechtsseitig stetig (d.h. $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$).

(2) Sei $X_0 = 0$ und der Prozess drifte nach $-\infty$, d.h. $X_t \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ P-f.s.. Dies trägt der Vorstellung Rechnung, dass die Prämienzahlungen die Schadensauszahlungen überwiegen sollen, wie wir schon in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt haben.

1.2 Der Leiterhöhenprozess

In diskreter Zeit betrachtet man bei einem Random Walk $(R_n)_{n\geq 0}$ den Prozess seiner Maxima, den so genannten *aufsteigenden Leiterhöhenprozess*, indem man die temporären Maxima ($R_{n_0}(\omega)$ ist temporäres Maximum $\Leftrightarrow R_{n_0}(\omega) \geq R_n(\omega), n < n_0$) in einem neuen Prozess, dem schwach aufsteigenden Leiterhöhenprozess, zusammenfasst. Dabei werden die Indizes der temporären Maxima abgezählt und als *schwach aufsteigende Leiterindizes* $\sigma_n^{\geq}$ bezeichnet. $\left(R_{\sigma_n^{\geq}} \mathbf{1}_{\{\sigma_n^{\geq} < \infty\}}\right)_{n\geq 0}$ ist dann der zu $(R_n)_{n\geq 0}$ gehörende *schwach aufsteigende Leiterhöhenprozess*. Für weitere Details zur Erneuerungstheorie bei Random Walks sei der interessierte Leser auf Alsmeyer [2] verwiesen.

In stetiger Zeit kann man den Leiterhöhenprozess auf diese Weise nicht definieren, denn die Menge der Maxima ist im Allgemeinen nicht abzählbar. Um diesen aber auch für Lévy-Prozesse einführen zu können, benötigt man eine Lokalzeit $L := \{L_t : t \geq 0\}$, die Informationen darüber liefert, wann sich ein Markov-Prozess $M := \{M_t : t \geq 0\}$ mit $M_0 = 0$ in einem bestimmten Punkt, bei uns später 0, aufhält. Diese Lokalzeit soll wachsen, wenn der Prozess bei 0 ist, und auf den Exkursionsintervallen konstant sein, woran man die gewünschte Information dann ablesen kann.

Die Konstruktion der Lokalzeit L führt Bertoin in [6] (Kapitel IV) für bestimmte („nice“) Markov-Prozesse M durch. Anschaulich gesprochen haben Markov-Prozesse die Eigenschaft, dass man nur den Zustand M_{t_0} kennen muss, um zur Zeit t_0 Aussagen über den weiteren Verlauf für $t > t_0$ machen zu können. Der Verlauf des Prozesses $\{M_t : t \in [0, t_0)\}$ ist dafür irrelevant. Diese Eigenschaft wird auch als *Markov-Eigenschaft* bezeichnet. Für Lévy-Prozesse gilt sogar die starke Markov-Eigenschaft:

Satz 1.7. *Sei T eine Stoppzeit mit $P(T < \infty) > 0$ und X ein Lévy-Prozess. Dann gilt bedingt unter $\{T < \infty\}$, dass der Prozess $\{X_{T+t} - X_T : t \geq 0\}$ unabhängig von $\mathcal{F}_T$ ist* *und die gleiche Verteilung wie X besitzt, d.h.*

$$P((X_{T+t} - X_T) \in \cdot \,|\, T < \infty) = P(X_t \in \cdot)$$

für alle $t \geq 0$.

Beweis. Bertoin [6], S. 20. □

Satz 1.7 bedeutet laut [6] (S. 20), dass für jede P-f.s. endliche Stoppzeit T die bedingte Verteilung des verschobenen Prozesses $\{X_{T+t} : t \geq 0\}$ bei gegebenem $X_T = x$ identisch ist mit der Verteilung von $X + x$.

Bei der Konstruktion der Lokalzeit L für M bei 0 werden in [6] (S. 104) drei verschiedene Arten von Markov-Prozessen unterschieden:

(i) 0 ist regulärer (d.h. für $r_t := \inf\{s > t : M_s = 0\}$ gilt $P(r_0 = 0) = 1$) und augenblicklicher (d.h. für $S := \inf\{s \geq 0 : M_s \neq 0\}$ gilt $P(S = 0) = 1$) Punkt von M.

(ii) 0 ist regulärer Punkt und Verweilpunkt (d.h. $P(S = 0) = 0$) von M.

(iii) 0 ist irregulärer Punkt von M (d.h. $P(r_0 = 0) = 0$).

Für Markov-Prozesse mit den Eigenschaften (i) oder (ii) wollen wir stetige Lokalzeiten angeben, was für Prozesse mit der Eigenschaft (iii) nicht möglich ist, da die Menge $\{t : M_t = 0\}$ dann diskret ist (vgl. [6], S. 104). Im Falle (i) wird die Lokalzeit L bei 0 im Rahmen der Konstruktion definiert durch [6] (Theorem 4, S. 109) und mit [6] (Korollar 6, S. 112) erhält man die Darstellung

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s=0\}}\, ds = d \cdot L_t \quad P\text{-f.s.}$$

für ein geeignetes $d \geq 0$ und alle $t \geq 0$. Falls M ein Markov-Prozess mit der Eigenschaft (ii) ist, so stellt jeder Prozess $L = \{L_t : t \geq 0\}$, für den ein $d > 0$ mit

$$d \cdot L_t = \int_0^t \mathbf{1}_{\{M_s=0\}}\, ds,\ t \geq 0,$$

existiert, eine Lokalzeit von M bei 0 dar (vgl. [6], S. 122). Die Existenzfrage wird ebenfalls in [6] geklärt. Für den Fall (iii) erhält man für die Lokalzeit L von M bei 0 folgende Gestalt:

$$L_t = \sum_{j=0}^{n(t)} \tau_j,\ t \geq 0,$$

wobei

$$n(t) := |\{0 < s \leq t : M_t = 0\}|$$

die Anzahl der Aufenthalte von M in 0 zählt und τ_0, τ_1, $\tau_2, \ldots$ für beliebiges $\lambda > 0$ unabhängige, identisch $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsgrößen darstellen, welche von M ebenfalls unabhängig sind (vgl. Kyprianou [22], Theorem 6.7, S. 134). In den Fällen (i) und (ii) sind die Lokalzeiten gerade so konstruiert worden, dass die Abbildungen $t \mapsto L_t(\omega)$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$ stetig sind (vgl. [6], Theorem 4, S. 109 und S. 121). Die stetigen Versionen der Lokalzeit sind bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt. Im weiteren Verlauf werden wir ausschließlich die oben eingeführten Lokalzeiten verwenden.

Damit wir den aufsteigenden Leiterhöhenprozesses mit Hilfe von Lokalzeiten einführen können, benötigen wir noch den Supremumsprozess von X und den reflektierten Prozess:

Definition 1.8. (i) $\overline{X}$ wird definiert durch $\overline{X}_t = \sup\{X_s : s \in [0,t]\}$ und als *Supremumsprozess* bezeichnet.

(ii) $\overline{X} - X$ heißt *reflektierter Prozess.*

Um unserem Ziel, den Leiterhöhenprozess für Lévy-Prozesse angeben zu können, näher zu kommen, ist eine Angabe darüber notwendig, wie lange der Prozess X bis zum Zeitpunkt t neue temporäre Maxima erreicht. Hierüber Auskunft gibt uns die Lokalzeit von $\overline{X} - X$ bei 0, welche mit $L := \{L_t : t \geq 0\}$ bezeichnet sei. Diese wächst nämlich, wenn $\overline{X} - X$ bei 0 ist, also wenn X temporäre Maxima erreicht, und ist sonst konstant. Sie existiert und besitzt eine der oben beschriebenen Darstellungen, da der reflektierte Prozess nach [6] (Proposition 1, S. 156) ein Markov-Prozess mit $\overline{X}_0 - X_0 = 0$ ist und die weiteren Eigenschaften besitzt, die in [6] (S. 104) unter dem Begriff „‘nice‘ Markov process“ zusammengefasst werden.

Nun können wir das Analogon zu den schwach aufsteigenden Leiterindizes bei Random Walks definieren:

Definition 1.9. Sei L eine Lokalzeit des reflektierten Prozesses $\overline{X} - X$ bei 0. Dann wird die inverse Lokalzeit $L^{-1} = \{L_t^{-1} : t \geq 0\}$ mit

$$L_t^{-1} = \inf\{s \geq 0 : L_s > t\}$$

als *aufsteigender Leiterzeitprozess* bezeichnet.

Zu dieser Definition wollen wir einige Bemerkungen formulieren:

Bemerkungen 1.10. (i) Der linksseitige Grenzwert von L_t^{-1} ist gerade

$$L_{t-}^{-1} = \inf\{s \geq 0 : L_s \geq t\}.$$

Diese Tatsache soll an einem Beispiel erläutert werden. Sei

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} t & \text{für } t < t_0 \\ t-2 & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}$$

mit fest gewähltem $t_0 > 0$. Dann ist $\overline{Y} - Y = \{\overline{Y}_t - Y_t : t \geq 0\}$ ein Markov-Prozess und 0 regulärer und Verweilpunkt von $\overline{Y} - Y$. Nach obigen Ausführungen gilt daher für die Lokalzeit L von $\overline{Y} - Y$ bei 0 mit geeigneter Normierung

$$L_t(\omega) = \begin{cases} t & \text{für } t < t_0 \\ t_0 & \text{für } t_0 \leq t < t_0 + 2 \\ t-2 & \text{für } t \geq t_0 + 2 \end{cases}.$$

Daraus folgt

$$L_t^{-1}(\omega) = \begin{cases} t & \text{für } t < t_0 \\ t+2 & \text{für } t \geq t_0 \end{cases}$$

und somit

$$L_{t-}^{-1}(\omega) = \begin{cases} t & \text{für } t \leq t_0 \\ t+2 & \text{für } t > t_0 \end{cases}.$$

(ii) Hier und im weiteren Verlauf soll $\inf \varnothing = \infty$ gelten.

(iii) L_t^{-1} und L_{t-}^{-1} sind nach [6] (Proposition 7, S. 113; S. 121f.) Stoppzeiten bezüglich der kanonischen Filtration $\mathcal{F}$ von X.

(iv) Die inverse Lokalzeit „eliminiert“ gerade die Zeitabschnitte, wo die Lokalzeit konstant ist, d.h. wo der Prozess $\overline{X} - X$ nicht bei 0 ist und somit X keine temporären Maxima erreicht.

Mit der von uns aufgestellten Forderung, dass X nach $-\infty$ driften soll, können wir jetzt zwei Eigenschaften des Grenzwertes der Lokalzeit ($L_\infty := \lim_{t\to\infty} L_t$) zeigen:

Satz 1.11. *Für einen Lévy-Prozess X mit Drift nach $-\infty$ gilt:*

(i) $P(L_\infty < \infty) = 1$;

(ii) $P(\bigcup_{t>0}\{L_t^{-1} = \infty\}) = 1.$

Beweis. (i) Sei $\omega \in N^c := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty\}$. Dies bedeutet, dass für alle $S \in \mathbb{R}$ ein $t(S) \in [0, \infty)$ existiert, so dass für alle $t \geq t(S)$

$$X_t(\omega) < S$$

gilt. Sei nun $S = \overline{X}_{t_0}(\omega)$ für ein beliebiges $t_0 > 0$. Daraus folgt nun, dass ein $t(S) \in [0, \infty)$ existiert mit

$$X_t(\omega) < \overline{X}_{t_0}(\omega)$$

für alle $t \geq t(S)$. Also gilt

$$L_t(\omega) = L_{t(S)}(\omega) < \infty$$

für alle $t \geq t(S)$, d.h. $N^c \subset \{L_\infty < \infty\}$ und damit

$$P(L_\infty < \infty) \geq P(N^c) = 1.$$

(ii) Sei $\omega \in \{L_\infty < \infty\}$. Da $L_t(\omega)$ wachsend ist in t und $L_\infty(\omega) < \infty$ gilt, existiert ein $K \geq 0$, so dass

$$L_t(\omega) \leq K$$

für alle $t \in [0, \infty)$. Damit ist

$$L_K^{-1} = \inf\{s \geq 0 : L_s(\omega) > K\} = \inf \varnothing = \infty$$

und somit

$$L_t^{-1}(\omega) = \infty$$

für alle $t \geq K$. Dies impliziert

$$\omega \in \bigcup_{t>0}\{L_t^{-1} = \infty\}$$

und

$$\{L_\infty < \infty\} \subset \bigcup_{t>0}\{L_t^{-1} = \infty\}$$

und damit schon die Behauptung, denn nach (i) gilt $P(\{L_\infty < \infty\}) = 1$. □

Mit Hilfe von [6] lassen sich nun Aussagen zur probabilistischen Struktur der inversen Lokalzeit L^{-1} treffen. Zuvor jedoch benötigen wir noch eine Definition:

Definition 1.12. *X wird gekillt mit Rate q,* wenn ein $q > 0$, ein Lévy-Prozess Y (nach Definition 1.1) und eine von Y unabhängige Exp(q)-verteilte Stoppzeit τ existieren, so dass

$$X_t(\omega) = \begin{cases} Y_t(\omega) & \text{für } t < \tau(\omega) \\ \delta & \text{für } t \geq \tau(\omega) \end{cases},$$

wobei δ ein isolierter Punkt des Zustandsraums von X ist und als *Friedhof* bezeichnet wird. Im Falle $q = 0$ ist X ein gewöhnlicher Lévy-Prozess (vgl. Definition 1.1).

In unserem Fall ist der Zustandsraum des gekillten Prozesses gerade $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ bzw. $[0, \infty]$ bei Subordinatoren. Formulieren wir nun den oben angekündigten Satz über die inverse Lokalzeit L^{-1}:

Satz 1.13. *Die inverse Lokalzeit L^{-1} ist ein (möglicherweise mit Rate $q > 0$ gekillter) Subordinator.*

Beweis. Bertoin [6], Theorem 8, S. 114 und S. 121f. . □

An dieser Stelle sind einige Bemerkungen festzuhalten:

Bemerkungen 1.14. (i) Mit der Voraussetzung $\lim\limits_{t\to\infty} X_t = -\infty$ P-f.s. und Satz 1.11 folgt, dass L^{-1} ein mit Rate $q > 0$ gekillter Subordinator ist.

(ii) Der Friedhof von L^{-1} ist der in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ isolierte Punkt $\delta = \infty$.

(iii) Gekillte Prozesse werden auch als *defekte Prozesse* bezeichnet.

Nach der ausführlichen Einführung der Lokalzeit und deren Inverser wollen wir nun dem Titel dieses Abschnitts Rechnung tragen und den aufsteigenden Leiterhöhenprozess definieren:

Definition 1.15. Der Prozess $H = \{H_t : t \geq 0\}$ wird definiert durch

$$H_t := X_{L_t^{-1}}$$

und als *aufsteigender Leitehöhenprozess* bezeichnet. Im Falle $L_t^{-1} = \infty$ gilt $H_t = \infty$.

Bemerkungen 1.16. (i) Falls $\overline{X} - X$ einen Markov-Prozess mit der Eigenschaft darstellt, dass 0 regulärer Punkt ist, so existiert eine stetige Version der Lokalzeit L und damit sind die Pfade von L^{-1} streng wachsend. Die obige Definition ist für den Fall also sinnvoll. Falls 0 irregulärer Punkt ist, so existiert keine stetige Version der Lokalzeit L. Die Pfade von H sind dann Treppenfunktionen, deren „Treppenhöhen" gerade die temporären Maxima darstellen.

(ii) Der hier definierte Leiterhöhenprozess ist das Analogon zum schwach aufsteigenden Leiterhöhenprozess bei Random Walks. Für weitere Details sei der interessierte Leser auf [22] (S. 137f.) verwiesen.

Um auch zum Prozess H probabilistische Informationen zu bekommen, folgern wir aus einem Lemma in [6]:

Satz 1.17. *Unter den von uns getroffenen Annahmen ist L_∞ Exp(q)-verteilt mit $q > 0$ und der Prozess $\{(L_t^{-1}, H_t) : L_\infty > t\}$ ein zweidimensionaler Lévy-Prozess, der gekillt wird mit Rate q.*

Beweis. Wegen der Voraussetzung $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ P-f.s. ist 0 transient für den reflektierten Prozess $\overline{X} - X$. Die Behauptung folgt dann mit [6] (Lemma 2, S. 157). □

H ist also ein defekter Subordinator, denn der Prozess X ist nicht defekt und damit gilt $H_t = X_{L_t^{-1}} = \infty$ genau dann, wenn $L_t^{-1} = \infty$ eintritt.

Wenden wir uns nun dem zweidimensionalen Prozess (L^{-1}, H) zu, welcher schon in Satz 1.17 erwähnt wurde. Aus diesem können wir jetzt eine Aussage über stochastische Unabhängigkeit schließen:

Korollar 1.18. *Bedingt unter dem Ereignis $\{L_\infty > t\}$ verhält sich der Prozess (L^{-1}, H) auf $[0, t)$ wie ein von L_∞ unabhängiger zweidimensionaler Subordinator $(\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H})$.*

Beweis. Die Behauptung folgt mit Satz 1.17 und Definition 1.12. Die dort auftretenden unabhängigen Zufallsvariablen Y und τ sind hier $Y = (\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H})$ und $\tau = L_\infty$. □

Der zweidimensionale Subordinator $(\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H})$ wird im weiteren als eine *nichtdefekte Version von* (L^{-1}, H) bezeichnet. Das obige Korollar impliziert also folgende Verteilungsgleichheit:

$$\{(L_t^{-1}, H_t) : L_\infty > t\} \stackrel{d}{=} \{(\mathscr{L}_t^{-1}, \mathscr{H}_t) : e_q > t\}, \tag{1.5}$$

wobei e_q eine von $(\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H})$ unabhängige Exp(q)-verteilte Zufallsgröße ist.

Nachdem wir den aufsteigenden Leiterhöhenprozess eingeführt haben, soll auch der absteigende Leiterhöhenprozess definiert werden. Um diesen zu bekommen, muss man den Infimumsprozess $\underline{X} = \{\underline{X}_t : t \geq 0\}$ mit $\underline{X}_t = \inf\{X_s : s \in [0,t]\}$ und den zugehörigen reflektierten Prozess $\underline{X} - X$ betrachten. Man konstruiert dafür wieder eine Lokalzeit $\hat{L}$ bei 0, die genau dann wächst, wenn X neue temporäre Minima erreicht, bezeichnet mit $\hat{L}^{-1}$ analog zum vorherigen Vorgehen die inverse Lokalzeit und definiert:

Definition 1.19. Der Prozess $\hat{H} = \{\hat{H}_t : t \geq 0\}$ wird definiert durch

$$\hat{H}_t := X_{\hat{L}_t^{-1}}$$

und heißt *absteigender Leiterhöhenprozess.*

Auch zum absteigenden Leiterhöhenprozess sind einige Bemerkungen zu formulieren:

Bemerkungen 1.20. (i) Es sei hier darauf hingewiesen, dass der absteigende Leiterhöhenprozess $\hat{H}$ nur negative Werte (und 0) annehmen kann. Die in der Literatur übliche Definition wäre allerdings $-\hat{H}_t$, denn dort wird der absteigende Leiterhöhenprozess von X aufgefasst als der aufsteigende Leiterhöhenprozess von $\hat{X} := -X$.

(ii) Da wir voraussetzen, dass X nach $-\infty$ driftet, ist $\hat{H}$ nicht defekt, denn $\hat{L}_\infty = \infty$ P-f.s. und damit $L_t^{-1} < \infty$ P-f.s. für alle $t \geq 0$.

(iii) $\hat{H}$ besitzt monoton fallende Pfade.

(iv) $-\hat{H}$ ist ein Subordinator.

Abschließend wollen wir noch kurz auf einige Notationen hinweisen:

Definition 1.21. $\Pi_X, \Pi_{\hat{H}}$ und $\Pi_{\mathscr{H}}$ seien die *Lévy-Maße von X, $\hat{H}$ und $\mathscr{H}$*, wobei $\Pi_{\hat{H}}$ und $\Pi_{\mathscr{H}}$ nur Masse auf $(-\infty, 0)$ bzw. $(0,\infty)$ besitzen (vgl. Satz 1.6). Die Tails seien für $u > 0$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_X^+(u) &= \Pi_X((u,\infty)) \\
\overline{\Pi}_X^-(u) &= \Pi_X((-\infty,-u)) \\
\overline{\Pi}_X(u) &= \overline{\Pi}_X^+(u) + \overline{\Pi}_X^-(u) \\
\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) &= \Pi_{\mathscr{H}}((u,\infty)) \\
\overline{\Pi}_{\hat{H}}(u) &= \Pi_{\hat{H}}((-\infty,-u)).
\end{aligned}$$

1.3 Erneuerungsmaße und Ersteintrittszeiten

Von zentraler Bedeutung in unseren Betrachtungen wird die Ersteintrittszeit

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : X_t > u\}$$

für $u > 0$ sein. Sie gibt den ersten Zeitpunkt an, zu dem der Prozess X das Niveau u überschreitet, also den Zeitpunkt, zu dem die Reserve aufgebraucht ist. Es sei hier nochmal daran erinnert, dass Schadensauszahlungen einer Aufwärtsbewegung und Prämieneinzahlungen einer Abwärtsbewegung des Prozesses entsprechen. Damit eine Versicherung überhaupt die Möglichkeit hat Gewinne zu erwirtschaften, sollten die Einzahlungen die Auszahlungen überwiegen. Deshalb nehmen wir an, dass X nach $-\infty$ driftet.

Wir wollen im Folgenden unter anderem $P(\tau(u) < \infty)$, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Startkapital u der Versicherung in endlicher Zeit aufgebraucht wird, und das asymptotische Verhalten dieser Wahrscheinlichkeit für $u \to \infty$ untersuchen. Des Weiteren werden wir noch den sogenannten Overshoot $X_{\tau(u)} - u$ betrachten.

Für die weitere Entwicklung unserer Ergebnisse benötigen wir die Erneuerungsmaße der Prozesse H und $\hat{H}$:

Definition 1.22. (i) $V(\cdot) = \int_0^\infty P(H_t \in \cdot)\, dt$ ist das *Erneuerungsmaß von H* auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}$ Borelsche σ-Algebra.

(ii) $\hat{V}(\cdot) = \int_{-\infty}^0 P(\hat{H}_t \in \cdot)\, dt$ ist das *Erneuerungsmaß von $\hat{H}$* auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Diese Definition beschreibt das exakte Pendant zu Erneuerungsmaßen für Random Walks $(S_n)_{n\geq 0}$. Bei diesen betrachtet man das zufällige Zählmaß

$$N(\omega, \cdot) := \sum_{n\geq 0} \delta_{S_n(\omega)}(\cdot)$$

auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\omega \in \Omega$, und bildet den Erwartungswert.

$$U(\cdot) := E(\sum_{n\geq 0} \delta_{S_n}(\cdot)) = \sum_{n\geq 0} P(S_n \in \cdot)$$

ist dann das Erneuerungsmaß von $(S_n)_{n\geq 0}$ (vgl. Alsmeyer [2], S. 245). Bei Random Walks wird also über die diskrete Zeit $n \in \mathbb{N}_0$ summiert, bei Lévy-Prozessen über die stetige Zeit $t \geq 0$ integriert.

Das Erneuerungsmaß von H lässt sich auch in Abhängigkeit vom nichtdefekten Prozess $\mathscr{H}$ schreiben:

Lemma 1.23. *Für das Erneuerungsmaß V von H gilt*

$$V(\cdot) = \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{H}_t \in \cdot)\, dt.$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
V(\cdot) &= \int_0^\infty P(H_t \in \cdot)\, dt \\
&= \int_0^\infty P(H_t \in \cdot, L_\infty > t)\, dt \\
&= \int_0^\infty P(\mathscr{H}_t \in \cdot, e_q > t)\, dt \\
&= \int_0^\infty P(\mathscr{H}_t \in \cdot)\, P(e_q > t)\, dt \\
&= \int_0^\infty P(\mathscr{H}_t \in \cdot)\, e^{-qt}\, dt,
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

wobei die zweite Identität daraus folgt, dass V ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist, die dritte aus (1.5), die vierte aus der stochastischen Unabhängigkeit von e_q und $\mathscr{H}$ und die fünfte daraus, dass e_q eine Exp(q)-verteilte Zufallsgröße ist. □

Wir wollen nun einen Satz beweisen, mit dessen Hilfe wir später Angaben über die Verteilungen von $X_{\tau(u)}$, $L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}$ und $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$ treffen können. Dabei gibt $L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}$ die letzte aufsteigende Leiterzeit und $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$ die letzte aufsteigende Leiterhöhe vor Ruin an.

Satz 1.24. *Seien $u > 0$ und $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkte, nichtnegative und messbare Funktionen mit $g(u) = 0$. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
&E\left(f\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \right) g\left(X_{\tau(u)}\right)\, h\left(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} \right)\, \mathbf{1}_{\{\tau(u) < \infty\}} \right) \\
&\quad = \int_{[0,u]} f(y) \int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\, V^h(dy)
\end{aligned}
$$

mit

$$
V^h(\cdot) = \int_0^\infty e^{-qt} \int_{[0,\infty)} h(z)\, P(\mathscr{H}_{t-} \in \cdot, \mathscr{L}^{-1}_{t-} \in dz)\, dt.
$$

Beweis. Sei $T(u) := \inf\{t \geq 0 : H_t > u\}$. Dann gilt P-f.s. $L_{\tau(u)} = T(u)$ bzw. P-f.s. $L^{-1}_{T(u)} = \tau(u)$. $T(u)$ und $\tau(u)$ sind im allgemeinen nicht gleich, da sich beide Stoppzeiten auf verschiedene Zufallsgrößen beziehen, die wiederum unterschiedlichen Zeitskalierungen unterliegen. Es gilt nun P-f.s.

$$
X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} = H_{L_{\tau(u)-}} = H_{T(u)-}
$$

und P-f.s. $\{T(u) < L_\infty\} = \{\tau(u) < \infty\}$. Des Weiteren ist L_∞ nach Satz 1.17 Exp(q)-verteilt. Die Behauptung wird nun mit einigen Umformungen bewiesen. Dabei sei noch einmal daran erinnert, dass $H_t = H_{t-} + \triangle H_t$ und $g(u) = 0$ ist, was beides in in der vierten Identität eingeht:

$$\begin{aligned}
E&\left(f\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}\right) g\left(X_{\tau(u)}\right) h\left(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}\right) \mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}}\right)\\
&= E\left(f\left(H_{T(u)-}\right) g\left(H_{T(u)}\right) h\left(L^{-1}_{T(u)-}\right) \mathbf{1}_{\{T(u)<L_\infty\}}\right)\\
&= E\left(\sum_{0<t<L_\infty} f\left(H_{t-}\right) g\left(H_t\right) h\left(L^{-1}_{t-}\right) \mathbf{1}_{\{T(u)=t\}}\right)\\
&= E\left(\sum_{0<t<L_\infty} f\left(H_{t-}\right) g\left(H_t\right) h\left(L^{-1}_{t-}\right) \mathbf{1}_{\{H_{t-}\le u\le H_t\}}\right) \qquad (1.7)\\
&= E\left(\sum_{0<t<L_\infty} f\left(H_{t-}\right) g\left(H_t\right) h\left(L^{-1}_{t-}\right) \mathbf{1}_{\{H_{t-}\le u< H_{t-}+\triangle H_t\}}\right)\\
&= E\left(\sum_{0<t<e_q} \underbrace{f\left(\mathscr{H}_{t-}\right) g\left(\mathscr{H}_{t-}+\triangle\mathscr{H}_t\right) h\left(\mathscr{L}^{-1}_{t-}\right) \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-}\le u<\mathscr{H}_{t-}+\triangle\mathscr{H}_t\}}}_{:=Z_t}\right)
\end{aligned}$$

wobei für die zweite Identität benötigt wird, dass die Pfade von H höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen und $g(u) = 0$ gilt, und in der letzten Identität (1.5) eingeht. Um den obigen Term weiter umzuformen verwendet man die Theorie bedingter Erwartungswerte und Verteilungen (insbesondere [1], Satz 53.10, S. 306f.) und kann (1.7) fortführen:

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{0<t<e_q} Z_t\right) &= E\left(E\left(\sum_{0<t<e_q} Z_t \,\middle|\, e_q\right)\right)\\
&= \int_{[0,\infty)} E\left(\sum_{0<t<y} Z_t\right) P(e_q \in dy)\\
&= E\left(\sum_{t>0}\left(\int_t^\infty q\, e^{-qy}\, dy\right) Z_t\right)\\
&= E\left(\sum_{t>0} e^{-qt} f\left(\mathscr{H}_{t-}\right) g\left(\mathscr{H}_{t-}+\triangle\mathscr{H}_t\right) h\left(\mathscr{L}^{-1}_{t-}\right) \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-}\le u<\mathscr{H}_{t-}+\triangle\mathscr{H}_t\}}\right),
\end{aligned} \qquad (1.8)$$

wobei für die zweite Identität die Unabhängigkeit von e_q und $\left(\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H}\right)$ und für die dritte $e_q \overset{d}{=} \operatorname{Exp}(q)$ verwendet wird. Um nun die Umformungen fortzusetzen, wenden wir die Kompensationsformel (siehe Satz A.1 im Anhang) auf den Poissonschen Punktprozess $z(t) = \triangle \mathscr{H}_t$ $(\in E = [0, \infty))$ mit Intensitätsmaß $\Pi_{\mathscr{H}}$ (vgl. Satz 1.5) an. Dabei ist der in der Kompensationsformel auftretende Prozess C definiert durch

$$C_t(s) = \left(e^{-qt} f(\mathscr{H}_{t-})\, g(\mathscr{H}_{t-} + s)\, h\left(\mathscr{L}_{t-}^{-1}\right) \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-} \leq u < \mathscr{H}_{t-} + s\}}\right).$$

Dieser ist vorhersagbar (d.h. messbar bezüglich der von den linksseitig stetigen, adaptierten Prozessen erzeugten σ-Algebra; vgl. [6]), da f, g und h messbar und $\mathscr{H}_{t-}$ und $\mathscr{L}_{t-}^{-1}$ linksseitig stetige Prozesse sind. Die Bedingung $C_t(\gamma) = 0$ ist hier irrelevant, da der Friedhof $\gamma = \infty$ von $\triangle \mathscr{H}_t$ nicht erreicht wird. Die Umformungen (1.8) können damit nun fortgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
&= E\left(\int_0^\infty e^{-qt} f(\mathscr{H}_{t-})\, h(\mathscr{L}_{t-}^{-1})\, \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-} \leq u\}} \int_{[0,\infty)} g(\mathscr{H}_{t-} + s)\, \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-} + s > u\}}\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\, dt\right) \\
&= \int_0^\infty e^{-qt}\, E\left(f(\mathscr{H}_{t-})\, h(\mathscr{L}_{t-}^{-1})\, \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-} \leq u\}} \int_{(0,\infty)} g(\mathscr{H}_{t-} + s)\, \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-} + s > u\}}\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt} \left(\int_{[0,u]\times[0,\infty)} f(y)\, h(z)\right. \\
&\quad \times \left.\left(\int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\right) P(\mathscr{H}_{t-} \in dy, \mathscr{L}_{t-}^{-1} \in dz)\right) dt \\
&= \int_{[0,u]} f(y) \left(\int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\right) \\
&\quad \times \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-qt} \left(\int_{[0,\infty)} h(z)\, P(\mathscr{H}_{t-} \in dy, \mathscr{L}_{t-}^{-1} \in dz)\right) dt\right)}_{:= V^h(dy)} \\
&= \int_{[0,u]} f(y) \left(\int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\right) V^h(dy),
\end{aligned}$$

wobei bei der zweiten Identität wegen $E\left(\mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-} \leq u\}} \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-} > u\}}\right) = 0$ die linke Integrationsgrenze des zweiten Integrals offen gewählt werden kann. $\square$

Zum gerade bewiesenen Satz wollen wir noch eine Bemerkung formulieren:

Bemerkung 1.25. In der Vorlage dieser Arbeit [20] (Theorem 2.4, S. 1771f.) wird obiger Satz 1.24 mit der impliziten Annahme $V(0) := V(\{0\}) = 0$ bewiesen. Da wir hier auf jene Annahme verzichten und die Behauptung allgemeiner zeigen, unterscheidet sich unsere Aussage von der in der Vorlage darin, dass hier über $y \in [0, u]$ und in der Vorlage über $y \in (0, u]$ integriert wird. Dies hat auch Auswirkungen auf spätere Sätze und Theoreme, bei denen sich z.T. Unterschiede der obigen Form ergeben, falls über das Erneuerungsmaß V integriert wird.

Satz 1.24 wird später in Satz 1.43 Anwendung finden, für dessen Beweis vorher unter anderem noch einige fluktuationstheoretische Aspekte erarbeitet werden müssen. Darum kommen wir darauf erst später zurück.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch eine explizite Darstellung der Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau < \infty)$ angeben, die bei diskreter Zeit in der Literatur auch oft unter dem Begriff *Pollaczek-Khintchine-Formel* zu finden ist. Das dort auftretende $q > 0$ ist uns schon in Satz 1.17 begegnet.

Satz 1.26. *Für die Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u) < \infty)$ gilt bei gegebener Reserve $u > 0$*

$$P(\tau(u) < \infty) = q\, V((u, \infty)) := q\, \overline{V}(u). \tag{1.9}$$

Beweis. Nach [6] (S. 172, Proposition 17(i)) gilt bei negativer Drift

$$V(u) := V([0, u)) = k\, P(\overline{X}_\infty \leq u) = k\, P(\tau(u) = \infty),$$

wobei $k > 0$ eine geeignete Konstante ist. Im Beweis dazu wird diese Konstante k genauer beschrieben. Sie stimmt nämlich mit $\frac{1}{q}$ überein, wobei q in Satz 1.17 charakterisiert wurde. Damit können wir die Behauptung zeigen:

$$\begin{aligned} P(\tau(u) < \infty) &= 1 - P(\tau(u) = \infty) \\ &= 1 - \frac{1}{k}\, V([0, u)) \\ &= 1 - q\, (V([0, \infty)) - V((u, \infty))) \\ &= 1 - q\, \left(\frac{1}{q} - V((u, \infty)) \right) \\ &= q\, V((u, \infty)). \end{aligned}$$

□

1.4 Die Wiener-Hopf Faktorisierung

Bei Random Walks gibt die Wiener-Hopf Faktorisierung eine Beziehung zwischen der Zuwachsverteilung des Random Walks und der Verteilungen seiner ersten Leiterhöhen an (vgl. Alsmeyer [3], S. 340).

Im Rahmen von Lévy-Prozessen ist mit der Wiener-Hopf Faktorisierung eine Zusammenstellung von Ergebnissen bezüglich des Supremumsprozesses $\overline{X}$, der Laplace-Exponenten von (L^{-1}, H) und $(\hat{L}^{-1}, \hat{H})$ und des charakteristischen Exponenten Ψ von X gemeint. Da aber nur letzteres für unsere Zwecke von Belang ist, verweisen wir für die anderen Resultate auf Kyprianou [22] (Theorem 6.14, S. 147f.; Bemerkungen für zusammengesetzte Poisson-Prozesse, S.156f.).

Das nun folgende Resultat wird oft auch als *Wiener-Hopf Faktorisierung des charakteristischen Exponenten* bezeichnet. Dabei vereinbart man, dass $e^{i\vartheta H_1} = 0$ für $H_1 = \infty$ gilt.

Satz 1.27. *Es existiert ein $k > 0$, so dass für den charakteristischen Exponenten Ψ von X*

$$k\Psi(\vartheta) = \Psi_H(\vartheta)\,\Psi_{\hat{H}}(\vartheta) \tag{1.10}$$

für $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $\Psi_H(\vartheta) := -\log E e^{i\vartheta H_1}$ und $\Psi_{\hat{H}}(\vartheta) := -\log E e^{i\vartheta \hat{H}_1}$ gilt. Die Konstante k hängt von der Normierung der Lokalzeit L ab.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir das folgende wichtige Resultat:

Satz 1.28. *Seien $\lambda > 0$ und τ eine Exp(λ)-verteilte und von X unabhängige Stoppzeit. Dann sind $\overline{X}_\tau$ und $(\overline{X}_\tau - X_\tau)$ stochastisch unabhängig.*

Beweis Satz 1.28. Bertoin [6], Theorem 5(i), S. 160. □

Damit können wir nun Satz 1.27 beweisen:

Beweis Satz 1.27. In diesem Beweis folgen wir im Wesentlichen den Ausführungen von Bertoin [6] und Kyprianou [22]. Es muss dabei unterschieden werden, ob der zugrunde liegende Lévy-Prozess ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist oder nicht. $X = \{X_t : t \geq 0\}$ ist ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, wenn er definiert ist durch

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Y_n,$$

wobei $N = \{N_t : t \geq 0\}$ einen Poisson-Prozess und Y_1, Y_2, $Y_3, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen, unabhängig von N, darstellen.

Für den Fall, dass X ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, wollen wir auf einen ausführlichen Beweis verzichten und auf einige Bemerkungen am Ende dieses Beweises verweisen.

Sei X also kein zusammengesetzter Poisson-Prozess und τ eine von X unabhängige $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Stoppzeit, $\lambda > 0$. Dann bekommt man mit Satz 1.28

$$\begin{aligned} Ee^{i\vartheta X_\tau} &= Ee^{i\vartheta(X_\tau - \overline{X}_\tau + \overline{X}_\tau)} \\ &= Ee^{i\vartheta \overline{X}_\tau} Ee^{i\vartheta(X_\tau - \overline{X}_\tau)} \\ &= Ee^{i\vartheta \overline{X}_\tau} Ee^{i\vartheta \underline{X}_\tau} \\ &:= \Psi_\lambda^+(\vartheta)\, \Psi_\lambda^-(\vartheta), \end{aligned}$$

wobei die dritte Identität mit [6] (Proposition 3, S. 158) folgt. Außerdem kann man $Ee^{i\vartheta X_\tau}$ auch in Abhängigkeit von Ψ darstellen:

$$\begin{aligned} Ee^{i\vartheta X_\tau} &= E(E(e^{i\vartheta X_\tau} \mid \tau)) \\ &= \int E(e^{i\vartheta X_\tau} \mid \tau = t)\, P^\tau(dt) \\ &= \int_0^\infty Ee^{i\vartheta X_t}\, \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\Psi(\vartheta)\, t}\, \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \Psi(\vartheta)}. \end{aligned}$$

Man hat also eine erste Faktorisierung:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \Psi(\vartheta)} = \Psi_\lambda^+(\vartheta)\, \Psi_\lambda^-(\vartheta).$$

Für unsere Zwecke formen wir diese noch um:

$$\Psi(\vartheta) = \frac{\lambda}{\Psi_\lambda^+(\vartheta)\, \Psi_\lambda^-(\vartheta)} - \lambda. \tag{1.11}$$

Da X kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, folgt mit [6] (Proposition 15, S. 30)

$$\int_0^\infty e^{-qt} P(X_t = 0)\, dt = 0$$

und damit $P(X_t = 0) = 0$ für fast alle $t \geq 0$. Für die Laplace-Exponenten

$$\kappa(\alpha, \beta) := -\log(Ee^{-\alpha L_1^{-1} - \beta H_1} \mathbf{1}_{\{1 < L_\infty\}}) = -\log(Ee^{-\alpha L_1^{-1} - \beta H_1})$$

mit $e^{-\infty} = 0$ und

$$\hat{\kappa}(\alpha, \beta) := -\log(Ee^{-\alpha \hat{L}_1^{-1} + \beta \hat{H}_1})$$

gilt nach [22] (Theorem 6.14, S. 147f.) für α, $\beta \geq 0$

$$\kappa(\alpha, \beta) = k \exp\left(\int_0^\infty \int_{(0,\infty)} \frac{e^{-t} - e^{-\alpha t - \beta x}}{t} P(X_t \in dx)\, dt\right)$$

und

$$\hat{\kappa}(\alpha, \beta) = \hat{k} \exp\left(\int_0^\infty \int_{(-\infty,0)} \frac{e^{-t} - e^{-\alpha t + \beta x}}{t} P(X_t \in dx)\, dt\right),$$

wobei k, $\hat{k}$ positiv und abhängig von der Normierung der Lokalzeit sind. Man beachte außerdem, dass auch in [22] $\hat{H}$ nichtnegativ ist und damit unserem $-\hat{H}$ entspricht. Mit $\beta = 0$ und $\alpha = \lambda$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
\kappa(\lambda, 0)\, \hat{\kappa}(\lambda, 0) &= k\, \hat{k} \exp\left(\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-\lambda t}}{t} \left(P(X_t > 0) + P(X_t < 0)\right) dt\right) \\
&= k\, \hat{k} \exp\left(\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-\lambda t}}{t}\, dt\right) \\
&= k'\, \lambda,
\end{aligned}$$

wobei die zweite Identität gilt, da $P(X_t = 0) = 0$ für fast alle $t \geq 0$ und die dritte Identität mit Frullanis Integral (Satz A.2 im Anhang mit $a = b = 1$, $\hat{\lambda} = \lambda - 1$) und $k' := k\, \hat{k}$ zu erklären ist. Nach [22] (Theorem 6.14, S. 147) sind

$$\Psi_\lambda^+(\vartheta) = \frac{\kappa(\lambda, 0)}{\kappa(\lambda, -i\vartheta)}$$

und

$$\Psi_\lambda^-(\vartheta) = \frac{\hat{\kappa}(\lambda, 0)}{\hat{\kappa}(\lambda, i\vartheta)},$$

was zusammen mit (1.11)

$$\begin{aligned}\Psi(\vartheta) &= \frac{\lambda}{\Psi^+_\lambda(\vartheta)\,\Psi^-_\lambda(\vartheta)} - \lambda \\ &= \lambda\left(\frac{\kappa(\lambda,-i\vartheta)\,\hat\kappa(\lambda,i\vartheta)}{\kappa(\lambda,0)\,\hat\kappa(\lambda,0)} - 1\right) \\ &= \lambda\left(\frac{\kappa(\lambda,-i\vartheta)\,\hat\kappa(\lambda,i\vartheta)}{k'\,\lambda} - 1\right) \\ &\xrightarrow{\lambda\to 0} \frac{\kappa(0,-i\vartheta)\,\hat\kappa(0,i\vartheta)}{k'}\end{aligned}$$

impliziert. Dies ergibt die Behauptung, falls X kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist:

$$\begin{aligned}k'\Psi(\vartheta) &= \left(-\log Ee^{i\vartheta H_1}\right)\left(-\log Ee^{i\vartheta \hat H_1}\right) \\ &= \Psi_H(\vartheta)\,\Psi_{\hat H}(\vartheta).\end{aligned}$$

Für den Fall, dass X ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, muss man unter anderem beachten, dass $P(X_t = 0) = 0$ für fast alle $t \geq 0$ nicht mehr erfüllt ist. Um diesem Problem zu begegnen definiert man den Prozess $X^\epsilon := \{X^\epsilon_t : t \geq 0\}$ mit

$$X^\epsilon_t := X_t + \epsilon\, t$$

für $t \geq 0$ und $\epsilon \in \mathbb{R}$, welcher für $\epsilon \neq 0$ kein zusammengesetzter Poisson-Prozess mehr ist, und wendet [22] (Theorem 6.14, S. 147) auf X^ϵ an. Für $\epsilon \to 0$ erhält man dann

$$\kappa(\alpha,\beta) = k\,\exp\left(\int_0^\infty \int_{[0,\infty)} \frac{e^{-t} - e^{-\alpha t - \beta x}}{t}\, P(X_t \in dx)\, dt\right).$$

Wir verweisen aber auf [22] (S. 156-158) für eine vollständige Argumentation und weitere Details. □

Zur Wiener-Hopf Faktorisierung des charakteristischen Exponenten wollen wir noch zwei Bemerkungen formulieren:

Bemerkungen 1.29. (i) Da die Konstante k in Satz 1.27 von der Normierung der Lokalzeit L abhängt, können wir ohne Einschränkung L so wählen, dass $k = 1$ gilt. Dabei beachte man, dass sich dadurch unter anderem auch $\mathscr{L}$, $H, \mathscr{H}$ und q ändern.

(ii) Man kann sogar für alle $z \in \mathbb{C}$ die Äquivalenz

$$|\log Ee^{zX_1}| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \left|\left(\log Ee^{zH_1}\right)\left(\log Ee^{z\hat H_1}\right)\right| < \infty$$

zeigen. Für diese z gilt dann auch die Wiener-Hopf-Faktorisierung

$$\Psi(-iz) = -\log Ee^{zX_1} = \left(-\log Ee^{zH_1}\right)\left(-\log Ee^{z\hat{H}_1}\right) = (-\Psi_H(-iz))\,(\Psi_{\mathscr{H}}(-iz))\,.$$

Gleichung (1.10) bleibt also selbst für alle $\vartheta \in \mathbb{C}$ gültig. Auf einen Beweis dieser Aussage wollen wir jedoch verzichten.

1.5 Laplace-Exponenten und weitere Resultate

Nachdem wir die Wiener-Hopf Faktorisierung des charakteristischen Exponenten gezeigt haben, wollen wir uns nun der Laplace-Transformierten $Ee^{-\vartheta\mathscr{H}_1}$ von $\mathscr{H}_1$ und der momenterzeugenden Funktion $Ee^{\vartheta\hat{H}_1}$ von $\hat{H}_1$ zuwenden. Da $\mathscr{H}_1$ und $-\hat{H}_1$ Subordinatoren sind, gilt $|e^{-\vartheta\mathscr{H}_1}| \leq 1$ und $|e^{\vartheta\hat{H}_1}| \leq 1$ für $\vartheta \geq 0$, und damit sind die Laplace-Transformierte und die momenterzeugende Funktion für $\vartheta \geq 0$ endlich.

Seien

$$\Phi(\vartheta) := -\log Ee^{-\vartheta\mathscr{H}_1}$$

und

$$\hat{\Phi}(\vartheta) := -\log Ee^{\vartheta\hat{H}_1},$$

dann folgt aus der unendlichen Teilbarkeit

$$Ee^{-\vartheta\mathscr{H}_t} = e^{-\Phi(\vartheta)\,t}$$

bzw.

$$Ee^{\vartheta\hat{H}_t} = e^{-\hat{\Phi}(\vartheta)\,t}$$

analog zu den Rechnungen nach Satz 1.4. Hier ist uns nun daran gelegen, die Darstellungen von Φ und $\hat{\Phi}$ genauer zu bestimmen. Vorher wollen wir jedoch noch einmal auf den charakteristischen Exponenten Ψ zurückkommen. Er wird bekanntlich gegeben durch $Ee^{i\vartheta X_t} = e^{-\Psi(\vartheta)\,t}$, und dessen Darstellung, die in Satz 1.4 angegeben wird, vereinfacht sich, wenn der Lévy-Prozess X von beschränkter Variation ist. Diese Eigenschaft müssen wir zunächst definieren (nach Weisstein [28]):

Definition 1.30. Ein stochastischer Prozess $X = \{X_t : t \geq 0\}$ heißt *von beschränkter Variation*, wenn für P-f.a. $\omega \in \Omega$ und für alle $[a,b] \subset [0,\infty)$ ein $M(\omega,[a,b])$ existiert, so dass

$$\sum_{j=1}^{n} |X_{t_j}(\omega) - X_{t_{j-1}}(\omega)| \leq M(\omega,[a,b]) \tag{1.12}$$

für alle $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, gilt.

Hiermit kann nun eine Aussage über die Gestalt von Ψ getroffen werden:

Satz 1.31. *Ein Lévy-Prozess X ist genau dann von beschränkter Variation, wenn $\sigma^2 = 0$ im charakteristischen Exponenten von X und*

$$\int (1 \wedge |x|)\, \Pi_X(dx) < \infty$$

gilt. Wenn diese Eigenschaften erfüllt sind, so folgt für $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$\Psi(\vartheta) = -ic\vartheta + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\vartheta x})\, \Pi_X(dx)$$

mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$. Dabei wird c als Driftkoeffizient bezeichnet.

Beweis. Bertoin [6], S. 15f.. □

Da $-\hat{H}$ und $\mathscr{H}$ Subordinatoren sind, haben sie insbesondere monoton wachsende Pfade. Setzt man nun $M(\omega, [a,b]) := -\hat{H}_b(\omega) - (-\hat{H}_a(\omega))$ bzw. $M(\omega, [a,b]) := \mathscr{H}_b(\omega) - \mathscr{H}_a(\omega)$, so folgt, dass $-\hat{H}$ und $\mathscr{H}$ von beschränkter Variation sind, und in (1.12) gilt sogar Gleichheit. Also bekommen wir für die charakteristischen Exponenten $\Psi_{\mathscr{H}_1} := \Psi_{\mathscr{H}}$ und $\Psi_{-\hat{H}_1} := \Psi_{-\hat{H}}$ nach Satz 1.31

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathscr{H}}(\vartheta) &= -ic\vartheta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\vartheta x})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dx),\ \vartheta \in \mathbb{R}, \\ \Psi_{-\hat{H}}(\vartheta) &= -i\hat{c}\vartheta + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\vartheta x})\, \Pi_{-\hat{H}}(dx),\ \vartheta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dabei sei noch angemerkt, dass die Lévy-Maße von Subordinatoren Träger aus $(0,\infty)$ besitzen (vgl. Satz 1.6). Aber auch $\hat{H}$ ist von beschränkter Variation, da die Pfade monoton fallend sind (setze $M(\omega, [a,b]) := \hat{H}_a(\omega) - \hat{H}_b(\omega)$). Also kann unter Verwendung der Lévy-Khintchine-Formel, der Identität

$$Ee^{i\vartheta \hat{H}} = Ee^{-i\vartheta(-\hat{H})} = e^{-\Psi_{-\hat{H}}(-\vartheta)} = e^{-\Psi_{\hat{H}}(\vartheta)},$$

(1.13), Satz 1.31 und der Eindeutigkeit der Lévy-Maße gezeigt werden:

$$\Psi_{\hat{H}}(\vartheta) = i\hat{c}\vartheta + \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{i\vartheta x})\, \Pi_{\hat{H}}(dx),\ \vartheta \in \mathbb{R},$$

und insbesondere

$$\Pi_{-\hat{H}}(dx) = \Pi_{\hat{H}}(-dx). \tag{1.14}$$

Um nun Darstellungen für Φ und $\hat{\Phi}$ zu bekommen, formulieren wir eine Aussage über Laplace-Exponenten für Subordinatoren:

Satz 1.32. *Sei $Z = \{Z_t : t \geq 0\}$ ein Subordinator mit zugehörigem Lévy-Maß Π_Z und Driftkoeffizient β_0. Dann gilt*

$$E e^{-uZ_t} = e^{-t\psi(u)},\ u \geq 0,$$

mit

$$\psi(u) = \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-ux}\right) \Pi_Z(dx) + \beta_0\, u.$$

Beweis. Sato [25], Theorem 30.1, S. 197. □

Da $\mathscr{H}$ und $-\hat{H}$ Subordinatoren sind, können wir aus diesem Satz unter Verwendung von (1.14) die gesuchten Darstellungen von Φ und $\hat{\Phi}$ direkt folgern, wobei wir die Driftkoeffizienten c und $\hat{c}$ in Satz 1.31 eingeführt haben:

Korollar 1.33. *Für $\vartheta \geq 0$ gilt:*

(i) $\Phi(\vartheta) = \Psi_{\mathscr{H}}(i\vartheta) = -\log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1} = \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\vartheta x})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dx) + \vartheta\, c;$

(ii) $\hat{\Phi}(\vartheta) = \Psi_{\hat{H}}(-i\vartheta) = -\log E e^{\vartheta \hat{H}_1} = \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{\vartheta x})\, \Pi_{\hat{H}}(dx) + \vartheta\, \hat{c}.$

Über die Driftkoeffizienten c und $\hat{c}$ lässt sich noch folgende Aussage machen, wobei wir wieder der Argumentation von [6] (S. 73) folgen:

Satz 1.34. *In der obigen Situation sind $c \geq 0$ und $\hat{c} \geq 0$.*

Beweis. Nach [6] (Proposition 2(i), S. 16) gilt für einen Lévy-Prozess von beschränkter Variation (und damit insbesondere für einen Subordinator) mit Driftkoeffizient c

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \lambda^{-1}\, \Psi(\lambda) = -i\, c.$$

Dann hat man auch

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{t}{\vartheta}\, \Psi\left(\frac{\vartheta}{t}\right) = -i\, c,$$

was äquivalent ist zu

$$\lim_{t \downarrow 0} t\, \Psi\left(\frac{\vartheta}{t}\right) = -i\, c\, \vartheta,$$

wobei

$$Ee^{i\vartheta c} = e^{i\vartheta c}$$

die charakteristische Funktion der konstanten Zufallsgröße c ist. Damit bekommt man

$$Ee^{i\vartheta \frac{\mathscr{H}_t}{t}} = e^{-t\Psi_{\mathscr{H}}(\frac{\vartheta}{t})} \xrightarrow{t\downarrow 0} e^{ic\vartheta},$$

und der Stetigkeitssatz impliziert

$$\frac{\mathscr{H}_t}{t} \xrightarrow{P} c.$$

Wegen $\frac{\mathscr{H}_t}{t} \geq 0$ muss auch $c \geq 0$ sein, und dies ist die erste Behauptung.

Die Behauptung $\hat{c} \geq 0$ zeigt man analog. □

Wir wollen jetzt mit Hilfe von Korollar 1.33 entsprechende Aussagen auch für den mit Rate q gekillten Prozess H treffen. Dabei sei auf die Konvention $e^{-\vartheta H_1} = 0$ im Falle $H_1 = \infty$ hingewiesen. Damit gilt $e^{-\vartheta H_1} \in [0,1]$ für $\vartheta \geq 0$ und $Ee^{-\vartheta H_1}$ ist daher für $\vartheta \geq 0$ endlich. Zur genaueren Gestalt gibt uns folgender Satz Auskunft:

Satz 1.35. *Für die Zufallsgröße H_1 und $\vartheta > 0$ gilt*

$$\tilde{\Phi}(\vartheta) := -\log Ee^{-\vartheta H_1} = \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\vartheta y})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \vartheta c + q = \Phi(\vartheta) + q.$$

Beweis. Mit der Identität

$$\{(L_t^{-1}, H_t) : t < L_\infty\} \stackrel{d}{=} \{(\mathscr{L}_t^{-1}, \mathscr{H}_t : t < e_q)\}$$

(vgl. (1.5)) und der Tatsache, dass e_q eine von $(\mathscr{L}^{-1}, \mathscr{H})$ unabhängige Exp(q)-verteilte Stoppzeit ist, folgt

$$\begin{aligned} Ee^{-\vartheta H_1} &= E\left(e^{-\vartheta H_1}\, \mathbf{1}_{\{L_\infty > 1\}}\right) = E\left(e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}\, \mathbf{1}_{\{e_q > 1\}}\right) \\ &= Ee^{-\vartheta \mathscr{H}_1}\, E\left(\mathbf{1}_{\{e_q > 1\}}\right) = e^{-q}\, Ee^{-\vartheta \mathscr{H}_1}. \end{aligned}$$

Mit Korollar 1.33 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\vartheta) &= -\log Ee^{-\vartheta H_1} \\ &= -\log\left(e^{-q}\, Ee^{-\vartheta \mathscr{H}_1}\right) \\ &= q + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\vartheta y})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \vartheta c \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Mit $\tilde{\Phi}$ können wir jetzt auch die Laplace-Transformierte von H_t für $t \geq 0$ darstellen:

Korollar 1.36. *Für $\vartheta > 0$ gilt*

$$Ee^{-\vartheta H_t} = e^{-\tilde{\Phi}(\vartheta)\, t}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} Ee^{-\vartheta H_t} &= E\left(e^{-\vartheta H_t}\, \mathbf{1}_{\{t<L_\infty\}}\right) = E\left(e^{-\vartheta \mathscr{H}_t}\, \mathbf{1}_{\{t<e_q\}}\right) \\ &= e^{-qt}\, e^{-\Psi_{\mathscr{H}}(\vartheta)\, t} = e^{-(\Psi_{\mathscr{H}}(\vartheta)+q)\, t} \\ &= e^{-\tilde{\Phi}(\vartheta)\, t} \end{aligned}$$

□

Für die spätere Anwendung der oben bewiesenen Formeln wollen wir noch das folgende Lemma formulieren:

Lemma 1.37. *Seien $\vartheta > 0$ und $q > 0$ aus den Sätzen 1.13 und 1.17. Dann gilt:*

(i) $\tilde{\Phi}(\vartheta) = q - \Phi(\vartheta) = \frac{\Psi(i\vartheta)}{\hat{\Phi}(-\vartheta)}$

(ii) $q = \lim\limits_{\vartheta \downarrow 0} \frac{\Psi(i\vartheta)}{\hat{\Phi}(-\vartheta)}$.

Beweis. Mit der Wiener-Hopf Faktorisierung (Satz 1.27) und den Bemerkungen 1.29(i),(ii) folgt (i), und (ii) folgt mit (i) und $\lim\limits_{\vartheta \downarrow 0} \Phi(\vartheta) = 0$. □

Wenn man die Driftkoeffizienten c bzw. $\hat{c}$ kennt, so lassen sich Aussagen darüber treffen, in welcher Form Ruin eintritt. Dazu wollen wir zunächst definieren:

Definition 1.38. Ein Lévy-Prozess X *„kriecht aufwärts"*, wenn für beliebiges $u > 0$ $P(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) > 0$ gilt. Der Prozess *„kriecht abwärts"*, wenn $-X$ „aufwärts kriecht".

Hierzu können wir jetzt die Beziehungen zu den Driftkoeffizienten c und $\hat{c}$ angeben:

Satz 1.39. *Für einen Lévy-Prozess X gilt:*

(i) X *„kriecht aufwärts"* $\Leftrightarrow$ $c > 0$;

(ii) X *„kriecht abwärts"* $\Leftrightarrow$ $\hat{c} > 0$.

Beweis. (i) [6], Theorem 19, S. 174/175.

(ii) X „kriecht abwärts“ genau dann, wenn X „aufwärts kriecht“. Da $-\hat{H}$ der aufsteigende Leiterhöhenprozess von $-X$ ist, folgt die Behauptung mit (i), denn $\hat{c}$ ist der Driftkoeffizient von $-\hat{H}$.

□

Sei nun $c > 0$ gegeben. Dann können wir die in Definition 1.38 erwähnte Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $T'(u) := \inf\{t \geq 0 : H_t = u\}$ darstellen:

Satz 1.40. *Es sei $d > 0$. Dann gilt*

$$P(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) = P(T' < L_\infty) = Ee^{-qT'(u)},\ u > 0.$$

Beweis. Die erste Identität ergibt sich aus den Definitionen der einzelnen Zufallsgrößen, die zweite erhalten wir durch einige Rechnungen:

$$\begin{aligned}
P(T'(u) < L_\infty) &= E(E(\mathbf{1}_{\{T'(u)<L_\infty\}} \,|\, L_\infty)) \\
&= \int E(\mathbf{1}_{\{T'(u)<L_\infty\}} \,|\, L_\infty = t)\, P(L_\infty \in dt) \\
&= \int E(\mathbf{1}_{\{T'(u)<t\}})\, P(L_\infty \in dt) \\
&= \int_0^\infty P(T'(u) \in (0,t))\, q\, e^{-qt}\, dt \\
&= \int_{(0,\infty)} \int_y^\infty q\, e^{-qt}\, dt\, P(T'(u) \in dy) \\
&= \int_{(0,\infty)} e^{-qy}\, P(T'(u) \in dy) \\
&= Ee^{-q\,T'(u)},
\end{aligned}$$

wobei die dritte Identität aus Korollar 1.18 und [1] (Satz 53.10, S. 306f.) und die vierte aus Satz 1.17 folgt. □

Die oben erwähnte Wahrscheinlichkeit lässt sich auch in Abhängigkeit vom Erneuerungsmaß V angeben:

Satz 1.41. *Für $c > 0$ und $u > 0$ gilt*

$$P(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) = c\,\frac{dV}{dy}(u) := c\,V'(u),$$

wobei $V'(u)$ stetig und positiv auf $(0,\infty)$ ist.

Beweis. [6] (Theorem 19, S. 174) besagt für $c > 0$ gerade

$$P(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) = \frac{V'(u)}{V'(0+)},$$

wobei V' stetige und auf $(0, \infty)$ positive Dichte von V ist, und laut Kesten [19] (Proposition 6, S. 120) ist

$$V'(0+) = \lim_{s \downarrow 0} V'(s) = \frac{1}{c} > 0.$$

□

Für $c = 0$ lässt sich ebenfalls eine solche Aussage formulieren:

Satz 1.42. *Sei $c = 0$. Dann gilt*

$$P(H_{T(u)} > u) = 1 \quad \textit{und} \quad P(H_{T(u)} = u) = 0.$$

Beweis. Wir wenden [6] (Theorem 4, S. 77) auf den Subordinator $\mathscr{H}$ an, wobei die dort erwähnte Stoppzeit bei uns gerade $\mathscr{T}(x) := \inf\{t > 0 : \mathscr{H}_t > x\}$ ist, und bekommen $P(\mathscr{H}_{\mathscr{T}(x)} > x) = 1$ für $x > 0$. Es gilt aber $\{\mathscr{H}_{\mathscr{T}(x)} > x\} \subset \{H_{T(x)} > x\}$, da H ein mit Rate $q > 0$ gekillter Prozess mit Friedhof $\delta = \infty$ ist und $\mathscr{H}$ eine nichtdefekte Version von H darstellt. Daraus folgt die Behauptung

$$P(H_{T(u)} > u) = 1 - P(H_{T(u)} = u) = 1.$$

□

Aus den obigen Sätzen wird klar, dass „Aufwärtskriechen“ nur bei einem positiven Driftkoeffizienten möglich ist. Man kann noch zeigen, dass $u > 0$ entweder durch „Aufwärtskriechen“ oder durch einen echten Sprung das erste Mal überschritten wird, in Formeln:

$$P(X_{\tau(u)-} < u, X_{\tau(u)} = u) = 0. \tag{1.15}$$

Für den Beweis dieser Aussage verweisen wir auf [6] (Proposition 2, S. 76).

Falls $c = 0$, so ist V' womöglich nicht definiert (vgl. [6], Theorem 19, S. 174f.) und der Term cV' im folgenden Satz verschwindet. Der Satz gibt uns erste Informationen über die Verteilung des Overshoots, eine andere Darstellung der Ruinwahrscheinlichkeit und die Verteilungen der letzten aufsteigenden Leiterzeit bzw. der letzten aufsteigenden Leiterhöhe. Im Beweis geht Satz 1.24 entscheidend ein.

Satz 1.43. *Für $u > 0$ gilt:*

(i) $P(X_{\tau(u)} - u > x, \tau(u) < \infty) = \int_{[0,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u + x - y)\, V(dy)$, $x \geq 0$;

(ii) $P(\tau(u) < \infty) = \int_{[0,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u - y)\, V(dy) + cV'(u)$, *wobei der Term* $cV'(u)$ *für* $c = 0$ *verschwindet;*

(iii) $P(X_{\tau(u)} > u, L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z, \tau(u) < \infty) = \int_{[0,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u - y)\, V(dy; z)$, $z \geq 0$, *wobei* $V(\cdot\,; z) := \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{H}_t \in \cdot\,, \mathscr{L}_t^{-1} > z)\, dt$;

(iv) $P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r, \tau(u) < \infty) = \int_{(r,\infty)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u - y)\, V(dy) + cV'(u), r \in [0, u)$, *wobei wieder für* $c = 0$ *der Term* $cV'(u)$ *verschwindet.*

Für den Beweis von Satz 1.43 benötigen wir noch ein Lemma, das zunächst gezeigt werden soll:

Lemma 1.44. *Für $\vartheta \geq 0$ gilt:*

(i) $\int_{[0,\infty)} e^{-\vartheta y}\, V(dy) = \frac{1}{q - \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}}$;

(ii) $\vartheta c + \vartheta \int_{(0,\infty)} e^{-\vartheta y}\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(y)\, dy = \vartheta c + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\vartheta y})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) = -\log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}$.

Beweis Lemma 1.44. (i) Hier sind einige elementare Rechnungen durchzuführen:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} e^{-\vartheta y}\, V(dy) &= \int_0^\infty e^{-qt} \int_{[0,\infty)} e^{-\vartheta y}\, P(\mathscr{H}_t \in dy)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt}\, E e^{-\vartheta \mathscr{H}_t}\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt} (E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1})^t\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt + t \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}}\, dt \\
&= \frac{1}{q - \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}},
\end{aligned}$$

wobei die dritte Identität aus der Lévy-Khintchine-Darstellung

$$E e^{-\vartheta \mathscr{H}_t} = e^{-\Phi(\vartheta)\, t}$$

folgt, und $\log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1} \leq 0$ mit $q > 0$ gerade $q - \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1} > 0$ und damit die letzte Identität impliziert.

(ii) Auch hier sind wieder einige Umformungen durchzuführen:

$$\begin{aligned}
-\log Ee^{-\vartheta \mathscr{H}_1} &= \int_{(0,\infty)} (1-e^{-\vartheta y})\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \vartheta c \\
&= \int_{(0,\infty)} \int_0^y \vartheta\, e^{-\vartheta x}\, dx\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \vartheta c \\
&= \vartheta \int_0^\infty e^{-\vartheta x} \int_{(x,\infty)} \Pi_{\mathscr{H}}(dy)\, dx + \vartheta c \\
&= \vartheta \int_0^\infty e^{-\vartheta x}\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x)\, dx + \vartheta c,
\end{aligned}$$

wobei die erste Identität mit Korollar 1.33 folgt. □

Kommen wir jetzt zum Beweis von Satz 1.43:

Beweis Satz 1.43. (i) Setze in Satz 1.24 $f := 1$, $g := \mathbf{1}_{\{\cdot > x+u\}}$ und $h := 1$. Diese Funktionen sind messbar, beschränkt, nichtnegativ und es gilt $g(u) = 0$, also ist der Satz anwendbar:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{1}_{\{X_{\tau(u)}-u>x\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}}) &= P(X_{\tau(u)} - u > x,\, \tau(u) < \infty) \\
&= \int_{[0,u]} \int_{(u-y,\infty)} \mathbf{1}_{\{y+s>x+u\}}\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\, V^1(dy) \\
&= \int_{[0,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x+u-y)\, V^1(dy) \\
&= \int_{[0,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x+u-y)\, V(dy)
\end{aligned}$$

mit $V^1(\cdot) := V^h(\cdot)$ für $h = 1$. Dabei erklärt sich die letzte Identität wie folgt:

$$\begin{aligned}
V^1(\cdot) &= \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{H}_{t-} \in \cdot)\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt} \int \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-}\in\cdot\}}(\omega)\, P(d\omega)\, dt \\
&= \int \int_0^\infty e^{-qt}\, \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-}\in\cdot\}}(\omega)\, dt\, P(d\omega) \\
&= \int \int_0^\infty e^{-qt}\, \mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t}\in\cdot\}}(\omega)\, dt\, P(d\omega) \\
&= V(\cdot),
\end{aligned}$$

wobei hier die vierte Identität gilt, da $\mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{t-}\in\cdot\}}(\omega)$ und $\mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_t\in\cdot\}}(\omega)$ bei festem ω für höchstens abzählbar viele $t \in [0,\infty)$ verschieden sind, denn die Pfade von $\mathscr{H}$ haben höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

(ii) Wir multiplizieren beide Seiten der zu beweisenden Gleichung mit $e^{-\vartheta u}$, $\vartheta > 0$, und integrieren jeweils über $u \in [0,\infty)$. Dann zeigen wir, dass die Integrale auf beiden Seiten übereinstimmen, und folgern mit dem Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte, dass beide Seiten von (ii) für fast alle $u \in [0,\infty)$ gleich sind. Da aber $P(\tau(u) < \infty)$ und

$$\int_{(0,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\,V(dy) + cV'(u)$$

auch rechtsseitig stetig in u sind, folgt damit die Behauptung. Beginnen wir mit der linken Seite:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\vartheta u}\,P(\tau(u)<\infty)\,du &= \int_0^\infty e^{-\vartheta u}\,q\,\overline{V}(u)\,du \\
&= \int_0^\infty e^{-\vartheta u}\int_{(u,\infty)} q\,V(dy)\,du \\
&= \int_{(0,\infty)}\int_0^y q\,e^{-\vartheta u}\,du\,V(dy) \\
&= \frac{q}{\vartheta}\int_{(0,\infty)} (1-e^{-\vartheta y})\,V(dy) \\
&= \frac{q}{\vartheta}\left(V([0,\infty)) - \int_{[0,\infty)} e^{-\vartheta y}\,V(dy)\right) \\
&= \frac{q}{\vartheta}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q-\log Ee^{-\vartheta\mathscr{H}_1}}\right) \\
&= \frac{1}{\vartheta}\,\frac{-\log Ee^{-\vartheta\mathscr{H}_1}}{q-\log Ee^{-\vartheta\mathscr{H}_1}},
\end{aligned}$$

wobei die erste Identität mit Satz 1.26 und die sechste mit Lemma 1.44 folgt. $V([0,\infty)) = \frac{1}{q}$ bekommt man durch elementare Rechnungen.

Betrachten wir nun auf der rechten Seite zunächst den zweiten Summanden. Mit Lemma 1.44 folgt wieder

$$c\int_0^\infty e^{-\vartheta u}\,V'(u)\,du = c\int_{[0,\infty)} e^{-\vartheta u}\,V(du) = \frac{c}{q-\log Ee^{-\vartheta\mathscr{H}_1}}.$$

Bleibt noch der erste Summand auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\vartheta u} \int_{[0,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy)\, du \\
&= \int_{[0,\infty)} \int_y^\infty \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, e^{-\vartheta u}\, du\, V(dy) \\
&= \int_{[0,\infty)} e^{-\vartheta y} \int_0^\infty \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)\, e^{-\vartheta u}\, du\, V(dy) \\
&= \frac{1}{\vartheta} \Big(-\log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1} - \vartheta c \Big) \int_{[0,\infty)} e^{-\vartheta y}\, V(dy) \\
&= \frac{1}{\vartheta} \frac{-\log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1} - \vartheta c}{q - \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}}.
\end{aligned}$$

Für die dritte und vierte Identität haben wir hier wieder Lemma 1.44 angewendet. Nun addieren wir beide Summanden der rechten Seite:

$$\frac{c}{q - \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}} + \frac{1}{\vartheta} \frac{-\log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1} - \vartheta c}{q - \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}} = \frac{1}{\vartheta} \frac{-\log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}}{q - \log E e^{-\vartheta \mathscr{H}_1}}.$$

Damit stimmen die Integrale auf beiden Seiten überein und die Behauptung ist gezeigt.

(iii) Setze $f := 1$, $g := \mathbf{1}_{\{\cdot > u\}}$ und $h := \mathbf{1}_{\{\cdot > z\}}$. Diese Funktionen sind messbar, beschränkt, nichtnegativ und es gilt $g(u) = 0$. Damit ist Satz 1.24 anwendbar:

$$\begin{aligned}
&E(\mathbf{1}_{\{X_{\tau(u)} > u\}}\, \mathbf{1}_{\{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau(u) < \infty\}}) \\
&= P(X_{\tau(u)} > u,\, L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z,\, \tau(u) < \infty) \\
&= \int_0^\infty e^{-qt} \int_{[0,u]\times[0,\infty)} \mathbf{1}_{\{r > z\}} \int_{(u-y,\infty)} \mathbf{1}_{\{y+s>u\}}\, \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\, P(\mathscr{H}_{t-} \in dy,\, \mathscr{L}^{-1}_{t-} \in dr)\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_{[0,u]} e^{-qt}\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, P(\mathscr{H}_{t-} \in dy,\, \mathscr{L}^{-1}_{t-} > z)\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_{[0,u]} e^{-qt}\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, P(\mathscr{H}_t \in dy,\, \mathscr{L}^{-1}_t > z)\, dt \\
&= \int_{[0,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy; z),
\end{aligned}$$

wobei die vierte Identität analog zu den Ausführungen am Ende des Beweises von (i) gezeigt wird. Obige Gleichung entspricht aber noch nicht exakt unserer Behauptung, denn hier wird über $[0,u]$ und in der Behauptung wird über $[0,u)$ integriert. Wenn aber $\mathscr{H}$ kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, so folgt aus [6] (Proposition 15, S. 30)

$$V(\{u\}) = 0,$$

und wegen

$$V(\{u\},z) \leq V(\{u\})$$

ist gerade

$$V(\{u\},z) = 0.$$

Damit haben wir die Behauptung, falls $\mathscr{H}$ kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist. Für den Fall, dass $\mathscr{H}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, gilt

$$X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} = H_{L_{\tau(u)-}} < u \quad P\text{-f.s.},$$

denn H verhält sich vor Ersteintritt in (u,∞) wie $\mathscr{H}$ und kann somit u nur mit einem Sprung überschreiten. Deshalb kann man am Beginn des Beweises für diesen Fall $f := \mathbf{1}_{\{\cdot<u\}}$ setzen und erhält so die Behauptung.

(iv) Seien $r \in [0,u)$ und $f := \mathbf{1}_{\{\cdot>r\}}$, $g := \mathbf{1}_{\{\cdot>u\}}$ und $h := 1$. Diese Funktionen sind nichtnegativ, beschränkt, messbar und es gilt $g(u) = 0$. Damit liefert Satz 1.24

$$\begin{aligned}
&E(\mathbf{1}_{\{X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}>r\}}\,\mathbf{1}_{\{X_{\tau(u)}>u\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}}) \\
&\quad = P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r,\, X_{\tau(u)} > u,\, \tau(u) < \infty) \\
&\quad = \int_0^\infty e^{-qt} \int_{[0,u]\times[0,\infty)} \mathbf{1}_{\{\cdot>r\}}(y) \int_{(u-y,\infty)} \mathbf{1}_{\{y+s>u\}} \\
&\qquad \times \Pi_{\mathscr{H}}(ds)\, P(\mathscr{H}_{t-} \in dy,\, \mathscr{L}^{-1}_{t-} \in dx)\, dt \\
&\quad = \int_0^\infty e^{-qt} \int_{(r,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, P(\mathscr{H}_{t-} \in dy)\, dt \\
&\quad = \int_0^\infty e^{-qt} \int_{(r,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, P(\mathscr{H}_{t} \in dy)\, dt \\
&\quad = \int_{(r,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy).
\end{aligned}$$

Die vierte Identität folgt hier wie in den Ausführungen am Ende des Beweises von (i). Für die Behauptung benötigen wir später wieder, dass über (r,u) und nicht über $(r,u]$ integriert wird. Dazu geht man ähnlich wie in (iii) vor. Falls $\mathscr{H}$ kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, so gilt $V(\{u\}) = 0$ und man kann die rechte Grenze auch offen wählen. Ist $\mathscr{H}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, so hat man wieder

$$X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} = H_{L_{\tau(u)-}} < u \; P\text{-f.s.}$$

wie in (iii) und damit kann dann $f := \mathbf{1}_{\{r<\cdot<u\}}$ gesetzt werden. Wir erhalten also in beiden Fällen

$$P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r,\, X_{\tau(u)} > u,\, \tau(u) < \infty) = \int_{(r,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy). \tag{1.16}$$

Um die Behauptung zu zeigen stellen wir zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} &P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r, \tau(u) < \infty) \\ &\quad = P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r, X_{\tau(u)} > u, \tau(u) < \infty) + P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r, X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) \end{aligned}$$

gilt. Mit (1.15) folgern wir

$$\{X_{\tau(u)} = u\} = \{X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} = u\} \ P\text{-f.s.},$$

was unter Verwendung von (1.16) und Satz 1.41

$$\begin{aligned} &P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r, \tau(u) < \infty) \\ &\quad = P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > r, X_{\tau(u)} > u, \tau(u) < \infty) + P(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) \\ &\quad = \int_{(r,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy) + c\, V'(u) \end{aligned}$$

impliziert. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch Beziehungen zwischen $\overline{\Pi}^{+}_{X}$, $\overline{\Pi}_{\hat{H}}$ und $\Pi_{\mathscr{H}}$ bzw. zwischen $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}$, $\overline{\Pi}^{+}_{X}$ und $\hat{V}$ angeben:

Satz 1.45. *Sei $u > 0$. Dann gilt:*

(i) $\overline{\Pi}^{+}_{X}(u) = \int_{(u,\infty)} \overline{\Pi}_{\hat{H}}(u-y)\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \hat{c}\, \Pi'_{\mathscr{H}}(u)$, *wobei $\Pi'_{\mathscr{H}}$ die Dichte von $\Pi_{\mathscr{H}}$ angibt. Diese existiert genau dann, wenn der Driftkoeffizient $\hat{c}$ von $\hat{H}$ positiv ist.*

(ii) $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) = \int_{(-\infty,0)} \overline{\Pi}^{+}_{X}(u-y)\, \hat{V}(dy)$.

Beweis. Vigon [26], Proposition 3.1 und Proposition 3.3, S. 246. □

Die Aussagen dieses Satzes vereinfachen sich, wenn X spektral positiv ist. Wir wollen aber zunächst annehmen, dass X spektral negativ ist (d.h. $\Pi_X((0,\infty)) = 0$ und somit nach Satz 1.6 $\triangle X \leq 0$ P-f.s.). Dann folgt mit [6] (Theorem 1 mit Vorbemerkungen, S.

189), dass der Prozess $\overline{X}$ eine stetige Lokalzeit bei 0 vom reflektierten Prozess $\overline{X} - X$ beschreibt. Dabei ist dessen rechtsseitig stetige Inverse gerade $\overline{X}^{-1}$ mit

$$\overline{X}_t^{-1} = \inf\{s \geq 0 : \overline{X}_s > t\} = \inf\{s \geq 0 : X_s > t\},$$

was für den aufsteigenden Leiterhöhenprozess H von X unter Ausnutzung von $\triangle X \leq 0$ P-f.s.

$$H_t = X_{\overline{X}_t^{-1}} = \begin{cases} t & \text{für } t < \overline{X}_\infty \\ \infty & \text{für } t \geq \overline{X}_\infty \end{cases}$$

und damit für den nichtdefekten Prozess $\mathscr{H}$

$$\mathscr{H}_t = t \tag{1.17}$$

impliziert. Dieses Vorgehen kann man auf den spektral positiven Fall (d.h. $\Pi_X((-\infty, 0)) = 0$ und somit nach Satz 1.6 $\triangle X \geq 0$ P-f.s.) übertragen, indem man den Prozess $-X$ betrachtet, der dann nur negative Sprünge besitzt, darauf [6] (Theorem 1, S. 189) anwendet und die Identität

$$\overline{(-X)} = -\underline{X}$$

ausnutzt. Dann stellt der Infimumsprozess $\underline{X}$ eine stetige Lokalzeit bei 0 für den reflektierten Prozess $X - \underline{X}$ dar, und dessen rechtsseitig stetige Inverse $\underline{X}_t^{-1}$ wird gegeben durch

$$\underline{X}_t^{-1} = \inf\{s \geq 0 : \underline{X}_s < t\} = \inf\{s \geq 0 : X_s < -t\}.$$

Daraus folgt mit $\triangle X \geq 0$ P-f.s. und $X_t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ P-f.s.

$$\hat{H}_t = X_{\underline{X}_t^{-1}} = -t. \tag{1.18}$$

Damit erhalten wir

$$\hat{V}(\cdot) = \int_0^\infty P(\hat{H}_t \in \cdot)\, dt = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{-t \in \cdot\}}\, dt = \lambda\!\!\lambda_{|(-\infty,0]},$$

wobei mit

$$\lambda\!\!\lambda_{|(-\infty,0]}(\cdot) := \lambda\!\!\lambda((-\infty, 0] \cap \cdot)$$

das auf $(-\infty, 0]$ eingeschränkte Lebesgue-Maß bezeichnet wird. Des Weiteren ist $Ee^{\vartheta \hat{H}_t} = e^{-\vartheta t}$ und damit $\hat{\Phi}(\vartheta) = \vartheta$ und $\hat{c} = 1$ (vgl. Korollar 1.33). Daraus ergibt sich die angekündigte Vereinfachung von Satz 1.45:

Korollar 1.46. *Sei* $\Pi_X((-\infty,0)) = 0,$ *dann gilt für* $u > 0$

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\,dy = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X(y)\,dy.$$

Beweis. Die Behauptung kann wahlweise mit dem ersten oder zweiten Teil von Satz 1.45 gezeigt werden. Wir wollen den Beweis mit dem zweiten Teil führen und $\hat{V}(\cdot) = \lambda\!\!\!\lambda_{|(-\infty,0]}$ und $\overline{\Pi}_X^-(u) = 0$ $(u > 0)$ verwenden:

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) &= \int_{(-\infty,0)} \overline{\Pi}_X^+(u-y)\,\lambda\!\!\!\lambda(dy)\\ &= \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\,dy\\ &= \int_u^\infty \overline{\Pi}_X(y)\,dy.\end{aligned}$$

□

Aus dem vorherigen Korollar ergibt sich noch eine weitere Aussage über den Erwartungswert EX_1 :

Korollar 1.47. *Sei X spektral positiv (also* $\Pi_X((-\infty,0)) = 0$*), dann ist*

$$E|X_1| < \infty.$$

Beweis. Nach Kruglov [21] (S. 319) ist $E|X_1|$ genau dann endlich, wenn

$$\int_{|y|\geq 1} |y|\,\Pi_X(dy) < \infty$$

gilt. Dieses Integral lässt sich umformen:

$$\begin{aligned}\int_{|y|\geq 1} |y|\,\Pi_X(dy) &= \int_{[1,\infty)} y\,\Pi_X(dy)\\ &= \int_{[1,\infty)} \int_0^y dt\,\Pi_X(dy)\\ &= \int_0^\infty \int_{1\vee t}^\infty \Pi_X(dy)\,dt\\ &= \int_0^\infty \overline{\Pi}_X(1\vee t)\,dt\\ &= \overline{\Pi}_X(1) + \int_1^\infty \overline{\Pi}_X(t)\,dt.\end{aligned}$$

Der letzte Term ist aber endlich, da $\overline{\Pi}_X(1) < \infty$ nach Satz 1.4 und

$$\int_1^\infty \overline{\Pi}_X(t)\, dt < \infty$$

nach Korollar 1.46 mit $u = 1$ und Satz 1.31 ($\mathscr{H}$ ist Subordinator, also insbesondere von beschränkter Variation). $\square$

2 Hauptresultate

In diesem Kapitel wollen wir die in Kapitel 1 vorgestellten Ergebnisse anwenden und zu den Hauptresultaten dieser Arbeit kommen. Dazu gehören das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u) < \infty)$ und der Verteilung des Overshoots $X_{\tau(u)} - u$, der Lokalzeit $L_{\tau(u)}$ und der letzten Leiterhöhe vor Ruin. Außerdem sollen noch Aussagen über die letzte Leiterzeit vor Ruin und über die Konvergenz der Verteilung des Overshoots unter gewissen Annahmen formuliert werden. Wir zeigen diese Resultate aber nur für eine bestimmte Klasse von Verteilungen, nämlich für faltungsäquivalente Verteilungen, welche im folgenden ersten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellt werden sollen.

2.1 Faltungsäquivalente Verteilungen

Mit den Sätzen 1.4 und 1.5 folgt, dass jedes unendlich teilbare Wahrscheinlichkeitsmaß einen Lévy-Prozess X charakterisiert, indem es als Verteilung von X_1 aufgefasst wird. Wir werden aber die zugrunde liegenden unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße nur aus der Klasse der faltungsäquivalenten Verteilungen wählen, die in diesem Abschnitt eingeführt werden soll. Dazu muss zunächst die übergeordnete Klasse $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ definiert werden. Dafür sei die *Spanne* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung G auf $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(G) := \sup\{d \in [0, \infty] : G(\mathbb{G}_d) = 1\}$$

mit

$$\mathbb{G}_d := \begin{cases} \mathbb{R} & d = 0 \\ d \cdot \mathbb{Z} \quad \text{für} & d \in (0, \infty) \\ \{0\} & d = \infty \end{cases}$$

(vgl. Alsmeyer [2], S. 243). Man bezeichnet G dann als d-arithmetische ($d(G) > 0$) bzw. nichtarithmetische ($d(G) = 0$) Verteilung. Bevor wir $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ definieren, wollen wir schon an dieser Stelle darauf hinweisen, dass wir später als definierende Eigenschaft von $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ ausschließlich (2.1) verwenden werden, d.h. nur Verteilungen G mit $d(G) = 0$.

Definition 2.1. Seien $\alpha \geq 0$ und G eine Verteilungsfunktion auf $[0, \infty)$ mit Tail $\overline{G} := 1 - G$ und $\overline{G}(x) > 0$ für alle $x \geq 0$. Dann gehört G zur Klasse $\mathscr{L}^{(\alpha)}$, wenn im Falle $d(G) = 0$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G}(u-x)}{\overline{G}(u)} = e^{\alpha x},\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

und im Falle $d(G) > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{G}(n-1)}{\overline{G}(n)} = e^{\alpha}$$

gilt. Im letzten Falle kann dann ohne Einschränkung $d(G) = 1$ angenommen werden.

Aus der Definition wird deutlich, dass die Tails von Verteilungen aus $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ viel Masse besitzen, d.h. anschaulich gesprochen treten Großschadensereignisse mit verhältnismäßig hoher Wahrscheinlichkeit auf. Der folgende Satz gibt für den nichtarithmetischen Fall nähere Auskunft:

Satz 2.2. *Seien* $\alpha \geq 0$, $\epsilon > 0$, $F \in \mathscr{L}^{(\alpha)}$ *und* $d(F) = 0$. *Dann gilt*

$$e^{(\alpha+\epsilon)x}\,\overline{F}(x) \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Beweis. Die Behauptung ist für $\alpha = 0$ in Embrechts et al. [15] (Lemma 1, S. 336) und für $\alpha > 0$ in Embrechts und Goldie [14] (Lemma 2.4, S. 265) zu finden. □

Wir wollen nun die Klasse $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ noch weiter einschränken und die oben angekündigten faltungsäquivalenten Wahrscheinlichkeitsverteilungen definieren:

Definition 2.3. Seien $\alpha \geq 0$ und $G \in \mathscr{L}^{(\alpha)}$. Dann ist G *faltungsäquivalent*, wenn ein $M < \infty$ existiert, so dass

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G^{*(2)}}(u)}{\overline{G}(u)} = 2M \tag{2.2}$$

mit $\overline{G^{*(2)}}(u) = 1 - G^{*(2)}(u)$ gilt. $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ bezeichne die Klasse der faltungsäquivalenten Verteilungen. Dabei ist α der *Index* von $\mathscr{S}^{(\alpha)}$. Die Verteilungen in $\mathscr{S}^{(0)}$ heißen *subexponentielle Verteilungen.*

Bemerkung 2.4. Wir werden für $G \in \mathscr{L}^{(\alpha)}$ oft $\overline{G} \in \mathscr{L}^{(\alpha)}$ schreiben, entsprechend für $\mathscr{S}^{(\alpha)}$.

Bevor wir für die faltungsäquivalenten Verteilungen erste Eigenschaften formulieren, kommen wir noch einmal auf die Klasse $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ zurück. Hierzu soll eine Äquivalenzbeziehung angegeben werden, durch die auch deutlich wird, weshalb wir in der Definition von $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ die Fälle $d(\cdot) = 0$ und $d(\cdot) > 0$ unterschieden haben. Dabei sei darauf hingewiesen, dass für $\alpha = 0$ beide Definitionen identisch sind.

Satz 2.5. *Sei $\alpha > 0$. Eine Verteilungsfunktion G auf $[0, \infty)$ ist genau dann in $\mathscr{L}^{(\alpha)}$, wenn*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{G((u, u+h))}{G((u, u+1))} = \frac{1 - e^{-\alpha h}}{1 - e^{-\alpha}}$$

gilt, wobei u durch Werte in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{N}$ läuft und $h > 0$ bzw. $h \in \mathbb{N}$. Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass das zu $\frac{G(u+\cdot)}{\overline{G}(u)}$ gehörende Maß schwach gegen eine Exponentialverteilung mit Parameter α bzw. gegen eine geometrische Verteilung mit Parameter $e^{-\alpha}$ konvergiert ($u \to \infty$).

Beweis. Bertoin und Doney [8], S. 210f.. $\square$

Hätten wir in Definition 2.1 wie Embrechts und Goldie [14] nicht zwischen $d(\cdot) > 0$ und $d(\cdot) = 0$ unterschieden und (2.1) als allgemeingültige Definition verwendet, so wäre beispielsweise die geometrische Verteilung mit Parameter $e^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) nicht in $\mathscr{L}^{(\alpha)}$. Da wir aber wie die Vorlage dieser Arbeit ([20]) Bertoin und Doney [8] folgen wollen, unterscheiden wir die beiden Fälle. In [8] wird nämlich als definierende Eigenschaft von $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ gerade die letzte Aussage von Satz 2.5 angegeben, wonach die geometrische Verteilung mit Parameter $e^{-\alpha}$ in $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ enthalten ist (nachzuweisen mit elementarer Rechnung). Im weiteren Verlauf werden wir jedoch nur (2.1) als definierende Eigenschaft verwenden, d.h. die Hauptresultate sollen nur für Verteilungen Q mit $d(Q) = 0$ gezeigt werden. Wir setzen also von nun an folgende Implikationskette voraus:

$$G \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad G \in \mathscr{L}^{(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \text{(2.1) gilt für } G.$$

Wir können damit eine erste Aussage über die Klasse $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ treffen, die durch obige Annahme ebenfalls eingeschränkt wird:

Satz 2.6. *Sei $G \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ und F eine Verteilungsfunktion auf $[0, \infty)$. Wenn ein $c \in (0, \infty)$ mit*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c$$

existiert (in Zeichen: $\overline{F}(x) \sim c\,\overline{G}(x)$ für $x \to \infty$), dann ist $F \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$.

Beweis. Für $\alpha > 0$ sei auf [14] (Theorem 2.7, S. 265) und für $\alpha = 0$ auf [15] (Lemma 4, S. 337) verwiesen. $\square$

Im weiteren Verlauf werden wir auch für Lévy-Maße Π, die im Allgemeinen keine Wahrscheinlichkeitsmaße darstellen, schreiben, dass sie in $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ bzw. $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ enthalten sind. Damit ist gemeint, dass $\Pi([1,\infty)) > 0$ und die Verteilungsfunktion

$$\frac{\Pi([1,x))}{\Pi([1,\infty))}\,\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$$

die Definitionen 2.1 bzw. 2.3 erfüllt (vgl. Pakes [23], S. 414). Oft muss mann aber gar nicht darauf zurückgreifen, wie beispielsweise die Anwendung von Definition 2.1 zeigt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Pi((u-x,\infty))}{\Pi((u,\infty))} = \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{\Pi((u-x,\infty))}{\Pi([1,\infty))}\,\mathbf{1}_{[1,\infty)}(u-x)}{\frac{\Pi((u,\infty))}{\Pi([1,\infty))}\,\mathbf{1}_{[1,\infty)}(u)} = e^{\alpha x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Auch bei der Anwendung von Satz 2.6 werden wir später des Öfteren nicht obige Verteilungsfunktion, sondern direkt $\Pi((u,\infty))$ zum Nachweis des Grenzwertes verwenden, was nur die Konstante c, nicht jedoch die Aussage des Satzes verändert.

Jetzt kommen wir noch einmal zur momenterzeugenden Funktion zurück, die uns im ersten Kapitel schon begegnet ist. Der Vollständigkeit wegen soll sie an dieser Stelle zunächst definiert werden:

Definition 2.7. Für ein endliches Maß G auf $[0,\infty)$ und

$$a \in \mathscr{D} := \{k \in \mathbb{R} : \int_{[0,\infty)} e^{ku}\,G(du) < \infty\}$$

sei die *momenterzeugende Funktion* $m_G(a)$ definiert durch

$$m_G(a) = \int_{[0,\infty)} e^{au}\,G(du).$$

Da G endlich ist und $|e^{au}| \leq 1$ für $u \geq 0$ und $a \leq 0$, gilt immer $(-\infty,0] \subset \mathscr{D}$, d.h. $m_G(a) < \infty$ für $a \in (-\infty,0]$. Für den Fall $G \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ lassen sich einige Eigenschaften angeben:

Satz 2.8. *Seien $\alpha \geq 0$ und $G \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$. Dann gilt:*

(i) $m_G(\alpha) < \infty$;

(ii) Für die Konstante M aus Definition 2.3 gilt $M = m_G(\alpha)$;

(iii) $m_G(\alpha + \epsilon) = \infty$ für $\epsilon > 0$.

Beweis. (i) Für $\alpha = 0$ gilt die Behauptung, denn G ist endlich. Seien also $\alpha > 0$ und $G \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$:

$$\begin{aligned}
m_G(\alpha) &= \int_{[0,\infty)} e^{\alpha x}\, G(dx) \\
&= \int_{[0,\infty)} \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G}(u-x)}{\overline{G}(u)}\, G(dx) \\
&= \int_{[0,\infty)} \liminf_{u\to\infty} \frac{\overline{G}(u-x)}{\overline{G}(u)}\, G(dx) \\
&\le \liminf_{u\to\infty} \int_{[0,\infty)} \frac{\overline{G}(u-x)}{\overline{G}(u)}\, G(dx) \\
&\le \lim_{u\to\infty} \frac{1}{\overline{G}(u)} \int_{[0,\infty)} \overline{G}(u-x)\, G(dx) \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{G^{*(2)}}(u)}{\overline{G}(u)} = 2M < \infty,
\end{aligned}$$

wobei in der ersten Abschätzung das Lemma von Fatou angewendet wird.

(ii) Die Behauptung ist für $\alpha > 0$ in [14] (Lemma 2.1, S. 264) bzw. für $\alpha = 0$ in Chover et al. [10] (S. 664) zu finden.

(iii) Nach einer Abschätzung folgt die Behauptung mit Satz 2.2. Dazu sei $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}
m_G(\alpha+\epsilon) &= \int_{[0,\infty)} e^{(\alpha+\epsilon)x}\, G(dx) \\
&\ge \int_{[y,\infty)} e^{\epsilon x}\, G(dx) \\
&\ge e^{\epsilon y}\, \overline{G}(y) \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} \infty.
\end{aligned}$$

□

Wir haben bisher einige Eigenschaften von $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ und $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ kennengelernt und wollen nun Beispiele betrachten. Es ist allerdings in den meisten Fällen schwierig, die definierende Eigenschaft (2.2) von $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ nachzuprüfen, da man $\overline{G^{*(2)}}$ oft nicht explizit angeben kann.

Beispiele 2.9. (i) Die Exponentialverteilung mit Parameter $\beta > 0$ ist in $\mathscr{L}^{(\beta)}$, jedoch nicht in $\mathscr{S}^{(\beta)}$ enthalten. Die unendliche Teilbarkeit folgt aus der Tatsache, dass eine Exp(β)-Verteilung ($\beta > 0$) gerade einer $\Gamma(1,\beta)$-Verteilung entspricht, und für Gammaverteilungen mit $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(a,b)^{*(n)} = \Gamma(na,b) \tag{2.3}$$

(Alsmeyer [1], S. 143f.) gilt. $F(x) := (1-e^{-\beta x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ ist die Verteilungsfunktion einer Exp(β)-Verteilung. Damit folgt $\overline{F}(x) > 0$ für alle $x \geq 0$, und es gilt für $x \geq 0$

$$\frac{\overline{F}(u-x)}{\overline{F}(u)} = \frac{e^{-\beta(u-x)}}{e^{-\beta u}} \overset{u\to\infty}{\longrightarrow} e^{\beta x},$$

womit $F \in \mathscr{L}^{(\beta)}$ gezeigt ist. Die Faltung zweier Exp(β)-Verteilungen ist nach (2.3) gerade eine $\Gamma(2,\beta)$-Verteilung, und somit bekommen wir mit dem Satz von de l'Hospital

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F^{*(2)}}(u)}{\overline{F}(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{1-\int_0^u \frac{\beta^2 x}{\Gamma(2)}\, e^{-\beta x}\, dx}{e^{-\beta u}} = \lim_{u\to\infty} \frac{-\frac{\beta^2 u}{\Gamma(2)}\, e^{-\beta u}}{-\beta\, e^{-\beta u}} = \infty,$$

wobei $\Gamma(2) = 1$. Damit ist $F \notin \mathscr{S}^{(\beta)}$.

(ii) Nach Embrechts [13] (S. 539) ist die verallgemeinerte inverse Gauß-Verteilung $N^{-1}(a,b,d)$ für $d < 0$ und $(a,b) \in \Xi_d$ in $\mathscr{S}^{(\frac{b}{2})}$ enthalten. Sie wird für $d \in \mathbb{R}$ und

$$(a,b) \in \Xi_d := \begin{cases} (x,y);\ x \geq 0,\ y > 0 & \text{für } d > 0 \\ (x,y);\ x > 0,\ y > 0 & \text{für } d = 0 \\ (x,y);\ x \geq 0,\ y > 0 & \text{für } d > 0 \end{cases}$$

gegeben durch die Dichtefunktion

$$f(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{d}{2}} (2K_d(\sqrt{ab}))^{-1}\, x^{d-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(ax^{-1} + bx\right)\right),\ x > 0,$$

wobei für den Fall $a = 0$ oder $b = 0$ die entsprechenden Grenzwerte betrachtet werden. K_d ist die modifizierte Besselsche Funktion dritter Art mit Index d, für die wir eine Integraldarstellung angeben wollen (nach Jørgensen [18], S. 170):

$$K_\lambda(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\lambda-1}\, e^{-\frac{1}{2}\omega(x+x^{-1})}\, dx,\ \omega > 0,$$

Die hier angegebenen und weitere Eigenschaften zur verallgemeinerten inversen Gauß-Verteilung und zur Besselschen Funktion sind unter anderem bei Jørgensen [18] oder Watson [27] zu finden.

Wir wollen nun einige analytische Eigenschaften für Verteilungen aus $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ angeben, die später unter anderem im Beweis von Satz 2.12 und bei den Hauptresultaten Verwendung finden werden. Dazu soll zunächst die definierende Eigenschaft (2.2) von $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ „erweitert" werden:

Lemma 2.10. *Seien $\alpha \geq 0$ und $G \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$. Dann gilt:*

(i) $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\overline{G^{*(k)}}(u)}{\overline{G}(u)} = k\, m_G^{k-1}(\alpha),\ k \in \mathbb{N};$

(ii) Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $K(\epsilon)$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $u > 0$

$$\frac{\overline{G^{*(k)}}(u)}{\overline{G}(u)} \leq K(\epsilon)\,(m_G(\alpha)+\epsilon)^k$$

gilt.

Beweis. [10], S. 665. □

Der nächste Satz gibt eine Äquivalenzbeziehung zwischen einer zu einem unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaß gehörenden Verteilungsfunktion G und dessen Lévy-Maß Π_G an:

Satz 2.11. *Sei $\alpha \geq 0$. Für die zu einem unendlich teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaß gehörende Verteilungsfunktion G mit Lévy-Maß Π_G und Tail $\overline{\Pi}_G(u) := \Pi_G((u,\infty))$, $u > 0$, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\overline{G} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$;

(2) $\overline{\Pi}_G \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$;

(3) $\overline{\Pi}_G \in \mathscr{L}^{(\alpha)}$ *und* $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\overline{G}(u)}{\Pi_G((u,\infty))} = m_G(\alpha)$.

Beweis. Pakes [23], S. 414. □

Nach diesen eher technischen Eigenschaften wollen wir nun für $u \to \infty$ erste Aussagen über das asymptotische Verhalten von $P(\mathscr{H}_t > u)$ und von der Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u) < \infty)$ formulieren. Dabei sei für eine Zufallsvariable Y die momenterzeugende Funktion gerade definiert durch $m_Y(\alpha) := m_{P^Y}(\alpha)$ und für $m_{\mathscr{H}_1}(\alpha)$ schreiben wir $m_{\mathscr{H}}(\alpha)$.

Satz 2.12. *Seien $\alpha \geq 0$ und $P(\mathscr{H}_1 > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ (äquivalent dazu ist $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$). Dann gilt für alle $t > 0$*

$$P(\mathscr{H}_t > u) \sim t\, m^t_{\mathscr{H}}(\alpha)\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \sim t\, m^{t-1}_{\mathscr{H}}(\alpha)\, P(\mathscr{H}_1 > u),\ u \to \infty, \tag{2.4}$$

und damit $P(\mathscr{H}_t > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ für alle $t > 0$. Zusätzlich gelte nun $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$, dann folgt

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\tau(u) < \infty)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} = \frac{q}{(-\log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2} = q\, m^2_V(\alpha). \tag{2.5}$$

Um diesen Satz beweisen zu können, zeigen wir zunächst zwei Hilfsaussagen in einem Lemma:

Lemma 2.13. *Sei $t > 0$. Dann gilt für die zu $P^{\mathscr{H}_1}$ und $P^{\mathscr{H}_t}$ gehörenden Lévy-Maße $\Pi_{\mathscr{H}_1}$, $\Pi_{\mathscr{H}_t}$ und momenterzeugenden Funktionen $m_{\mathscr{H}_1}(\alpha)$, $m_{\mathscr{H}_t}(\alpha)$:*

(i) $\Pi_{\mathscr{H}_t} = t\, \Pi_{\mathscr{H}_1} := t\, \Pi_{\mathscr{H}}$;

(ii) $m_{\mathscr{H}_t}(a) = m^t_{\mathscr{H}}(a)$, $a \in \{y \in \mathbb{R} : m^t_{\mathscr{H}}(a) < \infty\}$.

Beweis Lemma 2.13. (i) Da $\mathscr{H}$ ein Subordinator ist, erhält man mit den Ausführungen in Abschnitt 1.5 für $\lambda \geq 0$ und $t > 0$

$$Ee^{-\lambda \mathscr{H}_t} = e^{-t\Phi_{\mathscr{H}_1}(\lambda)}$$

mit

$$\Phi_{\mathscr{H}_1}(\lambda) = c\,\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda x})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dx).$$

Wähle nun t_0 fest und definiere $Y_t := \mathscr{H}_{t\cdot t_0}$, welches wieder einen Subordinator darstellt. Damit bekommen wir

$$Ee^{-\lambda Y_t} = \exp(-t\, \Phi_{Y_1}(\lambda)) = \exp(-t\, \Phi_{\mathscr{H}_{t_0}(\lambda)}).$$

Setzen wir $t = 1$, so gilt

$$\exp(-\Phi_{\mathscr{H}_{t_0}}(\lambda)) = Ee^{-\lambda Y_1} = Ee^{-\lambda \mathscr{H}_{t_0}} = \exp(-t_0\, \Phi_{\mathscr{H}_1}(\lambda)),$$

und das impliziert $\Phi_{\mathscr{H}_{t_0}} = t_0\, \Phi_{\mathscr{H}_1}$. Mit der Darstellung von $\Phi_{\mathscr{H}_{t_0}}$ und $\Phi_{\mathscr{H}_1}$ folgt

$$\Pi_{\mathscr{H}_{t_0}} = t_0\, \Pi_{\mathscr{H}},$$

und damit ist die Behauptung gezeigt, denn t_0 war beliebig gewählt.

(ii) Analog zu den Ausführungen nach Satz 1.4 zeigt man

$$Ee^{a\mathscr{H}_t} = (Ee^{a\mathscr{H}_1})^t$$

für $t > 0$. Mit $m_{\mathscr{H}_t}(a) = Ee^{a\mathscr{H}_t}$ für $t > 0$ folgt die Behauptung. □

Kommen wir jetzt zum Beweis von Satz 2.12:

Beweis Satz 2.12. Sei $t > 0$. Für das Lévy-Maß $\Pi_{\mathscr{H}_t}$ der unendlich teilbaren Zufallsgröße $\mathscr{H}_t$ gilt mit Lemma 2.13

$$\Pi_{\mathscr{H}_t}(\cdot) = t\,\Pi_{\mathscr{H}}(\cdot),$$

und mit Satz 2.11 und der Voraussetzung $P(\mathscr{H}_1 > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ folgt $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$. Da sich $\Pi_{\mathscr{H}}$ und $\Pi_{\mathscr{H}_t}$ nur um die Konstante t unterscheiden, ist auch $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}_t} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$. Dies wiederum impliziert mit Satz 2.11 und Definition 2.3 folgende Aussagen:

$$P(\mathscr{H}_t > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}, \quad \overline{\Pi}_{\mathscr{H}_t} \in \mathscr{L}^{(\alpha)}, \quad \lim_{u\to\infty} \frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}_t}(u)} = m_{\mathscr{H}_t}(\alpha).$$

Mit der letztgenannten Identität und Lemma 2.13 folgt nun

$$P(\mathscr{H}_t > u) \sim m_{\mathscr{H}_t}(\alpha)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}_t}(u) = m^t_{\mathscr{H}}(\alpha)\,t\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u),\ u \to \infty.$$

Dies ist der erste Teil von (2.4). Weil aber $P(\mathscr{H}_1 > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ ist, bekommt man mit Satz 2.11

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \sim \frac{P(\mathscr{H}_1 > u)}{m_{\mathscr{H}}(\alpha)},\ u \to \infty,$$

und somit

$$P(\mathscr{H}_t > u) \sim t\,m^{t-1}_{\mathscr{H}}(\alpha)\,P(\mathscr{H}_1 > u),\ u \to \infty.$$

Damit ist die erste Behauptung (2.4) bewiesen.

Für den Beweis der zweiten Behauptung muss zunächst $P(\mathscr{H}_t > u)$ für $u > 0$ nach oben abgeschätzt werden, um später den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden zu können. Dabei wird verwendet, dass $P(\mathscr{H}_t > u)$ monoton wachsend in t ist, da $\mathscr{H}$ ein Subordinator ist. $\lfloor t\rfloor$ gibt für $t > 0$ diejenige Zahl aus $\mathbb{N}_0$ an, für die $\lfloor t\rfloor \le t < \lfloor t\rfloor + 1$ gilt. Mit Lemma 2.10 in der zweiten Abschätzung folgt, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $K(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $t > 0$ und $u > 0$

$$\begin{aligned} P(\mathscr{H}_t > u) &\le P(\mathscr{H}_{\lfloor t\rfloor+1} > u) \\ &= (P^{\mathscr{H}_1})^{*(\lfloor t\rfloor+1)}((u,\infty)) \\ &\le K(\epsilon)\,(m_{\mathscr{H}}(\alpha)+\epsilon)^{\lfloor t\rfloor+1}\,P(\mathscr{H}_1 > u) \end{aligned} \tag{2.6}$$

gilt. Für den ersten Bruch aus (2.5) erhält man mit Satz 1.26 und der Definition des Erneuerungsmaßes ($\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) > 0$ wegen $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \subset \mathscr{L}^{(\alpha)}$)

$$\frac{P(\tau(u) < \infty)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} = \frac{q\,\overline{V}(u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} = \frac{q}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{H}_t > u)\, dt. \tag{2.7}$$

Mit (2.6) folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{H}_t > u)\, dt \\
&\le K(\epsilon)\, q\, \frac{P(\mathscr{H}_1 > u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} \int_0^\infty e^{-qt}\, (m_{\mathscr{H}}(\alpha)) + \epsilon)^{\lfloor t \rfloor + 1}\, dt \\
&= K(\epsilon)\, q\, \frac{P(\mathscr{H}_1 > u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} \int_0^\infty (\underbrace{m_{\mathscr{H}}(\alpha)}_{\ge 1} + \epsilon)^{\lfloor t \rfloor + 1 - t}\, (e^{-q}\, (m_{\mathscr{H}}(\alpha) + \epsilon))^t\, dt \\
&\le K(\epsilon)\, q\, \frac{P(\mathscr{H}_1 > u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\, (m_{\mathscr{H}}(\alpha) + \epsilon) \int_0^\infty (e^{-q}\, (m_{\mathscr{H}}(\alpha) + \epsilon))^t\, dt \\
&\le C < \infty,
\end{aligned}$$

weil $\epsilon > 0$ wegen der Voraussetzung $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$ so klein gewählt werden kann, dass $e^{-q}\, (m_{\mathscr{H}}(\alpha) + \epsilon) < 1$ gilt, und $\frac{P(\mathscr{H}_1 > u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}$ wegen Konvergenz für $u \to \infty$ beschränkt ist. Damit ist in (2.7) der Satz von der majorisierten Konvergenz anwendbar, und mit (2.4) folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to \infty} \frac{P(\tau(u) < \infty)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} &= q \int_0^\infty e^{-qt} \lim_{u \to \infty} \frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\, dt \\
&= q \int_0^\infty e^{-qt}\, t\, m^t_{\mathscr{H}}(\alpha)\, dt \\
&= q \int_0^\infty t\, e^{(-q + \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))t}\, dt \\
&= \frac{q}{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei die letzte Identität mit partieller Integration und der Voraussetzung

$$e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$$

folgt. Dies ist der erste Teil von (2.5). Für den zweiten Teil wird noch

$$\begin{aligned} m_V(\alpha) &= \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\, V(dy) \\ &= \int_0^\infty e^{-qt} \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\, P(\mathscr{H}_t \in dy)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-qt}\, m_{\mathscr{H}_t}(\alpha)\, dt \\ &= \int_0^\infty (e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha))^t\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{(-q+\log m_{\mathscr{H}}(\alpha))t}\, dt \\ &= \frac{1}{q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)} \end{aligned} \tag{2.9}$$

benötigt, wobei für die vierte Identität Lemma 2.13 und für die letzte wieder die Voraussetzung $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$ und damit $-q + \log m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 0$ verwendet wird. Also folgt mit (2.8) und (2.9) die Behauptung (2.5). □

2.2 Hauptresultate

In diesem Abschnitt wollen wir die Hauptresultate dieser Arbeit beweisen. Dazu benötigen wir folgende Annahmen, die wir teilweise auch schon früher gefordert haben:

$$X_0 = 0, \quad \lim_{t\to\infty} X_t = -\infty \ P\text{-f.s.}, \quad \Pi_X((0,\infty)) > 0. \tag{2.10}$$

Der einfachere Fall $\Pi_X((0,\infty)) = 0$ wird dann in Bemerkung 2.20 diskutiert. In den folgenden Theoremen wird noch zusätzlich vorausgesetzt, dass der Lévy-Prozess X für ein gegebenes $\alpha \geq 0$

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \tag{2.11}$$

und

$$e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1 \tag{2.12}$$

erfülle. (2.11) ist nach Satz 2.11 äquivalent zu $P^{\mathscr{H}_1} \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \subset \mathscr{L}^{(\alpha)}$. Da $\mathscr{L}^{(\alpha)}$ Verteilungen mit großen Tails enthält, eine Aufwärtsbewegung vom Prozess X gerade für Schadensauszahlung steht und die Zufallsgröße $\mathscr{H}_1$ gerade Aufwärtsbewegung von X zu temporären Maxima berücksichtigt, besagt (2.11), dass Großschadensereignissen höhere

Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Die letzte Annahme (2.12) ist im Falle $\alpha = 0$ trivial, da wegen $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ P-f.s. gerade $q > 0$ und $m_{\mathscr{H}}(0) = 1$ gelten. Annahme (2.12) können wir auch als *Nicht-Cramér-Bedingung* bezeichnen, da sie in unserem Fall hinreichend dafür ist, dass die Cramér-Bedingung nicht gilt (siehe Bemerkung 3.2).

Das nun folgende Theorem gibt Auskunft über das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u) < \infty)$ und dafür notwendige und hinreichende Kriterien, die mit Hilfe unserer Annahmen formuliert werden. Wir erweitern Satz 2.12 und zeigen unter Verwendung von (2.5), dass die Ruinwahrscheinlichkeit in $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ enthalten ist.

Theorem 2.14. *(i) Seien $\alpha \geq 0$ und die Annahmen* (2.10), (2.11) *und* (2.12) *gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(\tau(u) < \infty) &\sim \frac{q}{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \\ &\sim \frac{q}{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2\, m_{\mathscr{H}}(\alpha)}\, P(\mathscr{H}_1 > u),\; u \to \infty. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dies impliziert wiederum, dass $\overline{C}(u) := P(\tau(u) < \infty)$, $u > 0$, in $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ enthalten ist.

(ii) Besitze umgekehrt nur (2.10) *Gültigkeit und sei $\overline{C}(\cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$, so folgen daraus* (2.11) *und* (2.12) *und damit* (2.13).

Beweis. (i) Seien $\alpha \geq 0$ und die Annahmen (2.10), (2.11) und (2.12) gegeben. Dann besagt Satz 2.12

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\tau(u) < \infty)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} = \frac{q}{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2},$$

was äquivalent ist zu

$$P(\tau(u) < \infty) \sim \frac{q}{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u),\; u \to \infty.$$

Dies ist der erste Teil von (2.13), der zweite folgt mit der ersten Behauptung aus Satz 2.12:

$$t\, m_{\mathscr{H}}^t(\alpha)\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \sim t\, m_{\mathscr{H}}^{t-1}(\alpha)\, P(\mathscr{H}_1 > u),\; u \to \infty.$$

Mit Satz 2.6 folgt dann $\overline{C}(\cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$.

(ii) Umgekehrt gelte nun lediglich (2.10) und es sei $\overline{C}(\cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$. Wegen

$$\overline{C}(u) = P(\tau(u) < \infty) = q\,\overline{V}(u),\; u > 0,$$

kann man $\overline{C}(\cdot)$ als Tail einer Verteilungsfunktion C auffassen, die in $\mathscr{S}^{(\alpha)}$ enthalten ist (vgl. Bemerkung 2.4). Mit Satz 2.8(i) folgt dann $m_C(\alpha) < \infty$. Es gilt aber

$$\begin{aligned}
m_C(\alpha) &= \int_{[0,\infty)} e^{\alpha u}\, C(du) \\
&= q \int_{[0,\infty)} e^{\alpha u}\, V(du) \\
&= q \int_0^\infty e^{-qt} \int_{[0,\infty)} e^{\alpha u}\, P(\mathscr{H}_t \in du)\, dt \\
&= q \int_0^\infty e^{-qt}\, m_{\mathscr{H}_t}(\alpha)\, dt \\
&= q \int_0^\infty e^{(-q+\log m_{\mathscr{H}}(\alpha))t}\, dt,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

und das letzte Integral ist genau dann endlich, wenn $-q+\log m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 0$, was äquivalent ist zu $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$. Damit gilt (2.12) und es ist mit (2.9)

$$m_C(\alpha) = q\, m_V(\alpha) = \frac{q}{q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}. \tag{2.15}$$

Bleibt nun noch (2.11) zu zeigen. Dafür sei e_q eine stochastisch unabhängige, $\mathrm{Exp}(q)$-verteilte Zufallsgröße und für $u > 0$

$$\begin{aligned}
\overline{C}_q(u) &:= \overline{C}(u) \\
&= q\, \overline{V}(u) \\
&= q \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{H}_t > u)\, dt \\
&= \int_{(0,\infty)} P(\mathscr{H}_t > u)\, P^{e_q}(dt) \\
&= \int_{(0,\infty)} E(\mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{e_q} > u\}} \mid e_q = t)\, P^{e_q}(dt) \\
&= E(\mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{e_q} > u\}}) \\
&= P(\mathscr{H}_{e_q} > u).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Nach Voraussetzung ist nun

$$C_q \in \mathscr{S}^{(\alpha)}, \tag{2.17}$$

und deshalb gilt nach Lemma 2.10

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{C_q^{*(k)}}(u)}{\overline{C}_q(u)} = k\, m_{C_q}^{k-1}(\alpha) \tag{2.18}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Aus der Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse von $\mathscr{H}$ folgt nun

$$\begin{aligned}\overline{C_q^{*(k)}}(u) &= 1 - C_q^{*(k)}(u) \\ &= 1 - (P^{\mathscr{H}_{e_q}})^{*(k)}(-\infty, u]) \\ &= 1 - P^{\sum \mathscr{H}_{e_{q,i}}}((-\infty, u]) \\ &= P(\mathscr{H}_{e_q^k} > u),\end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei $e_q^k = \sum_{i=1}^k e_{q,i}$ und die $(e_{q,i})_{i\geq 1}$ unabhängige und identisch Exp(q)-verteilte Zufallsgrößen und unabhängig von $\mathscr{H}$ seien. Damit ist e_q^k $\Gamma(k,q)$-verteilt mit zugehöriger Dichte

$$g_{k,q}(t) := \frac{q^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-qt} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)$$

(vgl. [1], S. 143f.). Gleichung (2.19) kann nun weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\overline{C_q^{*(k)}}(u) &= P(\mathscr{H}_{e_q^k} > u) \\ &= E(E(\mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_{e_q^k} > u\}} \,|\, e_q^k)) \\ &= \int_{(0,\infty)} P(\mathscr{H}_t > u)\, P(e_q^k \in dt) \\ &= \frac{q^k}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-qt} P(\mathscr{H}_t > u)\, dt.\end{aligned}$$

Zusammen mit (2.18) ergibt sich daraus

$$\lim_{u\to\infty} \frac{q^k}{(k-1)!\, \overline{C_q}(u)} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-qt} P(\mathscr{H}_t > u)\, dt = k\, m_{C_q}^{k-1}(\alpha).$$

Multipliziert man nun beide Seiten dieser Gleichung mit $\left(1 - \frac{\lambda}{q}\right)^{k-1}$, wobei

$$\lambda \in \left(q\left(1 - \frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}\right), q\left(1 + \frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}\right) \right),$$

so dass $|1-\frac{\lambda}{q}|\, m_{C_q}(\alpha) < 1$, und summiert über $k \in \mathbb{N}$, so erhält man für die rechte Seite

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} k\, m_{C_q}^{k-1}(\alpha)\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)^{k-1} &= \sum_{k\in\mathbb{N}} k\left(m_{C_q}(\alpha)\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)\right)^{k-1} \\ &= \frac{d}{dy}\sum_{k\in\mathbb{N}_0} y^k \Bigg|_{y=m_{C_q}(\alpha)\,(1-\frac{\lambda}{q})} \\ &= \frac{1}{(1-y)^2}\Bigg|_{y=m_{C_q}(\alpha)\,(1-\frac{\lambda}{q})} \\ &= \frac{1}{\left(1-m_{C_q}(\alpha)\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)\right)^2}.\end{aligned}$$

Für die linke Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{N}} \lim_{u\to\infty}\int_0^\infty \frac{\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)^{k-1} q^k\, t^{k-1}\, e^{-qt}}{(k-1)!\,\overline{C}_q(u)}\, P(\mathscr{H}_t > u)\, dt \\ &= \lim_{u\to\infty}\int_0^\infty e^{-qt}\, q\, \frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{C}_q(u)}\underbrace{\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\left(q\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)t\right)^{k-1}}{(k-1)!}\right)}_{=e^{(q-\lambda)t}} dt \\ &= \lim_{u\to\infty}\int_0^\infty q\,\frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{C}_q(u)}\, e^{-\lambda t}\, dt,\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Identität die Vertauschung von Limes und Summation mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und die Vertauschung von Summation und Integration mit dem Satz von Fubini erklärt werden kann. Dividiert man nun auf beiden Seiten durch q, so erhält man

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{C}_q(u)}\, dt = \frac{1}{q\left(1-m_{C_q}(\alpha)\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)\right)^2} \tag{2.20}$$

für $\lambda \in (q\,(1-\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}), q\,(1+\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}))$. Dies impliziert

$$\overline{C}_\lambda(u) = P(\mathscr{H}_{e_\lambda} > u) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P(\mathscr{H}_t > u)\, dt \sim c\,\overline{C}_q(u),\ \ u\to\infty,$$

mit $c = \frac{\lambda}{q\,(1-(1-\frac{\lambda}{q})\, m_{C_q}(\alpha))^2}$. Dabei erklärt sich die zweite Identität analog zu (2.16). Damit ist nach Satz 2.6 $C_\lambda \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ für $\lambda \in (q\,(1-\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}), q\,(1+\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}))$. Wähle nun

$\lambda_0 \in (q, q\,(1+\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}))$, dann gilt insbesondere $C_{\lambda_0} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$. Man führe jetzt die obigen Schritte ab (2.17) mit λ_0 anstatt q und mit $\lambda \in (\lambda_0\,(1-\frac{1}{m_{C_{\lambda_0}}(\alpha)}), \lambda_0\,(1+\frac{1}{m_{C_{\lambda_0}}(\alpha)}))$ durch, womit auch für diese λ (2.20) gilt. Dies ist eine echte Verbesserung, denn mit $\lambda_0 > q$ folgt $\frac{C_q(u)}{q} > \frac{C_{\lambda_0}(u)}{\lambda_0}$, und dies impliziert $\frac{m_{C_q}(\alpha)}{q} > \frac{m_{C_{\lambda_0}}(\alpha)}{\lambda_0}$ und damit $\lambda_0\,(1+\frac{1}{m_{C_{\lambda_0}}(\alpha)}) > q\,(1+\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)})$. Führt man dies nun iterativ fort, d.h. man wähle $\lambda_1 \in (\lambda_0, \lambda_0\,(1+\frac{1}{m_{C_{\lambda_0}}(\alpha)}))$ usw., so sieht man, dass (2.20) für $\lambda > q\,(1-\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)})$ gilt, denn die Iteration ist unbeschränkt. Um dies zu zeigen, wähle man ein $\epsilon > 0$, so dass $\lambda_0 := q\,(1+\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)}) - \epsilon > q$, und setze $\lambda_n := \lambda_{n-1}\,(1+\frac{1}{m_{C_{\lambda_{n-1}}}(\alpha)}) - \epsilon$. Dann folgt

$$0 < \lambda_0 - q = \frac{q}{m_{C_q}(\alpha)} - \epsilon < \frac{\lambda_0}{m_{C_{\lambda_0}}(\alpha)} - \epsilon = \lambda_1 - \lambda_0$$

wegen $\lambda_0 > q$. Insbesondere impliziert $0 < \lambda_1 - \lambda_0$ gerade $0 < \lambda_0 < \lambda_1$, und damit zeigt man $\lambda_1 - \lambda_0 < \lambda_2 - \lambda_1$ und induktiv fortgesetzt $\lambda_n - \lambda_{n-1} < \lambda_{n+1} - \lambda_n$. Also bekommt man $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und somit die Gültigkeit von (2.20) für alle $\lambda > q\,(1-\frac{1}{m_{C_q}(\alpha)})$.

Da $e^{-q}\,m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$ und $C_q := C$, gilt nach (2.15)

$$m_{C_q}(\alpha) = q\,m_V(\alpha) = \frac{q}{q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)},$$

und damit kann (2.20) weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\overline{C}_q(u)} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P(\mathscr{H}_t > u)\, dt &= \frac{1}{q\,\left(1-\left(1-\frac{\lambda}{q}\right)\, m_{C_q}(\alpha)\right)^2} \\
&= \frac{1}{q}\left(1 - \frac{\left(1-\frac{\lambda}{q}\right) q}{q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}\right)^{-2} \\
&= \frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q\,\left(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha) - \left(1-\frac{\lambda}{q}\right)\, q\right)^2} \\
&= \frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q\,\left(\lambda - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)\right)^2} \\
&= \frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q} \int_0^\infty t\, e^{-(\lambda - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))t}\, dt,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Identität mit partieller Integration folgt. Es gilt also

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \underbrace{\frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{C}_q(u)}}_{:=f_u(t)}\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \underbrace{\frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q}\, t\, m_{\mathscr{H}}^t(\alpha)}_{:=f(t)}\, dt$$

für $\lambda > q\,(1 - \frac{1}{m_{C_q}(\alpha)})$. Mit dem Stetigkeitssatz für Laplace-Transformierte (Feller [17], S. 422) folgt

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^x f_u(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt \tag{2.21}$$

für alle $x \geq 0$, denn $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ ist stetig für $x \geq 0$. Seien nun $x > 0$ und $h \in (0, x)$, dann gilt wegen der Monotonie von $f_u(t)$ in t und mit (2.21)

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt &= \lim_{u\to\infty}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f_u(t)\,dt\\ &\geq \limsup_{u\to\infty} f_u(x)\\ &\geq \liminf_{u\to\infty} f_u(x)\\ &\geq \lim_{u\to\infty}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f_u(t)\,dt\\ &= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt,\end{aligned}$$

und da der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\lim_{h\to 0}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0}\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt = f(x)$$

impliziert, bekommt man

$$\lim_{u\to\infty} f_u(x) = f(x) \tag{2.22}$$

für $x > 0$. Damit ist

$$\lim_{u\to\infty}\frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{C}_q(u)} = \frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q}\, t\, m_{\mathscr{H}}^t(\alpha)$$

für $t > 0$. Mit $t = 1$, der Voraussetzung $\overline{C}(\cdot) = \overline{C}_q(\cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ und Satz 2.6 folgt $P(\mathscr{H}_1 > u) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$, also (2.11) mit Satz 2.11. Um (2.13) zu erhalten, wende man schließlich (i) an. $\square$

Nachdem wir in Theorem 2.14 Aussagen über das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u) < \infty)$ formuliert haben, wollen wir im folgenden Theorem untersuchen, wie sich die Verteilungen des Overshoots $X_{\tau(u)} - u$, der Lokalzeit bei Ruin $L_{\tau(u)}$ und der letzten Leiterhöhe vor Ruin $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$ jeweils bedingt unter $\{\tau(u) < \infty\}$ für $u \to \infty$ verhalten. Im Beweis dazu benötigen wir nun auch Satz 1.43, den wir im vorherigen Kapitel mit einigem Aufwand bewiesen haben.

Theorem 2.15. *Seien $\alpha \geq 0$ und die Annahmen* (2.10), (2.11) *und* (2.12) *gegeben. Dann gilt:*

(i) Für alle $x > 0$:

$$\lim_{u\to\infty} P(X_{\tau(u)} - u > x \,|\, \tau(u) < \infty) = \overline{G}(x), \tag{2.23}$$

wobei $\overline{G}$ der Tail einer (möglicherweise defekten) Verteilungsfunktion ist:

$$\overline{G}(x) := \frac{e^{-\alpha x}}{q} \left(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha) + \int_{(x,\infty)} (e^{\alpha y} - e^{\alpha x})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) \right), \; x \geq 0; \tag{2.24}$$

(ii) für alle $t \geq 0$:

$$\lim_{u\to\infty} P(L_{\tau(u)} > t \,|\, \tau(u) < \infty) = e^{-qt}\, m^t_{\mathscr{H}}(\alpha) \left(1 + t\,(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)) \frac{\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}{q} \right); \tag{2.25}$$

(iii) für alle $z \geq 0$:

$$\lim_{u\to\infty} P(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \leq z \,|\, \tau(u) < \infty) = \frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q} \int_{[0,z]} e^{\alpha y}\, V(dy). \tag{2.26}$$

Bevor wir zum Beweis dieses Theorems kommen, müssen wir zunächst ein technisches Lemma beweisen:

Lemma 2.16. *Seien $\alpha \geq 0$ und $\nu(\cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ eine Verteilungsfunktion. Dann gilt*

$$\lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)}\, \nu(dy) = 0 \tag{2.27}$$

für $x \geq 0$. Des Weiteren ist die Konvergenz in (2.27) *gleichmäßig für $x \geq 0$.*

Beweis Lemma 2.16. Da ν eine Verteilungsfunktion auf $[0,\infty)$ ist, gilt für $z \geq 0$

$$\begin{aligned} \overline{\nu^{*(2)}}(z) &= 1 - \nu^{*(2)}(z) \\ &= 1 - \int_{[0,z]} \nu(z-y)\, \nu(dy) \\ &= \overline{\nu}(z) + \int_{[0,z]} (1 - \nu(z-y))\, \nu(dy) \\ &= \overline{\nu}(z) + \int_{[0,z]} \overline{\nu}(z-y)\, \nu(dy). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Mit $a > 0$ und $z > 2a$ kann man obiges Integral aufteilen:

$$\int_{[0,z]} \overline{\nu}(z-y)\,\nu(dy) = \left(\int_{[0,a]} + \int_{(a,z-a]} + \int_{(z-a,z]}\right) \overline{\nu}(z-y)\,\nu(dy). \tag{2.29}$$

Wendet man nun auf das letzte Integral partielle Integration an (siehe im Anhang Satz A.3), so erhält man

$$\begin{aligned}
&\int_{(z-a,z]} \overline{\nu}(z-y)\,\nu(dy) \\
&\quad = \underbrace{\overline{\nu}(0)}_{=1-\nu(0)}\ \nu(z) - \overline{\nu}(a)\,\nu(z-a) - \int_{[z-a,z)} \nu(y)\,\overline{\nu}(z-dy) \\
&\quad = \underbrace{\nu(z)}_{=1-\overline{\nu}(z)}\ -\overline{\nu}(a)\,\nu(z-a) - \underbrace{\left(\int_{(0,a]} \nu(z-y)\,\nu(dy) + \nu(0)\,\nu(z)\right)}_{=\int_{[0,a]} \nu(z-y)\,\nu(dy)} \\
&\quad = -\overline{\nu}(z) - \overline{\nu}(a)\,\nu(z-a) + \int_{[0,a]} 1 - \nu(z-y)\,\nu(dy) + \overline{\nu}(a) \\
&\quad = -\overline{\nu}(z) + \overline{\nu}(a)\,(1-\nu(z-a)) + \int_{[0,a]} \overline{\nu}(z-y)\,\nu(dy) \\
&\quad = -\overline{\nu}(z) + \overline{\nu}(a)\,\overline{\nu}(z-a) + \int_{[0,a]} \overline{\nu}(z-y)\,\nu(dy),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei in der zweiten Identität

$$\int_{[z-a,z)} \nu(y)\,\overline{\nu}(z-dy) = \int_{(0,a]} \nu(z-y)\,\nu(dy)$$

eingeht. Einsetzen von (2.30) in (2.29) und dann in (2.28) ergibt

$$\overline{\nu^{*(2)}}(z) = \left(2\int_{[0,a]} + \int_{(a,z-a]}\right) \overline{\nu}(z-y)\,\nu(dy) + \overline{\nu}(a)\,\overline{\nu}(z-a).$$

Diese Gleichung multipliziert man mit $\frac{1}{\overline{\nu}(u)}$ ($\overline{\nu}(u) > 0$ wegen $\nu \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \subset \mathscr{L}^{(\alpha)}$), setzt

$z = u + x$ und erhält mit elementaren Umformungen

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)} \, \nu(dy) \\
&= \frac{\overline{\nu^{*(2)}}(u+x)}{\overline{\nu}(u)} - 2 \int_{[0,a]} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)} \, \nu(dy) - \frac{\overline{\nu}(a)\, \overline{\nu}(u+x-a)}{\overline{\nu}(u)} \\
&\overset{u\to\infty}{\longrightarrow} 2\, e^{-\alpha x}\, m_\nu(\alpha) - 2 \int_{[0,a]} e^{\alpha(y-x)} \, \nu(dy) - e^{\alpha(a-x)}\, \overline{\nu}(a) \qquad (2.31) \\
&= 2 \int_{[0,\infty)} e^{\alpha(y-x)} \, \nu(dy) - 2 \int_{[0,a]} e^{\alpha(y-x)} \, \nu(dy) - e^{\alpha(a-x)}\, \overline{\nu}(a) \\
&= 2\, e^{-\alpha x} \int_{(a,\infty)} e^{\alpha y} \, \nu(dy) - e^{-\alpha x}\, e^{\alpha a}\, \overline{\nu}(a).
\end{aligned}
$$

Dabei besagt Satz 2.8 $\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\nu^{*(2)}}(u)}{\overline{\nu}(u)} = 2\, m_\nu(\alpha)$ und (2.1) $\overline{\nu}(u-z) \sim e^{\alpha z}\, \overline{\nu}(u)$ für $u \to \infty$. Deshalb gilt in der Konvergenzaussage von (2.31) $\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\nu^{*(2)}}(u+x)}{\overline{\nu}(u)} = 2\, e^{-\alpha x}\, m_\nu(\alpha)$. Die Konvergenz des zweiten Terms folgt mit (2.1) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz, der dritte konvergiert ebenfalls wegen (2.1) gegen den angegebenen Grenzwert. Wegen

$$
\infty > m_\nu(\alpha) = \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y} \, \nu(dy) \geq \int_{(a,\infty)} e^{\alpha y} \, \nu(dy) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0
$$

und

$$
0 \leq e^{\alpha a}\, \overline{\nu}(a) \leq \int_{(a,\infty)} e^{\alpha y} \, \nu(dy) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0
$$

konvergiert nun der letzte Ausdruck in Gleichung (2.31) für $a \to \infty$ gegen 0. Die punktweise Konvergenz ist damit gezeigt:

$$
\lim_{a\to\infty} \overbrace{\lim_{u\to\infty} \underbrace{\int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)} \, \nu(dy)}_{:=f_{u,a}(x)}}^{:=f_a(x)} = 0, \;\; x \geq 0.
$$

Um die gleichmäßige Konvergenz zu beweisen sei zunächst $x = 0$. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $a_0(\epsilon)$, so dass für alle $a \geq a_0(\epsilon)$

$$
|f_a(0)| < \epsilon.
$$

Zu diesem ϵ und beliebigem $a \geq a_0(\epsilon)$ findet man ein $u_0(\epsilon, a)$, so dass für alle $u \geq u_0(\epsilon, a)$

$$
|f_{u,a}(0) - f_a(0)| < \epsilon - |f_a(0)|.
$$

Damit ist $|f_{u,a}(0)| < \epsilon$ für alle $a \geq a_0(\epsilon)$ und $u \geq u_0(\epsilon, a)$, was wiederum

$$\int_{(a,u-a]} \overline{\nu}(u-y)\,\nu(dy) \leq \epsilon\,\overline{\nu}(u)$$

für $a \geq a_0(\epsilon)$ und $u \geq u_0(\epsilon, a)$ impliziert. Seien nun $x \geq 0$ und $u_x := u + x\,(\geq u)$, dann bekommt man

$$\begin{aligned}\int_{(a,u+x-a]} \overline{\nu}(u+x-y)\,\nu(dy) &= \int_{(a,u_x-a]} \overline{\nu}(u_x-y)\,\nu(dy)\\ &\leq \epsilon\,\overline{\nu}(u_x)\\ &\leq \epsilon\,\overline{\nu}(u)\end{aligned}$$

für $a \geq a_0(\epsilon)$ und $u_x \geq u_0(\epsilon, a)$, was insbesondere im Falle $a \geq a_0(\epsilon)$ und $u \geq u_0(\epsilon, a)$ erfüllt ist. Damit ist

$$\int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)}\,\nu(dy) \leq \epsilon$$

für alle $a \geq a_0(\epsilon)$ und $u \geq u_0(\epsilon, a)$ und die gleichmäßige Konvergenz gezeigt. □

Wir können nun den Beweis von Theorem 2.15 formulieren:

Beweis Theorem 2.15. Sei $\alpha \geq 0$ fest gewählt und die Annahmen (2.10), (2.11) und (2.12) gelten.

(i) Um diese Aussage zu zeigen verwendet man, dass

$$P(X_{\tau(u)} - u > x \,|\, \tau(u) < \infty) = \frac{P(X_{\tau(u)} - u > x, \tau(u) < \infty)}{P(\tau(u) < \infty)}$$

gilt, teilt den rechten Bruch in mehrere Summanden auf und weist jeweils die Konvergenz nach. Dabei ist

$$P(\tau(u) < \infty) = q\overline{V}(u) = \int_0^\infty e^{-qt}\,P(\mathscr{H}_t > u)\,dt > 0, \tag{2.32}$$

weil aus Annahme (2.11) $P(\mathscr{H}_1 > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$, mit Satz 2.12 $P(\mathscr{H}_t > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ und damit $P(\mathscr{H}_t > u) > 0$ folgt. Seien also $x > 0$, $a > 0$ und $u > 2a$, so dass Satz 1.43(i)

$$\begin{aligned}P(X_{\tau(u)} - u > x, \tau(u) < \infty) &= \left(\int_{[0,a]} + \int_{(a,u]}\right) \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-y)\,V(dy)\\ &=: A_u + B_u\end{aligned} \tag{2.33}$$

liefert. Wegen der Voraussetzung $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ gilt definitionsgemäß

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-z)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} = e^{\alpha z}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$, d.h. für alle $\epsilon > 0$ und $z \in \mathbb{R}$ existiert ein $u_0(\epsilon, z)$, so dass

$$\left| \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-z)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} - e^{\alpha z} \right| < \epsilon \tag{2.34}$$

für $u \geq u_0(\epsilon, z)$. Mit $\epsilon = e^{\alpha a}$ und $z = a$ erhält man für den Integranden von A_u

$$0 \leq \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-y) \leq \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) \leq \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-a) \leq 2\, e^{\alpha a}\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \tag{2.35}$$

für $u \geq u_0(e^{\alpha a}, a)$. Da diese Konstante für $y \in [0, a]$ bezüglich $V(dy)$ integrierbar ist, impliziert der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{u\to\infty} \frac{A_u}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} = \int_{[0,a]} \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-(y-x))}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\, V(dy) = \int_{[0,a]} e^{\alpha(y-x)}\, V(dy).$$

Mit (2.5) folgt dann

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{A_u}{P(\tau(u)<\infty)} &= \lim_{u\to\infty} \frac{A_u}{q\, m_V^2(\alpha)\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} \\
&= \frac{1}{q\, m_V^2(\alpha)} \int_{[0,a]} e^{\alpha(y-x)}\, V(dy) \\
&= \frac{e^{-\alpha x}}{q\, m_V^2(\alpha)} \left(m_V(\alpha) - \int_{(a,\infty)} e^{\alpha y}\, V(dy) \right) \\
&\overset{a\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-\alpha x}}{q\, m_V^2(\alpha)}\, m_V(\alpha) \\
&= \frac{e^{-\alpha x}}{q}\, (q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

wobei wegen (2.9) und (2.12) $m_V(\alpha) < \infty$ und damit

$$\int_{(a,\infty)} e^{\alpha y}\, V(dy) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.37}$$

gilt. Die letzte Identität in (2.36) folgt mit (2.9). Nun muss B_u aus (2.33) mit partieller

Integration (siehe Satz A.3 im Anhang) umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
B_u &= \int_{(a,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-y)\, V(dy) \\
&= V(u)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x) - V(a)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \int_{[a,u)} V(z)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-dz) \\
&= (1-\overline{V}(u))\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x) - (1-\overline{V}(a))\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \int_{[a,u)} V(z)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-dz) \\
&= \overline{V}(a)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \overline{V}(u)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x) + \int_{[a,u)} (1-V(z))\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-dz) \\
&= \overline{V}(a)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \overline{V}(u)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x) + \int_{(x,u+x-a]} \overline{V}(u+x-y)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\
&= \overline{V}(a)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \overline{V}(u)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) + \overline{V}(u)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) \\
&\quad - \overline{V}(u)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(x) + \int_{(x,u+x-a]} \overline{V}(u+x-y)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\
&= (\overline{V}(a)-\overline{V}(u))\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) + \underbrace{\int_{(x,u+x-a]} (\overline{V}(u+x-y)-\overline{V}(u))\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy)}_{:=C_u}
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Dividiert man den ersten Summanden durch $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)$, so erhält man mit (2.1) und $m_V(\alpha) = \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\, V(dy) < \infty$ (vgl. (2.9))

$$
\begin{aligned}
0 \le \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a)\,(\overline{V}(a)-\overline{V}(u))}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} &\le \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-a)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\,\overline{V}(a) \\
&\overset{u\to\infty}{\longrightarrow} e^{\alpha a}\,\overline{V}(a) \le \int_{[a,\infty)} e^{\alpha y}\, V(dy) \\
&\overset{a\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Wegen $P(\tau(u)<\infty) \sim q\, m_V^2(\alpha)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)$, $u\to\infty$, (nach (2.5)) gilt somit auch

$$
\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a)\,(\overline{V}(a)-\overline{V}(u))}{P(\tau(u)<\infty)} = 0.
$$

Seien nun $a > x$ und $u > 2a$, dann hat man wegen $x > 0$ insbesondere $u + x - a > a$

und damit für C_u

$$\begin{aligned}\frac{C_u}{\overline{V}(u)} &= \int_{(x,u+x-a]} \frac{\overline{V}(u+x-y)-\overline{V}(u)}{\overline{V}(u)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\ &= \left(\int_{(x,a]} + \int_{(a,u+x-a]}\right)\left(\frac{\overline{V}(u+x-y)}{\overline{V}(u)} - 1\right)\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \qquad (2.39) \\ &=: \frac{D_u}{\overline{V}(u)} + \frac{E_u}{\overline{V}(u)}.\end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ ist nach Satz 2.11 $P(\mathscr{H}_1 > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ und mit Satz 2.12

$$P(\mathscr{H}_t > u-a) \sim t\, m_{\mathscr{H}}^{t-1}(\alpha) P(\mathscr{H}_1 > u-a)$$

für $a \in \mathbb{R}$, $t > 0$ und $u \to \infty$. Deshalb folgt mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und (2.1)

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{V}(u)}{\overline{V}(u-a)} &= \int_0^\infty e^{-qt}\left(\int_0^\infty e^{-qs} \lim_{u\to\infty} \frac{P(\mathscr{H}_s > u-a)}{P(\mathscr{H}_t > u)}\,ds\right)^{-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-qt}\left(\int_0^\infty e^{-qs} \frac{s\, m_{\mathscr{H}}^{s-1}(\alpha)}{t\, m_{\mathscr{H}}^{t-1}(\alpha)} \lim_{u\to\infty} \frac{P(\mathscr{H}_1 > u-a)}{P(\mathscr{H}_1 > u)}\,ds\right)^{-1} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-qt}\left(\int_0^\infty e^{-qs} \frac{s\, m_{\mathscr{H}}^{s-1}(\alpha)}{t\, m_{\mathscr{H}}^{t-1}(\alpha)}\, e^{\alpha a}\,ds\right)^{-1} dt \\ &= e^{-\alpha a},\end{aligned}$$

also

$$\overline{V}(u) \sim e^{-\alpha a}\,\overline{V}(u-a) \qquad (2.40)$$

für $u \to \infty$. Analog zu den Überlegungen in (2.34) und (2.35) gilt damit für den Integranden des ersten Summanden in (2.39)

$$0 \le \frac{\overline{V}(u+x-y)}{\overline{V}(u)} - 1 \le \frac{\overline{V}(u-a)}{\overline{V}(u)} \le 2\,e^{\alpha a}$$

für $u \ge u_1(a)$, $u_1(a)$ hinreichend groß. Außerdem ist die Konstante $e^{\alpha a}$ für $y \in (x,\infty)$ bezüglich $\Pi_{\mathscr{H}}$ integrierbar, da nach Satz 1.4

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dx) < \infty$$

gilt. Mit Satz 1.26 und dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt dann

$$\begin{aligned}
\frac{D_u}{P(\tau(u) < \infty)} &= \frac{D_u}{q\,\overline{V}(u)} \\
&= \frac{1}{q}\int_{(x,a]} \left(\frac{\overline{V}(u+x-y)}{\overline{V}(u)} - 1\right) \Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\
&\overset{u\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{q}\int_{(x,a]} \left(e^{\alpha(y-x)} - 1\right) \Pi_{\mathscr{H}}(dy).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Für den letzten Term in (2.41) erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q}\int_{(x,a]} (e^{\alpha(y-x)} - 1)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} &\ \frac{1}{q}\int_{(x,\infty)} (e^{\alpha(y-x)} - 1)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\
&= \frac{e^{-\alpha x}}{q}\int_{(x,\infty)} (e^{\alpha y} - e^{\alpha x})\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy),
\end{aligned}$$

und dies sind die beiden letzten Terme von (2.24). Bleibt nun noch

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty} \frac{E_u}{P(\tau(u) < \infty)} = 0$$

zu zeigen. Nach (2.5) und Satz 1.26 gilt

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \sim \frac{P(\tau(u) < \infty)}{q\,m_V^2(\alpha)} = \frac{\overline{V}(u)}{m_V^2(\alpha)} \tag{2.42}$$

für $u \to \infty$ und somit analog zu den Überlegungen in (2.34) und (2.35)

$$\overline{V}(u) \le c_0\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)$$

für $u \ge u_2$, $u_2 > 0$ hinreichend groß und $c_0 > 0$ eine geeignet gewählte Konstante. Dies impliziert

$$\begin{aligned}
E_u &= \int_{(a,u+x-a]} (\overline{V}(u+x-y) - \overline{V}(u))\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\
&\le \int_{(a,u+x-a]} \overline{V}(u+x-y)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\
&\le c_o \int_{(a,u+x-a]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-y)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

für $u + x - y \ge u_2$, also für $u + x - u_2 \ge y$, und da $y < u + x - a$ ist, gilt (2.43) für $a > u_2$. Wegen $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \subset \mathscr{L}^{(\alpha)}$ findet man ein $z_0 \in (0, a)$ mit $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(z_0) > 0$ (vgl. die

Ausführungen nach Satz 2.6). Damit definiert man eine Verteilungsfunktion auf $[0,\infty)$:

$$\nu(z) := \left(1 - \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(z)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(z_0)}\right) \mathbf{1}_{\{z\geq z_0\}}.$$

Für $z > z_0$ gilt

$$\overline{\nu}(z) = \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(z)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(z_0)},$$

und man kann mit elementaren Rechnungen $\overline{\nu} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ nachweisen. Mit (2.42) und (2.43) folgt nun

$$\begin{aligned}\frac{E_u}{P(\tau(u)<\infty)} &\sim \frac{E_u}{q\,m_V^2(\alpha)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\\ &\leq \frac{c_o}{q\,m_V^2(\alpha)} \int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-y)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy)\\ &= \frac{c_o}{q\,m_V^2(\alpha)} \int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy)\end{aligned}$$

für $u\to\infty$, wobei der letzte Term nach Lemma 2.16 für $u\to\infty$ und $a\to\infty$ gegen 0 konvergiert. Also gilt auch

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{E_u}{P(\tau(u)<\infty)} = 0, \tag{2.44}$$

wobei die Konvergenz nach Lemma 2.16 für $x \geq 0$ sogar gleichmäßig ist. Damit haben wir Behauptung (i) gezeigt.

(ii) Zum Beweis von (2.25) wird

$$P(L_{\tau(u)} > t \mid \tau(u)<\infty) = \frac{P(L_{\tau(u)} > t, \tau(u)<\infty)}{P(\tau(u)<\infty)}$$

ausgenutzt und $P(L_{\tau(u)} > t, \tau(u) < \infty)$ umgeformt, aufgeteilt und zuletzt durch die Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u)<\infty)$ dividiert, bevor der Grenzübergang durchgeführt wird. Für die nachfolgenden Überlegungen benötigen wir noch

$$\mathcal{F}_{L_t^{-1}} := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{L_t^{-1} \leq s\} \in \mathcal{F},\, s \geq 0\},$$

die *σ-Algebra der L_t^{-1}-Vergangenheit* (vgl. [2], S. 12; L_t^{-1} ist nach Bemerkung 1.10(iii) Stoppzeit bezüglich $\mathcal{F}$), wobei $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ die kanonische Filtration von X darstellt.

Für $t \geq 0$ gilt nun

$$\begin{aligned}
P\left(L_{\tau(u)} > t, \tau(u) < \infty\right) &= P\left(H_t < u, \tau(u) < \infty\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_{\{H_t<u\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}}\right) \\
&= E\left(E\left(\mathbf{1}_{\{H_t<u\}}\, \mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}} \,|\, \mathcal{F}_{L_t^{-1}}\right)\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_{\{H_t<u\}}\, E\left(\mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}} \,|\, \mathcal{F}_{L_t^{-1}}\right)\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_{\{H_t<u\}}\, P_{X_{L_t^{-1}}}\left(\tau(u) < \infty\right)\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_{\{H_t<u\}}\, \left(P\left(\tau(u-\cdot) < \infty\right) \circ H_t\right)\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_{\{H_t<u\}}\, \left(P\left(\tau(u-\cdot) < \infty\right) \circ H_t\right) \mathbf{1}_{\{L_\infty>t\}}\right) \\
&= E\left(\mathbf{1}_{\{\mathscr{H}_t<u\}}\, \left(P\left(\tau(u-\cdot) < \infty\right) \circ \mathscr{H}_t\right) \mathbf{1}_{\{e_q>t\}}\right) \\
&= e^{-qt} \int_{[0,u)} P(\tau(u-y) < \infty)\, P(\mathscr{H}_t \in dy) \\
&= q\, e^{-qt} \int_{[0,u)} \overline{V}(u-y)\, P(\mathscr{H}_t \in dy),
\end{aligned}$$

wobei die vierte Identität mit der $\mathcal{F}_{L_t^{-1}}$-Messbarkeit von $\{H_t < u\} = \{X_{L_t^{-1}} < u\}$, die fünfte mit der starken Markov-Eigenschaft (Satz 1.7) bei der Stoppzeit L_t^{-1} (wegen $\{H_t < u\} \subset \{L_t^{-1} < \infty\}$ anwendbar), die sechste mit $\{H_t < u\} \subset \{L_\infty > t\}$ und die siebte mit (1.5) folgt. Sei nun $0 < 2a < u$ und schreibe für das letzte Integral

$$q\, e^{-qt} \left(\int_{[0,a]} + \int_{(a,u-a]} + \int_{(u-a,u)}\right) \overline{V}(u-y)\, P(\mathscr{H}_t \in dy).$$

Dann bekommt man mit Satz 1.26

$$\begin{aligned}
P(L_{\tau(u)} > t \,|\, \tau(u) < \infty) &= \frac{P(L_{\tau(u)} > t, \tau(u) < \infty)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&= e^{-qt} \left(\int_{[0,a]} + \int_{(a,u-a]} + \int_{(u-a,u)}\right) \frac{\overline{V}(u-y)}{\overline{V}(u)}\, P(\mathscr{H}_t \in dy),
\end{aligned} \tag{2.45}$$

wobei für den ersten Summanden mit

$$\int_{(a,\infty)} e^{\alpha y}\, P(\mathscr{H}_t \in dy) \leq m_{\mathscr{H}_t}(\alpha) < \infty,$$

dem Satz von der majorisierten Konvergenz und (2.40)

$$\begin{aligned} e^{-qt}\int_{[0,a]}\frac{\overline{V}(u-y)}{\overline{V}(u)}\,P(\mathscr{H}_t\in dy) &\overset{u\to\infty}{\longrightarrow} e^{-qt}\int_{[0,a]} e^{\alpha y}\,P(\mathscr{H}_t\in dy)\\ &= e^{-qt}\left(m_{\mathscr{H}_t}(\alpha)-\int_{(a,\infty)} e^{\alpha y}\,P(\mathscr{H}_t\in dy)\right)\\ &\overset{a\to\infty}{\longrightarrow} e^{-qt}\,m_{\mathscr{H}_t}(\alpha)\\ &= e^{-qt}\,m^t_{\mathscr{H}}(\alpha) \end{aligned} \tag{2.46}$$

folgt. Zur weiteren Untersuchung des zweiten Integrals in (2.45) muss zunächst der Integrand nach oben abgeschätzt werden. Nach Satz 2.12 gilt

$$\begin{aligned} \overline{V}(u) &= \frac{P(\tau(u)<\infty)}{q}\\ &\sim \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)\,m^2_V(\alpha)\\ &\sim \frac{P(\mathscr{H}_t>u)\,m^2_V(\alpha)}{t\,m^t_{\mathscr{H}}(\alpha)} \end{aligned} \tag{2.47}$$

für $u\to\infty$ und damit existiert (analog zum Vorgehen in (2.34) und (2.35)) eine geeignete Konstante $c_1>0$, so dass

$$\overline{V}(z)\le c_1\,P(\mathscr{H}_t>z)$$

für alle $z\ge a$, a hinreichend groß. Wegen $u>2a>0$ und $y\in(a,u-a]$ im zweiten Integral ist $u-y\ge a$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &\le e^{-qt}\int_{(a,u-a]}\frac{\overline{V}(u-y)}{\overline{V}(u)}\,P(\mathscr{H}_t\in dy)\\ &\le c_1\,e^{-qt}\int_{(a,u-a]}\frac{P(\mathscr{H}_t>u-y)}{\overline{V}(u)}\,P(\mathscr{H}_t\in dy)\\ &\sim c_1\,e^{-qt}\,\frac{t\,m^t_{\mathscr{H}}(\alpha)}{m^2_V(\alpha)}\int_{(a,u-a]}\frac{P(\mathscr{H}_t>u-y)}{P(\mathscr{H}_t>u)}\,P(\mathscr{H}_t\in dy) \end{aligned}$$

für $u\to\infty$ nach (2.47), und dieses konvergiert nach Lemma 2.16 für $u\to\infty$ und $a\to\infty$ gegen 0. Bleibt nun noch das letzte Integral in (2.45) zu untersuchen. Hier wird zunächst partiell integriert (vgl. Satz A.3 im Anhang):

$$
\begin{aligned}
&e^{-qt}\,\frac{1}{\overline{V}(u)}\int_{(u-a,u)}\overline{V}(u-y)\,P(\mathscr{H}_t\in dy)\\
&=\frac{e^{-qt}}{\overline{V}(u)}\left(\int_{(u-a,u]}\overline{V}(u-y)\,P(\mathscr{H}_t\in dy)-\overline{V}(0)\,P(\mathscr{H}_t=u)\right)\\
&=\frac{e^{-qt}}{\overline{V}(u)}\Bigg(\overline{V}(0)\,P(\mathscr{H}_t\le u)-\overline{V}(a)\,P(\mathscr{H}_t\le u-a)\\
&\quad-\int_{[u-a,u)}P(\mathscr{H}_t\le y)\,\overline{V}(u-dy)-\overline{V}(0)\,P(\mathscr{H}_t=u)\Bigg)\\
&=\frac{e^{-qt}}{\overline{V}(u)}\Bigg(\overline{V}(a)\,P(\mathscr{H}_t>u-a)-\overline{V}(0)\,P(\mathscr{H}_t>u)\\
&\quad+\int_{[u-a,u)}(1-P(\mathscr{H}_t\le y))\,\overline{V}(u-dy)-\overline{V}(0)\,P(\mathscr{H}_t=u)\Bigg)\\
&=\frac{e^{-qt}}{\overline{V}(u)}\Bigg(\overline{V}(a)\,P(\mathscr{H}_t>u-a)-\overline{V}(0)\,P(\mathscr{H}_t>u)\\
&\quad+\int_{(0,a]}P(\mathscr{H}_t>u-y)\,V(dy)-\overline{V}(0)\,P(\mathscr{H}_t=u)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Mit (2.1), (2.4), (2.13) und $\overline{V}(u)=\frac{P(\tau(u)<\infty)}{q}$ folgt nun

$$
\begin{aligned}
\frac{P(\mathscr{H}_t>u-y)}{\overline{V}(u)}&=\frac{P(\mathscr{H}_t>u-y)}{P(\mathscr{H}_1>u-y)}\,\frac{P(\mathscr{H}_1>u-y)}{P(\mathscr{H}_1>u)}\,\frac{P(\mathscr{H}_1>u)}{\overline{V}(u)}\\
&\overset{u\to\infty}{\longrightarrow}t\,m_{\mathscr{H}}^{t-1}(\alpha)\,e^{\alpha y}\,\left(q-\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)\right)^2\,m_{\mathscr{H}}(\alpha)\\
&=\underbrace{t\,m_{\mathscr{H}}^{t}(\alpha)\,\left(q-\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)\right)^2}_{:=c_t}\,e^{\alpha y}.
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Somit gilt für den letzten Summanden aus (2.48) und $\epsilon>0$

$$
\begin{aligned}
0&\le e^{-qt}\,\overline{V}(0)\,\frac{P(\mathscr{H}_t=u)}{\overline{V}(u)}\\
&\le e^{-qt}\,\overline{V}(0)\,\left(\frac{P(\mathscr{H}_t>u-\epsilon)}{\overline{V}(u)}-\frac{P(\mathscr{H}_t>u)}{\overline{V}(u)}\right)\\
&\overset{u\to\infty}{\longrightarrow}e^{-qt}\,\overline{V}(0)\,\left(c_t\,e^{\alpha\epsilon}-c_t\right)\\
&\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}
$$

Zusammen mit (2.49) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt also für den letzten Ausdruck in (2.48)

$$\begin{aligned} & e^{-qt}\Bigg(\overline{V}(a)\,\frac{P(\mathscr{H}_t > u-a)}{\overline{V}(u)} - \underbrace{\overline{V}(0)}_{=V((0,\infty))}\,\frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{V}(u)} \\ & \qquad + \int_{(0,a]} \frac{P(\mathscr{H}_t > u-y)}{\overline{V}(u)}\,V(dy) - \overline{V}(0)\,\frac{P(\mathscr{H}_t = u)}{\overline{V}(u)}\Bigg) \\ & = e^{-qt}\Bigg(\overline{V}(a)\,\frac{P(\mathscr{H}_t > u-a)}{\overline{V}(u)} - V([0,\infty))\,\frac{P(\mathscr{H}_t > u)}{\overline{V}(u)} \\ & \qquad + \int_{[0,a]} \frac{P(\mathscr{H}_t > u-y)}{\overline{V}(u)}\,V(dy) - \overline{V}(0)\,\frac{P(\mathscr{H}_t = u)}{\overline{V}(u)}\Bigg) \\ & \overset{u\to\infty}{\longrightarrow} e^{-qt}\left(\overline{V}(a)\,c_t\,e^{\alpha a} - \frac{c_t}{q} + c_t\int_{[0,a]} e^{\alpha y}\,V(dy)\right) \\ & \overset{a\to\infty}{\longrightarrow} c_t\,e^{-qt}\left(m_V(\alpha) - \frac{1}{q}\right), \end{aligned} \tag{2.50}$$

wobei $V([0,\infty)) = \frac{1}{q}$ mit elementarer Rechnung folgt. Außerdem gilt in (2.50)

$$\lim_{a\to\infty} \overline{V}(a)\,e^{\alpha a} = 0$$

wegen (2.37) und

$$\overline{V}(a)\,e^{\alpha a} \le \int_{[a,\infty)} e^{\alpha y}\,V(dy).$$

Den Grenzwert in (2.50) kann man unter Anwendung von (2.9) noch weiter umformen:

$$\begin{aligned} c_t\,e^{-qt}\left(m_V(\alpha) - \frac{1}{q}\right) &= c_t\,e^{-qt}\left(\frac{1}{q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha)} - \frac{1}{q}\right) \\ &= c_t\,e^{-qt}\,\frac{\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}{q\,(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))} \\ &= t\,e^{-qt}\,m_{\mathscr{H}}^t(\alpha)\,(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))\,\frac{\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}{q}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung

$$\lim_{u\to\infty} P(L_{\tau(u)} > t \,|\, \tau(u) < \infty) = e^{-qt}\left(m_{\mathscr{H}}^t(\alpha) + t\,(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))\,\frac{\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}{q}\right)$$

gezeigt.

(iii) Mit Satz 1.43(ii),(iv) folgt für $z \geq 0$ und $u > z$

$$
\begin{aligned}
&P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \leq z \,\middle|\, \tau(u) < \infty\right) \\
&= \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)}\, P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \leq z, \tau(u) < \infty\right) \\
&= \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} \left(P(\tau(u) < \infty) - P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > z, \tau(u) < \infty\right)\right) \\
&= \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} \left(\int_{[0,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy) + c\, V'(u)\right. \\
&\quad \left. - \int_{(z,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy) - c\, V'(u)\right) \\
&= \int_{[0,z]} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{P(\tau(u) < \infty)}\, V(dy),
\end{aligned}
$$

wobei noch einmal daran erinnert sei, dass c den Driftkoeffizienten von X bezeichnet und $c\, V'(u)$ verschwindet, falls V' nicht existiert. Der letzte Term kann noch weiter umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
\int_{[0,z]} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{P(\tau(u) < \infty)}\, V(dy) &= \int_{[0,z]} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\, \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}{P(\tau(u) < \infty)}\, V(dy) \\
&\xrightarrow{u \to \infty} \frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q} \int_{[0,z]} e^{\alpha y}\, V(dy),
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt der Satz von der majorisierten Konvergenz, (2.1) und (2.13) eingehen. Damit ist Behauptung (iii) gezeigt und das Theorem bewiesen. $\square$

Zu diesem Theorem 2.15 wollen wir nun einige Bemerkungen formulieren:

Bemerkungen 2.17. (i) Für $\alpha = 0$ ist die in (2.26) angegebene Grenzverteilung nicht defekt, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \to \infty} \lim_{u \to \infty} P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \leq z \,\middle|\, \tau(u) < \infty\right) &= \frac{(q - \log m_{\mathscr{H}}(0))^2}{q}\, V(\infty) \\
&= \frac{(q - \log 1)^2}{q} \int_0^\infty e^{-qt}\, dt \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Für $\alpha > 0$ ist sie allerdings defekt, d.h. sie besitzt positive Wahrscheinlichkeit in ∞:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty}\lim_{u\to\infty} P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \le z \,\middle|\, \tau(u)<\infty\right) &= \frac{(q-\log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q}\int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\,V(dy) \\
&= \frac{(q-\log m_{\mathscr{H}}(\alpha))^2}{q}\, m_V(\alpha) \qquad (2.51)\\
&= \frac{1}{q\, m_V(\alpha)} < 1,
\end{aligned}$$

wobei

$$m_V(\alpha) = \frac{1}{q-\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}$$

nach (2.9) gilt. Wegen Annahme (2.11) ist nach Satz 2.12 $P(\mathscr{H}_t > \cdot) \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \subset \mathscr{L}^{(\alpha)}$ für $t > 0$. Also gilt $P(\mathscr{H}_t > y) > 0$ für $y \ge 0$ und daher $V(0) < V(\infty) = \frac{1}{q}$ und

$$m_V(\alpha) = \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\,V(dy) > V(\infty) = \frac{1}{q}.$$

Also ist die letzte Ungleichung in (2.51) streng, und somit besitzt die Grenzverteilung positive Wahrscheinlichkeit in ∞.

(ii) Für $\alpha > 0$ gilt in (2.24)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\lim_{u\to\infty} P(X_{\tau(u)} - u > x \,|\, \tau(u)<\infty) \\
&= \lim_{x\to 0}\overline{G}(x) \qquad (2.52)\\
&= 1 - \frac{1}{q}\left(\log m_{\mathscr{H}}(\alpha) - \int_{(0,\infty)} (e^{\alpha y}-1)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy)\right).
\end{aligned}$$

Um diesen Term weiter umformen zu können betrachten wir $m_{\mathscr{H}}(\alpha)$:

$$m_{\mathscr{H}}(\alpha) = \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\,P(\mathscr{H}_1 \in dy) = Ee^{\alpha\mathscr{H}_1} < \infty,$$

wobei die Endlichkeit von $m_{\mathscr{H}}(\alpha)$ mit Satz 2.8 folgt. Deshalb ist die erste Identität in Korollar 1.33 unter Verwendung von Sato [25] (Theorem 25.17, S. 165) und [6] (S. 15f.) fortsetzbar auf $\vartheta \ge -\alpha$, und wir erhalten mit $\vartheta = -\alpha$

$$\log m_{\mathscr{H}}(\alpha) = \log Ee^{\alpha\mathscr{H}_1} = \int_{(0,\infty)} (e^{\alpha y}-1)\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \alpha\, c.$$

Dies impliziert mit (2.52)

$$\lim_{x\to 0}\overline{G}(x) = 1 - \frac{\alpha\, c}{q}.$$

$1 - \lim\limits_{x\to 0} \overline{G}(x) = \frac{\alpha\, c}{q}$ ist gerade die asymptotische bedingte Wahrscheinlichkeit ($u \to \infty$) dafür, dass der Prozess über eine Grenze u „aufwärts kriecht“, falls Ruin eintritt, und diese ist im Falle $c > 0$ positiv.

(iii) Für $\alpha = 0$ hingegen gilt

$$\overline{G}(x) = \frac{q - \log 1}{q} = 1$$

für alle $x > 0$. G besitzt also nur in ∞ positive Wahrscheinlichkeit, und damit tritt Ruin für $u \to \infty$ und $\alpha = 0$ nur durch einen Sprung ein.

Für den Fall $\alpha = 0$ lässt sich die erste Aussage in Theorem 2.15 über die asymptotische Verteilung des Overshoots sogar noch verschärfen:

Theorem 2.18. *Es gelte* (2.10) *und es sei* $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(0)}$. *Dann gilt für alle* $x > 0$

$$\lim_{u\to\infty} \left| P(X_{\tau(u)} - u > x \,|\, \tau(u) < \infty) - \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} \right| = 0. \tag{2.53}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig für $x \in [\eta, \infty)$ *mit beliebigem* $\eta > 0$.

Beweis. Sei $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(0)}$, dann gilt für $x > 0$ ($P(\tau(u) < \infty) > 0$ nach (2.32))

$$\begin{aligned}
&P(X_{\tau(u)} - u > x \,|\, \tau(u) < \infty) \\
&\quad= \frac{P(X_{\tau(u)} - u > x, \tau(u) < \infty)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&\quad= \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} \int_{[0,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u + x - y)\, V(dy) \\
&\quad= \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} \int_{(0,u]} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u + x - y)\, V(dy) + \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\, V(0)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&\quad= \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\, \overline{V}(0)}{P(\tau(u) < \infty)} - \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\, \overline{V}(u)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&\qquad+ \int_{(x,u+x]} \frac{\overline{V}(u + x - y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u) < \infty)}\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\, V(0)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&\quad= \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\, V([0,\infty))}{P(\tau(u) < \infty)} - \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\, \overline{V}(u)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&\qquad+ \int_{(x,u+x]} \frac{\overline{V}(u + x - y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u) < \infty)}\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

wobei die zweite Identität mit Satz 1.43(i) und die vierte mit partieller Integration wie in (2.38) für $a = 0$ zu erklären ist. Aus (2.54) und $V([0,\infty)) = \frac{1}{q}$ folgt nun

$$\begin{aligned}\left| P(X_{\tau(u)} - u > x \,|\, \tau(u) < \infty) - \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{q\,P(\tau(u) < \infty)} \right| \\ \leq \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\,\overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)} + \int_{(x,u+x]} \frac{\overline{V}(u+x-y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy).\end{aligned} \tag{2.55}$$

Wegen

$$P(\tau(u) < \infty) = q\,\overline{V}(u) \sim \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}{q} \tag{2.56}$$

für $u \to \infty$ (nach Satz 1.26 und (2.13) mit $\alpha = 0$) gilt

$$\frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{q\,P(\tau(u)<\infty)} \sim \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}$$

für $u \to \infty$, und es genügt deshalb zu zeigen, dass die rechte Seite von (2.55) für $u \to \infty$ und $x \in [\eta, \infty)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Der erste Term konvergiert sogar für $x \geq 0$ gleichmäßig gegen 0, denn es gilt

$$0 \leq \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)\,\overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)} = \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{q} \leq \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}{q} \overset{u\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Bleibt noch die gleichmäßige Konvergenz des Integrals in (2.55) zu beweisen. Dazu seien $a > 0$ und $u > a$, und man kann das Integral als Summe schreiben:

$$\left(\int_{(x,u+x-a]} + \int_{(u+x-a,u+x]} \right) \frac{\overline{V}(u+x-y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy). \tag{2.57}$$

Das erste Integral in (2.57) lässt sich weiter aufteilen, und man erhält für $x \in [\eta, \infty)$ und $a > \eta > 0$

$$\begin{aligned}&\int_{(x,u+x-a]} \frac{\overline{V}(u+x-y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\ &= \left(\int_{((x\wedge a),a]} + \int_{[(x\vee a),u+x-a]} \right) \frac{\overline{V}(u+x-y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\ &\leq \int_{(\eta,a]} \frac{\overline{V}(u+\eta-y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy) + \int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{V}(u+x-y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathscr{H}}(dy).\end{aligned}$$

Der erste Summand entspricht $\frac{D_u}{P(\tau(u)<\infty)}$ an der Stelle $x = \eta$ im Beweis von Theorem 2.15 und konvergiert nach dem dort Gezeigten wegen $\alpha = 0$ für $u \to \infty$ gegen 0. Der zweite ist gerade $\frac{E_u}{P(\tau(u)<\infty)}$ im Beweis von Theorem 2.15, und nach (2.44) konvergiert dieser sogar für $x \geq 0$ gleichmäßig gegen 0. Damit konvergiert das erste Integral in (2.57) für $x \in [\eta, \infty)$, $\eta > 0$ gleichmäßig gegen 0, weil

$$\left.\frac{D_u}{P(\tau(u) < \infty)}\right|_{x=\eta}$$

unabhängig von x ist. Für das zweite Integral in (2.57) gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{(u+x-a,u+x]} \frac{\overline{V}(u+x-y) - \overline{V}(u)}{P(\tau(u) < \infty)}\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) \\
&\leq \frac{\overline{V}(0)}{P(\tau(u) < \infty)}\, (\Pi_{\mathscr{H}}(u+x) - \Pi_{\mathscr{H}}(u+x-a)) \\
&= \overline{V}(0)\, \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&\sim q\, \overline{V}(0)\, \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}
\end{aligned}$$

für $u \to \infty$ wegen (2.56). Aus (2.1) mit $\alpha = 0$ folgt die punktweise Konvergenz des letzten Terms für $u \to \infty$ und $x \geq 0$ gegen 0, d.h. insbesondere für $x = 0$ und beliebiges $\epsilon > 0$ existiert ein $u_0(\epsilon, 0) \geq 0$, so dass

$$\left|\frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-a) - \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\right| < \epsilon$$

für alle $u \geq u_0(\epsilon, 0)$ gilt. Seien nun $x \geq 0$ und $u_x := u+x \geq u$, dann hat man insbesondere

$$\left|\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u_x - a) - \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u_x)\right| < \epsilon\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u_x) \leq \epsilon\, \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)$$

für alle $u_x \geq u_0(\epsilon, 0)$. Aus $u \geq u_0(\epsilon, 0)$ folgt aber $u_x \geq u_o(\epsilon, 0)$, und somit existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $u_0(\epsilon) \geq 0$, so dass für alle $x \geq 0$ und $u \geq u_0$

$$\left|\frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u_x - a) - \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u_x)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\right| = \left|\frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}\right| < \epsilon$$

erfüllt ist, d.h.

$$\frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x-a) - \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u+x)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}$$

konvergiert für $u \to \infty$ und $x \geq 0$ gleichmäßig gegen 0. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Im Falle $\alpha = 0$ kann zusätzlich zur eben bewiesenen schärferen Aussage über die asymptotische Verteilung des Overshoots auch eine weitere über die letzte aufsteigende Leiterzeit vor Ruin gezeigt werden:

Theorem 2.19. *Es seien $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(0)}$ und (2.10) erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{z\to\infty} \lim_{u\to\infty} P\left(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z \,\middle|\, \tau(u) < \infty \right) = 0.$$

Beweis. Seien $z > 0$ und $u > 2a > 0$, dann erhält man

$$\begin{aligned}
&P\left(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z \,|\, \tau(u) < \infty \right) \\
&= \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} P\left(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z, \tau(u) < \infty \right) \\
&= \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} \left(P\left(X_{\tau(u)} = u, L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z, \tau(u) < \infty \right) \right. \\
&\quad \left. + P\left(X_{\tau(u)} > u, L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z, \tau(u) < \infty \right) \right) \\
&\le \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} \left(P\left(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty \right) \right. \\
&\quad \left. + P\left(X_{\tau(u)} > u, L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > z, \tau(u) < \infty \right) \right) \\
&= \frac{c\,V'(u)}{P(\tau(u) < \infty)} + \int_{[0,u)} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{P(\tau(u) < \infty)} V(dy; z) \\
&= \left(\int_{[0,a]} + \int_{(a,u)} \right) \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{P(\tau(u) < \infty)} V(dy; z) + \frac{c\,V'(u)}{P(\tau(u) < \infty)},
\end{aligned} \tag{2.58}$$

wobei die vorletzte Identität mit Satz 1.41 und Satz 1.43(iii) folgt, und der Term $c\,V'(u)$ für $c = 0$ verschwindet (genau dann existiert V' nicht). (2.13) mit $\alpha = 0$ besagt nun

$$P(\tau(u) < \infty) \sim \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)}{q}$$

für $u \to \infty$, was für das erste Integral in (2.58) gerade

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \int_{[0,a]} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{P(\tau(u) < \infty)} V(dy; z) &= \lim_{u\to\infty} q \int_{[0,a]} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} V(dy; z) \\
&\le \lim_{u\to\infty} q\, \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-a)}{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)} V([0,a]; z) \\
&= q\,V([0,a]; z) := q\,V(a; z)
\end{aligned}$$

impliziert. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
V(a;z) &= \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{H}_t \leq a, \mathscr{L}_t^{-1} > z)\, dt \\
&\leq \int_0^\infty e^{-qt}\, P(\mathscr{L}_t^{-1} > z)\, dt \\
&= \frac{1}{q} \int_{(0,\infty)} E\left(\mathbf{1}_{\{\mathscr{L}_t^{-1} > z\}}\right)\, P(e_q \in dt) \\
&= \frac{1}{q} \int_{(0,\infty)} E\left(\mathbf{1}_{\{\mathscr{L}_{e_q}^{-1} > z\}} \,\middle|\, e_q = t\right)\, P(e_q \in dt) \\
&= \frac{1}{q}\, E\left(E\left(\mathbf{1}_{\{\mathscr{L}_{e_q}^{-1} > z\}} \,\middle|\, e_q\right)\right) \\
&= \frac{1}{q}\, P\left(\mathscr{L}_{e_q}^{-1} > z\right) \stackrel{z\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

da $\mathscr{L}^{-1}$ und e_q definitionsgemäß nicht defekt sind. Bleiben noch die letzten beiden Summanden in (2.58) zu untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{(a,u)} \frac{\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)}{P(\tau(u) < \infty)}\, V(dy;z) + \frac{c\, V'(u)}{P(\tau(u) < \infty)} \\
&\leq \frac{1}{P(\tau(u) < \infty)} \left(\int_{(a,u)} \overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u-y)\, V(dy) + c\, V'(u)\right) \\
&= \frac{P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > a, \tau(u) < \infty\right)}{P(\tau(u) < \infty)}
\end{aligned}$$

nach Satz 1.43(iv). Mit (2.26) und Bemerkung 2.17(i) folgt nun

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > a, \tau(u) < \infty\right)}{P(\tau(u) < \infty)} &= \lim_{u\to\infty} P\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} > a \,\middle|\, \tau(u) < \infty\right) \\
&= 1 - \frac{(q - \log 1)^2}{q} \int_{[0,a]} V(dy) \\
&= 1 - q\, V(a),
\end{aligned}$$

und der letzte Term konvergiert wegen $V(\infty) = \frac{1}{q}$ für $a \to \infty$ gegen 0. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

In allen oben bewiesenen Theoremen haben wir vorausgesetzt, dass der Lévy-Prozess X nicht spektral negativ sei, also $\Pi_X((0,\infty)) > 0$ gelte. Den einfacheren Fall $\Pi_X((0,\infty)) =$

0 wollen wir deshalb zum Abschluss dieses Abschnitts in der folgenden Bemerkung kurz diskutieren.

Bemerkung 2.20. Sei $\Pi_X((0,\infty)) = 0$. Dann besitzt der Prozess X nach Satz 1.6 P-f.s. höchstens negative Sprünge, d.h. falls Ruin eintritt, so geschieht dies fast sicher nur durch „Aufwärtskriechen“, also

$$P(X_{\tau(u)} = u \,|\, \tau(u) < \infty) = 1.$$

Dies wiederum impliziert, dass der Overshoot $X_{\tau(u)} - u$ P-f.s. 0 ist für alle $u \geq 0$. Außerdem folgt mit (1.17)

$$\mathscr{H}_t = t.$$

Für die Laplace-Transformierte von $\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : X_t > u\}$ erhält man mit [6] (Theorem 1, S. 189)

$$E\left(e^{-\lambda\tau(u)}\,\mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}}\right) = e^{-u\Upsilon(\lambda)},$$

für $\lambda \geq 0$. Dabei wird die Funktion $\Upsilon : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch die Gleichung

$$-\Psi(-i\,\Upsilon(\lambda)) = \lambda$$

für $\lambda \geq 0$ mit Ψ aus der Lévy-Khintchine-Formel, und $\Upsilon(0) =: a$ ist die größte Lösung der Gleichung

$$-\Psi(-ia) = 0.$$

Für weitere Details zur Funktion Υ sei der interessierte Leser auf [6] (S.188f.) verwiesen. Mit $\lambda = 0$ ergibt sich so für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$P(\tau(u) < \infty) = e^{-ua}.$$

3 Anwendungen

In diesem Kapitel soll die Anwendung unserer in Kapitel 2 bewiesenen Resultate im Mittelpunkt stehen. Wir werden im ersten Abschnitt Sätze formulieren, die uns den Zugang zu unseren Hauptresultaten erleichtern. Dazu wollen wir äquivalente Aussagen zu unserer Annahme (2.12) zeigen und Beziehungen zwischen Π_X und $\Pi_{\mathscr{H}}$ für $\alpha > 0$ und $\alpha = 0$ angeben. Im zweiten Abschnitt werden zunächst allgemeine Überlegungen zu spektral positiven Lévy-Prozessen mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften angestellt und diese dann auf den Risikoprozess mit Brownschem Störterm angewendet.

3.1 Eigenschaften von $m_{\mathscr{H}}(\beta)$, Π_X und $\Pi_{\mathscr{H}}$

Wir wollen im folgenden Satz einige Äquivalenzbeziehungen zu Annahme (2.12) herleiten. Darin wird uns auch die momenterzeugende Funktion $Ee^{\beta X_1}$ von X_1 begegnen.

Satz 3.1. *Es gelte* (2.10)*. Dann sind für beliebiges* $\beta > 0$ *folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $Ee^{\beta X_1}$ *(ist endlich und)* < 1*;*

(ii) $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\beta) < 1$*;*

(iii) $m_V(\beta) < \infty$*;*

(iv) $\log m_{\mathscr{H}}(\beta) = \beta c + \int_{[0,\infty)}(e^{\beta y} - 1)\, \Pi_{\mathscr{H}}(dy) < q$ *mit* c *Driftkoeffizient.*

Wenn eine der obigen Aussagen gilt, so folgt

$$\frac{1}{m_V(\beta)} = q - \log m_{\mathscr{H}}(\beta) = \frac{-\log Ee^{\beta X_1}}{-\log Ee^{\beta \hat{H}_1}}. \tag{3.1}$$

Beweis. Sei $\beta > 0$ und (2.10) gelte.

(i)⇔(ii): Die Wiener-Hopf Faktorisierung des charakteristischen Exponenten (Satz 1.27 und Bemerkungen 1.29(i),(ii)) liefert auch für $\vartheta = -i\beta \notin \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Psi(-i\beta) &= -\log Ee^{\beta X_1} \\ &= \Psi_H(-i\beta)\,\Psi_{\hat{H}}(-i\beta) \\ &= \left(\log Ee^{\beta H_1}\right)\left(\log Ee^{\beta \hat{H}_1}\right) \\ &= \left(\log\left(Ee^{\beta H_1}\,\mathbf{1}_{\{L_\infty > 1\}}\right)\right)\left(\log Ee^{\beta \hat{H}_1}\right) \\ &= \left(\log\left(Ee^{\beta \mathscr{H}_1}\,\mathbf{1}_{\{e_q > 1\}}\right)\right)\left(\log Ee^{\beta \hat{H}_1}\right) \\ &= \left(\log\left(e^{-q}\,m_{\mathscr{H}}(\beta)\right)\right)\left(\log Ee^{\beta \hat{H}_1}\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei die fünfte Identität wieder mit (1.5) folgt. Nun ist $\hat{H}_1$ wegen $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ P-f.s. (laut (2.10)) nicht defekt und definitionsgemäß negativ, und dies impliziert

$$|\log Ee^{\beta \hat{H}_1}| < \infty$$

und

$$\log Ee^{\beta \hat{H}_1} < 0.$$

Dann folgt mit (3.2)

$$|\log Ee^{\beta X_1}| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad |\log\left(e^{-q} m_{\mathscr{H}}(\beta)\right)| < \infty$$

und

$$\begin{aligned} e^{-q}\,m_{\mathscr{H}}(\beta) < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \log\left(e^{-q}\,m_{\mathscr{H}}(\beta)\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\log Ee^{\beta X_1} = \left(\log\left(e^{-q}\,m_{\mathscr{H}}(\beta)\right)\right)\left(\log Ee^{\beta \hat{H}_1}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Ee^{\beta X_1} < 1. \end{aligned}$$

(ii)⇔(iii): Nach (2.9) ist

$$m_V(\beta) = \int_0^\infty \left(e^{-q}\,m_{\mathscr{H}}(\beta)\right)^t dt,$$

und dieser Term ist genau dann endlich, wenn

$$e^{-q}\,m_{\mathscr{H}}(\beta) < 1$$

gilt.

(ii)$\Leftrightarrow$(iv): Sei $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\beta) < 1$, dann ist insbesondere

$$Ee^{\beta \mathscr{H}_1} = m_{\mathscr{H}}(\beta) < \infty,$$

und deshalb gilt Korollar 1.33(i) auch für $\vartheta = -\beta < 0$ (vgl. Anmerkungen in Bemerkung 2.17(ii)):

$$-\log Ee^{\beta \mathscr{H}_1} = \int_{(0,\infty)} (1 - e^{\beta x})\, \Pi_{\mathscr{H}}(dx) - \beta c,$$

und dies ist äquivalent zu

$$\log m_{\mathscr{H}}(\beta) = \int_{(0,\infty)} (e^{\beta x} - 1)\, \Pi_{\mathscr{H}}(dx) + \beta c.$$

Die Ungleichung in (iv) und die Rückrichtung bekommt man durch einfaches Umformen:

$$e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\beta) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log m_{\mathscr{H}}(\beta) < q.$$

Ist nun eine der obigen Aussagen erfüllt, so gilt nach dem eben Gezeigten insbesondere (3.2), und zusammen mit

$$q - \log m_{\mathscr{H}}(\beta) = -\log\left(e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\beta)\right)$$

impliziert dies die zweite Identität in (3.1). Die erste Identität in (3.1) folgt mit (2.9). $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun auch zeigen, dass die Annahme (2.12) in Verbindung mit unserer Annahme (2.11) hinreichend dafür ist, dass die Cramér-Bedingung nicht erfüllt ist:

Bemerkung 3.2. Für $\alpha \geq 0$ sei $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$ (ist für $\alpha = 0$ immer erfüllt), was gemeinsam mit der Monotonie der momenterzeugenden Funktion $m_{\mathscr{H}}$ für $\nu \in (0, \alpha]$

$$e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\nu) < 1$$

und mit Satz 3.1

$$Ee^{\nu X_1} < 1$$

impliziert. Wegen $\Pi_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$ ist nach Satz 2.11 auch $P^{\mathscr{H}_1} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$, und Satz 2.8 besagt dann

$$m_{\mathscr{H}}(\nu) = \infty$$

für $\nu > \alpha$. Daraus folgt aber mit der Wiener-Hopf-Faktorisierung wie im Beweis von Satz 3.1

$$Ee^{\nu X_1} = \infty.$$

Also existiert kein $\nu > 0$ mit

$$Ee^{\nu X_1} = 1,$$

d.h. die Cramér-Bedingung gilt nicht.

Die folgenden beiden Sätze geben Auskunft über den Zusammenhang von Π_X und $\Pi_{\mathscr{H}}$. Wir wollen sie aber nur zitieren, für Beweise verweisen wir auf die Vorlage dieser Arbeit. Dabei sei für nähere Informationen zu $\overline{\Pi}_X^+$ und $\overline{\Pi}_X^-$ an Definition 1.21 und zu $\Psi_{\hat{H}}$ an Korollar 1.33 erinnert. Zunächst behandeln wir den Fall $\alpha > 0$:

Satz 3.3. *Seien $\alpha > 0$ und (2.10) erfüllt. Dann gilt*

$$\overline{\Pi}_X^+ \in \mathscr{L}^{(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{L}^{(\alpha)}.$$

Die Gültigkeit dieser Aussagen impliziert

$$\overline{\Pi}_X^+(u) \sim \Psi_{\hat{H}}(-i\alpha)\,\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)$$

für $u \to \infty$.

Beweis. [20], Proposition 5.3, S. 1781 und S. 1796/1797. □

Aus obigem Satz können wir noch ein Korollar gewinnen:

Korollar 3.4. *Seien $\alpha > 0$ und (2.10) erfüllt. Dann gilt*

$$\overline{\Pi}_X^+ \in \mathscr{S}^{(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt mit den Sätzen 2.6 und 3.3. □

Für den Fall $\alpha = 0$ definieren wir noch

$$A_-(x) := \overline{\Pi}_X^-(1) + \int_1^x \overline{\Pi}_X(y)\,dy,\ x \geq 1,$$

und

$$f(u) \asymp g(u),\ u \to \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \underset{\substack{u_0 \geq 0 \\ c \in (0,1]}}{\exists} \,:\, c \leq \frac{f(u)}{g(u)} \leq \frac{1}{c} \ \underset{u \geq u_0}{\forall}$$

mit Funktionen $f, g : [0,\infty) \to (0,\infty)$ (vgl. [6], S. 74).

Satz 3.5. *Seien* $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathscr{L}^{(0)}$ *und* (2.10) *erfüllt.*

(i) Für $\int_0^\infty \overline{\Pi}_X^-(y)\,dy = \infty$ *gilt*

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \asymp \int_{(1,\infty)} \left(\frac{y}{A_-(y)}\right) \Pi_X(u+dy),\ u \to \infty.$$

(ii) Für $\int_0^\infty \overline{\Pi}_X^-(y)\,dy < \infty$ *gilt*

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) \asymp \int_{(u,\infty)} \overline{\Pi}_X^+(y)\,dy,\ u \to \infty.$$

Beweis. [20], Proposition 5.4, S. 1782 und S. 1797-1799. □

3.2 Beispiel

3.2.1 Allgemeine Überlegungen

Wenn man die von uns gezeigten Resultate auf versicherungsmathematische Modelle anwenden möchte, so ist es sinnvoll zu fordern, dass der zugrunde liegende Lévy-Prozess X spektral positiv ist (also $\overline{\Pi}_X^- = 0$), d.h. er soll keine negativen Sprünge besitzen. Dieses deckt sich gut mit unserer Anschauung, eine Aufwärtsbewegung als Schadensauszahlung und eine Abwärtsbewegung als Prämieneinzahlung aufzufassen. Prämieneinzahlungen sollen nämlich sicher und kontinuierlich auftreten, Schadensauszahlungen hingegen als Sprünge. Außerdem soll wie schon im gesamten Verlauf dieser Arbeit

$$\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty \quad P\text{-f.s.}$$

weiter gelten, d.h. die Prämieneinzahlungen überwiegen die Schadensauszahlungen (die Versicherung möchte langfristig Gewinne erwirtschaften). Mit diesen beiden Forderungen ($\overline{\Pi}_X^- = 0$ und negative Drift), (1.18) und den Korollaren 1.46 und 1.47 erhalten wir dann

$$\hat{H}_t = -t,$$
$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\,dy = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X(y)\,dy,\ u > 0, \tag{3.3}$$
$$|EX_1| < \infty$$

und wegen der negativen Drift

$$EX_1 < 0.$$

Die Bedingung

$$\int_{(0,\infty)} (x^2 \wedge 1)\, \Pi_{\mathscr{H}}(dx) < \infty$$

aus der Lévy-Khintchine-Formel (Satz 1.4) impliziert dabei

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) < \infty$$

für alle $u > 0$. Um unsere Resultate anwenden zu können müssen wir außerdem für ein fest gewähltes $\alpha \geq 0$

$$\overline{\Pi}_X^+ \in \mathscr{S}^{(\alpha)}, \text{ falls } \alpha > 0 \text{ bzw. } \overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(0)}, \text{ falls } \alpha = 0, \tag{3.4}$$

annehmen. Mit Korollar 3.4 folgt dann auch für $\alpha > 0$

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}.$$

Betrachten wir nun den Laplace-Exponenten ψ von X, der definiert wird durch

$$Ee^{\vartheta X_t} = e^{t\psi(\vartheta)}$$

für $\vartheta \in \{z \in \mathbb{R} : Ee^{zX_t} < \infty\}$. Wenn also

$$Ee^{\vartheta X_t} < \infty$$

erfüllt ist, so kann man den charakteristischen Exponenten Ψ von X fortsetzen, und man bekommt

$$-\Psi(-i\vartheta) = \psi(\vartheta) \tag{3.5}$$

(vgl. [25], Theorem 25.17, S. 165). Dazu wollen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung zeigen:

Satz 3.6. *Es seien X wie oben beschrieben und* (3.4) *erfüllt. Dann gilt*

$$Ee^{\vartheta X_1} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta \in (-\infty, \alpha].$$

Beweis. Aus der Voraussetzung $\overline{\Pi}_X^- = 0$ (X spektral positiv) folgt $\overline{\Pi}_{-X}^+ = 0$ ($-X$ spektral negativ), und dies impliziert mit [6] (S. 188)

$$Ee^{\vartheta X_1} < \infty$$

für $\vartheta \leq 0$.

Sei nun $\vartheta \geq 0$. Dann folgt mit der Voraussetzung $\overline{\Pi}_{\mathscr{H}} \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$, Satz 2.11, Satz 2.8 und der Monotonie der momenterzeugenden Funktion

$$m_{\mathscr{H}}(\vartheta) = Ee^{\vartheta \mathscr{H}_1} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta \leq \alpha.$$

Mit der Wiener-Hopf Faktorisierung wie im Beweis von Satz 3.1 erhält man die Behauptung, denn $\log Ee^{\vartheta \hat{H}_1}$ ist für $\vartheta \geq 0$ immer endlich und somit gilt

$$\begin{aligned} Ee^{\vartheta X_1} < \infty \quad &\Leftrightarrow \quad \log Ee^{\vartheta X_1} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad \log Ee^{\vartheta H_1} = -q + \log Ee^{\vartheta \mathscr{H}_1} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad Ee^{\vartheta \mathscr{H}_1} < \infty. \end{aligned}$$

□

Da wir oben angenommen haben, dass der Prozess X spektral positiv sein soll, ist der Erwartungswert EX_1 endlich und lässt sich mit Hilfe des Laplace-Exponenten nun konkret berechnen:

Satz 3.7. *Unter den oben genannten Voraussetzungen gilt*

$$EX_1 = \lim_{x \uparrow 0} \psi'(x) := \psi'(0-). \tag{3.6}$$

Beweis. Satz 3.6 besagt gerade

$$Ee^{\vartheta X_1} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta \in (-\infty, \alpha].$$

Für $\alpha > 0$ folgt die Behauptung somit direkt aus dem Differentiationssatz für analytische Transformierte ([1], Satz 40.4, S. 205), da 0 in dem Fall innerer Punkt von $(-\infty, \alpha]$ ist. Im Falle $\alpha = 0$ impliziert der Differentiationssatz

$$\left(Ee^{\vartheta X_1}\right)' = \left(e^{\psi(\vartheta)}\right)' = \psi'(\vartheta)\, e^{\psi(\vartheta)} = E\left(X_1\, e^{\vartheta X_1}\right)$$

für $\vartheta \in (-\infty, 0)$, und der Grenzübergang $\vartheta \uparrow 0$ liefert mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz die Behauptung, da EX_1 endlich ist. □

Mit den von uns aufgestellten Annahmen lässt sich EX_1 nun konkret angeben. Lemma 1.37(ii) und $\hat{H}_t = -t$ implizieren nämlich

$$q = \lim_{\vartheta \downarrow 0} \frac{\Psi(i\vartheta)}{\hat{\Phi}(\vartheta)} = \lim_{\vartheta \downarrow 0} \frac{-\psi(-\vartheta)}{-\log Ee^{-\vartheta \hat{H}_1}} = \lim_{\vartheta \downarrow 0} \frac{-\psi(-\vartheta)}{-\vartheta} = -\psi'(0-) = -EX_1,$$

also

$$-q = EX_1 < 0. \tag{3.7}$$

In unseren Hauptresultaten haben wir für $\alpha > 0$ noch

$$e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$$

vorausgesetzt. Wegen unserer vereinfachenden Annahmen in diesem Abschnitt können wir dafür eine äquivalente Aussage zeigen. Die zweite Identität in (3.1), die wegen $m_{\mathscr{H}}(\alpha) < \infty$ auch ohne die Aussagen des Satzes gilt, besagt für $\alpha > 0$

$$q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha) = \frac{-\log E e^{\alpha X_1}}{-\log E e^{\alpha \hat{H}_1}} = \frac{-\psi(\alpha)}{\alpha} \tag{3.8}$$

und damit

$$e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha) = \frac{-\psi(\alpha)}{\alpha} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\alpha) < 0.$$

Für $\alpha = 0$ ist $e^{-q}\, m_{\mathscr{H}}(\alpha) < 1$ wegen $m_{\mathscr{H}}(0) = 1$ und $q > 0$ immer erfüllt. Mit diesen Voraussetzungen vereinfachen sich unsere in Kapitel 2 bewiesenen Hauptresultate:

Theorem 3.8. *Seien X spektral positiv, $\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty$ P-f.s., (3.4) für gegebenes $\alpha \geq 0$ erfüllt und $\psi(\alpha) < 0$, falls $\alpha > 0$. Ferner vereinbare man für $\alpha = 0$*

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \psi'(0-) = EX_1.$$

Dann gilt:

(i) $P(\tau(u) < \infty) \sim |EX_1| \left(\dfrac{\alpha}{\psi(\alpha)}\right)^2 \displaystyle\int_0^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\, dy$ *für* $u \to \infty$;

(ii) $\lim_{u\to\infty} P\left(X_{\tau(u)} - u > x \,|\, \tau(u) < \infty\right) = \overline{G}(x)$, $x > 0$, *mit*

$$\overline{G}(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{|EX_1|} \left(\frac{-\psi(x)}{\alpha} + \int_{(x,\infty)} \left(e^{\alpha y} - e^{\alpha x}\right) \overline{\Pi}_X^+(y)\, dy \right);$$

(iii) Für $t \geq 0$

$$P\left(L_{\tau(u)} > t \,|\, \tau(u) < \infty\right) = \left(1 - \frac{t\,\psi(\alpha)}{\alpha} \left(1 + \frac{\psi(\alpha)}{\alpha\, |EX_1|}\right)\right) \exp\left(\frac{\psi(\alpha)\, t}{\alpha}\right).$$

Beweis. Die Voraussetzungen dieses Theorems implizieren gemeinsam mit obigen Überlegungen die Gültigkeit von (2.10), (2.11) und (2.12).

(i) Die Behauptung folgt aus Theorem 2.14. Dabei werden (3.3), (3.7) und (3.8) verwendet.

(ii) Theorem 2.15(i) impliziert die Behauptung, wobei hier wieder (3.3), (3.7) und (3.8) eingehen.

(iii) Hier folgt die Behauptung mit Theorem 2.15(ii), (3.7), (3.8) und

$$\begin{aligned} 1 + t\,(q - \log m_{\mathscr{H}}(\alpha))\,\frac{\log m_{\mathscr{H}}(\alpha)}{q} &= 1 - t\,\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}\,\frac{\log m_{\mathscr{H}}(\alpha) - q + q}{|EX_1|} \\ &= 1 - t\,\frac{\psi(\alpha)}{\alpha}\left(1 + \frac{\psi(\alpha)}{\alpha\,|EX_1|}\right). \end{aligned}$$

□

3.2.2 Der Risikoprozess mit Brownschem Störterm

$X = \{X_t : t \geq 0\}$ sei nun ein Risikoprozess mit Brownschem Störterm, der durch

$$X_t := \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t \tag{3.9}$$

gegeben wird. Dabei seien $\sigma > 0$, $\gamma > 0$, $B = \{B_t : t \geq 0\}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung, $N = \{N_t : t \geq 0\}$ ein Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$ und Y_1, Y_2, $Y_3, \ldots$ stochastisch unabhängige, identisch verteilte, fast sicher positive Zufallsgrößen mit Verteilungsfunktion F. Außerdem seien B, N und Y_1, Y_2, $Y_3, \ldots$ stochastisch unabhängig. Die Summanden $-\gamma t$ und $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ können wieder als kumulierte sichere Prämieneinzahlung bzw. als kumulierte zufällige Schadensauszahlung (jeweils bis zum Zeitpunkt t) aufgefasst werden. Der Brownsche Störterm kann auf zwei Weisen interpretiert werden, als zusätzliche Unsicherheit bei den kumulierten Schäden oder als „Zufallskomponente" bei den eigentlich sicheren Prämieneinzahlungen (vgl. Dufresne und Gerber [11], S. 51). Für weitere Details zum klassischen Risikoprozess mit Brownschem Störterm verweisen wir auf [11].

Um die im letzten Abschnitt formulierten Resultate auf diesen Lévy-Prozess X anwenden zu können muss insbesondere

$$\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty \quad P\text{-f.s.}$$

gelten. Dies wollen wir hier nicht explizit fordern, weil es später aus einer anderen Voraussetzung folgen wird. Aber damit diese Bedingung überhaupt erfüllt sein kann, muss wegen

$$Y_1 > 0 \quad P\text{-f.s.}$$

notwendigerweise

$$EY_1 = \mu < \infty$$

gelten, was wir für den weiteren Verlauf voraussetzen wollen. Die Forderung, dass X spektral positiv sein soll, muss nicht gestellt werden, da

$$\Pi_X((-\infty, 0)) = 0$$

nach Satz 1.6 immer erfüllt ist. X besitzt nämlich wegen der P-f.s. stetigen Pfade von B und wegen $Y_i > 0$ P-f.s. nur positive Sprünge (P-f.s.). Des Weiteren gelte (3.4). Wegen der vereinbarten Voraussetzungen impliziert Satz 3.6 für $\vartheta \in (-\infty, \alpha]$

$$Ee^{\vartheta X_1} < \infty$$

und damit insbesondere

$$\psi(\vartheta) < \infty.$$

Den Laplace-Exponenten ψ wollen wir nun berechnen:

$$\begin{aligned}
e^{\psi(\vartheta)} &= Ee^{\vartheta X_1} \\
&= E \exp\left(\vartheta \sigma B_1 + \vartheta \sum_{i=1}^{N_1} Y_i - \vartheta\gamma\right) \\
&= \exp\left(-\vartheta\gamma + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\right) E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_1 = j\}} \exp\left(\vartheta \sum_{i=1}^{j} Y_i\right)\right) \\
&= \exp\left(-\vartheta\gamma + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} P\left(N_1 = j\right) \left(Ee^{\vartheta Y_1}\right)^j \\
&= \exp\left(-\vartheta\gamma + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\right) e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda\, Ee^{\vartheta Y_1}\right)^j}{j!} \\
&= \exp\left(-\vartheta\gamma + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2}\right) e^{-\lambda} \exp\left(\lambda\, Ee^{\vartheta Y_1}\right) \\
&= \exp\left(-\vartheta\gamma + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \lambda \int_{(0,\infty)} \left(e^{\vartheta y} - 1\right) F(dy)\right),
\end{aligned}$$

also

$$\psi(\vartheta) = -\vartheta\gamma + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \lambda \int_{(0,\infty)} \left(e^{\vartheta y} - 1\right) F(dy), \tag{3.10}$$

wobei die stochastische Unabhängigkeit der Prozesse in der dritten und vierten Identität und die identische Verteilung der $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ in der vierten Identität eingehen. Die Laplace-Transformierte von B_1 erhält man mit der Fourier-Transformierten $\phi_{N(\eta,\zeta^2)}$ für Normalverteilungen mit Erwartungswert η und Varianz ζ^2

$$\phi_{N(\eta,\zeta^2)}(t) = \exp\left(i\eta t - \frac{\zeta^2 t^2}{2}\right)$$

(vgl. [1], S. 282) und $t = -i\sigma\vartheta$, $\eta = EB_1 = 0$ und $\zeta^2 = VarB_1 = 1$. Der Laplace-Exponent ψ lässt sich unter Verwendung der Voraussetzung

$$EY_1 = \int_{(0,\infty)} x\, F(dx) = \mu \in (0,\infty)$$

und der Abschätzung

$$0 \leq \int_{(0,1)} x\, F(dx) \leq \int_{(0,\infty)} x\, F(dx) < \infty$$

noch weiter umformen:

$$\begin{aligned}
\psi(\vartheta) &= -\vartheta\gamma + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \lambda \int_{(0,\infty)} \left(e^{\vartheta x} - 1\right) F(dx) \\
&= -\vartheta\left(\gamma - \lambda \int_{(0,1)} x\, F(dx)\right) + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \lambda \int_{(0,\infty)} \left(e^{\vartheta x} - 1 - \vartheta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}\right) F(dx).
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.4 und (3.5) ist ψ von der Form

$$\begin{aligned}
\psi(\vartheta) &= -\Psi(-i\vartheta) \\
&= -\vartheta a + \frac{\sigma^2\vartheta^2}{2} + \int_{(0,\infty)} \left(e^{\vartheta x} - 1 - \vartheta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}\right) \Pi_X(dx),
\end{aligned}$$

und dies impliziert

$$\Pi_X(\cdot) = \lambda\, F(\cdot)$$

und

$$\overline{\Pi}_X^+(\cdot) = \overline{\Pi}_X(\cdot) = \lambda\, \overline{F}(\cdot).$$

Aus (3.3) folgt für $u > 0$

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u) = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\,dy = \lambda \int_u^\infty \overline{F}(y)\,dy = \lambda\,\mu\,\overline{F}_I(u), \tag{3.11}$$

wobei mit

$$F_I(u) := \frac{1}{\mu}\int_0^u \overline{F}(y)\,dy$$

die integrierte Tail-Verteilung und mit $\overline{F}_I(u)$ wiederum dessen Tail bezeichnet wird. Für das weitere Vorgehen wollen wir die Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha = 0$ unterscheiden.

Seien zunächst $\alpha > 0$ und nach Voraussetzung (3.4) $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$, also $F \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$. Damit ist insbesondere $F \in \mathscr{L}^{(\alpha)}$, d.h. nach (2.1) gilt

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}(u-y)}{\overline{F}(u)} = e^{\alpha y}$$

für $y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt dann für $x > 0$

$$\frac{\overline{F}\circ\log(ux)}{\overline{F}\circ\log(u)} = \frac{\overline{F}(\log u + \log x)}{\overline{F}(\log u)} \overset{u\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\alpha\log x} = x^{-\alpha},$$

d.h. $\overline{F}\circ\log$ ist von beschränkter Variation mit Index $-\alpha$ (vgl. Definition A.4 im Anhang). Mit Karamatas Theorem (Satz A.5(ii) im Anhang; $\rho = -\alpha$, $\nu = -1$) erhält man somit

$$\frac{\overline{F}\circ\log(x)}{\int_x^\infty y^{-1}\,\overline{F}\circ\log(y)\,dy} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

und nach der Substitution $\log y = z$

$$\frac{\overline{F}\circ\log(x)}{\int_{\log x}^\infty \overline{F}(z)\,dz} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \alpha,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\frac{\overline{F}(u)}{\mu\,\overline{F}_I(u)} = \frac{\overline{F}(u)}{\int_u^\infty \overline{F}(z)\,dz} \overset{u\to\infty}{\longrightarrow} \alpha. \tag{3.12}$$

Daraus folgt mit Satz 2.6

$$\overline{F}_I \in \mathscr{S}^{(\alpha)}$$

und mit Satz 2.8(i)

$$\begin{aligned}
m_{F_I}(\alpha) &= \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\, F_I(dy) \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{\alpha y}\, \overline{F}(y)\, dy \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{\alpha y} \int_{(y,\infty)} F(dx)\, dy \\
&= \frac{1}{\mu} \int_{(0,\infty)} \int_0^x e^{\alpha y}\, dy\, F(dx) \\
&= \frac{1}{\alpha\mu} \int_{(0,\infty)} \left(e^{\alpha x} - 1\right)\, F(dx) \\
&= \frac{m_F(\alpha) - 1}{\alpha\mu} < \infty
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von (3.10) bekommt man damit für den Laplace-Exponenten ψ von X in α

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha) &= -\gamma\alpha + \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \lambda \int_{(0,\infty)} \left(e^{\alpha y} - 1\right)\, F(dx) \\
&= -\gamma\alpha + \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \lambda\left(m_F(\alpha) - 1\right) \\
&= -\gamma\alpha + \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \lambda\,\mu\,\alpha\, m_{F_I}(\alpha).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Um Theorem 3.8 anwenden zu können muss $\psi(\alpha) < 0$ gelten, also

$$-\gamma\alpha + \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} + \lambda\,\mu\,\alpha\, m_{F_I}(\alpha) < 0,$$

was äquivalent ist zu

$$\rho\, m_{F_I}(\alpha) + \frac{\sigma^2\alpha}{2\gamma} < 1 \tag{3.14}$$

mit

$$\rho := \frac{\mu\lambda}{\gamma}.$$

Dies wollen wir nun voraussetzen. Wegen $\frac{\sigma^2\alpha}{2\gamma} > 0$ folgt daraus $\rho\, m_{F_I}(\alpha) < 1$, und mit

$$m_{F_I}(\alpha) = \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\, F_I(dy) \geq \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \overline{F}(y)\, dy = 1$$

([1], (A.2), S. 115) impliziert dieses

$$\frac{\mu\lambda}{\gamma} = \rho < 1. \tag{3.15}$$

Für den Erwartungswert EX_1 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} EX_1 &= E\left(\sigma B_1 + \sum_{i=1}^{N_1} Y_i - \gamma\right) \\ &= E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N_1=j\}} \sum_{i=1}^{j} Y_i\right) - \gamma \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}\, j\, \mu - \gamma \\ &= \mu\,\lambda - \gamma \\ &= \gamma\left(\frac{\mu\lambda}{\gamma} - 1\right) \\ &= \gamma\,(\rho - 1) < 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

und deshalb gilt P-f.s.

$$\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty.$$

Nun können wir Theorem 3.8 auf unser Beispiel anwenden. Dabei wollen wir uns auf die Betrachtung des asymptotischen Verhaltens der Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u) < \infty)$ für $u \to \infty$ beschränken:

Korollar 3.9. *Es seien* $\alpha > 0$ *und* X *gegeben durch* (3.9)*. Ferner seien* $EY_1 = \mu < \infty$ *und* (3.4) *und* (3.14) *erfüllt. Dann gilt*

$$\begin{aligned} P(\tau(u) < \infty) &\sim \frac{(1-\rho)\,\rho}{\left(1 - \frac{\sigma^2\alpha}{2\gamma} - \rho\, m_{F_I}(\alpha)\right)^2}\, \overline{F}_I(u) \\ &\sim \frac{(1-\rho)\,\rho}{\mu\,\alpha\left(1 - \frac{\sigma^2\alpha}{2\gamma} - \rho\, m_{F_I}(\alpha)\right)^2}\, \overline{F}(u) \end{aligned} \tag{3.17}$$

für $u \to \infty$.

Beweis. Nach dem oben Gezeigten sind die Voraussetzungen von Theorem 3.8 erfüllt, und wir erhalten

$$P(\tau(u) < \infty) \sim |EX_1| \left(\frac{\alpha}{\psi(\alpha)}\right)^2 \int_u^{\infty} \overline{\Pi}_X^{+}(y)\, dy$$

für $u \to \infty$. Den letzten Term können wir noch weiter umformen:

$$\begin{aligned}|EX_1| \left(\frac{\alpha}{\psi(\alpha)}\right)^2 \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\,dy &= \frac{\gamma\,(1-\rho)\,\alpha^2\,\lambda\,\mu}{\left(\gamma\,\alpha - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} - \lambda\,\mu\,\alpha\,m_{F_I}(\alpha)\right)^2}\,\overline{F}_I(u) \\ &= \frac{(1-\rho)\,\rho\,\alpha^2\,\gamma^2}{\gamma^2\,\alpha^2\left(1 - \frac{\sigma^2\alpha}{2\gamma} - \rho\,m_{F_I}(\alpha)\right)^2}\,\overline{F}_I(u) \\ &= \frac{(1-\rho)\,\rho}{\left(1 - \frac{\sigma^2\alpha}{2\gamma} - \rho\,m_{F_I}(\alpha)\right)^2}\,\overline{F}_I(u),\end{aligned}$$

wobei die erste Identität mit (3.11), (3.13), und (3.16) und die zweite mit (3.15) folgt. (3.12) liefert nun

$$\overline{F}(u) \sim \mu\,\alpha\,\overline{F}_I(u)$$

für $u \to \infty$, und damit ist auch der zweite Teil von(3.17) gezeigt. □

Sei nun $\alpha = 0$ und wir setzen

$$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(\cdot) = \int_\cdot^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\,dy = \lambda \int_\cdot^\infty \overline{F}(y)\,dy = \mu\,\lambda\,\overline{F}_I(\cdot) \in \mathscr{S}^{(0)} \tag{3.18}$$

voraus, es gelte also (3.4). Da der Prozess X wegen $\triangle X \geq 0$ P-f.s. spektral positiv ist, benötigen wir nur noch eine hinreichende Bedingung für die Voraussetzung

$$\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty \quad P\text{-f.s.} \tag{3.19}$$

um Theorem 3.8 anwenden zu können. Deshalb sei

$$\rho = \frac{\mu\lambda}{\gamma} < 1, \tag{3.20}$$

wobei dies nach (3.16) gerade (3.19) impliziert. Die Voraussetzung $\psi(\alpha) < 0$ muss des Weiteren nur für $\alpha > 0$ erfüllt sein. Damit können wir jetzt auch für den Fall $\alpha = 0$ eine Aussage über das asymptotische Verhalten der Ruinwahrscheinlichkeit $P(\tau(u) < \infty)$ formulieren:

Korollar 3.10. *Seien $\alpha = 0$ und X durch* (3.9) *gegeben. Außerdem existiere $EY_1 = \mu$ und* (3.4) *und* (3.20) *seien erfüllt. Dann gilt*

$$P(\tau(u) < \infty) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\,\overline{F}_I(u) \tag{3.21}$$

für $u \to \infty$.

Beweis. Nach dem oben Gezeigten sind die Voraussetzungen von Theorem 3.8 erfüllt, und unter Verwendung von (3.16), (3.18) und (3.20) ergibt sich damit die Behauptung. □

Abschließend wollen wir noch anmerken, dass (3.21) unabhängig vom Brownschen Störterm ist und somit übereinstimmt mit dem klassischen Fall ohne Brownschen Störterm.

A Anhang

A.1 Die Kompensationsformel

Für einen Poissonschen Punktprozess $z(t)$ mit Intensitätsmaß ν und Werten in $E \cup \{\gamma\}$, wobei γ ein isolierter Punkt in $E \cup \{\gamma\}$ ist, besagt die Kompensationsformel in [6] (S. 7):

Satz A.1 (Kompensationsformel). *Sei $C = \{C_t, t \geq 0\}$ ein vorhersagbarer Prozess (d.h. messbar bezüglich der von den linksseitig stetigen, adaptierten Prozessen erzeugten σ-Algebra; [6], S. 5), der Werte im Raum der nichtnegativen messbaren Funktionen auf $E \cup \{\gamma\}$ annimmt (d.h. $C_t : E \cup \{\gamma\} \to [0, \infty)$) , so dass $C_t(\gamma) = 0$ für alle $t \geq 0$. Dann gilt*

$$E\left(\sum_{0 \leq t < \infty} C_t(z(t))\right) = E\left(\int_0^\infty \int_E C_t(\epsilon)\, \nu(d\epsilon)\, dt\right).$$

A.2 Frullanis Integral

Für die Wiener-Hopf Faktorisierung benötigen wir Frullanis Integral. Wir verwenden daher aus [6] (S. 73):

Satz A.2 (Frullanis Integral). *Für $a, b > 0$ und $\hat{\lambda} > -b$ gilt*

$$a \log\left(1 + \frac{\hat{\lambda}}{b}\right) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\hat{\lambda} x}\right) a\, x^{-1}\, e^{-bx}\, dx.$$

A.3 Partielle Integration

Für die Integration mit Verteilungsfunktionen und den zugehörigen Maßen gibt es eine hilfreiche Formel, die an dieser Stelle bewiesen werden soll:

Satz A.3 (Partielle Integration)**.** *Seien $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen, F rechtsseitig stetig, G linksseitig stetig, mit den zugehörigen σ-endlichen Maßen μ_F und μ_G auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra bezeichne. Dann gilt*

$$\int_{(a,b]} G(x)\,\mu_F(dx) + \int_{[a,b)} F(y)\,\mu_G(dy) = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a)$$

für $-\infty < a \le b < \infty$.

Beweis. Wende den Produktmaßsatz (Elstrodt [12], S. 167) auf $\mu_F \otimes \mu_G(A)$ mit

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x \le b,\ a \le y < x\}$$

an. Dieser besagt zum einen

$$\begin{aligned} \mu_F \otimes \mu_G(A) &= \int_{(a,b]} \mu_G([a,x))\,\mu_F(dx) \\ &= \int_{(a,b]} G(x) - G(a)\,\mu_F(dx) \\ &= \int_{(a,b]} G(x)\,\mu_F(dx) - G(a)\,(F(b) - F(a)) \end{aligned} \tag{A.1}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \mu_F \otimes \mu_G(A) &= \int_{[a,b)} \mu_F((y,b])\,\mu_G(dy) \\ &= \int_{[a,b)} F(b) - F(y)\,\mu_G(dy) \\ &= F(b)\,(G(b) - G(a)) - \int_{[a,b)} F(y)\,\mu_G(dy). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Gleichsetzen von (A.1) und (A.2) und elementare Umformungen ergeben schließlich die Behauptung. □

A.4 Karamatas Theorem

Für unser Beispiel benötigen wir Karamatas Theorem, in dem jedoch die Voraussetzung der regulären Variation auftritt. Deshalb wollen wir zunächst nach Bingham et al. [9] (S. 18) definieren:

Definition A.4. Eine messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist *von beschränkter Variation mit Index* ρ, wenn für alle $\lambda > 0$

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \lambda^{\rho}$$

gilt.

Damit können wir nun Karamatas Theorem formulieren:

Satz A.5 (Karamatas Theorem)**.** *Sei f von regulärer Variation mit Index ρ und lokal beschränkt in $[s, \infty)$. Dann gilt:*

(i) Für $\nu \geq -(\rho + 1)$

$$\frac{x^{\nu+1} f(x)}{\int_s^x t^{\nu} f(t)\, dt} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \nu + \rho + 1;$$

(ii) für $\nu < -(\rho + 1)$

$$\frac{x^{\nu+1} f(x)}{\int_x^{\infty} t^{\nu} f(t)\, dt} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} -(\nu + \rho + 1).$$

Beweis. [9], S. 28. □

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$Im(z)$	Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum
X	$= \{X_t : t \geq 0\}$ Lévy-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$\mathcal{F}$	$= \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ kanonische Filtration bezüglich X
$\mathcal{F}_{\tau^\star}$	$= \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau^\star \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0\}$ σ-Algebra der $\tau^\star$-Vergangenheit, $\tau^\star$ Stoppzeit bezüglich X
$\mathcal{B}$	Borelsche σ-Algebra
$\lambda\!\!\lambda$	Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$
$\lambda\!\!\lambda_{\mid(-\infty,0]}(\cdot)$	$= \lambda\!\!\lambda((-\infty, 0] \cap \cdot)$
$\mathrm{Poi}(\lambda)$	Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda \in [0, \infty)$
$\mathrm{Exp}(\beta)$	Exponentialverteilung mit Parameter $\beta \in (0, \infty)$
e_q	$\mathrm{Exp}(q)$-verteilte Zufallsgröße
e_q^k	Summe k unabhängiger und identisch $\mathrm{Exp}(q)$-verteilter Zufallsgrößen
$\Gamma(a, b)$	Gammaverteilung mit Parametern a, $b \in (0, \infty)$
$\Gamma(\cdot)$	Gammafunktion
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty)$
$N^{-1}(a, b, d)$	inverse Gauß-Verteilung mit Parametern $d \in \mathbb{R}$ und $(a, b) \in \Xi_d$

Ξ_d	$= \begin{cases} (x,y);\ x \geq 0,\ y > 0 & \text{für } d > 0 \\ (x,y);\ x > 0,\ y > 0 & \text{für } d = 0 \\ (x,y);\ x \geq 0,\ y > 0 & \text{für } d > 0 \end{cases}$
K_d	modifizierte Besselsche Funktion dritter Art mit Index d
$\mathscr{L}^{(\alpha)}$	Klasse von Verteilungen (vgl. Definition 2.1)
$\mathscr{S}^{(\alpha)}$	$\subset \mathscr{L}^{(\alpha)}$ Klasse der subexponentiellen ($\alpha = 0$) bzw. faltungsäquivalenten ($\alpha > 0$) Verteilungen
$\triangle X$	$= \{\triangle X_t : t \geq 0\}$
$\triangle X_t$	$= X_t - X_{t-}$
X_{t-}	$= \lim_{s \uparrow t} X_s$
$\overline{X}$	$= \{\overline{X}_t : t \geq 0\}$ Supremumsprozess von X
$\overline{X}_t$	$= \sup\{X_s : s \in [0,t]\}$
$\overline{X} - X$	$= \{\overline{X}_t - X_t : t \geq 0\}$ reflektierter Prozess
$\underline{X}$	$= \{\underline{X}_t : t \geq 0\}$ Infimumsprozess von X
$\underline{X}_t$	$= \inf\{X_s : s \in [0,t]\}$
L	$= \{L_t : t \geq 0\}$ Lokalzeit von $\overline{X} - X$ bei 0
L_∞	$= \lim_{t \to \infty} L_t$
$\hat{L}$	$= \{\hat{L}_t : t \geq 0\}$ Lokalzeit von $\underline{X} - X$ bei 0
L^{-1}	$= \{L_t^{-1} : t \geq 0\}$ inverse Lokalzeit von L, aufsteigender Leiterzeitprozess
L_t^{-1}	$= \inf\{s \geq 0 : L_s > t\}$
L_{t-}^{-1}	$= \inf\{s \geq 0 : L_s \geq t\}$
$\hat{L}^{-1}$	$= \{\hat{L}_t^{-1} : t \geq 0\}$ inverse Lokalzeit von $\hat{L}$, absteigender Leiterzeitprozess
$\hat{L}_t^{-1}$	$= \inf\{s \geq 0 : \hat{L}_s > t\}$
H	$= \{H_t : t \geq 0\}$ aufsteigender Leiterhöhenprozess
H_t	$= X_{L_t^{-1}}$
$\hat{H}$	$= \{\hat{H}_t : t \geq 0\}$ absteigender Leiterhöhenprozess
$\hat{H}_t$	$= X_{\hat{L}_t^{-1}}$
$\mathscr{L}$	$= \{\mathscr{L}_t : t \geq 0\}$ nichtdefekte Version von L
$\mathscr{L}^{-1}$	$= \{\mathscr{L}_t^{-1} : t \geq 0\}$ nichtdefekte Version von L^{-1}
$\mathscr{H}$	$= \{\mathscr{H}_t : t \geq 0\}$ nichtdefekte Version von H

Π_X	Lévy-Maß von X
$\Pi_{\mathscr{H}}$	Lévy-Maß von $\mathscr{H}$
$\Pi_{\hat{H}}$	Lévy-Maß von $\hat{H}$
$\overline{\Pi}_X^-(u)$	$= \Pi_X((-\infty,-u))$, $u>0$
$\overline{\Pi}_X^+(u)$	$= \Pi_X((u,\infty))$, $u>0$
$\overline{\Pi}_X(u)$	$= \overline{\Pi}_X^+(u) + \overline{\Pi}_X^-(u)$, $u>0$
$\overline{\Pi}_{\mathscr{H}}(u)$	$= \Pi_{\mathscr{H}}((u,\infty))$, $u>0$
$\overline{\Pi}_{\hat{H}}(u)$	$= \Pi_{\hat{H}}((-\infty,-u))$, $u>0$
$\varphi_Y(\vartheta)$	$= Ee^{i\vartheta Y}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, charakteristische Funktion der Zufallsgröße Y
$\Psi(\vartheta)$	$= -\log Ee^{i\vartheta X_1}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, charakteristischer Exponent von X
$\Psi_H(\vartheta)$	$= -\log Ee^{i\vartheta H_1}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, charakteristischer Exponent von H
$\Psi_{\hat{H}}(\vartheta)$	$= -\log Ee^{i\vartheta \hat{H}_1}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, charakteristischer Exponent von $\hat{H}$
$\Psi_{\mathscr{H}}(\vartheta)$	$= -\log Ee^{i\vartheta \mathscr{H}_1}$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, charakteristischer Exponent von $\mathscr{H}$
$\Phi(\vartheta)$	$= -\log Ee^{-\vartheta \mathscr{H}_1}$, $\vartheta\geq 0$
$\Phi_{\mathscr{H}_t}(\vartheta)$	$= -\log Ee^{-\vartheta \mathscr{H}_t}$, $\vartheta\geq 0$
$\hat{\Phi}(\vartheta)$	$= -\log Ee^{\vartheta \hat{H}_1}$, $\vartheta\geq 0$
$\tilde{\Phi}(\vartheta)$	$= -\log Ee^{-\vartheta H_1}$, $\vartheta > 0$
$\psi(\vartheta)$	$= -\Psi(-i\vartheta) = \log Ee^{\vartheta X_1}$, $\vartheta\in\{y\in\mathbb{R}: Ee^{yX_1}<\infty\}$, Laplace-Exponent von X
$V(\cdot)$	$= \int_0^\infty P(H_t\in\cdot)\,dt = \int_0^\infty e^{-qt}\,P(\mathscr{H}_t\in\cdot)\,dt$ Erneuerungsmaß von H
$V(u)$	$= V([0,u])$, $u\geq 0$
$\overline{V}(u)$	$= \frac{1}{q} - V(u)$
$\hat{V}(\cdot)$	$= \int_0^\infty P(\hat{H}_t\in\cdot)\,dt$ Erneuerungsmaß von $\hat{H}$
$V^h(\cdot)$	$= \int_0^\infty e^{-qt}\int_{[0,\infty)} h(z)\,P(\mathscr{H}_{t-}\in\cdot, \mathscr{L}_t^{-1}\in dz)\,dt$, h beschränkte, nichtnegative und messbare Funktion
$V(\cdot;z)$	$= \int_0^\infty e^{-qt}\,P\left(\mathscr{H}_t\in\cdot, \mathscr{L}_t^{-1}>z\right)\,dt$
$m_G(a)$	$= \int_{[0,\infty)} e^{ay}\,G(dy)$ momenterzeugende Funktion eines endlichen Maßes G auf $[0,\infty)$, $a\in\mathscr{D}$
$\mathscr{D}$	$= \{k\in\mathbb{R}: \int_{[0,\infty)} e^{ku}\,G(du)<\infty\}$
$m_Y(a)$	$= m_{P^Y}(a)$, $Y\geq 0$ Zufallsgröße
$\tau(u)$	Ersteintrittszeit eines stochastischen Prozesses in (u,∞), $u>0$

$a \wedge b$	Minimum von a und b
$a \vee b$	Maximum von a und b
$f_u(x) \sim g_u(x)$, $u \to \infty$	$\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to\infty} \frac{f_u(x)}{g_u(x)} = 1$
$f(x) \asymp g(x)$, $x \to \infty$	$\Leftrightarrow \exists\, x_0 \geq 0,\ c \in (0,1] : c \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{1}{c}\ \forall x \geq x_0$
$A_-(x)$	$= \overline{\Pi}_X^-(1) + \int_1^x \overline{\Pi}_X(y)\,dy,\ x > 1$
$\overline{C}_q(u)$	$= q\overline{V}(u)$
$F_I(x)$	$= \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy$, F Verteilungsfunktion auf $[0,\infty)$, $\mu = \int_{[0,\infty)} y\,F(dy)$
$\overline{F}$	$= 1 - F$, F Verteilungsfunktion
$F^{\star(n)}$	n-fache Faltung von F, F Verteilungsfunktion
$\overset{d}{=}$	verteilungsgleich
$\overset{P}{\to}$	konvergent in Wahrscheinlichkeit

Literaturverzeichnis

[1] Alsmeyer, G. (2000). *Wahrscheinlichkeitstheorie, 2. Auflage.* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30, Universität Münster.

[2] Alsmeyer, G. (2002). *Stochastische Prozesse, Teil 1, 2. Auflage.* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 33, Universität Münster.

[3] Alsmeyer, G. (2004). *Fluktuationstheorie für Random Walks.* Skriptum zur Vorlesung Stochastische Prozesse I, gehalten an der Universität Münster im Wintersemester 2004/2005.

[4] Asmussen, S. (2001). *Ruin Probabilities.* World Scientific, Singapore.

[5] Bauer, H. (2002). *Wahrscheinlichkeitstheorie.* de Gruyter, Berlin.

[6] Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes.* Cambridge University Press.

[7] Bertoin, J. und Doney, R. (1994). Cramér's estimate for Lévy processes. *Statist. Prob. Lett.* **21**, S. 363-365.

[8] Bertoin, J. und Doney, R. (1996). Some asymptotic results for transient random walks. *Adv. in Appl. Probab.* **28**, S. 207-226.

[9] Bingham, N. H., Goldie, C. M. und Teugels, J. L. (1987). *Regular Variation.* Cambridge University Press.

[10] Chover, J., Ney, P. und Wainger, S. (1973). Degeneracy properties of subcritical branching processes. *Ann. Probab.* **1**, S. 663-673.

[11] Dufresne, F. und Gerber, H. U. (1991). Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics* **10**, S. 51-59.

[12] Elstrodt, J. (2005). *Maß- und Integrationstheorie.* Springer, Berlin.

[13] Embrechts, P. (1983). A property of the generalized inverse Gaussian distribution with some apllications. *J. Appl. Probab.* **20**, S. 537-544.

[14] Embrechts, P. und Goldie, C. M. (1982). On convolution tails. *Stochastic Process. Appl.* **13**, S. 263-278.

[15] Embrechts, P., Goldie, C. M. und Veraverbeke, N. (1979). Subexponentiality and infinite divisibility. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **49**, S. 335-347.

[16] Embrechts, P., Klüppelberg, C. und Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Springer, Berlin.

[17] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2.* Wiley, New York.

[18] Jørgensen, B. (1982). *Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution.* Lecture Notes in Statistics **9**, Springer, New York.

[19] Kesten, H. (1969). Hitting probability of single points for processes with stationary independent increments. *Memoirs of American Mathematical Society* **93**.

[20] Klüppelberg, C., Kyprianou, A. E. und Maller, R. A. (2004). Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. *Ann. Appl. Prob.* **14**, Nr. 4, S. 1766-1801.

[21] Kruglov, V. M. (1970). A Note on Infinitely Divisible Distributions. *Theory Prob. Appl.* **15**, S. 319-324.

[22] Kyprianou, A. E. (July 29, 2005). *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications.* Bisher noch unveröffentlichtes Buchmanuskript, soll erscheinen bei Springer, Berlin.

[23] Pakes, A. G. (2004). Convolution equivalence and infinite divisibility. *J. Appl. Probab.* **41**, S. 407-424.

[24] Revuz, D. und Yor, M. (1991). *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, Berlin.

[25] Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.

[26] Vigon, V. (2002). Votre Lévy ramp-t-il? *Journal of London Math. Society* **65**, S. 243-256.

[27] Watson, G. N. (1962). *Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press.

[28] Weisstein, E. W. et al. (1999). *Bounded Variation*. Mathworld, http://mathworld.wolfram.com/BoundedVariation.html.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe.

Münster, 12. September 2006

(Christian Jauer)